

**FICHAS DE TRABAJO PARA EL ALUMNO DEL LIBRO ELECTRÓNICO**

**ESTUDIO Y APLICACIONES**  
**de las**  
**FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**  
**Y SUS INVERSAS**

**Autora: Rita Jiménez Igea. Año 2017**

# MEDIDA DE ÁNGULOS

Los ángulos se miden en grados sexagesimales y en radianes.

Utiliza la escena de la página 9 del libro para completar los siguientes ejercicios.

## PASAR de GRADOS a RADIANES

Expresa en radianes el ángulo de  $180^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

Expresa en radianes el ángulo de  $90^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

Expresa en radianes el ángulo de  $45^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

Expresa en radianes el ángulo de  $30^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

Expresa en radianes el ángulo de  $60^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

Expresa en radianes el ángulo de  $120^\circ$

$$\begin{array}{ccc} \text{Radianes} & \text{D} & \text{Grados} \\ \pi \text{ rad} & \text{----->} & 180^\circ \\ x & \text{----->} & \dots^\circ \end{array}$$

$x = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad} = \frac{\dots}{\dots} \text{ rad}$

# PASAR DE RADIANES a GRADOS

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

Expresa en grados el ángulo de  radianes.

Grados D radianes  
 180° ----> π rad  
 x ---->  rad

$$x = \frac{\text{---}}{\pi} = \text{---} = \text{---}^\circ$$

## RECUERDA

*Al dibujar funciones trigonométricas los ángulos se consideran en radianes*



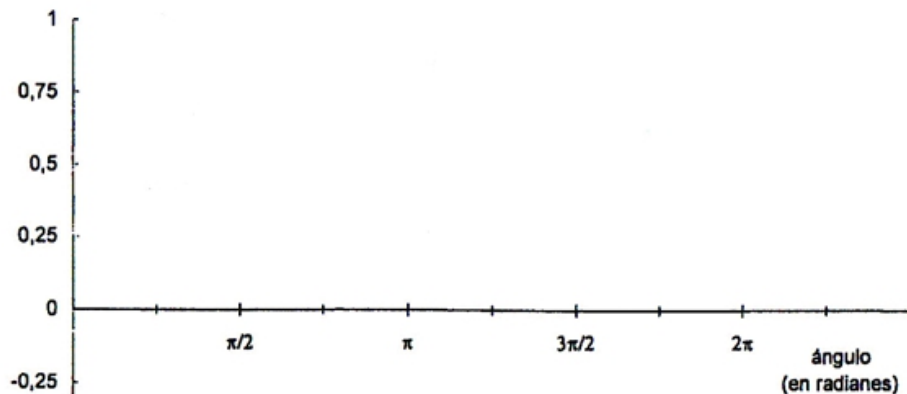
# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

