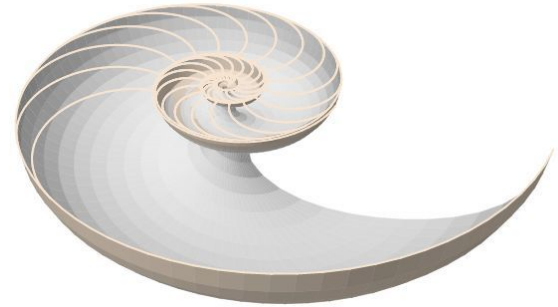
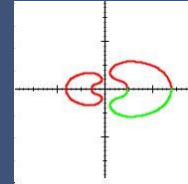
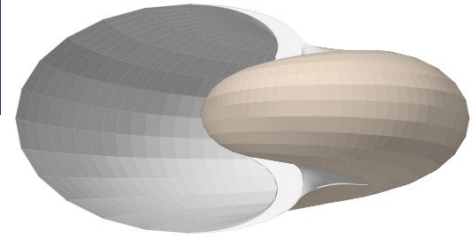
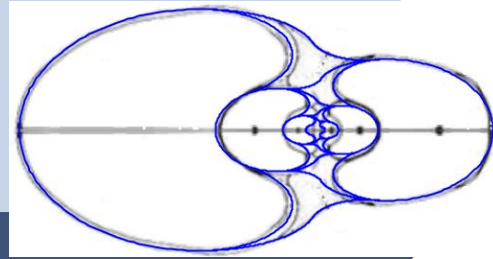
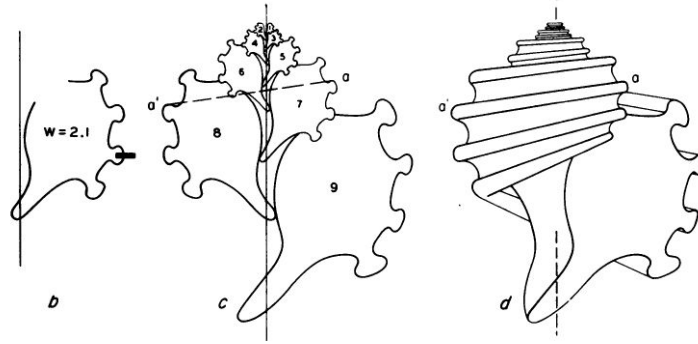




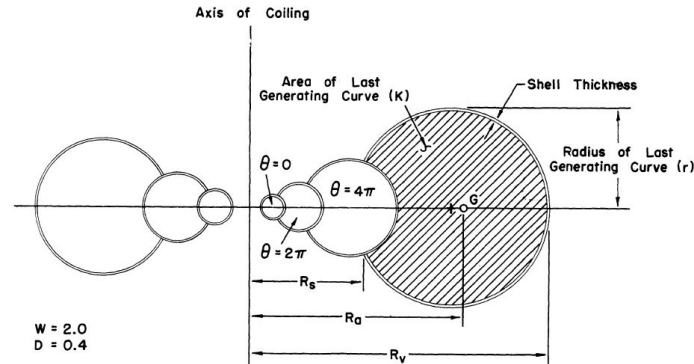
Modelo tridimensional uniforme del Nautilus





[Raud](#), 1961

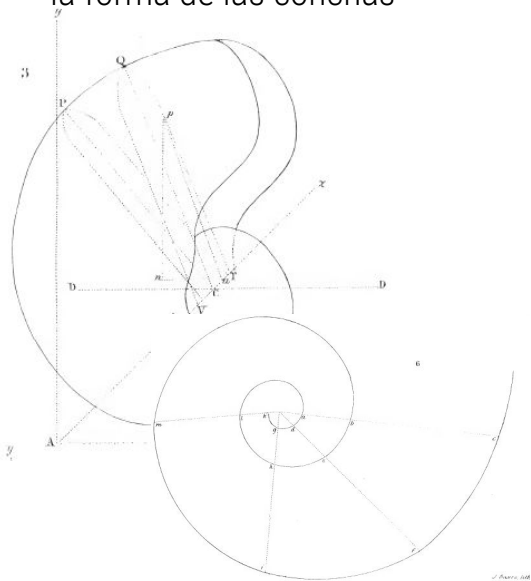
Modelado 3D de las conchas



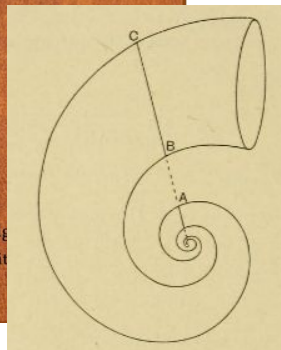
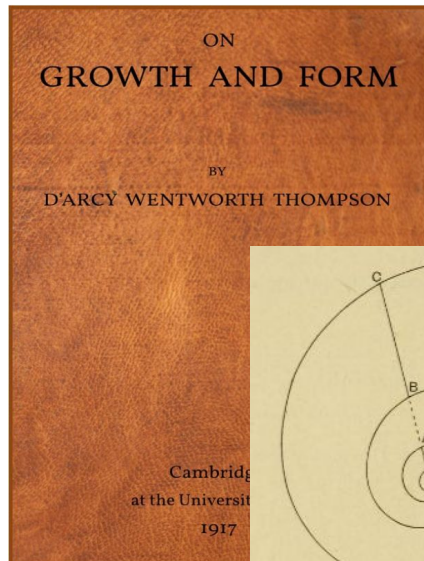
[Raud & Chamberlain](#) (1967)

Antecedentes en la modelación 3D de las conchas

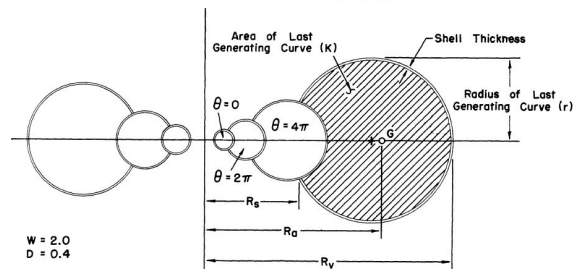
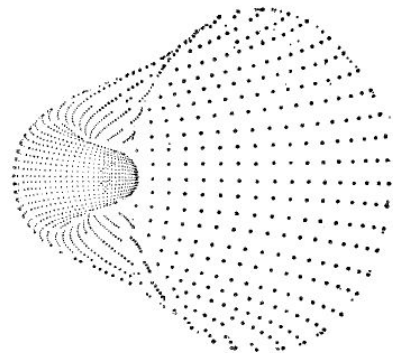
La espiral logarítmica base en la forma de las conchas



Moseley Henry, (1838). [On the geometrical forms of turbinated and discoid shells](#) *Phil. Trans. R. Soc.* **128**: 351–370

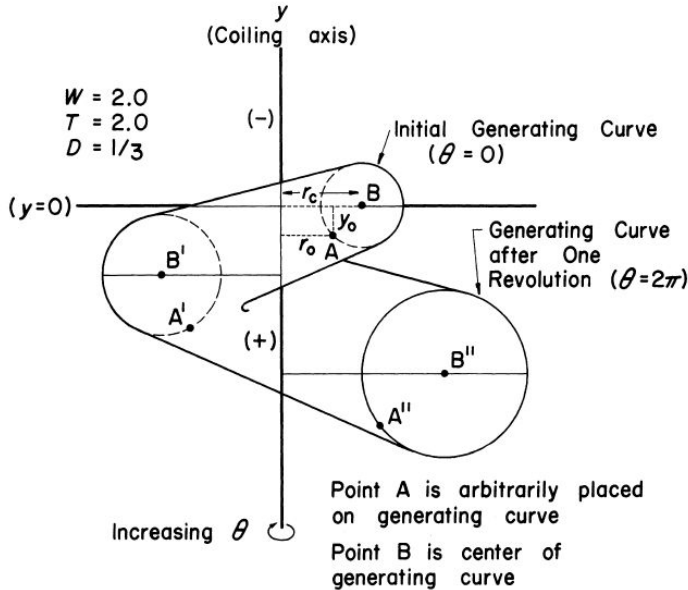


Thompson, D'A. W., (1917). [On growth and Form](#). Cam. Univ. Press.



Raup, D. M. (1961). [The Geometry of Coiling in Gastropods](#). *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 47(4), 602–609.

