

# El juego del dominó y su relación con la teoría de grafos

Por Ángel Cabezudo Bueno



*Hacer y deshacer en el proceso de resolución de problemas en matemáticas requiere una actitud positiva y la necesaria motivación por parte del que las intenta aprender y de esto trata básicamente jugando al dominó en esta actividad.*

## Introducción

Presentamos una actividad formativa con el juego del dominó de 28 fichas donde se aplican las reglas ordinarias, se relaciona con los grafos y se aplican las propiedades de los caminos de Euler.

El dominó es un juego de mesa clásico que ha sido objeto de estudio en el campo de las matemáticas. En su versión más común, el juego consta de un conjunto de 28 fichas. Cada ficha está dividida en dos cuadrados, cada uno de los cuales puede estar en blanco o mostrar de uno a seis puntos. Las fichas que tienen iguales los dos valores se llaman dobles; 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5 y 6-6. Observar que cada valor del 0 al 6 aparece repetido 8 veces en el conjunto de las 28 fichas.



El juego del dominó ordinario es muy simple en sus normas y permite ser utilizado sin tener que dedicar mucho tiempo en explicar y comprender su mecanismo: formar una hilera con las fichas tal que los extremos de las piezas en contacto tengan valores iguales. La ficha doble debe colocarse perpendicularmente y por su zona media a la ficha cuyo extremo en contacto tenga su mismo valor.

Habitualmente el dominó permite que compitan enfrentados dos o cuatro jugadores.

La actividad que vamos a desarrollar no trata de [jugar en competición](#), sino hacerlo individualmente o en otro caso en pareja de forma colaborativa. No admitiremos que se puedan realizar bifurcaciones a partir de una ficha doble. En las cuestiones que se proponen al final de este documento utilizaremos el dominó de 21 fichas, sin tener en cuenta las 7 fichas dobles. Podemos resumir que **los objetivos de esta actividad son:**

- Estudiar matemáticamente algunos aspectos del juego del dominó.
- Dar a conocer al alumno el concepto de grafo.
- Establecer una representación en forma de grafo del juego del dominó, de tal forma que los problemas y soluciones que se puedan plantear en el juego se trasladen a problemas y soluciones con su grafo correspondiente.
- El alumno a partir del análisis de distintas jugadas va a poder comprender los resultados clásicos de Euler sobre la existencia de ciertos tipos de caminos que pueden darse en un grafo.

Pensamos que el material formativo que presentamos en esta obra, con el apoyo en una escena interactiva programada con [DescartesJS](#), constituye un adecuado material que pueden utilizar los estudiantes de matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria para edades comprendidas entre los 14 y los 16 años, y con la conveniente orientación del profesor: el juego es una herramienta que permite acercar al alumno a investigar casos particulares que podrán derivar en posibles generalizaciones.

## Concepto de Grafo

La **Teoría de Grafos** es una herramienta matemática con múltiples aplicaciones, y su estudio puede ayudar a los alumnos a comprender situaciones y extraer patrones en diversos contextos.

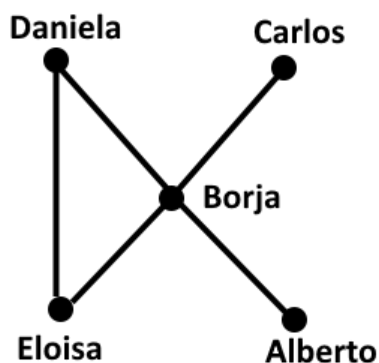


Figura 1

Un **grafo** es una estructura matemática que se utiliza para representar relaciones entre elementos de cierta naturaleza. Un grafo consta de **nodos** (también conocidos como vértices) y **aristas** (también conocidas como líneas o bordes) que conectan estos nodos.

**Grado.** El número de aristas que inciden en un nodo se denomina *grado* del nodo.

Los grafos tienen muchas aplicaciones prácticas. En el presente trabajo servirán, como veremos enseguida, para representar las conexiones de las fichas de un dominó. La figura que hemos utilizado para ejemplificar un grafo representa una red social de cinco jóvenes y las relaciones de amistad o vinculación directa entre ellos. Los nombres de los jóvenes son nodos y las aristas, las relaciones directas entre ellos:

- Alberto es amigo de Borja, que a su vez lo es también de Carlos, Daniela y Eloísa.
- Además, sabemos que Daniela y Eloísa son amigas.

En consecuencia, es fácil determinar el grado de cada nodo: Alberto y Carlos tienen grado 1, Daniela y Eloísa tienen grado 2 y Borja tiene grado 4. Así se observa muy bien cuantas amistades directas tiene cada joven.

### Grafos dirigidos y grafos no dirigidos

Un grafo se dice que es **dirigido** cuando sus aristas están orientadas en determinado sentido, por ejemplo, el grafo que representa las calles de una ciudad que tienen una determinada dirección para la circulación de vehículos. La relación entre los dos nodos es unidireccional y las aristas se representan por flechas. En el ejemplo de la *Figura 1*, la arista representa una relación de amistad, que es simétrica, se dice que es un grafo **no dirigido**, por lo que se considera que la arista es bidireccional.

### Grafo simple

Aquel grafo que a lo más presenta una arista entre dos nodos, como en el ejemplo de la *Figura 1*, se dice que es un grafo simple.

Un grafo que puede tener mas de una arista entre nodos se dice que es un multigrafo; un ejemplo es el grafo que representa los puentes de la antigua ciudad de Königsberg (Prusia), que fue motivo de estudio por Leonhard Euler

Las zonas verdes representan cuatro regiones terrestres que están atravesadas por un río que puede cruzarse por siete puentes. Los nodos son las zonas terrestres y las aristas representan puentes: ¿una persona puede realizar un paseo de tal modo que cruce cada uno de los puentes una sola vez?

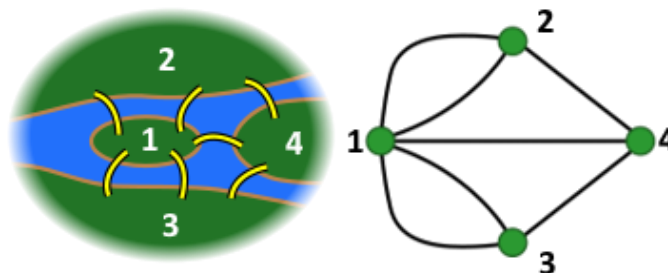


Figura 2

**Caminos.** Un camino es la sucesión de aristas no repetidas que comunican dos nodos. Por ejemplo: un camino que comunica a Alberto con Eloísa es Alberto – Borja - Eloisa. Como las aristas no están dirigidas en un determinado sentido, el camino que comunica a Eloísa con Alberto es el inverso que el que comunica a Alberto con Eloísa.

Un camino se dice **completo** si recorre todas las aristas de un grafo.

**Circuitos.** Un circuito es un camino cerrado, es decir el nodo de salida coincide con el de llegada.

**Grafo conexo.** Si para cualesquiera dos nodos de un grafo existe un camino, se dice que el grafo es conexo. El grafo del ejemplo que hemos puesto de la red social es conexo. Es decir, a través del grafo ponemos comunicar a cualesquiera dos jóvenes de la red.

## Primeras propiedades sobre grafos

Verificar en los ejemplos de las *figuras 1 y 2*

1. La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es el doble de su número de aristas (Euler). La demostración es sencilla, dado que cuando sumamos los grados de cada vértice, cada arista la hemos contando dos veces. Fíjate que la suma de los grados de un grafo siempre será un número par (el doble de aristas).
2. Un grafo siempre tiene un número par de nodos impares. Es una consecuencia de la anterior: Si la suma de grados es par y los nodos pueden ser de grado par o impar, no queda otra salida que los nodos impares sea un número par.

## Representación del Dominó como un Grafo

Podemos representar un juego de dominó como un grafo de la siguiente manera:

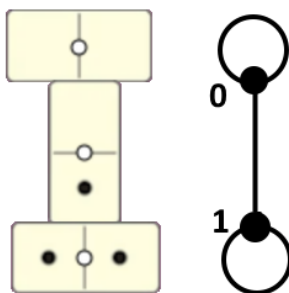


Figura 3

- Los valores en las fichas de dominó se representan como nodos en el grafo.
- Cada ficha de dominó se representa como una arista en el grafo.
- Si una ficha de dominó tiene el mismo valor en ambos extremos la llamaremos ficha doble (por ejemplo, 1-1), se representa por un bucle en el nodo correspondiente a ese valor en el grafo.