## 1.- Representación gráfica de $y = \text{sen } x$

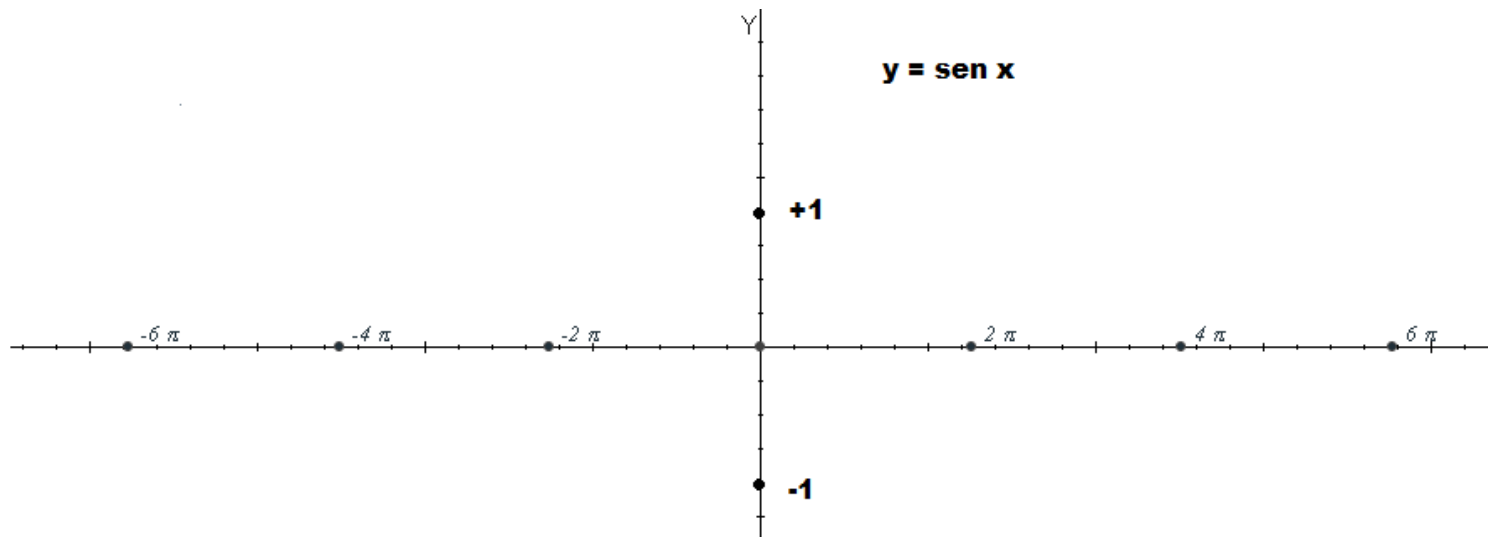
a) Completar la siguiente tabla

Ángulo en grados	x (rad)	y = sen x
<b>0°</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
30°	$\pi/6$	0.5
45°	$\pi/4$	0.70
60°	$\pi/3$	0.86
<b>90°</b>	<b><math>\pi/2</math></b>	<b>1</b>
120°	$2\pi/3$	0.86
135°	$3\pi/4$	0.70
150°	$5\pi/6$	0.5
<b>180°</b>	<b><math>\pi</math></b>	<b>0</b>
210°	$7\pi/6$	-0.5
225°	$5\pi/4$	-0.70
240°	$4\pi/3$	-0.86
<b>270°</b>	<b><math>3\pi/2</math></b>	<b>-1</b>
300°	$5\pi/3$	-0.86
315°	$7\pi/4$	-0.70
330°	$11\pi/6$	-0.5
<b>360°</b>	<b><math>2\pi</math></b>	<b>0</b>

b) Representar gráficamente



2.- Observa que la gráfica anterior solo se ha construido para ángulos entre 0° y 360° es decir de la 1ª vuelta ¿qué gráfico se obtiene si lo extendemos a todos los ángulos?