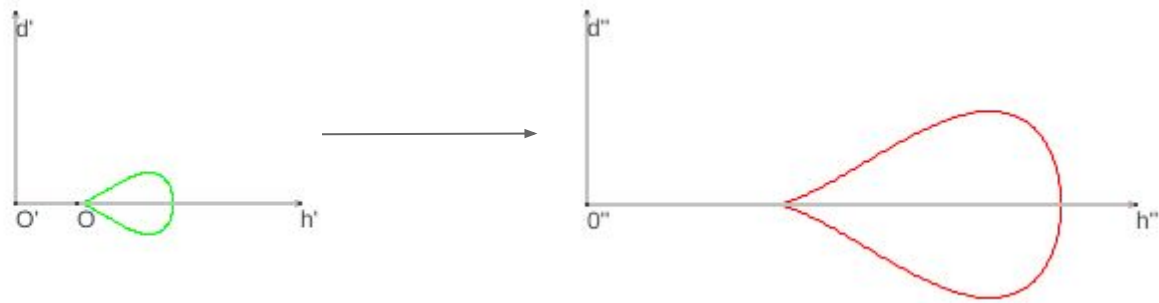
El modelo 3D de Raud



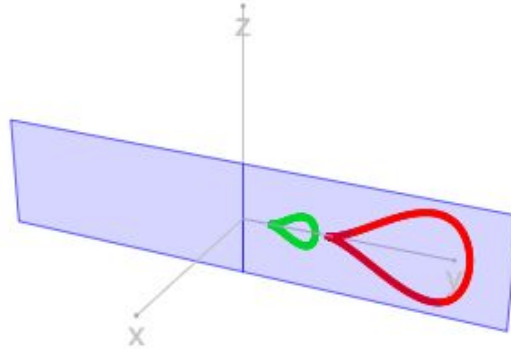
Cuatro parámetros determinan el modelo de la concha:

- La forma de la curva generatriz o sección transversal.
- La distancia o posición relativa de la curva generatriz respecto al eje de giro.
- El factor de crecimiento.
- La traslación en la dirección del eje de giro (sólo para conchas turbinadas).
 - ★ La curva generatriz se entiende en mero sentido geométrico (sección) porque el borde final de la concha no siempre coincide con él, al no ser este borde necesariamente una sección plana.
 - ★ Para reflejar la ontogénesis es necesario adaptar el modelo en cada fase de crecimiento.
 - ★ Aquí no se modelan la variaciones de color y líneas de crecimiento que se manifiestan en la concha.

Raup, D. M. (1966). [Analysis of Shell Coiling: General Problems](#). *Journal of Paleontology*, Vol. 40(5), 1178-1190.

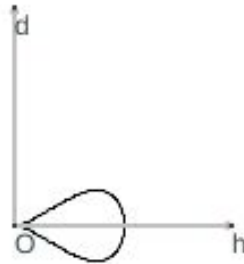


Adaptación del modelo de Raud



Primer parámetro: Sección transversal

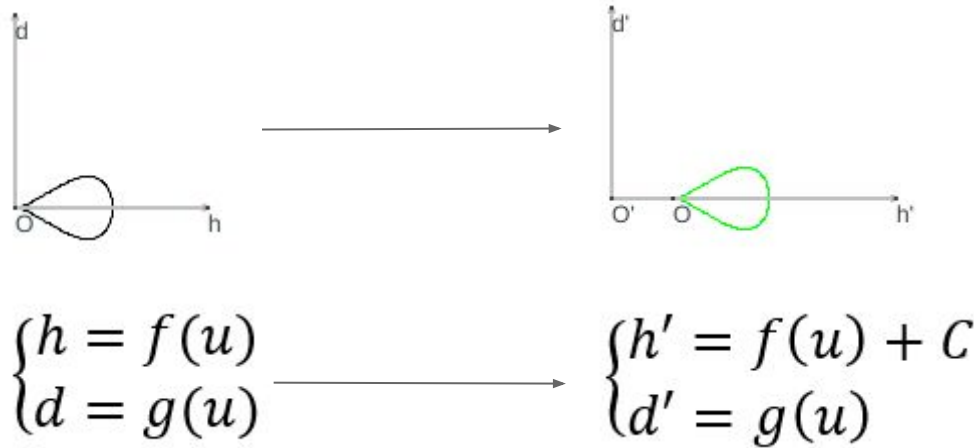
Cualquier corte por un plano perpendicular al plano sagital muestra la sección transversal de la concha que siempre tiene la misma forma (en un modelo uniforme), pero escalada por el crecimiento “logarítmico” (exponencial).



$$\begin{cases} h = f(u) \\ d = g(u) \end{cases}$$

Segundo parámetro: Distancia al eje de giro

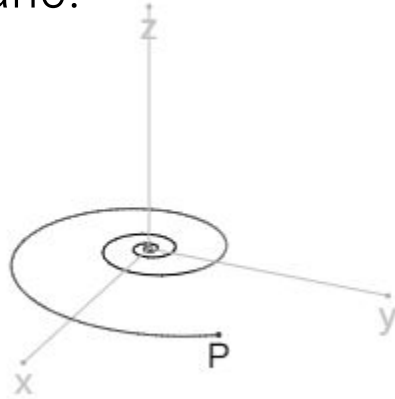
La distancia C al eje de giro introduce una traslación en la sección transversal.



Según el valor de C y la forma de la sección la concha puede ser involuta (se interseca en cada verticilo) o evoluta (no se interseca a sí misma).

Tercer parámetro: Factor de Crecimiento.

En el crecimiento discoidal la trayectoria que sigue el origen de coordenadas en el plano sagital o medio, es la de una espiral logarítmica de base ***b*** y factor de escala ***a***, en ese mismo plano.

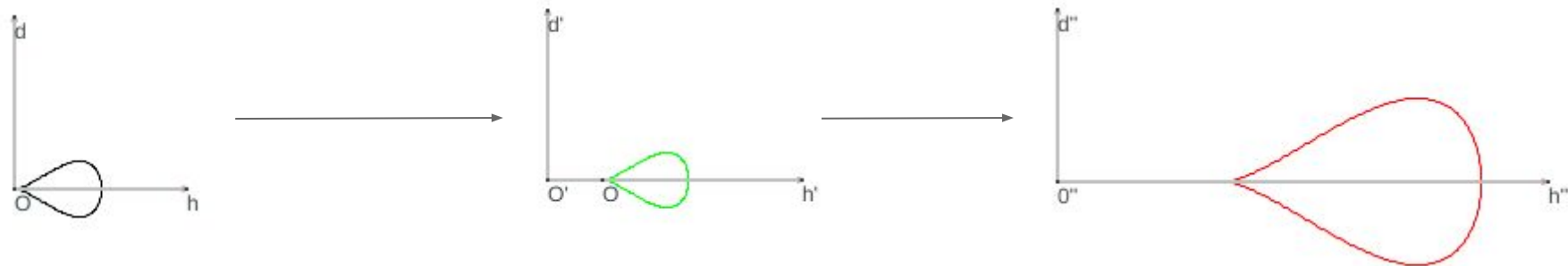


$$P(ab^V \cos V, ab^V \sin V, 0)$$

Para el Nautilus la espiral logarítmica es cordobesa, es decir, ***b***=1,185580... y ***a*** es un factor de escala o giro de la espiral.

El valor de ***b*** puede generar conchas involutas o evolutas.

Ecuaciones de la transformación (I)

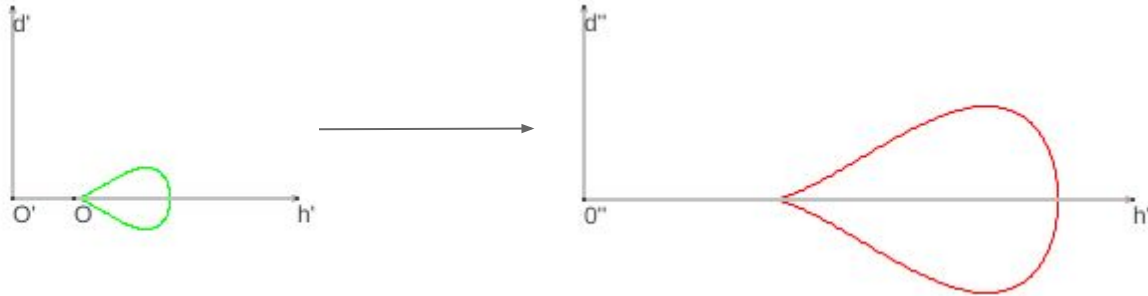


$$\begin{cases} h = f(u) \\ d = g(u) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} h' = f(u) + C \\ d' = g(u) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} h'' = ab^V (f(u) + C) \\ d'' = ab^V g(u) \end{cases}$$

Ecuaciones de la transformación (II)



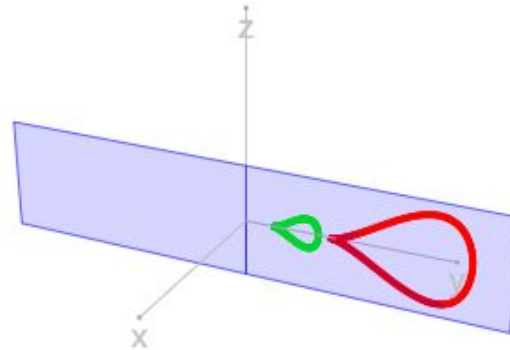
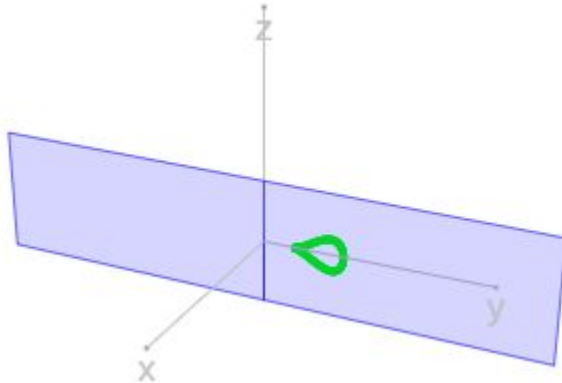
[Modelo 3D de las conchas discoidales](#)



