# Detalles matemáticos en el análisis de la escena interactiva “La espiral de Arquímedes”

La escena interactiva “La espiral de Arquímedes” introduce ésta mediante la composición de dos movimientos: uno rectilíneo uniforme y otro circular uniforme.

El movimiento rectilíneo uniforme sigue la ecuación donde es la posición inicial, es la velocidad, el tiempo y la posición en el instante considerado.

En la escena, la velocidad, una vez elegida, se mantiene constante en la simulación y está restringida a valores mayores o iguales que 0,5 (sólo por cuestiones estéticas en la animación). El tiempo se considera mayor o igual que cero. La posición inicial es seleccionable por el usuario y por defecto toma un valor negativo --queda a la izquierda de lo que será el centro de giro de coordenadas (0, 0), ubicado en el centro de la escena, y por tanto en la línea recta considerada se ubica en el semieje negativo--, así pues, también toma valores negativos.

En general,,y puede considerarse que tomen cualquier valor real y consecuentemente también podrá tomarlo. Los valores negativos en y indican una posición relativa respecto al origen considerado, en un instante anterior al considerado como inicial y en un sentido coincidente con el del semieje negativo.

El movimiento circular uniforme sigue la ecuación , donde es la velocidad angular, el tiempo y la posición angular.

En la escena la velocidad angular puede seleccionarse tanto positiva como negativa. El tiempo se ha considerado mayor o igual que cero.

En general , pueden tomar cualquier valor real y la interpretación de los signos es la usual de giro en sentido horario o anti-horario, y para igualmente al caso anterior, que sea un instante anterior o posterior al considerado como inicial.

La notación anterior se ha elegido con objeto de abordar la composición de esos dos movimientos y denotar ésta en coordenadas polares, reseñando que se está considerando

 una como distancia dirigida (puede tomar valores negativos y positivos) e igualmente es un ángulo dirigido (valores positivos y negativos)[[1]](#footnote-1) --así pues, (-2, π) representa el mismo punto que (2, 0)--.

Consecuentemente,

Eliminando obtenemos la ecuación .

Y denotando y , obtenemos la ecuación en coordenadas polares de la espiral de Arquímedes, la cual depende de dos parámetros :

, donde y .

En coordenadas cartesianas, los puntos de esta curva vienen dados por:

El análisis de esta función, o familia de funciones, nos conduce a las siguientes propiedades:

1. Pasa por el origen de coordenadas cartesiano (0, 0). Este punto se corresponde con el ángulo polar y .
2. Si , entonces , y se corresponde con una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio .
3. Si puede observarse que la variación del parámetro lo que genera es un giro de ángulo , para ello basta observar que . Consecuentemente basta continuar el análisis considerando únicamente la dependencia del parámetro , es decir, basta considerar el caso en que y, por tanto, analizar la ecuación .
4. Apoyándose en las relaciones en coordenadas polares que permiten determinar las simetrías básicas, reflejadas en la siguiente imagen:



Se comprueba que es simétrica respecto a la recta polar ( en cartesianas) ya que tanto como verifican la misma ecuación. Y, por tanto, se pueden distinguir dos ramas: una para y su simétrica que se corresponde con .



1. En base a lo indicado en los dos apartados anteriores, es simétrica respecto a la recta polar y se distinguen dos ramas: una para y la simétrica para .



1. El ángulo que forma el radio vector con la recta tangente es:

Basta tener en cuenta que:

* Radio vector
* Vector tangente

1. Las dos ramas se intersecan en los puntos que están en el eje de simetría, es decir, aquellos en los que .



1. Goodman, A. y Hirsch, L. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México 1996. p. 533 y ss. <https://books.google.es/books?id=84mjXNXuZKEC>

   Thomas, G.B. Cálculo: Varias variables. Pearson Educación, 2006. p. 714. <https://books.google.es/books?id=fcvPeAOIV-MC> [↑](#footnote-ref-1)