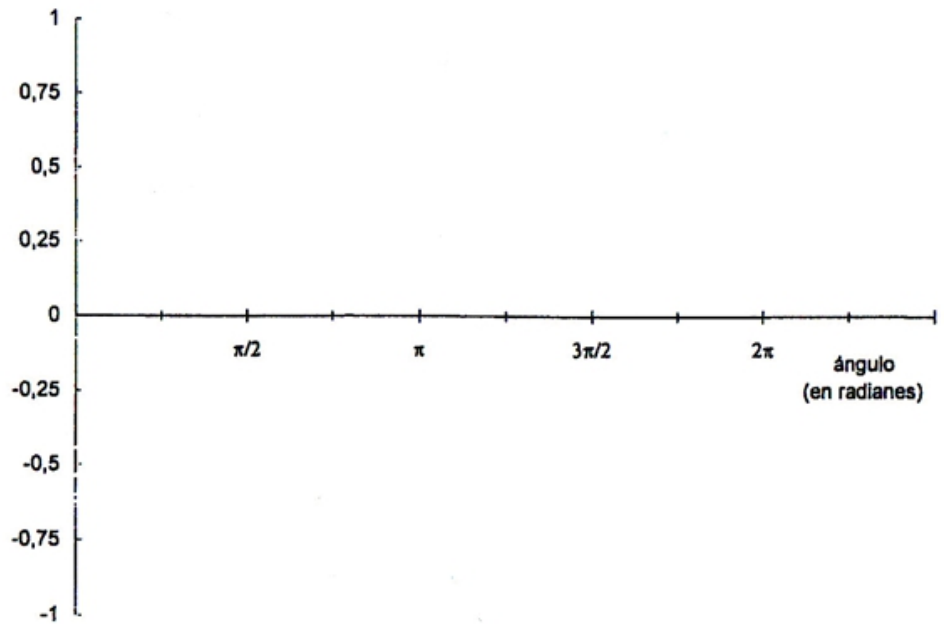


## 2.- Representación gráfica de $y = \cos x$

1 a) Completar la siguiente tabla

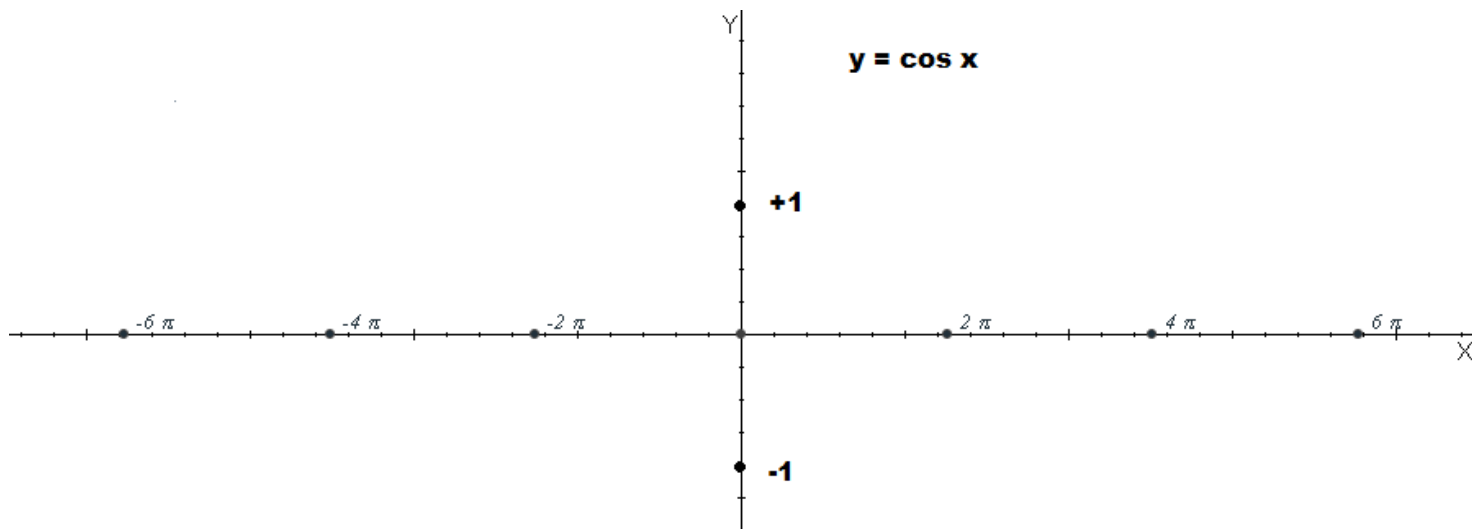
b) Representar gráficamente

Ángulo en grados	x (rad)	y = cos x
0°	0	1
30°	$\pi/6$	
45°	$\pi/4$	
60°	$\pi/3$	
90°	$\pi/2$	0
120°	$2\pi/3$	
135°	$3\pi/4$	
150°	$5\pi/6$	
180°	$\pi$	-1
210°	$7\pi/6$	
225°	$5\pi/4$	
240°	$4\pi/3$	
270°	$3\pi/2$	0
300°	$5\pi/3$	
315°	$7\pi/4$	
330°	$11\pi/6$	
360°	$2\pi$	1



2.- Observa que la gráfica anterior solo se ha construido para ángulos entre 0° y 360° es decir de la 1ª vuelta ¿Qué gráfico se obtiene si lo extendemos a todos los ángulos?