Ubicación en el plano: $\text{sen } V \ x - \cos V \ y + 0 \ z = 0$

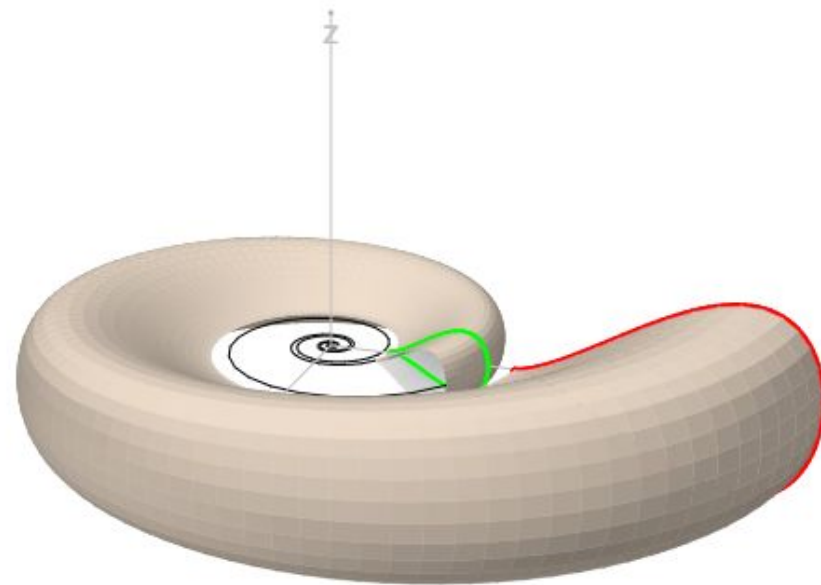
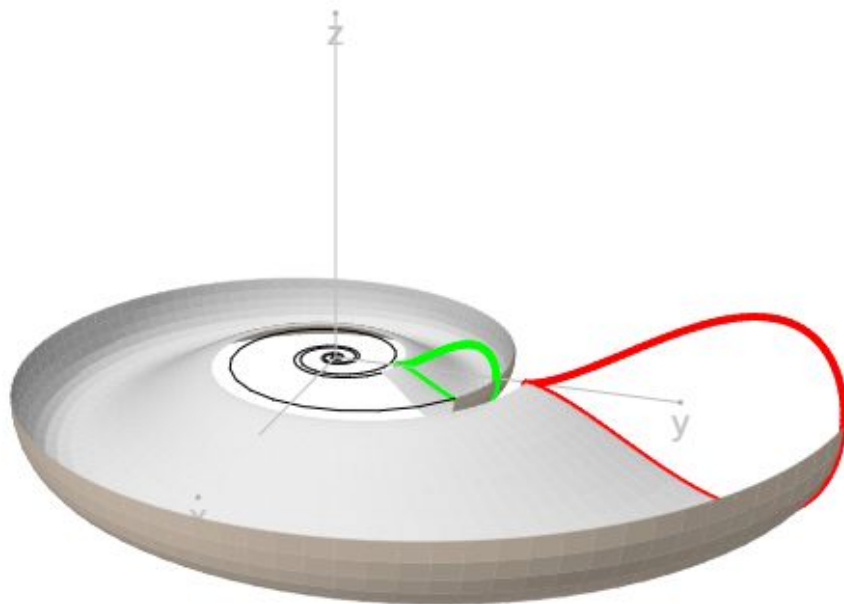
$$\begin{cases} h'' = ab^V (f(u) + C) \\ d'' = ab^V g(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = h'' \cos V \\ y = h'' \text{sen } V \\ z = d'' \end{cases}$$

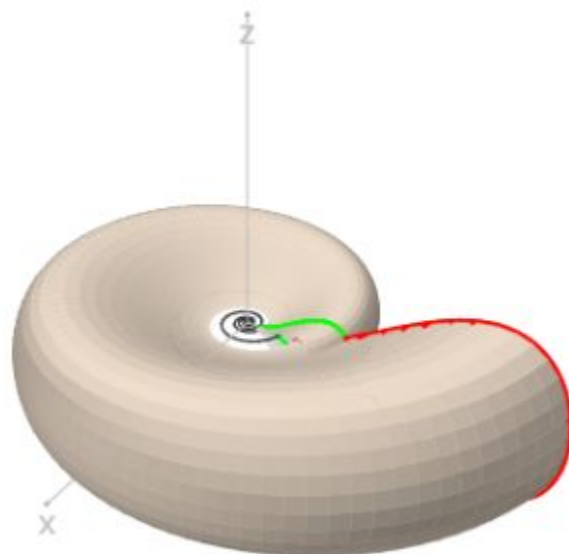
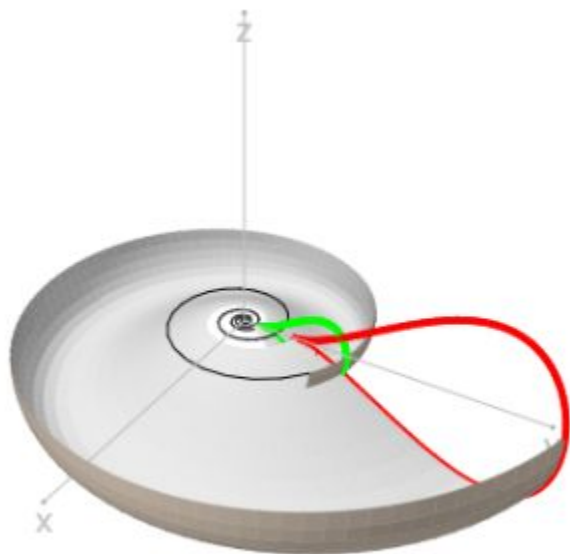


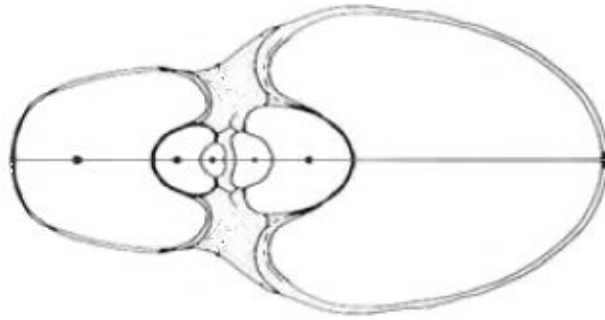
$$\begin{cases} x = ab^V (f(u) + C) \cos V \\ y = ab^V (f(u) + C) \text{sen } V \\ z = ab^V g(u) \end{cases}$$

Modelo 3D concha evoluta

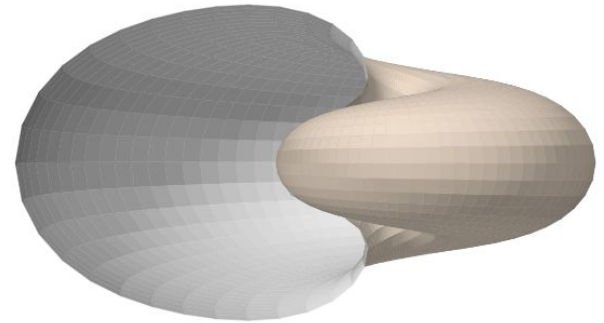
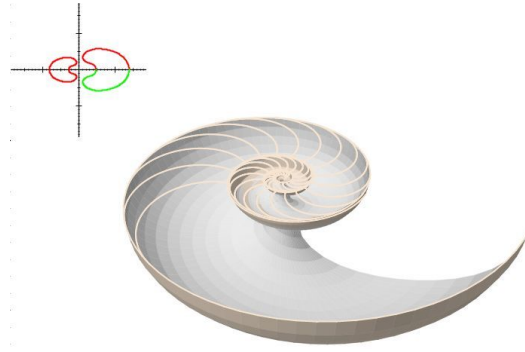
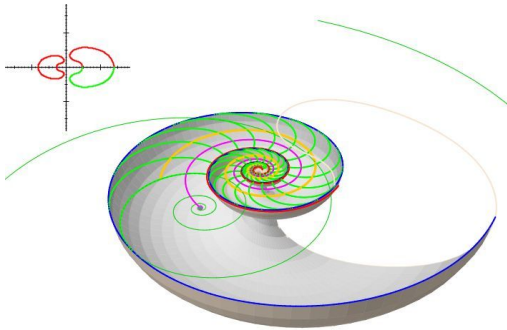


Modelo 3D concha involuta



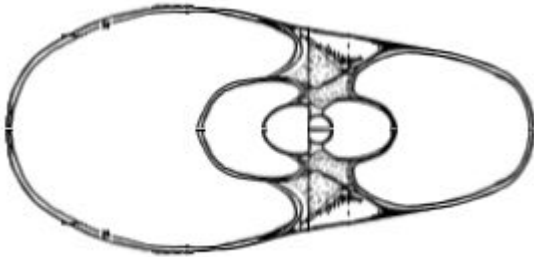


Hacia el Modelo 3D del Nautilus

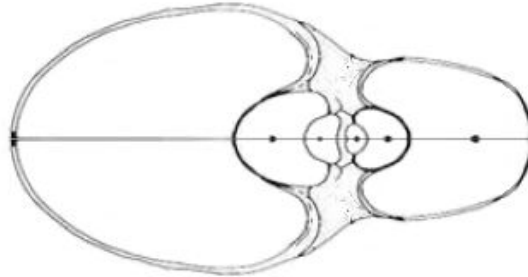




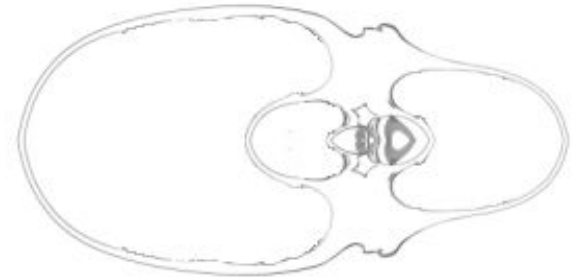
La sección transversal del Nautilus



Tanabe, Kazushige & Hayasaka, Shozo & Tsukahara, Junzo. (1985) **¡Errónea!**



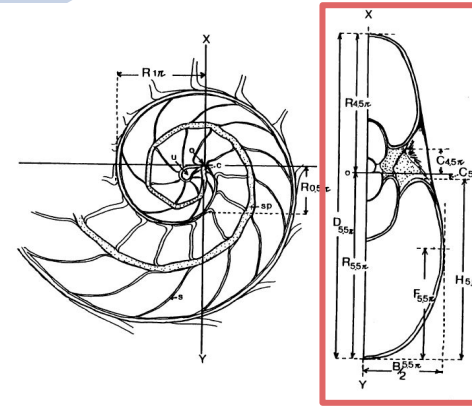
Tanabe, Kazushige & Tsukahara, Jyunzo & Hayasaka, Shozo. (1990).