En la imagen vemos la ficha de dominó 0-1 que se representa en el grafo con una arista que conecta los nodos 0 y 1. Si alineamos las fichas 0:0, 0:1 y 1:1 podemos representar un grafo con dos nodos, que representan los valores 0 y 1 conectados con una arista que representa la ficha 0:1 y sendos bucles en cada nodo que representan las fichas 0:0 y 1:1.

Podemos observar que el grado de cada nodo es 3, dado que un bucle en un nodo representa a una asista que entra y otra que sale del nodo. El grafo es conexo.

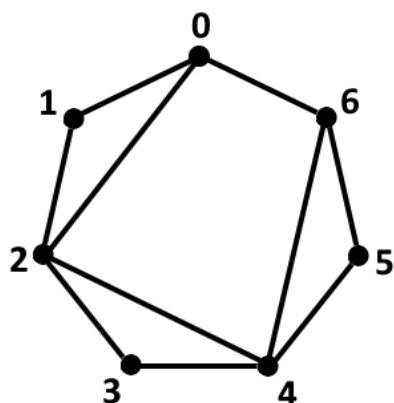


Figura 4

El grafo de la *Figura 4* representa 10 fichas de dominó (el resto de las fichas del juego se han retirado). Los nodos son los posibles valores de sus extremos (número de puntos) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Podemos observar:

- Las 10 fichas son 0:1, 0:2, 0:6, 1:2, 2:3, 2:4, 3:4, 4:5, 4:6, 5:6
- Entre las fichas no hay ninguna doble, por lo que ningún nodo lleva un bucle.
- Se trata de un grafo conexo.
- Existe al menos un camino (y su inverso) que pasa por cada una de las aristas una sola vez que sale de un punto y llega a otro punto:

0:1 - 1:2 - 2:3 - 3:4 - 4:5 - 5:6 - 6:0 - 0:2 - 2:4 - 4:6

El nodo de salida es el 0 y el de llegada es el 6. Se puede recorrer el camino inverso saliendo de 6 y llegando a 0.

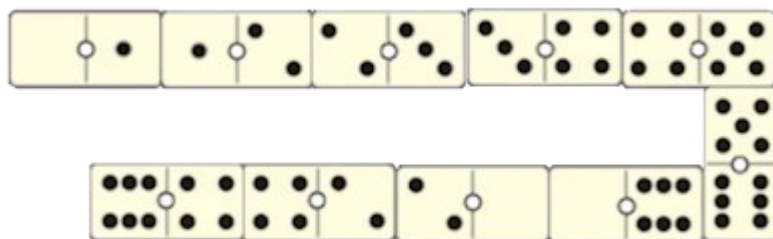


Figura 5

Probar otros caminos posibles.

- Verificar, en este caso, que no es posible encontrar un camino que recorra cada arista una sola vez y que saliendo de cualquier nodo se llegue al mismo nodo. Dicho en términos del juego, verificar que no es posible salir

con cualquier ficha y terminar con otra tal que ambas tengan el mismo valor en los extremos de la alineación. Veremos que esto tiene que ver con la paridad<sup>1</sup> del grado de sus nodos.

## Problemas y Soluciones en el Dominó y los Grafos

Al representar el dominó como un grafo, podemos trasladar los problemas y soluciones del juego a problemas y soluciones en los grafos. Por ejemplo:

- **Problema del Dominó:** ¿Es posible alinear todas las fichas de dominó completo (28 fichas) de manera que el número de cada ficha en su extremo coincida con el número de la ficha adyacente? ¿Y si retiramos las fichas dobles?
- **Problema del Grafo:** ¿Es posible trazar un camino en el grafo que pase por cada arista exactamente una vez?

Este tipo de problema se conoce como el problema del *camino euleriano* en teoría de grafos.

*De esta manera, los estudiantes pueden aprender conceptos abstractos de teoría de grafos de una manera más tangible y divertida a través del juego del dominó. Además, pueden aplicar estos conceptos para resolver problemas en el juego y viceversa.*

## Caminos y circuitos eulerianos

Leonhard Euler, en 1736, publicó un trabajo que resolvía [el problema de los puentes de Königsberg](#) y que es considerado el primer resultado de la teoría de grafos. También se considera relacionado con la topología en geometría.

Este resultado tiene que ver con dos conceptos importantes como los de camino y circuito euleriano.

Un **camino euleriano** es aquel que recorre un grafo pasando una sola vez por cada arista, pudiendo acabar el trayecto en un nodo distinto.

Un **circuito euleriano** es un camino euleriano pero el trayecto acaba en el mismo nodo en que empezó, formando un circuito cerrado.

## Teoremas de Euler sobre el trazado de grafos

### Teorema para circuitos Eulerianos:

---

<sup>1</sup> La paridad de un número entero se refiere a su atributo de ser par o impar.

Sea  $G$  un grafo o multigrafo no dirigido. Entonces  $G$  tiene un **circuito de Euler** si, y solo si, es conexo y todo vértice tiene grado par. Diremos que es un grafo Euleriano.

### Teorema para Caminos Eulerianos:

Sea  $G$  un grafo o multigrafo no dirigido. Entonces  $G$  tiene un **camino de Euler** si, y solo si, es conexo y tiene solo dos vértices de grado impar. Diremos que el grafo es semi-Euleriano.

Esto significa que puede haber un punto de inicio y un punto final distintos, y estos serán los vértices de grado impar.

*En la Figura 4, se muestra el grafo de 10 fichas de dominó, el resto se han retirado. Se ha podido formar una hilera con todas ellas, Figura 5, empezando por la ficha 0:1 y terminando en la ficha 4:6, porque en su grafo existe un camino euleriano dado que los nodos 0 y 6 son de grado impar y el resto de nodos son de grado par.*

Para obtener un circuito euleriano a partir del grafo de la Figura 4 podemos seguir añadiendo aristas, por ejemplo, convenientemente a partir de la última colocada allí, la 4:6, hasta conseguir que todos los nodos sean de grado par.

Mostramos en la Figura 6 el grafo asociado al nuevo conjunto de fichas. A las 10 aristas originales hemos añadido otras 4 más 6:1, 1:3, 3:5 y 5:0. Con lo cual conseguimos que todos los nodos tengan grado par, 4. Ahora es posible encontrar un circuito euleriano que empiece y termine en el mismo nodo. Esto se traduce en la hilera de 14 fichas formando un circuito cerrado como vemos en la Figura 7

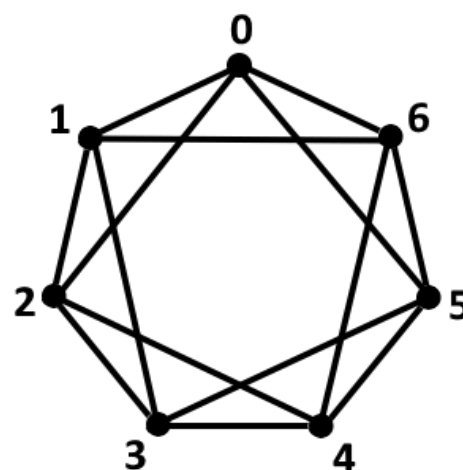


Figura 6

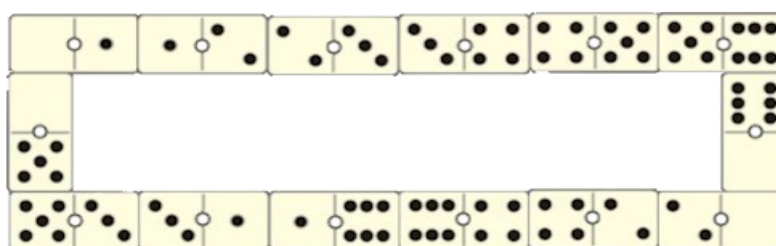


Figura 7



Obsérvese que podemos encontrar más circuitos cerrados a partir del que ya tenemos. Se refleja a la vista del grafo anterior que ahora podemos salir desde cualquiera de los nodos y encontrar un circuito euleriano, dado que todos los nodos son pares. Esto se ve muy bien en la Figura 7. Podemos empezar con la ficha 4:5 y seguir la hilera anterior encadenado fichas por la derecha o por la izquierda, así: 4:5 – 5:6 – 6:0 – ... – 3:4 o bien 5:4 – 4:3 – 3:2 – ... – 6:5.

Pero no solo podemos apoyarnos en la hilera original, también es posible con las mismas 14 fichas formar otra hilera encadenando fichas diferentes.

Empecemos por la misma ficha anterior 4:5 pero ahora podemos emparejar también con otra diferente a la 5:6 dado que disponemos de las fichas 5:0 y 5:3.