$$y = \cos x$$

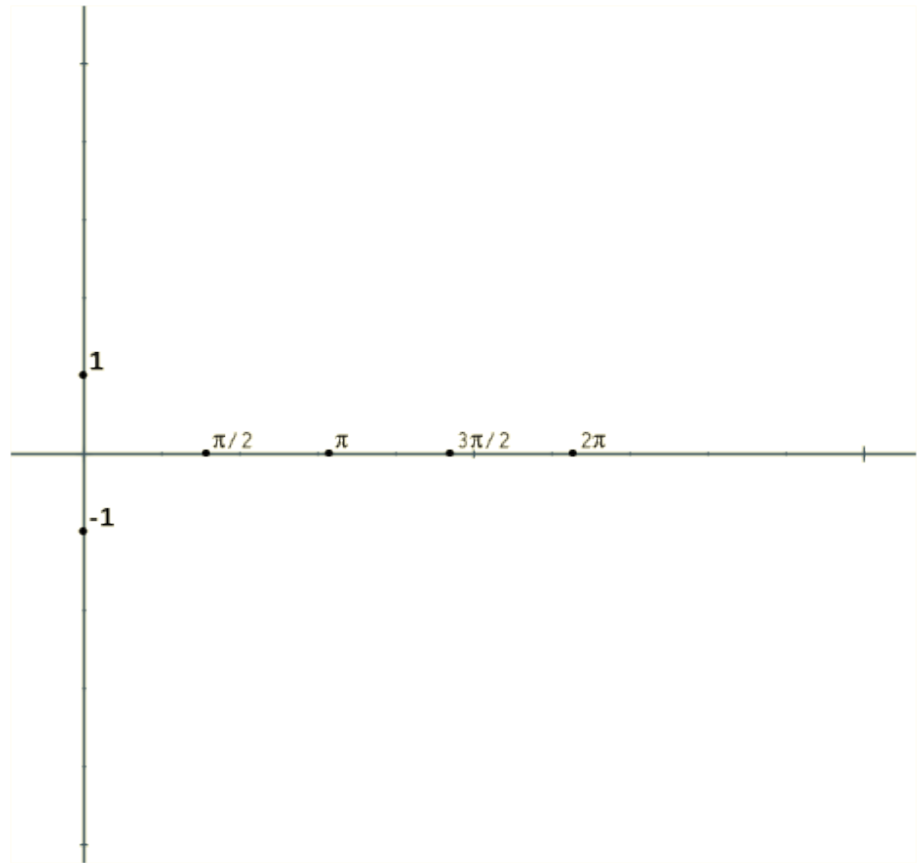


### 3.- Representación gráfica de $y = \text{tg } x$

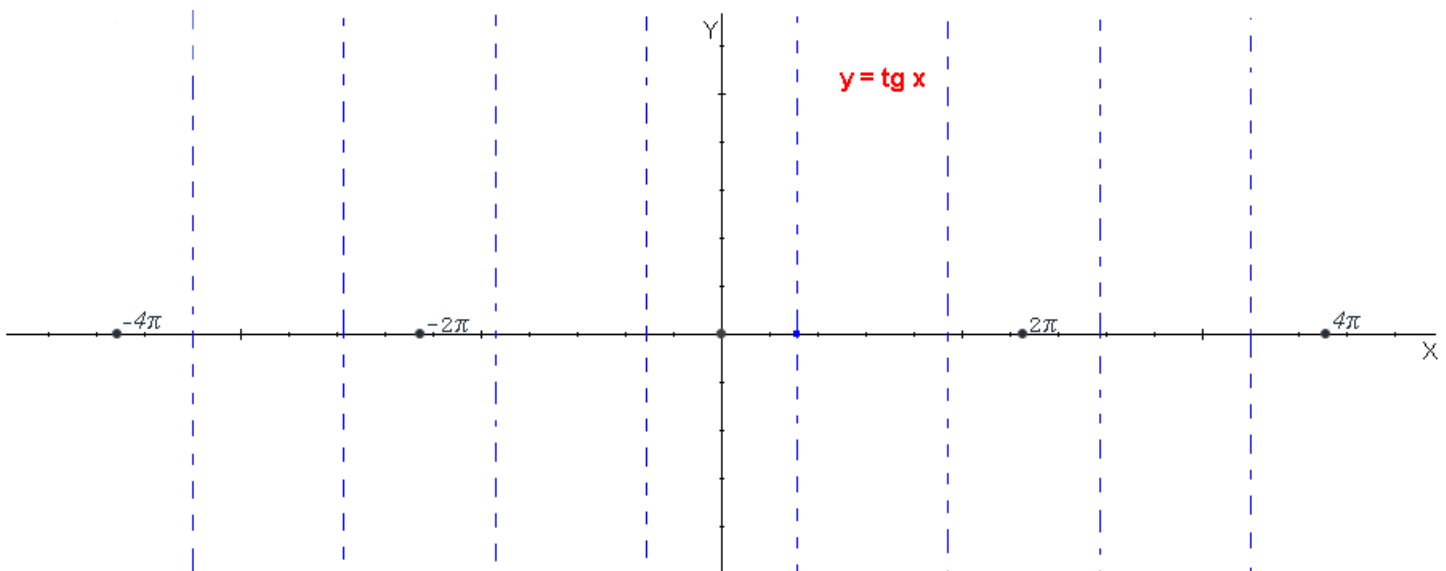
1 a) Completar la siguiente tabla

Ángulo en grados	x (rad)	y = tg x
0°	0	0
30°	$\pi/6$	
45°	$\pi/4$	
60°	$\pi/3$	
90°	$\pi/2$	No existe
120°	$2\pi/3$	
135°	$3\pi/4$	
150°	$5\pi/6$	
180°	$\pi$	0
210°	$7\pi/6$	
225°	$5\pi/4$	
240°	$4\pi/3$	
270°	$3\pi/2$	No existe
300°	$5\pi/3$	
315°	$7\pi/4$	
330°	$11\pi/6$	
360°	$2\pi$	0

b) Representar gráficamente



2.- Observa que la gráfica anterior solo se ha construido para ángulos entre 0° y 360° es decir de la 1ª vuelta ¿qué gráfico se obtiene si lo extendemos a todos los ángulos?



La función inversa de  $y = \text{sen } x$  es

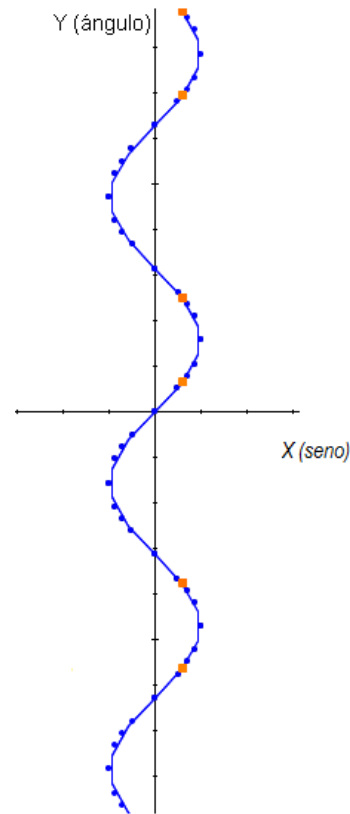
$$y = \text{arc sen } x \quad (\text{se lee arco seno de } x)$$

1.-a) Completar la siguiente tabla  
(*simplemente debes dar la vuelta a la tabla de  $y = \text{sen } x$* )

x (es el seno)	y (ángulo en radianes)	
0	0	0°
0'5	$\pi/6$	30°
0'7	$\pi/4$	45°
0'86	$\pi/3$	60°
1	$\pi/2$	90°
0'86	$2\pi/3$	120°
0'7	$3\pi/4$	135°
0'5	$5\pi/6$	150°
0	$\pi$	180°
-0'5	$7\pi/6$	210°
-0'7	$5\pi/4$	225°
-0'86	$4\pi/3$	240°
-1	$3\pi/2$	270°
-0'86	$5\pi/3$	300°
-0'7	$7\pi/4$	315°
-0'5	$11\pi/6$	330°
0	$2\pi$	360°

b) Representar gráficamente **con todos los ángulos**

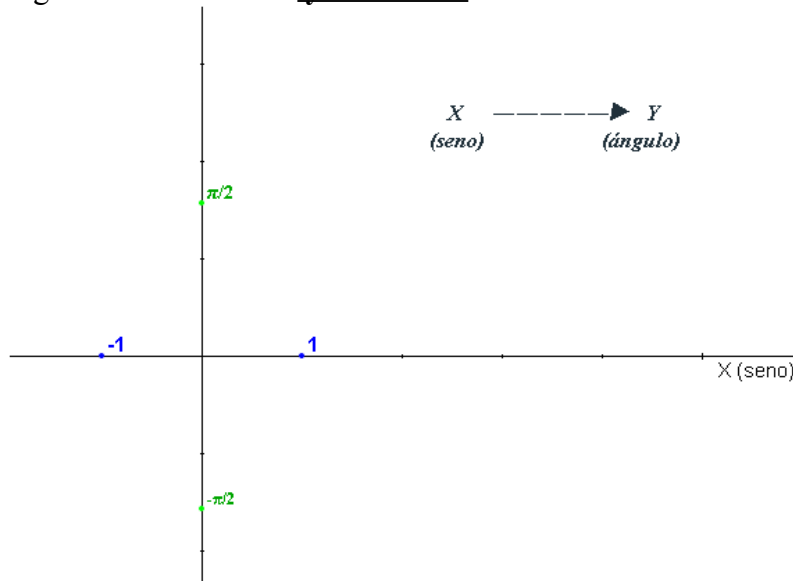
**NO ES UNA FUNCIÓN**



2.- a) ¿El dibujo anterior corresponde a una función? ¿Por qué?

b) ¿Qué condición debemos imponer para que sea función?