González-Restrepo, F. (2019).
Museo D'Arcy Thompson.

La sección del Nautilus según Tanabe, Hayasaka y Tsukahara (1985)

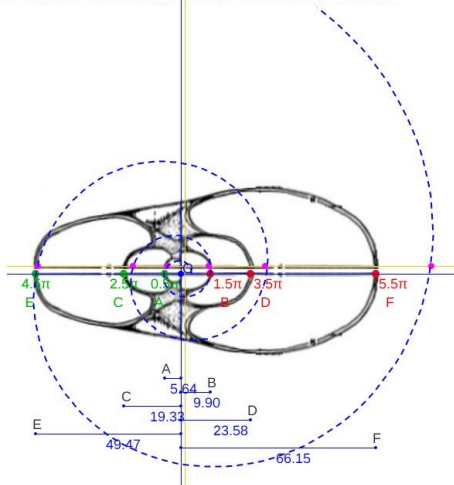
Tanabe, Kazushige & Hayasaka, Shozo & Tsukahara, Junzo. (1985). [Morphological Analysis of Nautilus pompilius](#). *Kagoshima Univ. Res. Center S. Pac. Occasional Papers*, No. 4. p. 38-49.



¡sección mal editada!
No es cordobesa, ni
logarítmica

Verificación de que no es cordobesa

Crecimiento en la sección de Tanabe et al. 1985



Pulsación diametral cordobesa: $1.185580^\pi=1.71$

Pulsación diametral a partir de la imagen de la sección frontal

$$\frac{OF}{OE} = \frac{66.15}{49.47} = 1.34$$

OE 49.47

$$\frac{OD}{OD} = \frac{49.57}{23.58} = 2.1$$

$$\frac{OD}{OG} = \frac{23.58}{19.22} = 1.22$$

OC 19.33

$$\frac{OB}{9.90} = 1.95$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{9.90}{5.61} = 1.76$$

$U_A = 3.64$

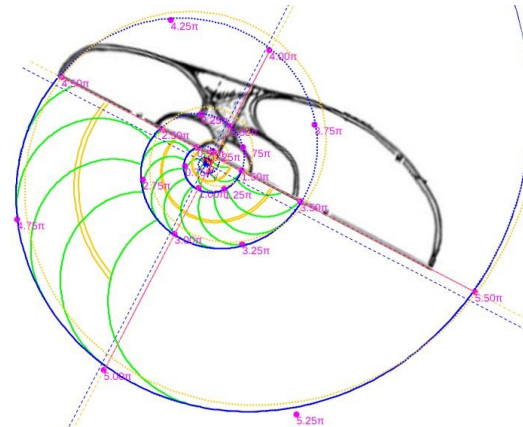
Pulsación radial cordobesa: $1.185580^{2\pi}=2.91$

Pulsación radial obtenida a partir
de la imagen de la sección frontal

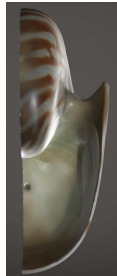
$$\frac{OF}{OE} = \frac{66.15}{49.47} = 2.80$$

<i>OD</i>	23.58	<i>OC</i>	19.33
<i>OD</i>	23.58	<i>OC</i>	19.33

$$\frac{OB}{OA} = \frac{2.38}{9.90} = 2.38 \quad \frac{OC}{OA} = \frac{19.55}{5.64} = 3.43$$



La sección del Nautilus según G-Restrepo (2019), museo D'Arcy Thompson

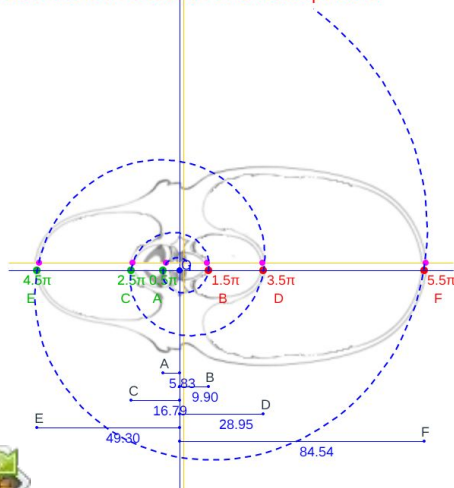


González-Restrepo, F.
(2019): Cortes del Nautilus a
partir de la digitalización 3D
del museo Dundee. Red
Descartes Colombia.



Verificación de que es cordobesa

Crecimiento en la sección de G-Restrepo 2019



Pulsación diametral cordobesa: $1.185580^{\pi}=1.71$

Pulsación diametral a partir
de la imagen de la sección frontal

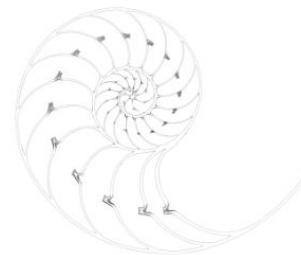
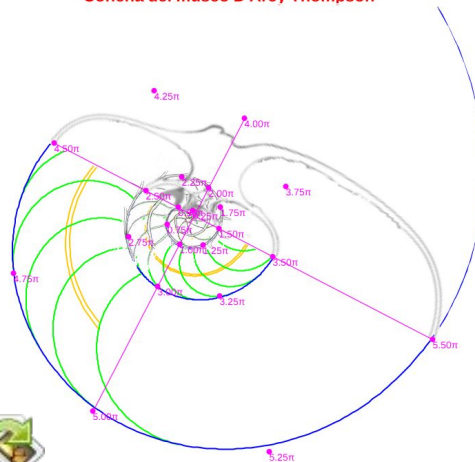
$$\begin{aligned}\frac{OF}{OE} &= \frac{84.54}{49.30} = 1.71 \\ \frac{OE}{OD} &= \frac{49.30}{28.95} = 1.7 \\ \frac{OD}{OC} &= \frac{28.95}{16.79} = 1.72 \\ \frac{OC}{OB} &= \frac{16.79}{9.90} = 1.70 \\ \frac{OB}{OA} &= \frac{9.90}{5.83} = 1.70\end{aligned}$$

Pulsación radial cordobesa: $1.185580^{2\pi}=2.91$

Pulsación radial obtenida a partir
de la imagen de la sección frontal

$$\begin{aligned}\frac{OF}{OD} &= \frac{84.54}{28.95} = 2.92 \\ \frac{OD}{OC} &= \frac{28.95}{16.79} = 2.93 \\ \frac{OC}{OB} &= \frac{16.79}{9.90} = 2.88\end{aligned}$$

Modelo ontogénico del Nautilus
Sección de González-Restrepo (2019)
Concha del museo D'Arcy Thompson



La sección del Nautilus según Tanabe, Hayasaka y Tsukahara (1990)

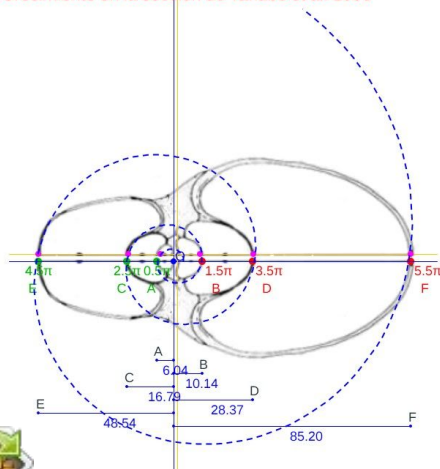
Tanabe, Kazushige & Tsukahara, Jyunzo & Hayasaka, Shozo. (1990). [Comparative morphology of living Nautilus \(Cephalopoda\) from the Philippines, Fiji and Palau](#), *Malacologia* 31(2):297-312.



sección cordobesa

Verificación de que es cordobesa

Crecimiento en la sección de Tanabe et al. 1990



Pulsación diametral cordobesa: $1.185580^{\pi} = 1.71$

Pulsación diametral a partir de la imagen de la sección frontal

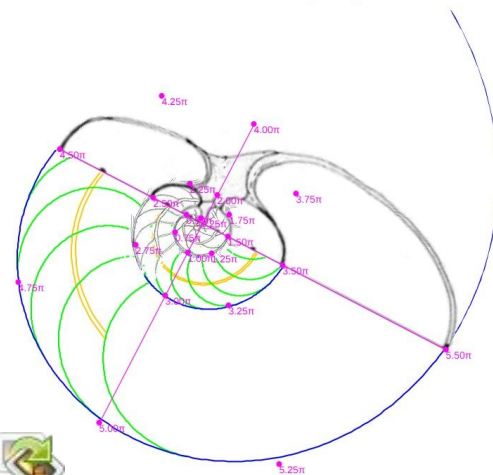
$$\begin{aligned} \frac{OF}{OE} &= \frac{85.20}{48.54} = 1.76 \\ \frac{OE}{OD} &= \frac{48.54}{28.37} = 1.71 \\ \frac{OD}{OC} &= \frac{28.37}{16.79} = 1.69 \\ \frac{OC}{OB} &= \frac{16.79}{10.14} = 1.66 \\ \frac{OB}{OA} &= \frac{10.14}{6.04} = 1.68 \end{aligned}$$