Por ejemplo, podemos conseguir cerrar la hilera con este camino:

4:5 – 5:0 – 0:2 – 2:4 – 4:6 – 6:1 – 1:0 – 0:6 – 6:5 – 5:3 – 3:1 – 1:2 – 2:3 – 3:4

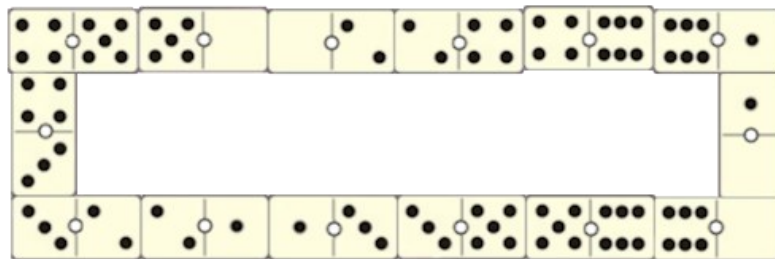


Figura 8

## Antiguo problema del dominó

Uno de los más antiguos problemas de combinatoria con el dominó pide determinar de cuantas formas pueden colocarse en hilera todas las fichas de un juego completo<sup>2</sup>, sometidas a la regla habitual: que los extremos de las fichas en contacto tengan valores iguales. El problema es interesante porque admite traducción inmediata a un problema de grafos, como ya hemos expuesto anteriormente.

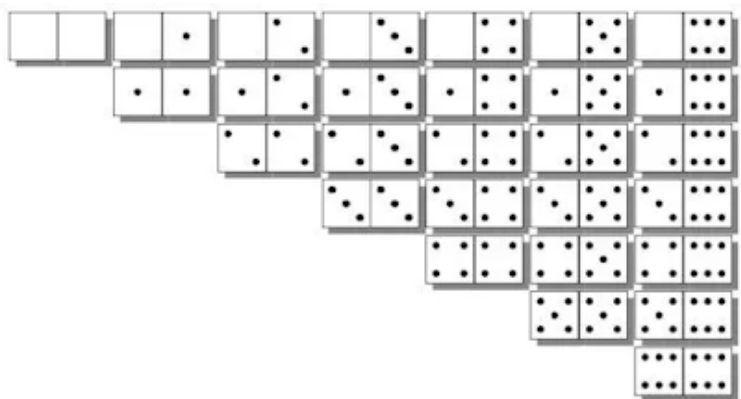


Figura 9

<sup>2</sup> Un dominó de 28 fichas se dice completo cuando tiene todos los pares desde el 0:0 al 6:6. Si faltan pares se dice que el dominó es una colección reducida.



Este número de diferentes formas es espectacularmente grande como veremos en el siguiente apartado.

## Grafo de un juego completo de dominó

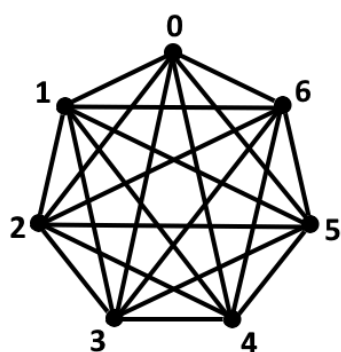


Figura 10

Si no tenemos en cuenta las fichas dobles, dominó incompleto, el grafo se puede representar por un polígono de 7 lados (heptágono) donde las aristas lo constituyen los 7 lados y todas las diagonales. Si hacemos un recuento de las aristas podemos observar que de cada vértice salen 6 aristas con lo que tenemos  $7 \times 6 = 42$  aristas que se estarían contando dos veces dado que una arista que sale de un vértice se identifica con una arista que llega a otro nodo. En consecuencia, el número de aristas en un grafo

asociado a las fichas de dominó sin las dobles es

$$\frac{7 \times 6}{2} = 21$$

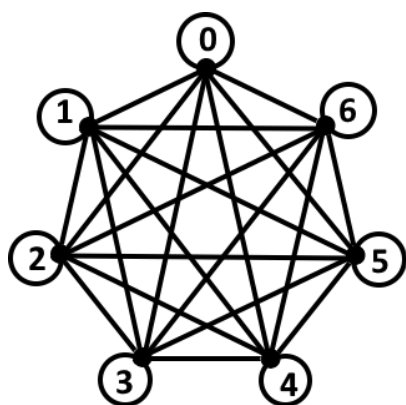


Figura 11

El número de fichas de un juego completo de dominó, donde se incluyen las siete fichas dobles, es 28, como ya sabemos.

El grafo de las 28 fichas de un dominó completo deberá incluir el bucle correspondiente a cada nodo.

Notemos que 28 es un número perfecto (suma de sus divisores  $1+2+4+7+12$ ) y como todo número perfecto también es triangular (suma de enteros consecutivos  $1+2+3+4+5+6+7$ ).

*De la observación de la Figura 9 podríamos deducir que el número de fichas de cualquier dominó completo  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$ ,  $\{0, 1, 2, 3\}$ , ...,  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , etc. es un número triangular.*

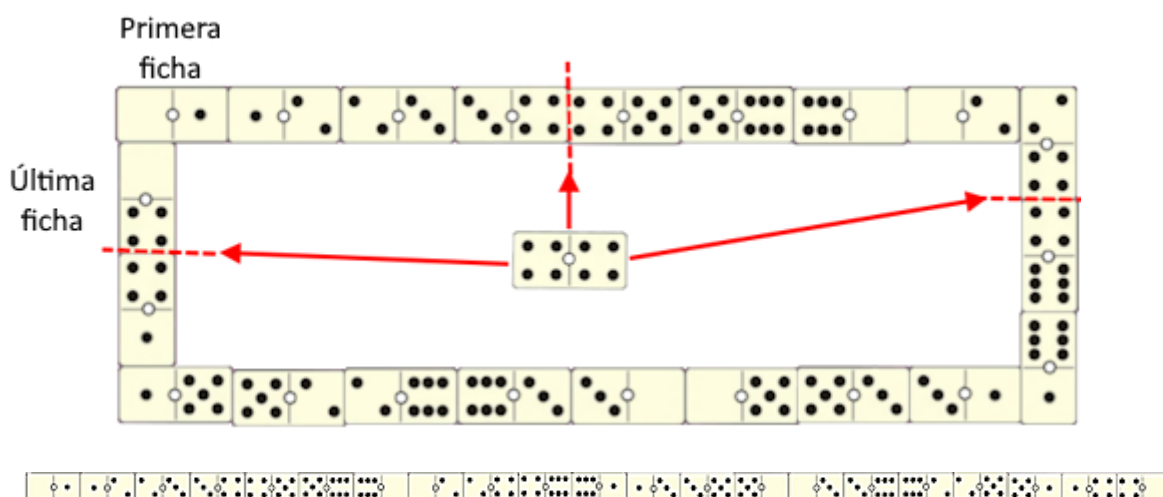
Algunas observaciones son interesantes a los efectos de formar hileras con las fichas:

- En un juego de 28 fichas, cada puntuación se repite 8 veces, tantas como el grado de cualquier nodo.

- En un grafo de 28 fichas podemos encontrar un circuito euleriano. La hilera se puede cerrar emparejando la última ficha, con la primera que deben de tener la misma puntuación en alguno de los extremos.

Obviamente, esta hilera sería equivalente a otra en que dispusiéramos las mismas fichas en línea recta en ese mismo orden, desde la primera a la última tal como se muestra en la *Figura 12*

- En un juego incompleto de 21 fichas podemos encontrar un circuito euleriano y podemos incorporar cada ficha doble en 3 lugares diferentes, allí donde contactan los extremos de dos fichas con su mismo valor. Así que las 7 fichas dobles se pueden incorporar de  $3^7 = 2.187$  maneras. Dando lugar a otros tantos circuitos eulerianos derivados.



*Figura 12*

- Dado una hilera completa de 28 fichas, como la de la *Figura 12*, podemos romperla por 28 contactos posibles, entre dos fichas emparejadas, para obtener una nueva Primera y Última ficha pudiéndose obtener 28 hileras cerradas diferentes derivadas.
- El número de soluciones del antiguo problema del dominó que enunciamos en el apartado anterior fue dado por primera vez en 1859 por el Dr. Reiss, de Francfort. Fue publicado tras su muerte, en los *Annali di Matematica*, en Milan, en 1871. La cita que puede encontrarse en <https://doi.org/10.1007/BF02419729> dice así:

*Reiss, M. Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du Domino sont susceptibles d'après la règle de ce jeu. Annali di Matematica 5, 63–120 (1871).*

Este número es impresionantemente grande ¡nada menos que  $7.959.229.931.520 = 2^{13} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$  hileras cerradas de 28 fichas que se pueden abrir por 28 sitios! El producto resultante da todas las alineaciones de las 28 fichas de dominó, contadas en un sentido y también las de sentido inverso. La factorización dada nos da cuenta de lo complicada que pudo resultar la demostración.