c) Dibuja la gráfica de la función  $y = \text{arc sen } x$  Señala el dominio y el recorrido



La función inversa de  $y=\cos x$  es

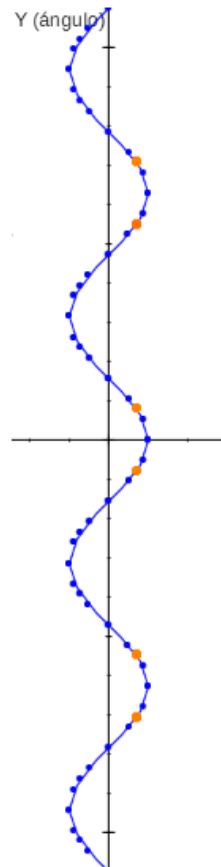
$$y=\arccos x \quad (\text{se lee arco coseno de } x)$$

1.-a) Completar la siguiente tabla  
(simplemente debes dar la vuelta a la tabla de  $y = \cos x$ )

x (es el coseno)	y (ángulo en radianes)	
1	0	0°
0'86	$\pi/6$	30°
0'7	$\pi/4$	45°
0'5	$\pi/3$	60°
0	$\pi/2$	90°
-0'5	$2\pi/3$	120°
-0'7	$3\pi/4$	135°
-0'86	$5\pi/6$	150°
-1	$\pi$	180°
-0'86	$7\pi/6$	210°
-0'7	$5\pi/4$	225°
-0'5	$4\pi/3$	240°
0	$3\pi/2$	270°
0'5	$5\pi/3$	300°
0'7	$7\pi/4$	315°
0'86	$11\pi/6$	330°
1	$2\pi$	360°

b) Representar gráficamente con todos los ángulos

**NO ES UNA FUNCIÓN**



2.-a) ¿El dibujo anterior corresponde a una función? ¿Por qué?

b) ¿Qué condición debemos imponer para que sea función?

b) Dibuja la gráfica de la función  $y = \arccos x$

Señala el dominio y el recorrido



La función inversa de  $y = \operatorname{tg} x$  es

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

(se lee arco tangente de  $x$ )

1.-a) Completar la siguiente tabla  
(simplemente debes dar la vuelta a la tabla de  $y = \operatorname{tg} x$ )

b) Representar gráficamente **con todos los ángulos**

x (es la tangente)	y (ángulo en radianes)	
0	0	0°
0'57	$\pi/6$	30°
1	$\pi/4$	45°
1'73	$\pi/3$	60°
no existe	$\pi/2$	90°
-1'73	$2\pi/3$	120°
-1	$3\pi/4$	135°
-0'57	$5\pi/6$	150°
0	$\pi$	180°
0'57	$7\pi/6$	210°
1	$5\pi/4$	225°
1'73	$4\pi/3$	240°
no existe	$3\pi/2$	270°
-1'73	$5\pi/3$	300°
-1	$7\pi/4$	315°
-0'57	$11\pi/6$	330°
0	$2\pi$	360°

2.-a) El dibujo anterior corresponde a una función? ¿Por qué?

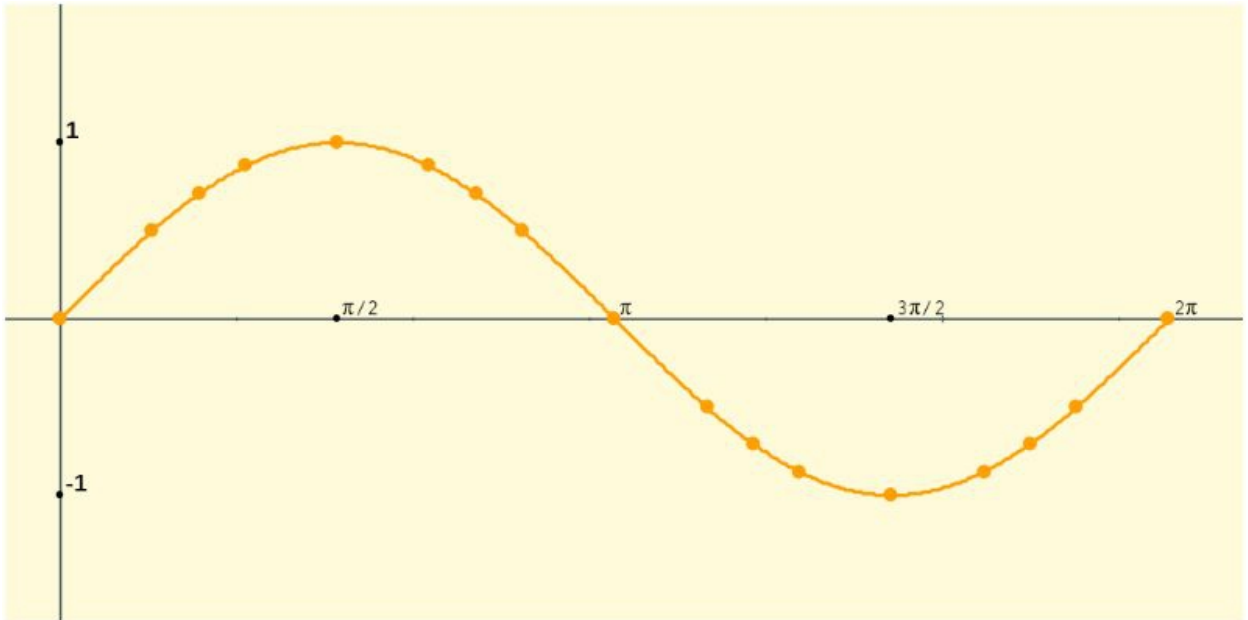
b) ¿Qué condición debemos imponer para que sea función?