Pulsación radial cordobesa: $1.185580^{2\pi} = 2.91$

Pulsación radial obtenida a partir de la imagen de la sección frontal

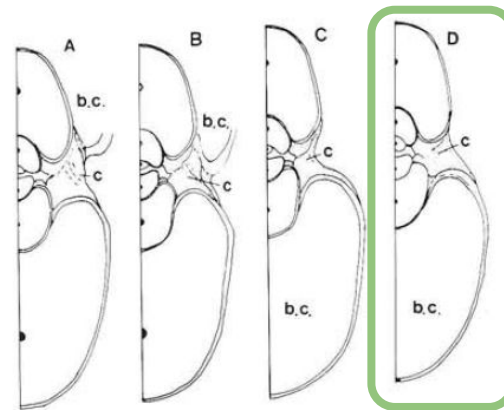
$$\begin{aligned} \frac{OF}{OD} &= \frac{85.20}{28.37} = 3.00 & \frac{OE}{OC} &= \frac{48.54}{16.79} = 2.89 \\ \frac{OD}{OB} &= \frac{28.37}{10.14} = 2.80 & \frac{OC}{OA} &= \frac{16.79}{6.04} = 2.78 \end{aligned}$$

Modelo ontogénico del Nautilus
Sección de Tanabe et al. (1990)



Búsqueda de un tipo (holotipo) de la sección frontal del Nautilus

Tanabe, Kazushige & Tsukahara, Jyunzo & Hayasaka, Shozo. (1990). [Comparative morphology of living Nautilus \(Cephalopoda\) from the Philippines, Fiji and Palau](#), *Malacologia* 31(2):297-312.



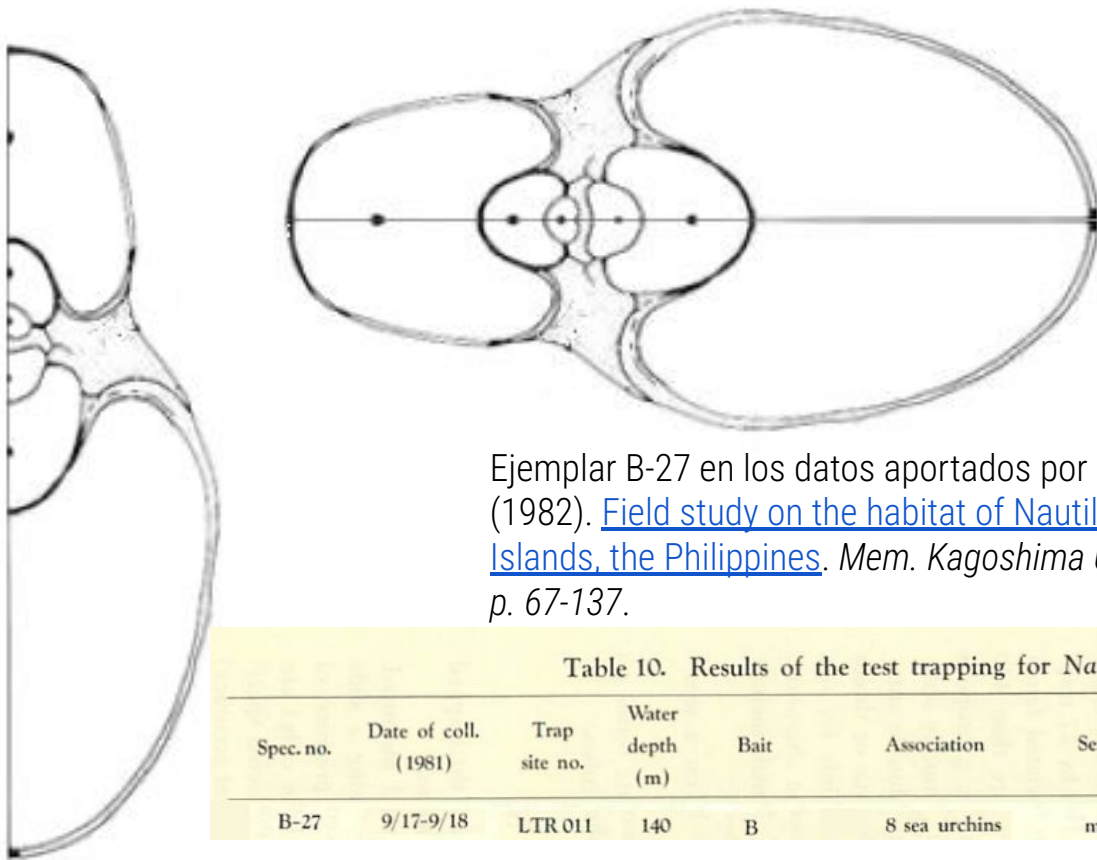
secciones cordobesas



Date of collection	Specimen	Sex	Weight(g)			Shell size(mm)			From ratios			Remarks
			Total	Tissue	Shell	D	B	H	B/D	H/D	B/H	
Aug. 22-23,'88	T1-1	M	1240+	----	----	220.0	102.9	155.0	.468	.705	.664	Released (Aug.23)
	T1-2	F	848	----	----	193.0	82.4	134.2	.427	.695	.614	
	T1-3	M	1095	----	----	206.0	96.0	141.1	.466	.685	.681	
	T1-4	M	1240+	----	----	218.5	97.6	147.0	.447	.673	.664	
	T1-5	F	910	----	----	192.5	88.5	138.6	.460	.720	.639	
	T1-6	F	868	----	----	192.5	86.0	135.6	.447	.704	.634	
	T1-7	M	1078	----	----	200.5	93.7	141.4	.467	.705	.663	

Tanabe, Kazushige & Tsukahara, Junzo. (1995). [Morphological Analysis of Living Nautilus from Palau](#). Kagoshima Univ. Res. Center S. Pac..Occasional Papers, No. 27. p. 41-55.

Tipo de la sección frontal del Nautilus



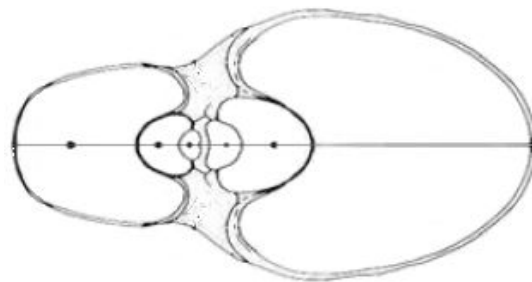
Ejemplar	sexo	diámetro D (mm)	ancho B (mm)	B/D
B-27	m	178,30	90,03	0,505

			media B/D	0,4938
total m	19,00		media B/D m	0,4955
total f	33,00		media B/D f	0,4927

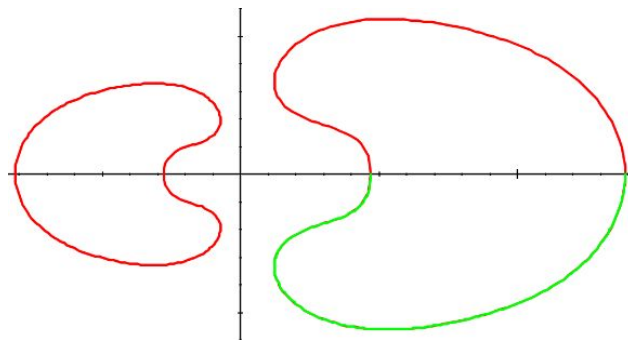
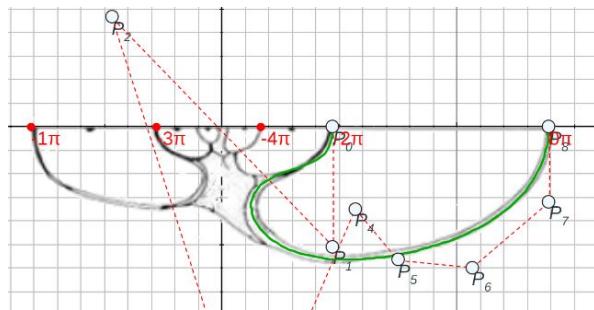
Ejemplar B-27 en los datos aportados por Hayasaka, Shozo, Tanabe, Kazushige et al. (1982). [Field study on the habitat of Nautilus in the environs of Cebu and Negros Islands, the Philippines](#). Mem. Kagoshima Univ. Res. Center S. Pac., Vol. 3, No. 1. 1982 p. 67-137.

Table 10. Results of the test trapping for *Nautilus pompilius* off Bindoy.