Antes de proponer una serie de cuestiones relacionadas con el tema que nos ocupa, pasamos a documentar la escena programada con DescartesJS, que sin duda va a ser de ayuda para visualizar y analizar las diferentes cuestiones.

### La escena de DescartesJS para la resolución de cuestiones sobre el juego del dominó de 28 fichas

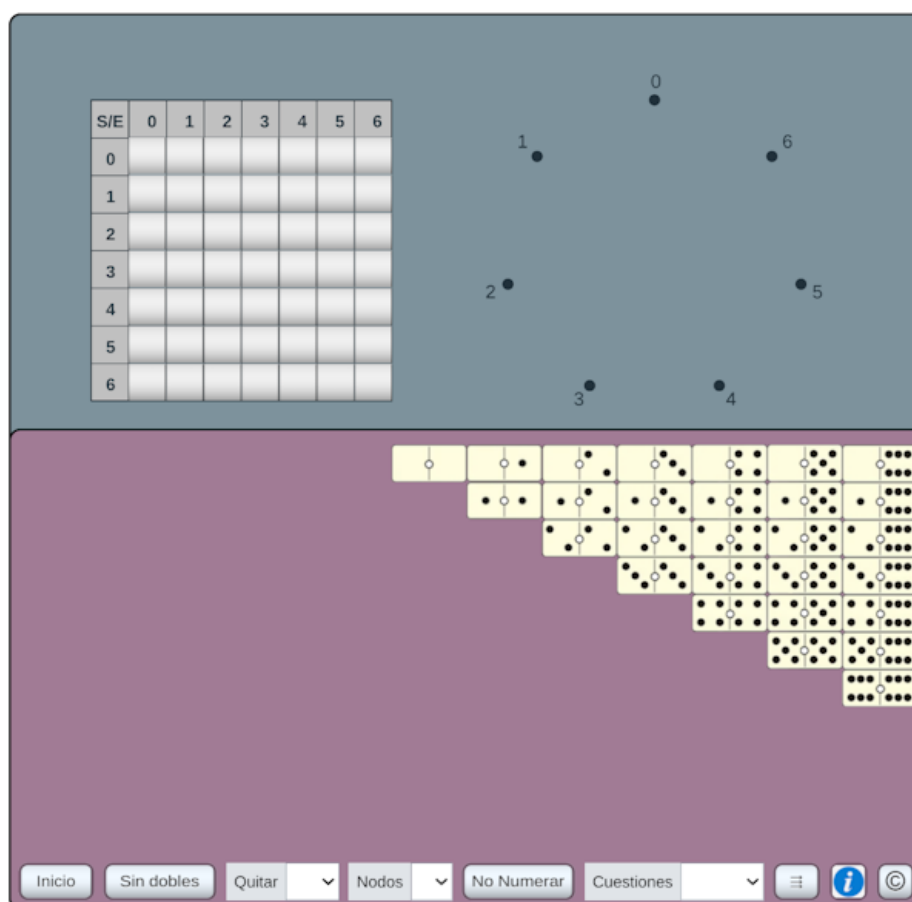


Figura 13

Una tabla cuadrada de 7x7 pulsadores, cada uno referido a una arista que sale del nodo fila (S) y llega al nodo columna (E), se dibuja en el grafo, a su derecha, que va generándose. Siempre es posible borrar la última arista dibujada al pulsar de nuevo.

En la *Figura 14*, se muestra la escena después de representar la hilera de las primeras 17 aristas (fichas de la *Figura 12*)

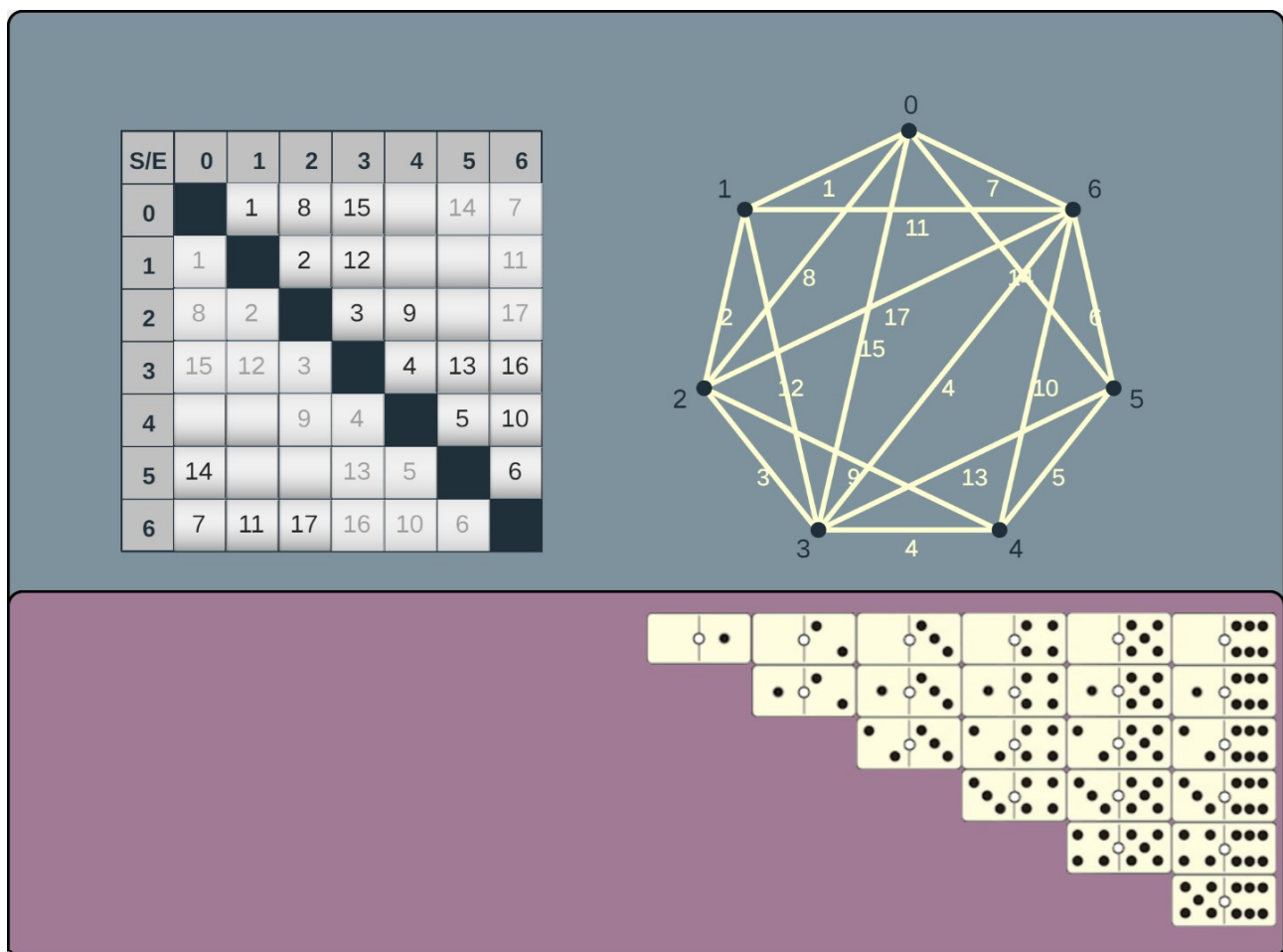


Figura 14

Las aristas se van enumerando a medida que se las selecciona. Se puede, no obstante, ocultar la numeración, pulsando el botón etiquetado como “**No numerar**” en la barra de menú debajo de la escena.

El botón “**Sin dobles**” elimina las fichas dobles (nodos con bucles en el grafo). Los pulsadores en este caso se ocultan con una máscara de color negro.



Figura 15

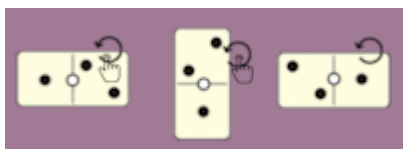


Figura 16

La escena muestra las imágenes de las fichas de dominó que están disponibles para formar la hilera. Estas fichas se pueden seleccionar haciendo clic en el centro de la ficha, desplazar arrastrando y girar haciendo clics sucesivos sobre el control de rotación que aparece al hacer la selección.

“**Quitar**” es un control del menú que despliega el listado de las 21 fichas (aristas), no dobles, (01, 02, ..., 56) y permite suprimir, al seleccionarlal, una a una las que

se deseen: en la tabla los pulsadores correspondientes quedan ocultos y no se pueden utilizar. Se puede volver a incluirlas si se seleccionan de nuevo. Las fichas que se han quitado se representan con una arista discontinua y desaparece del conjunto de las imágenes de fichas, quedando un hueco en su lugar. No se pueden quitar fichas una vez que se ha iniciado la selección de aristas para formar la hilera en la tabla asociada al grafo.