c) Dibuja la gráfica de la función  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

Señala el dominio y el recorrido

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Observa la gráfica siguiente que corresponde a la función  $y = \text{sen } x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$



Completa el siguiente cuadro con sus propiedades:

### Propiedades de la función $y = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

**Dominio =**

**Puntos de corte con el eje de ordenadas:**

**Puntos de corte con el eje de abscisas:**

**Intervalos de crecimiento:**

**Intervalos de decrecimiento:**

**Máximos/mínimos relativos:**

**Intervalos de concavidad:**

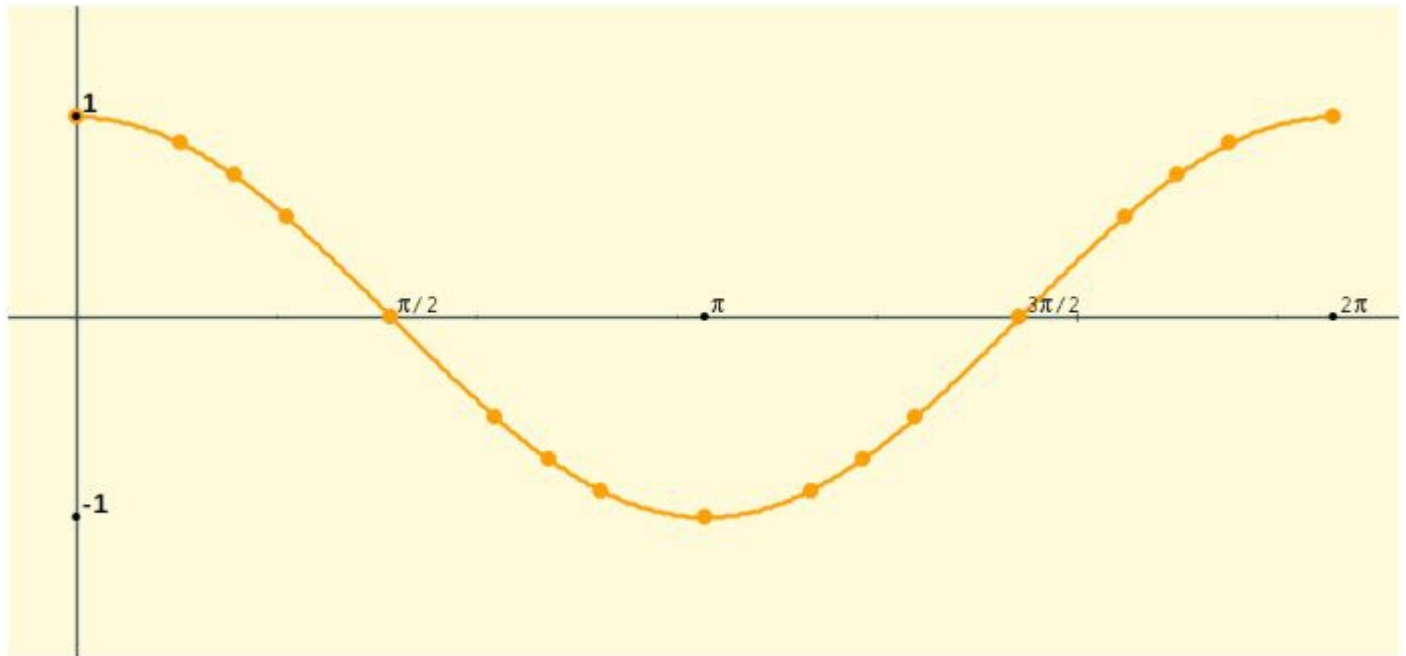
**Intervalos de convexidad:**

**Puntos de inflexión:**

**Asíntotas verticales:**

**Puntos de discontinuidad:**

Observa la gráfica siguiente que corresponde a la función  $y = \cos x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$



Completa el siguiente cuadro con sus propiedades:

**Propiedades de la función  $y = \cos x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$**

**Dominio =**

**Puntos de corte con el eje de ordenadas:**

**Puntos de corte con el eje de abscisas:**

**Intervalos de crecimiento:**

**Intervalos de decrecimiento:**

**Máximos/mínimos relativos:**

**Intervalos de concavidad:**

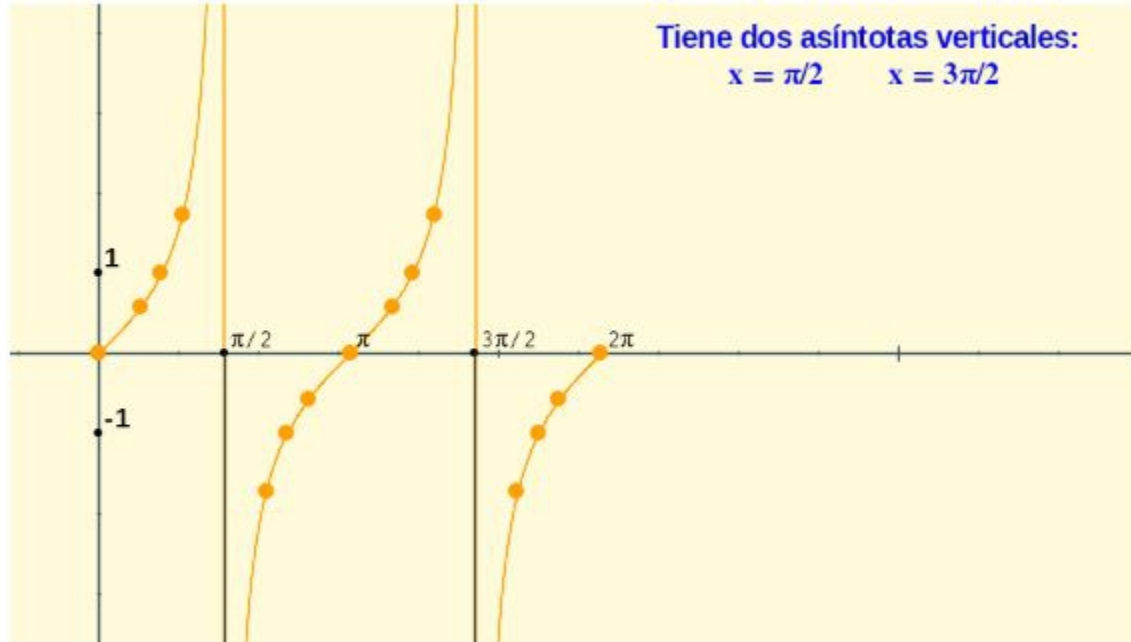
**Intervalos de convexidad:**

**Puntos de inflexión:**

**Asíntotas verticales:**

**Puntos de discontinuidad:**

Observa la gráfica siguiente que corresponde a la función  $y = \operatorname{tg} x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$



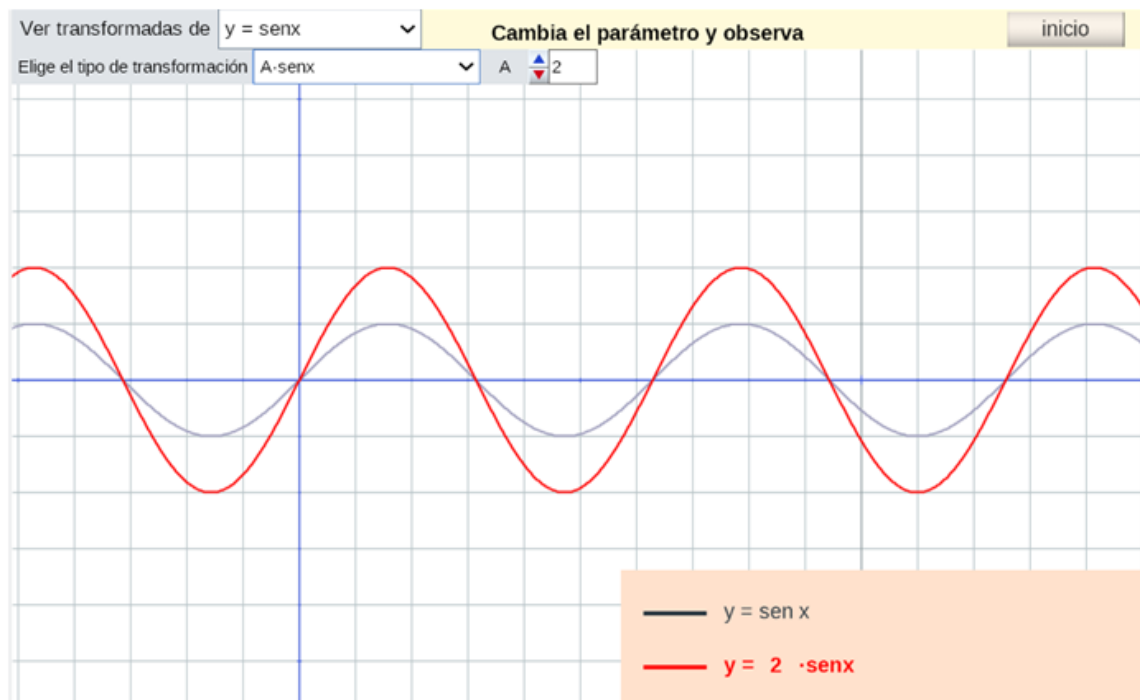
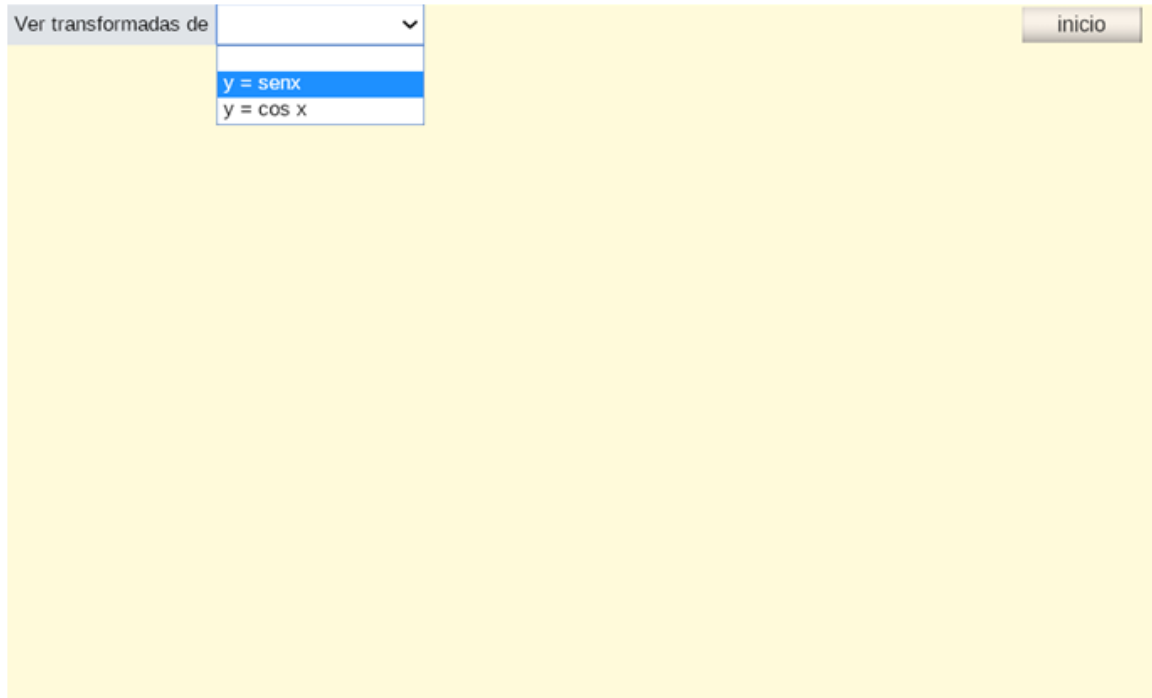
Completa el siguiente cuadro con sus propiedades:

<b><u>Propiedades de la función <math>y = \operatorname{tg} x</math> en el intervalo <math>[0, 2\pi]</math></u></b>	
<b>Dominio =</b>	
<b>Puntos de corte con el eje de ordenadas:</b>	
<b>Puntos de corte con el eje de abscisas:</b>	
<b>Intervalos de crecimiento:</b>	
<b>Intervalos de decrecimiento:</b>	
<b>Máximos/mínimos relativos:</b>	
<b>Intervalos de concavidad:</b>	
<b>Intervalos de convexidad:</b>	
<b>Puntos de inflexión:</b>	
<b>Asíntotas verticales:</b>	
<b>Puntos de discontinuidad:</b>	

## CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS POR TRASLACIÓN Y DILATACIÓN

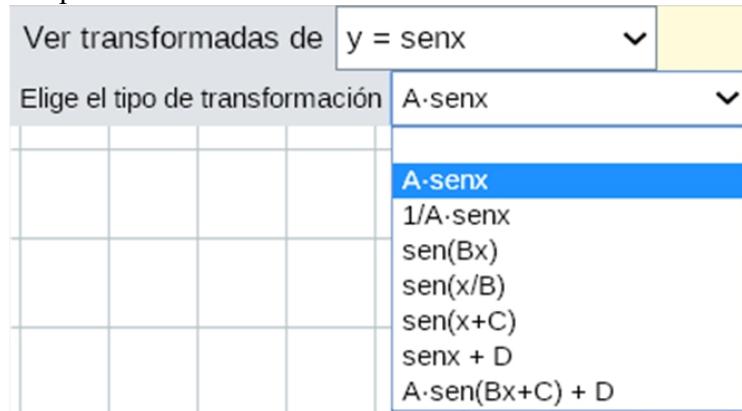
En la escena de la página 32 del libro debes seguir las instrucciones que se dan a continuación

Al hacer clic en PULSAR PARA COMENZAR te aparece el menú Ver transformadas de.  
Debes seleccionar la función  $y = \text{sen } x$



Una vez hayas seleccionado lo anterior tienes en pantalla la función  $y = \text{sen } x$  en gris y la función  $y = 2\text{sen } x$  en otro color. Modifica el valor de A y observa los cambios que se producen en la función de color. De esta forma podrás averiguar qué efecto produce en la gráfica multiplicar por un número.

Repite lo anterior con todas las posibilidades del menú



Completa el siguiente recuadro resumen siguiendo el ejemplo:

Transformación	Efecto que se produce en la gráfica
$y = 2 \text{ sen } x$	
$y = 3 \text{ sen } x$	
$y = 1/2 \text{ sen } x$	
$y = 1/3 \text{ sen } x$	
$y = \text{sen}(2x)$	
$y = \text{sen}(3x)$	
$y = \text{sen}(x/2)$	
$y = \text{sen}(x/3)$	
$y = \text{sen}(x+2)$	
$y = \text{sen}(x+3)$	La función $y = \text{sen } x$ sube hacia arriba 2 unidades
$y = \text{sen } x + 3$	La función $y = \text{sen } x$ sube hacia arriba 3 unidades
$y = \text{sen } x - 2$	
$y = \text{sen } x - 3$	

Cambia de función eligiendo  $y = \cos x$  en el menú



Repita lo anterior con la función  $y = \cos x$  y completa el siguiente recuadro resumen:

Transformación	Efecto que se produce en la gráfica
$y = 4 \cos x$	
$y = 5 \cos x$	
$y = 1/4 \cos x$	
$y = 1/5 \cos x$	
$y = \cos (4x)$	
$y = \cos (5x)$	
$y = \cos (x/4)$	
$y = \cos (x/5)$	
$y = \cos (x+4)$	
$y = \cos (x+5)$	
$y = \cos (x-4)$	
$y = \cos (x-5)$	
$y = \cos x + 4$	La función $y = \cos x$ sube hacia arriba 4 unidades
$y = \cos x + 5$	La función $y = \cos x$ sube hacia arriba 5 unidades
$y = \cos x - 4$	
$y = \cos x - 5$	

## PARA PRACTICAR

Haz ejercicios con la escena de la página 33 del libro y escribe la expresión algebraica de las siguientes funciones transformadas de la función  $y = \text{sen } x$  en el recuadro