Spec. no.	Date of coll. (1981)	Trap site no.	Water depth (m)	Bait	Association	Sex	Shell diam. (m)	Shell width (mm)	Wet weight (gr)	Remarks	B/D	Cameral liquid (ml)
B-27	9/17-9/18	LTR 011	140	B	8 sea urchins	m	178.3	90.03	1035	1z	0.505	—

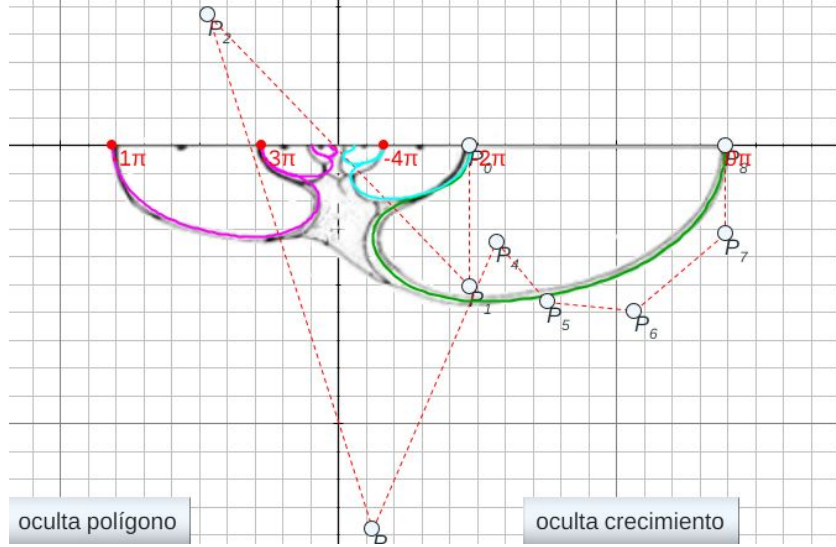


Modelado de la sección frontal

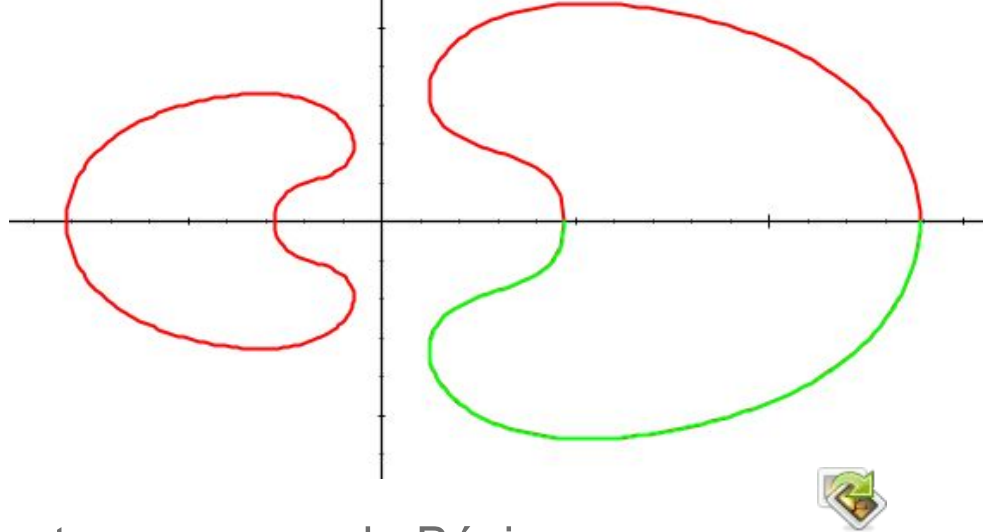


Modelado de la sección de Tanabe et al. (1990)

Ajuste de la sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según Tanabe et al. (1990)



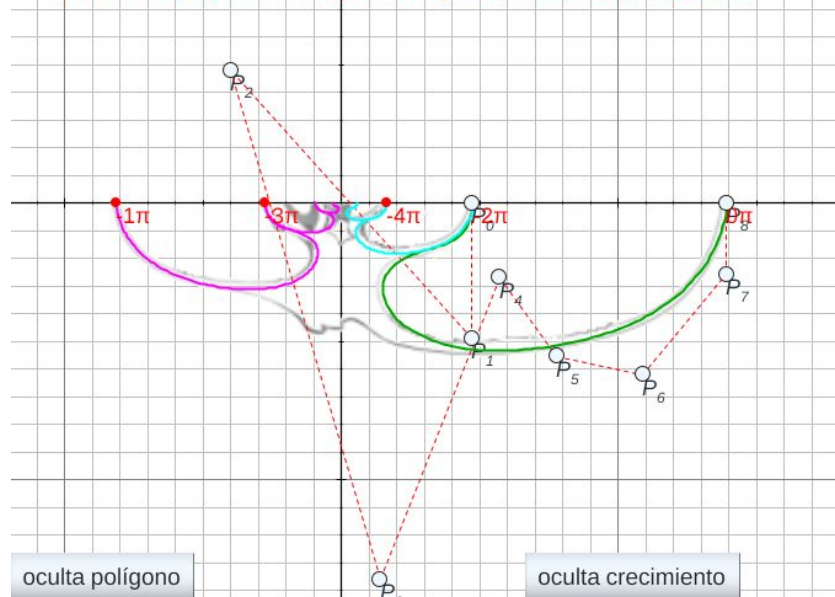
Sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según Tanabe et al. (1990)



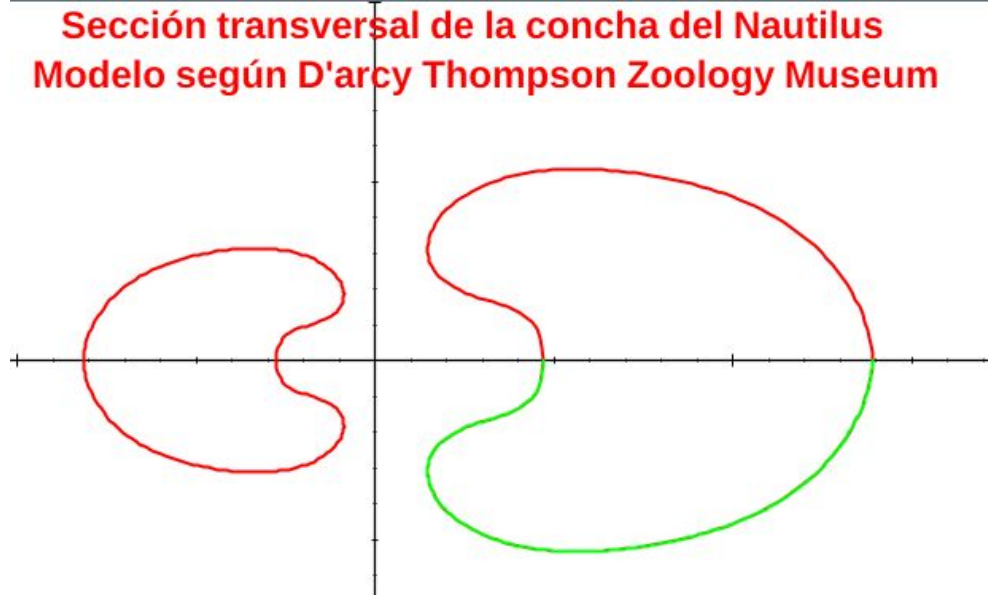
Aproximación mediante una curva de Bézier

Modelado de la sección del D'Arcy Thompson Zoology Museum

Ajuste de la sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según D'arcy Thompson Zoology Museum

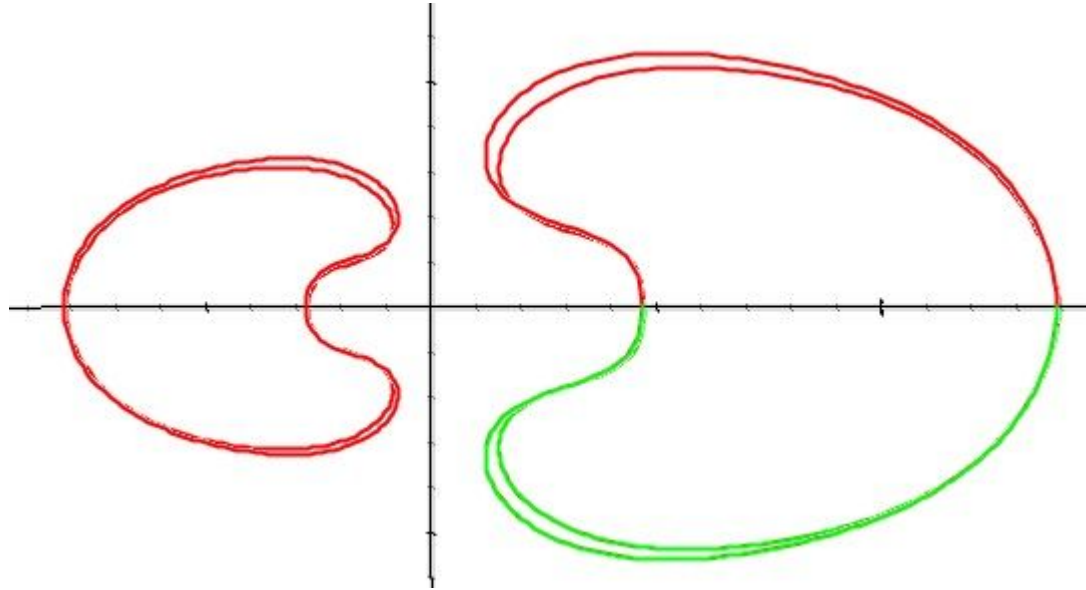


Sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según D'arcy Thompson Zoology Museum