En la *Figura 17* se han quitado las aristas 01 y 06. Se construye el grafo trazando todas las posibles aristas, sin numerarlas, entre los siete nodos.

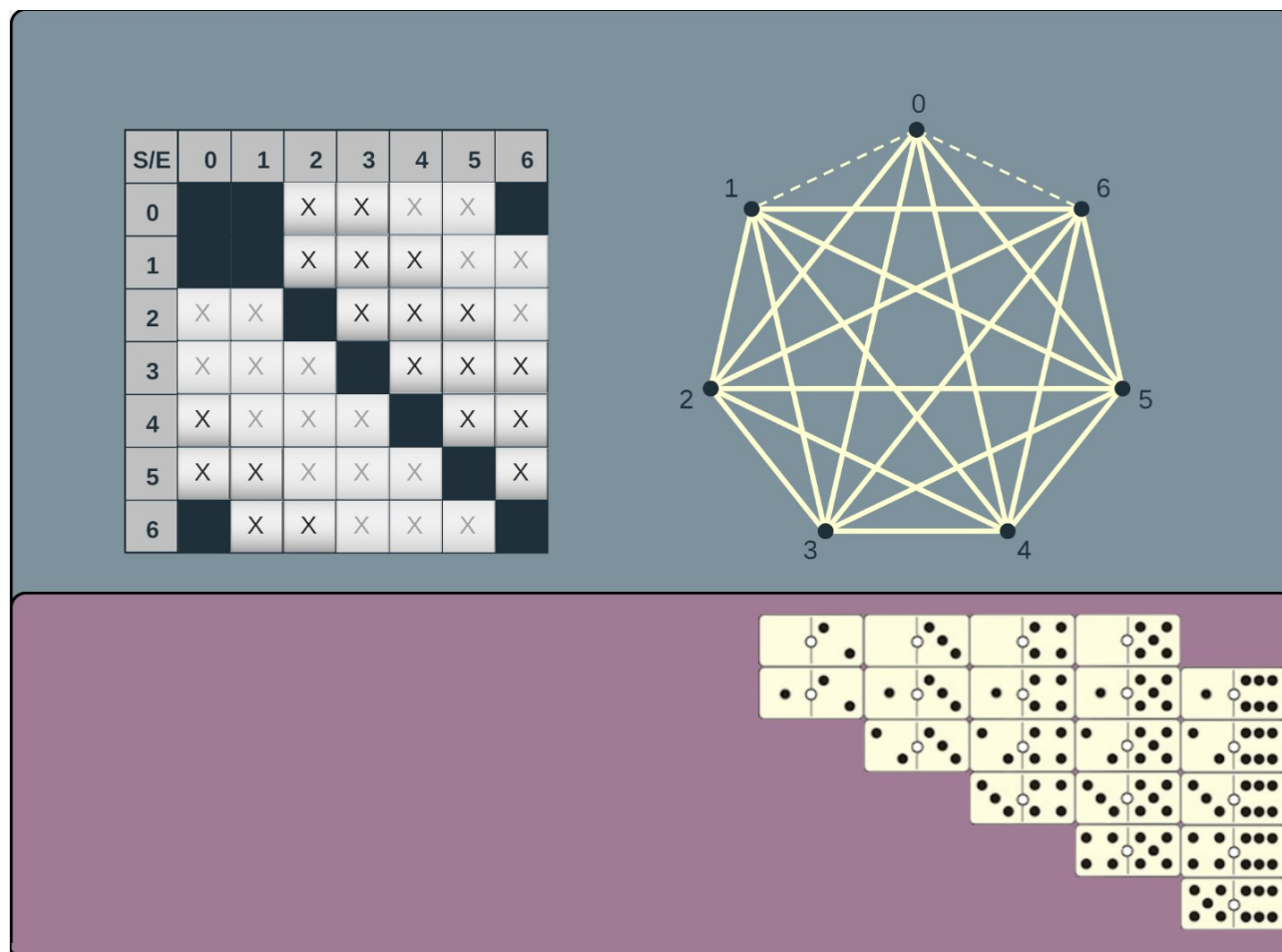


Figura 17

Cabe preguntar aquí si es posible hacer un recorrido por todas las aristas. ¿Se pueden formar una hilera con todas las fichas? ¿El recorrido es cerrado?

Otros problemas pueden formularse considerando grafos con menos de 7 nodos. En el menú de la escena disponemos del control “**Nodos**” que permite seleccionar en una lista desplegable 4, 5 o 6 nodos. En la siguiente escena vemos el resultado de seleccionar 5 nodos {0, 1, 2, 3, 4} y permite formular cuestiones con un dominó de 15 fichas, donde se incluyen las fichas dobles. La *Figura 18* muestra el grafo correspondiente

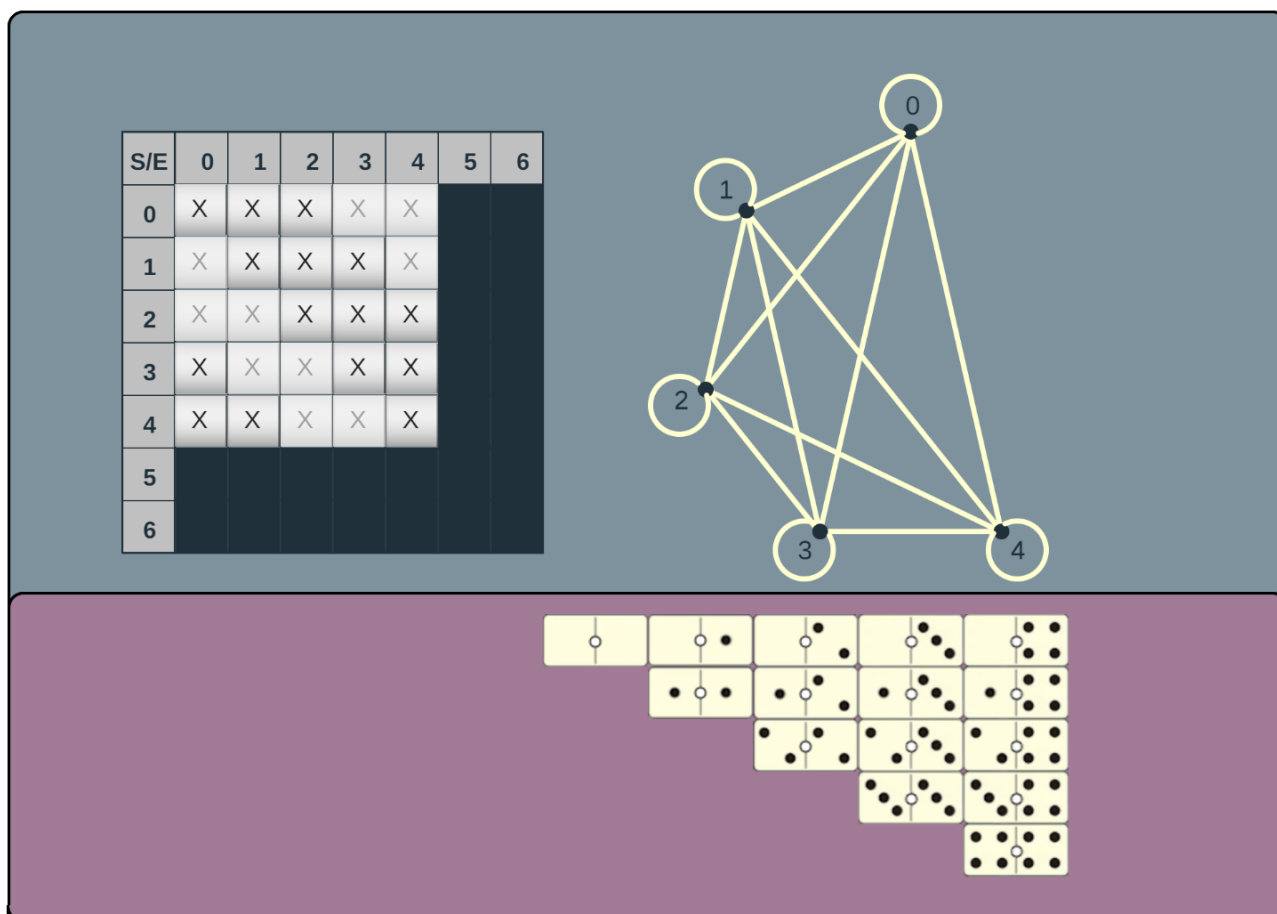


Figura 18

También es posible representar dominós de 2 y 3 nodos. Basta con representar el de 4 nodos y quitar las aristas correspondientes a los nodos que no deben de representarse.