Aproximación mediante una curva de Bézier

Comparativa sección de Tanabe y de Thompson

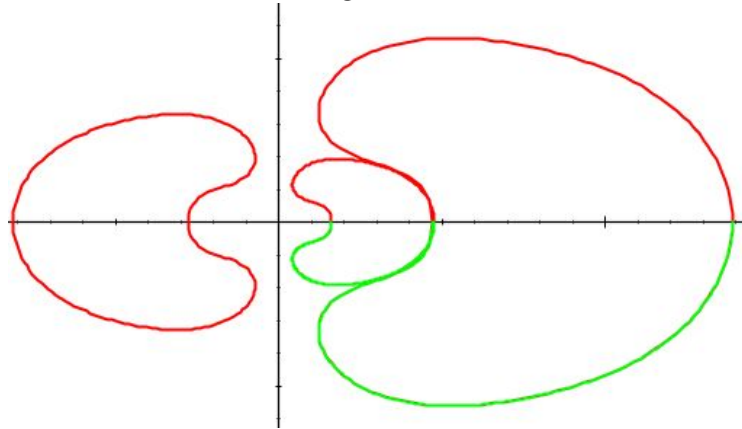


La concha de Tanabe ($B/D \approx 0,5081$) es algo más rechoncha que la de Thompson ($B/D \approx 0,4900$)

Valor medio según Tanabe (1990) ($B/D \approx 0,4938$)

Comentarios al modelado de la sección transversal

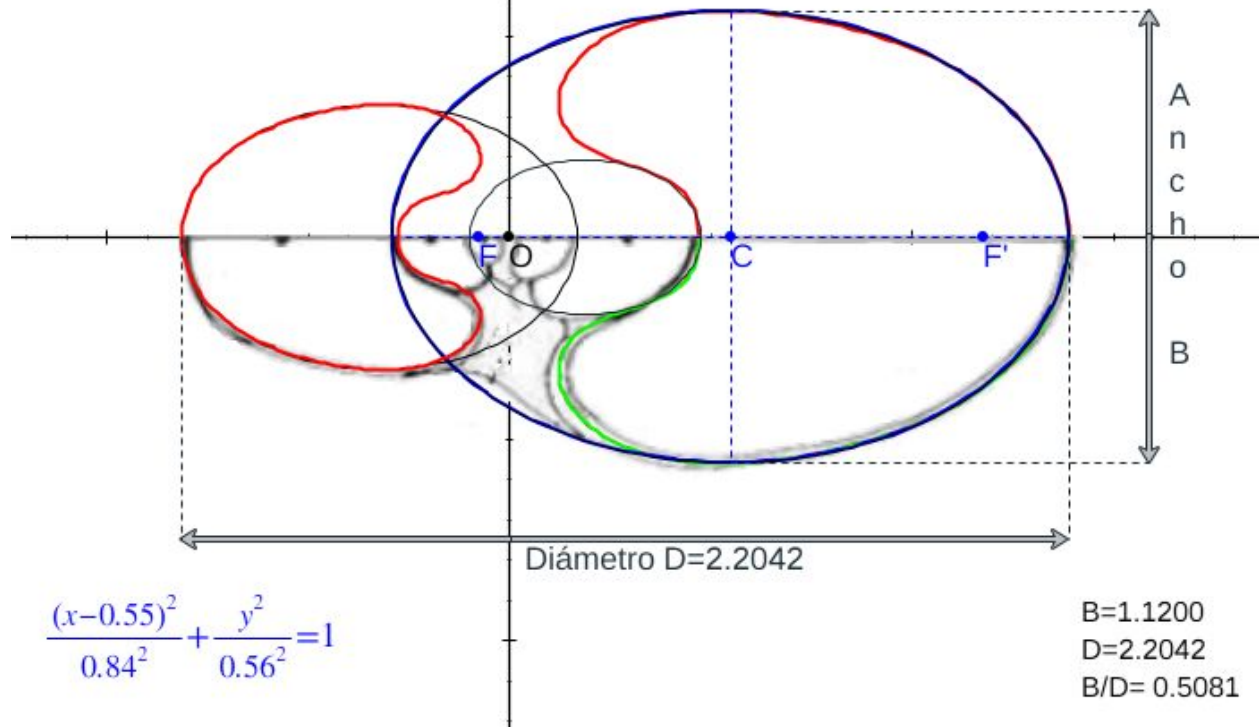
La modelación de la sección transversal se ha realizado siguiendo la sección de la cámara habitacional y para que en cada verticilo (crecimiento correspondiente a un ángulo de 2π) la sección de una, sea tangencial a la otra.



Teóricamente puede plantearse como un enrollamiento espiral que es involuto (la sección transversal se interseca con la del verticilo anterior).

Sección transversal teórica de Tanabe 1990

Sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según Tanabe et al. (1990)



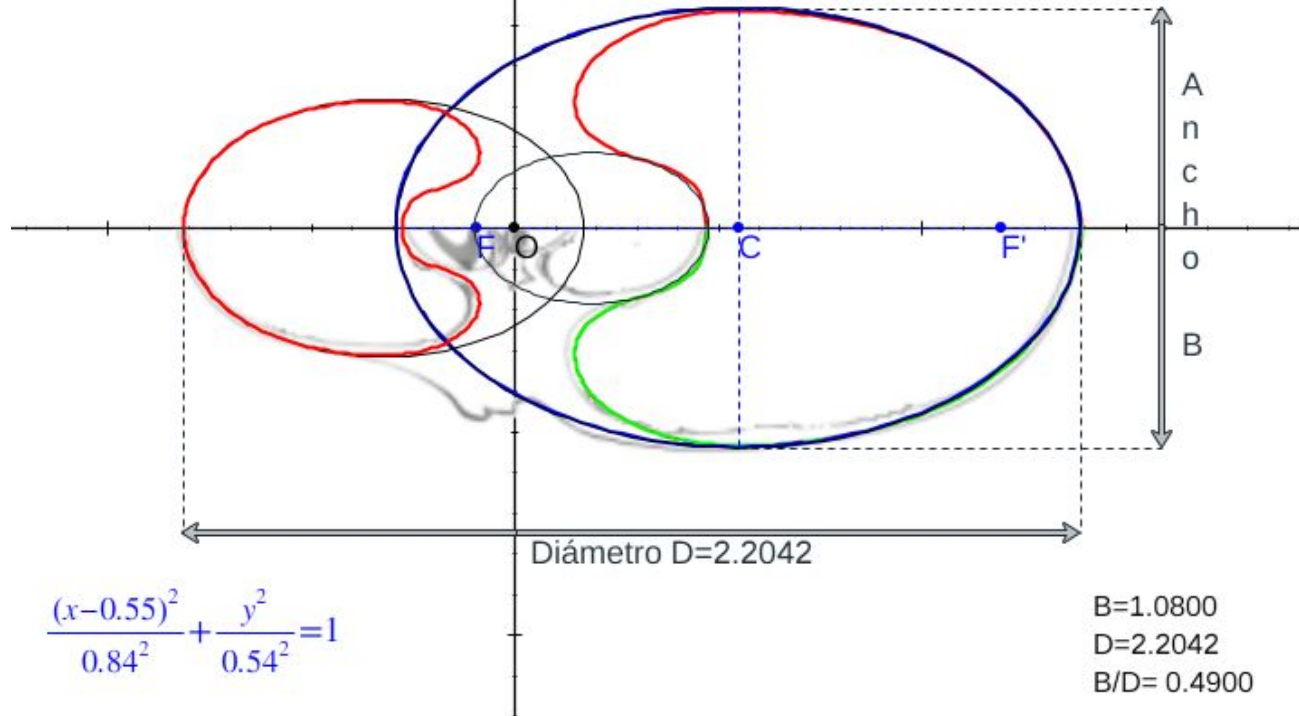
La sección transversal teórica es una elipse

$$e = 0,63 / 0,84 = 0,745$$

B=1.1200
D=2.2042
B/D= 0.5081

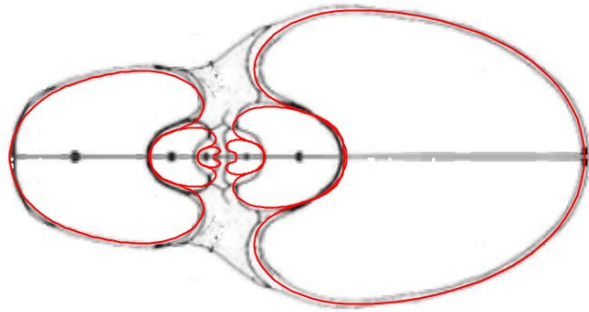
Sección transversal teórica de Thompson

Sección transversal de la concha del Nautilus
Modelo según D'arcy Thompson Zoology Museum