## Reordenación de las fichas



Figura 19

Las fichas que se han desplazado y girado para formar un determinado recorrido se pueden volver a reordenar y llevarlos su lugar inicial pulsando el botón que se muestra en la *Figura 19* adjunta.

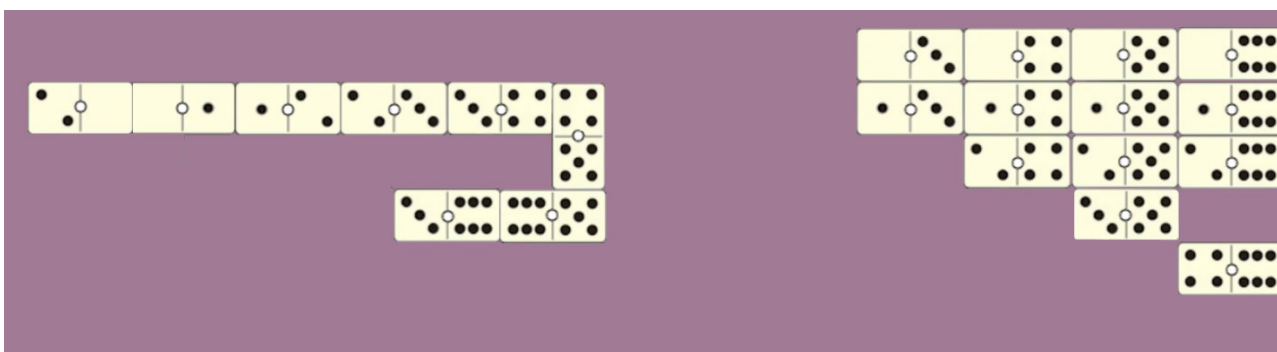


Figura 20

La *Figura 21*, a continuación, muestra la reordenación de las fichas que fueron



desplazadas y/o giradas, a la izquierda en la *Figura 20*

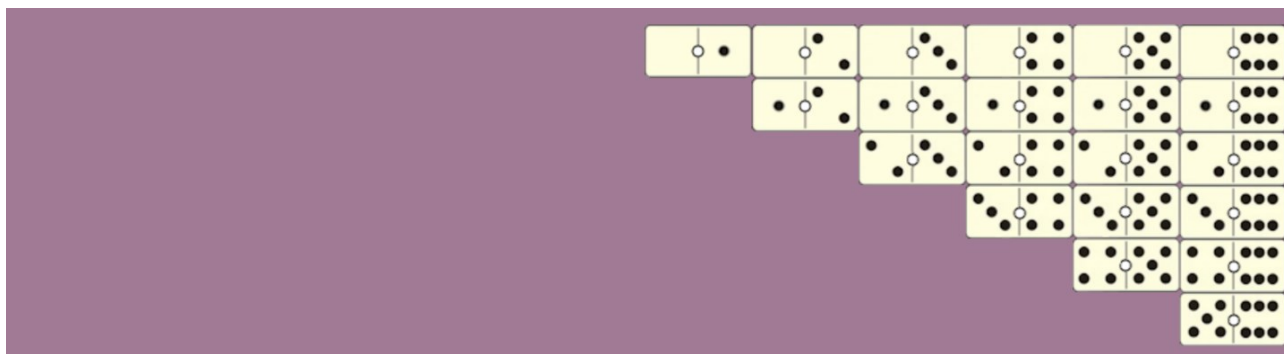


Figura 21

## Cuestiones

El control “Cuestiones”, en el menú al pie de la escena, permitirá seleccionar de entre un repertorio desplegable diferentes cuestiones a resolver por el estudiante interaccionando con la escena y apoyándose en las definiciones y propiedades de los grafos que se han expuesto en esta documentación. Al seleccionar una determinada cuestión, se abre un espacio en la escena donde aparece el correspondiente enunciado, se dan las indicaciones oportunas y las ilustraciones, si fueran necesarias. Un botón permite ver/ ocultar la solución.

## Notas preliminares

- Como ya avanzamos prescindiremos de las fichas dobles.
- Llamaremos *jugada perfecta* si se utilizan todas las fichas de tal manera que el valor en el extremo de inicio coincide con el valor del extremo con que termina la hilera o recorrido.
- Llamaremos *jugada semiperfecta* si después de retirar alguna ficha, podemos realizar una hilera con todas las demás fichas, pero los valores de los extremos inicial y final no coinciden.
- *Dominós reducidos* de 2, 3, 4, 5, 6 valores. Si de un dominó de 21 fichas suprimimos las de valor 6, se obtiene un *dominó reducido* de 6 valores {0, 1, 2, 3, 4, 5}. Si suprimimos las fichas con valores 6 y 5 se obtiene un dominó reducido de 5 valores {0, 1, 2, 3, 4}. Si suprimimos las fichas con valores 6, 5 y 4 se obtiene un dominó reducido de 4 valores {0, 1, 2, 3}.
- La escena de descartes facilita la eliminación de las dobles y a través del menú “Nodos” obtiene juegos de dominós reducidos de 6, 5 y 4 valores.



- Para obtener dominós reducidos de 3 y 2 valores, podemos empezar por obtener el de 4 y eliminar los que correspondan por medio del menú “Quitar”.

## Cuestiones para analizar casos particulares

**Cuestión 1:** ¿Cuántas fichas tendrá un dominó completo de 5 valores, del 0 al 4? ¿Y el de 11 valores, del 0 al 10?

### Solución 1:

Un dominó completo de  $n$  valores  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n-1\}$  tiene  $1+2+3+\dots+n$  fichas ¡un número triangular!

Si  $n=5$ , tiene  $1+2+3+4+5=15$  fichas

Si  $n=10$ , tien  $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$  fichas

**Cuestión 2:** Obtenido el dominó sin fichas dobles de 3 valores  $\{0, 1, 2\}$ .

- ¿Cuántas fichas tiene este dominó y cuáles son?
- Dibuja el grafo asociado utilizando la tabla y calcula el grado de cada nodo.
- ¿Se puede realizar una *jugada perfecta*? ¿Por qué valores empieza y termina la hilera o recorrido de esta jugada? Representa la jugada escribiendo en tu cuaderno la sucesión de fichas  $x:y - y:z - z:x$  o simplificando esta notación, de valores separados por un guion  $x- y - z - x$
- ¿Cuántos recorridos diferentes puedes obtener contando como válido el recorrido inverso?

### Solución 2:

- Un dominó de 3 valores sin fichas dobles tiene  $(1+2+3)-3=3$  fichas. Estas son 0:1, 0:2 y 1:2
- El grafo correspondiente a este dominó es el de la *Figura 22*. Todos los nodos son de grado 2 (par).
- Se puede realizar una jugada perfecta que saliendo de un valor (nodo) cualquiera se recorre todas las aristas una sola vez y se termina en el mismo valor, por ejemplo: 0-1-2-0

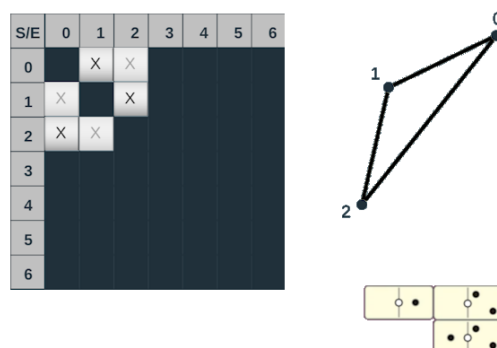


Figura 22

- Los recorridos de las diferentes jugadas perfectas son 6 :  
Empezando y terminando por 0: 0-1-2-0, 0-2-1-0  
Empezando y terminando por 1: 1-0-2-1, 1-2-0-1  
Empezando y terminando por 2: 2-0-1-2, 2-1-0-2

**Cuestión 3:** Obtenido el dominó de 4 valores {0, 1, 2, 3} sin fichas dobles

- ¿Cuántas fichas tiene este dominó y cuáles son?
- Dibuja el grafo asociado utilizando la tabla y calcula el grado de cada nodo.
- Verifica que no es posible hacer ni una *jugada perfecta* ni una *semiperfecta*
- Da una explicación de esta imposibilidad para este dominó y con ello justifica que tampoco es posible en el dominó completo (se incluyen las fichas dobles)

**Solución 3:**

- Un dominó de 4 valores sin fichas dobles tiene 6 fichas:  $(1+2+3+4)-4=6$   
Estas son 0:1, 0:2, 0:3, 1:2, 1:3, 2:3
- El grafo correspondiente a este dominó es el que se muestra en la *Figura 23*. Todos los nodos son de grado 3.
- No se puede hacer un recorrido por todas las aristas (fichas), siempre nos quedará una ficha sin poner (una arista sin recorrer)

S/E	0	1	2	3	4	5	6
0		X	X	X			
1	X		X	X			
2	X	X		X			
3	X	X	X				
4							
5							
6							

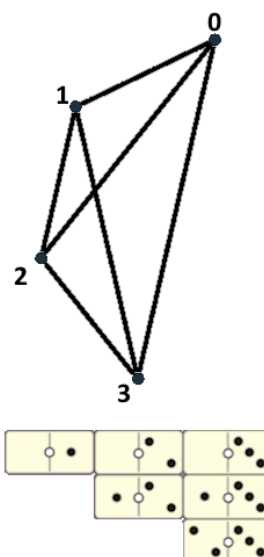


Figura 23

- En una *jugada perfecta* las fichas se pueden emparejar con con un mismo valor esto es porque cada valor aparece en el juego un número par de veces. En el dominó de 4 valores cada valor se repite 3 veces (número impar) por eso siempre queda una ficha que no se puede emparejar. Si añadimos las fichas dobles, cada ficha doble incrementa en dos el número de veces con que se repite ese valor en el juego, es decir 5, número que sigue siendo impar. Para poder realizar una *jugada*

*semiperfecta* el grafo debe de tener sólo dos nodos de grado impar y no es el caso.

**Cuestión 4:** Obtenido los dominós de 5, 6 y 7 valores sin fichas dobles puedes hacerte las mismas preguntas de las cuestiones previas.

- Verifica que los dominós reducidos de un número impar de valores: 3, 5 y 7 todos sus nodos son de grado par y puede realizarse *jugadas perfectas*: empezando por cualquier valor puede ir encadenando fichas hasta cerrar la hilera con el mismo valor.
- Verifica que en los dominós reducidos de un número par de valores: 4 y 6 todos los nodos son de grado impar no es posible realizar *jugadas perfectas*.

**Solución 4:**

- Si dibujamos los grafos de los dominós de 5 y 7 valores podemos observar, al igual que el dominó de 3 valores, que cada valor aparece un número par de veces en el dominó y por tanto es posible emparejar los valores de todas las fichas en hilera y realizar una partida perfecta empezando y terminando por el mismo valor
- En el dominó de 6 valores al igual que vimos para el dominó de 4 valores, cada valor se repite un número impar de veces y no es posible emparejar todas las fichas en hilera, con lo que no es posible hacer una *jugada perfecta*.

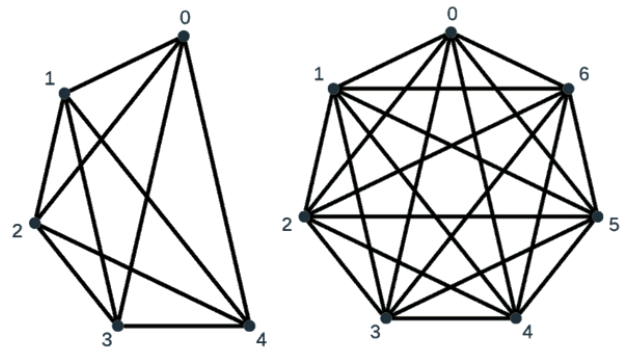


Figura 24

Por ejemplo en el dominó de 5 valores el valor 0 aparece en 4 fichas 0:1, 0:2, 0:3, 0:4

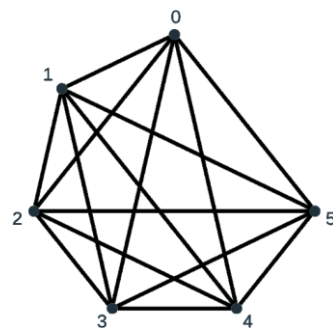


Figura 25

Por ejemplo el valor 0 aparece en 5 fichas 0:1, 0:2, 0:3, 0:4 0:5

**Cuestión 5:** Dado un dominó completo de 28 fichas, prescindimos de las 7 fichas dobles. Sabemos que se puede hacer una *jugada perfecta*, pues todos los nodos siguen siendo de grado par.

- Si quitamos una ficha cualquiera, verifica que ahora no podemos hacer una *jugada perfecta* pero sí podemos hacer una *jugada imperfecta* pues hay dos nodos de grado impar.
- ¿Con qué números has comenzado y terminado?
- ¿Qué tiene que ver estos números con la ficha que habíamos quitado?

### Solución 5:

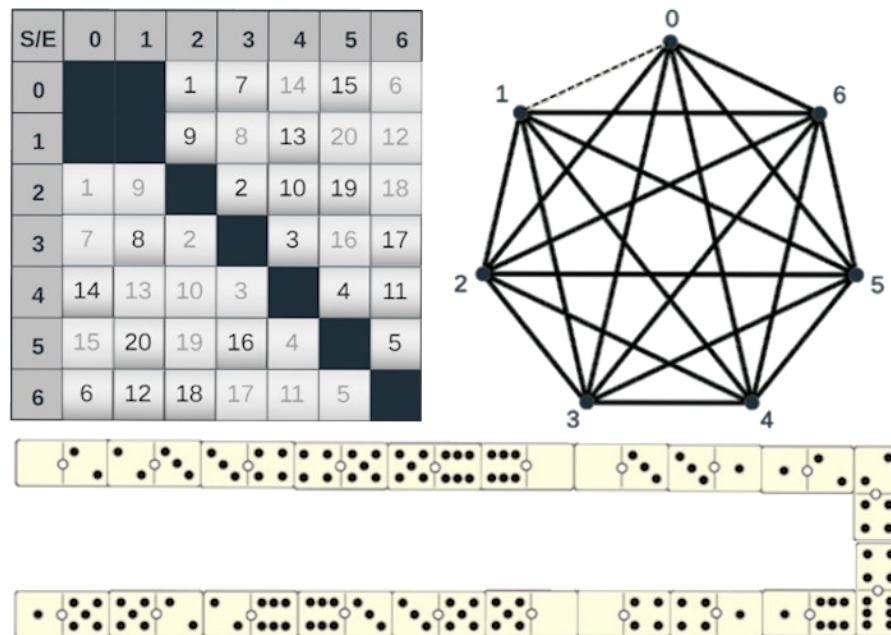


Figura 26

En la *Figura 26* se representa el grafo de dominó de 7 valores,  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  sin fichas dobles. Se ha eliminado una ficha cualquiera y se ha hecho con la 0:1. En la escena de DescartesJS se visualiza con trazo discontinuo. Al eliminar la arista que une 0 y 1 hemos conseguido que el grado de estos dos nodos sea impar. Los restantes nodos son de grado par. Obsérvese también que el grafo sigue siendo conexo, pudiendo encontrar un camino que comunica dos nodos cualesquiera. Con esto, es posible trazar al menos un *camino euleriano* (recorre todas las aristas una sola vez) y que partiendo del nodo 0 termine en el nodo 1, como se puede observar en la tabla que nos permite ver el orden seguido para encadenar las 20 aristas. La hilera de fichas bajo la tabla y el grafo correspondiente representa la *jugada semiperfecta* que se pretende hacer. Es evidente que los valores de salida y de llegada son los de la ficha que se eliminó. El *camino euleriano* inverso sería otra *jugada semiperfecta* posible.

Iniciar un grafo nuevo empezando por eliminar otra ficha cualquiera. Iniciar el camino por uno de los valores de la ficha eliminada y utilizar la tabla para ir

marcando las aristas que vayan siendo posibles hasta terminar en el otro valor. La tabla es una herramienta de gran utilidad para seguir un orden y permitir ver fácilmente la posibilidad de enlazar con la siguiente arista hasta ver enlazadas todas.

**Cuestión 6:** Si en el dominó de la cuestión anterior quitamos dos fichas, una más. ¿Se puede hacer ahora una *jugada semiperfecta*? ¿Depende de que las aristas quitadas tengan o no un nodo común? ¿En que caso se puede hacer una *jugada semiperfecta* quitando dos fichas?

### Solución 6:

Este caso es más delicado que el anterior. Veremos que solo es posible hacer una *partida semiperfecta* si las dos fichas eliminadas tienen valor en común.

La *Figura 27* ayuda a observar como conseguir una *partida semiperfecta*.

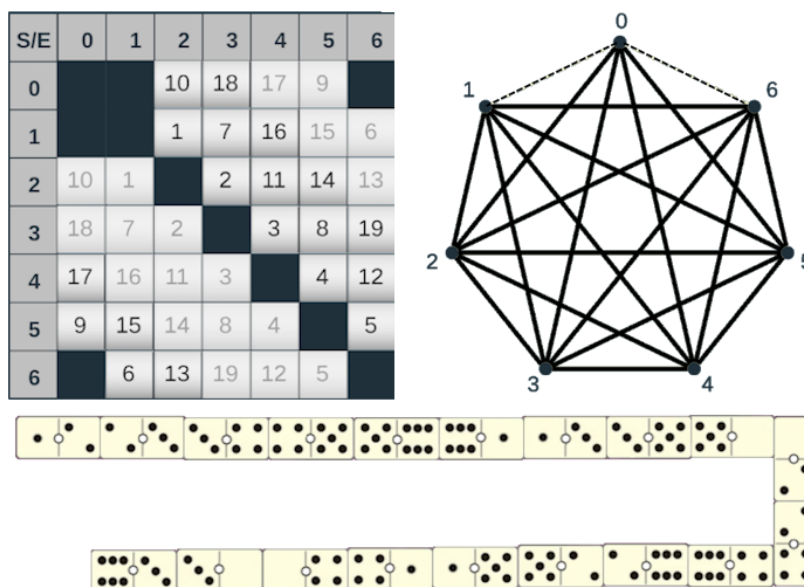


Figura 27

Se han eliminado las fichas 0:1 y 0:6, siendo 0 el valor común. De esta manera se consigue que dos nodos, el 1 y el 6 sean de grado impar y el nodo 0 siga siendo de grado par al disminuir en dos su grado. La tabla nos dice el orden seguido para encadenar todas las aristas partiendo del valor 1 y terminando en el valor 6.

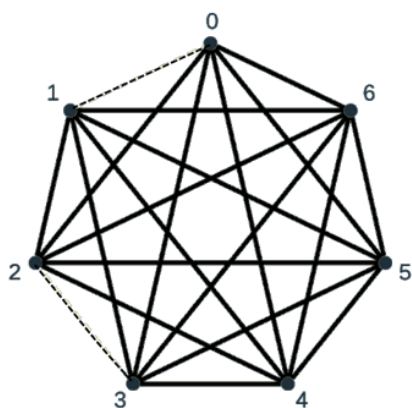


Figura 28

Si las dos fichas eliminadas no tienen un valor común, como 0:1 y 2:3, según vemos en la *Figura 28*, los nodos 0, 1, 2 y 3 son de grado impar (más de 2 nodos de grado impar) y los restantes de grado par,

con lo que no es posible formar un *camino euleriano* y en consecuencia no se puede hacer una *partida semiperfecta*.

**Cuestión 7:** Seguimos jugando con el dominó de 7 valores {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Si exceptuamos las fichas dobles y las fichas blancas, con valor 0: ¿Se puede hacer una *jugada perfecta*? ¿Y *semiperfecta*? Dar una explicación de este resultado a partir del *terema sobre caminos eurenianos*.

**Solución 7:**

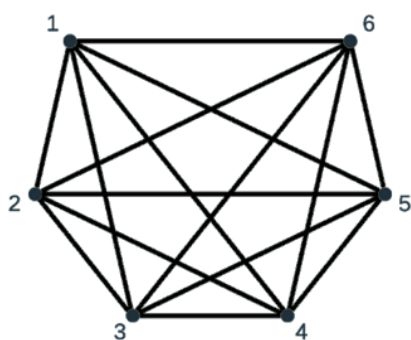


Figura 29

Quitar las fichas con valor blanco conduce a un dominó de 6 valores {1, 2, 3, 4, 5, 6}. En este caso todos nodos de su grafo son de grado 5 (impar). Para que se pueda trazar un camino eureniano recorriendo todas sus aristas una sola vez el grafo debe de ser conexo y debe de existir sólomente 2 nodos de grado impar. Luego no es posible hacer una *jugada semiperfecta* con sus fichas.

**Cuestión 8:** Dado un dominó de 6 valores o nodos {0, 1, 2, 3, 4, 5} del que prescindimos de las fichas dobles. Sabemos que no se puede hacer ni una *jugada perfecta* ni una *jugada semiperfecta*. ¿Cuántas fichas hay que quitar para poder hacer una *jugada imperfecta*?

**Solución 8:**

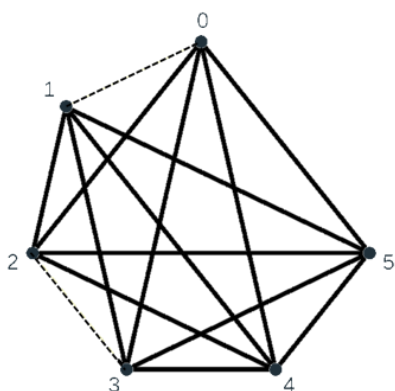


Figura 30

El dominó de 6 valores sin fichas dobles tiene  $(1+2+3+4+5+6)-6=15$  fichas. Su grafo tiene todos sus nodos de grado 5 (impar). Para obtener de él un grafo con sólo 2 nodos de grado impar, basta con eliminar dos fichas que no tengan valores comunes como se muestra en la *Figura 30*. Se eliminan las fichas 0:1 y 2:3. Observar que así hemos conseguido obtener 4 nodos de grado par (4) y dos nodos, el 4 y el 5, de grado impar (5). En estas condiciones con las restantes 13 fichas se puede hacer una *jugada*

*semiperfecta*, pues existe un *camino euleriano*.

En la *Figura 31* vemos la *jugada semiperfecta* y la tabla con el orden seguido para construir el camino, empezando en el nodo 4, con la ficha 4:0 y terminando en el nodo 5, con la ficha 3:5.







**Cuestión 10:** Dado un dominó completo de 4 valores  $\{0, 1, 2, 3\}$  (nodos) del que se prescinde de las fichas dobles, sabemos que no permite hacer ni *jugadas perfectas* ni *jugadas semiperfectas*. Recorrer su grafo por dos *caminos eulerianos* disjuntos. Esto equivale a decir que tenemos que obtener con sus fichas dos subconjuntos disjuntos con los que podamos hacer una *jugada semiperfecta*. ¿La solución es única?

**Solución 10:**

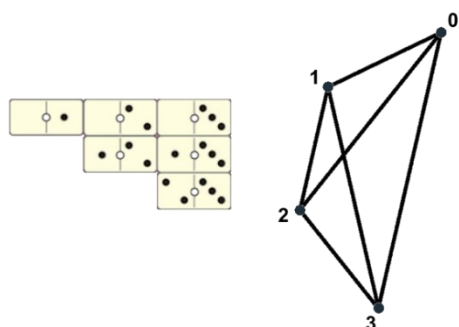


Figura 33

El dominó de 4 valores, sin las fichas dobles, lo constituyen las 6 fichas que se muestra en la Figura 33, junto a su grafo. Todos sus nodos son de grado impar, luego no existe un *camino euleriano* que recorra todas sus aristas pasando por cada una una sola vez.

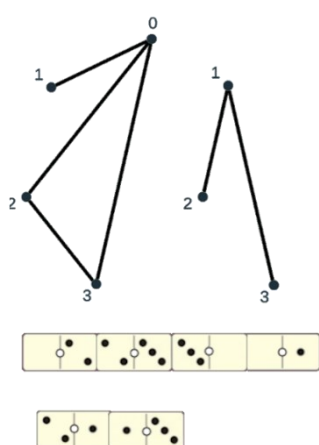


Figura 34

Se puede, no obstante, agrupar en dos conjuntos disjuntos las 6 fichas de tal manera que el grafo de cada subconjunto se pueda recorrer mediante un camino euleriano y en consecuencia hacer sendas *jugadas semiperfectas* como se puede observar en la Figura 34.

Esta agrupación no es única, pues, por ejemplo se puede hacer otra selección de 3 fichas para el primer subconjunto y de las restantes 3 fichas para el

segundo subconjunto. Otra forma diferente a como se ha hecho en la agrupación anterior.

Los dos *caminos eulerianos* disjuntos podrían ser 1:0-0:2-2:3 y 0:3-3:1-1:2 como se observa en la Figura 35.

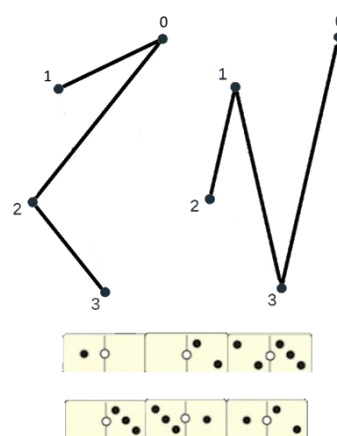


Figura 35