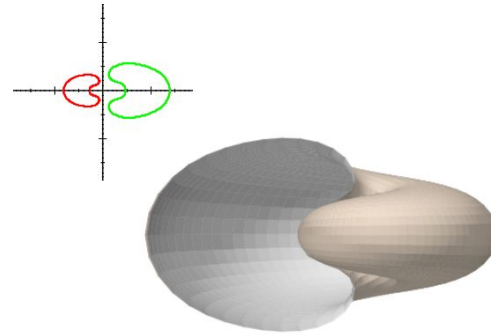
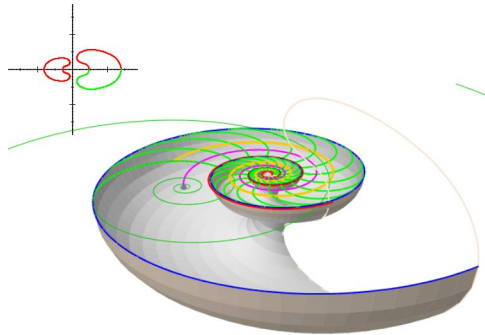
La sección transversal teórica es una elipse

$$e=0,64/0,84 \\ =0,766$$



Nautilus
macromphalus

Modelo tridimensional uniforme sin callo umbilical



A partir de la sección frontal aproximada con una curva de Bézier

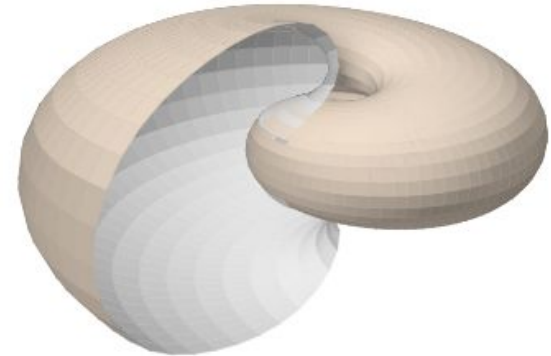
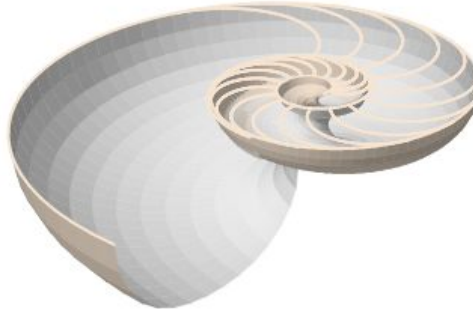
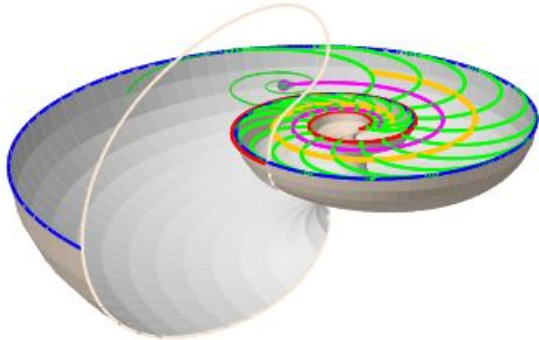
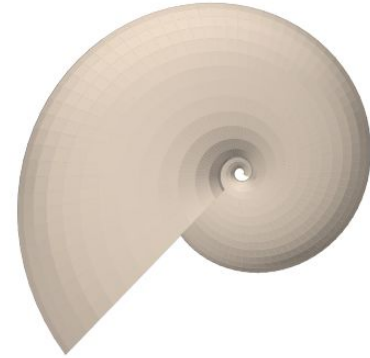
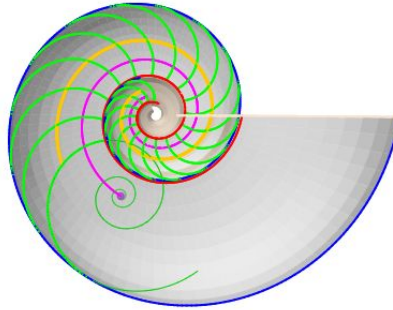
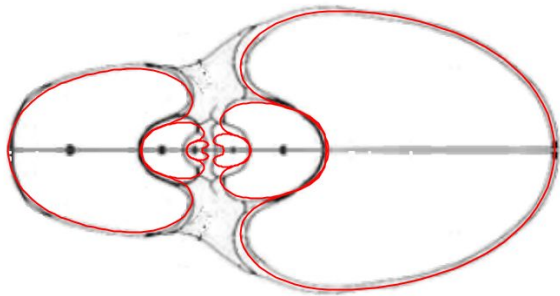


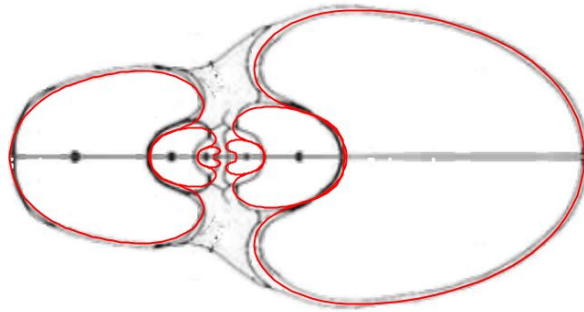
Modelo teórico del tipo

Curva de Bézier

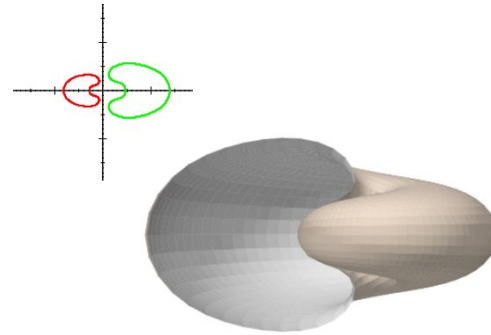
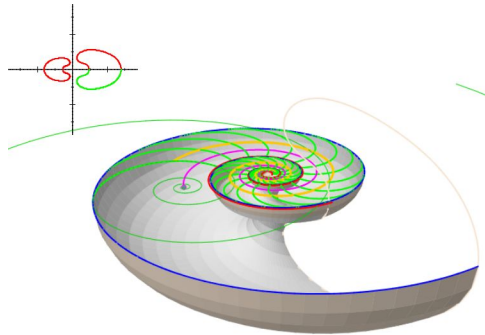


Aplicando el modelo de Raup con la adaptación indicada y usando la aproximación de la concha con la curva de Bézier obtenemos el modelo 3D uniforme del Nautilus.





Hacia el modelo uniforme teórico

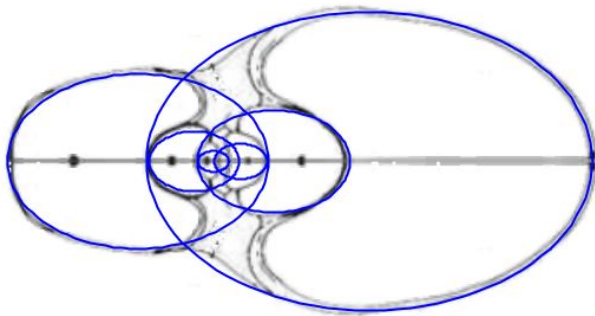




La pared dorsal es la ventral del verticilo anterior

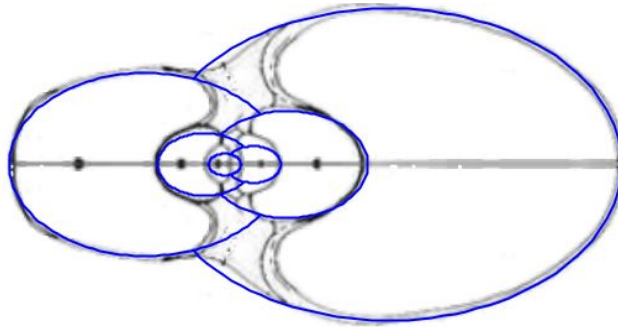
Modelo de la concha ventral

Elíptico global



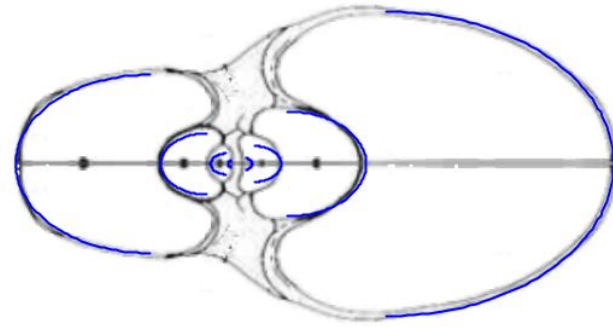
Modelo de la concha ventral

Elíptico involuto



Modelo de la concha ventral

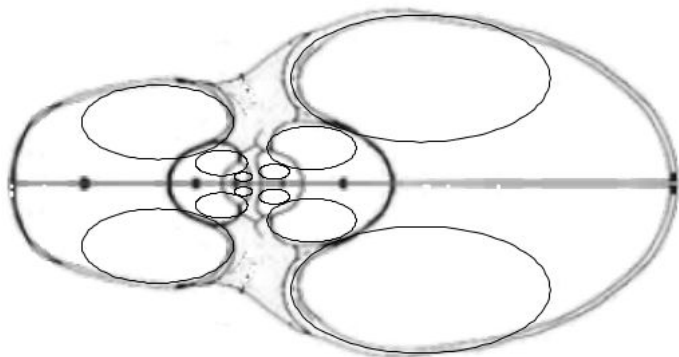
Semielíptico



Modelo teórico de los salientes dorsales

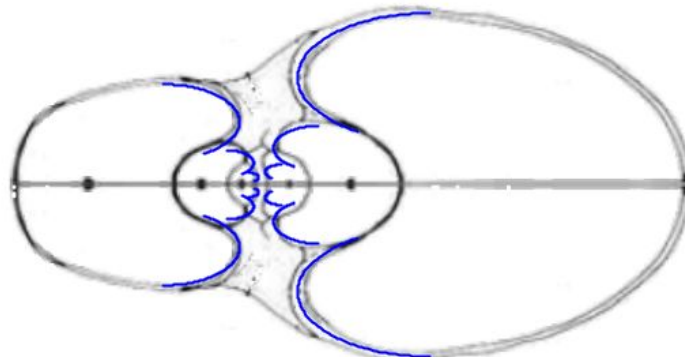
Modelo de los salientes dorsales

Elipse



Modelo de los salientes dorsales

Arco elíptico



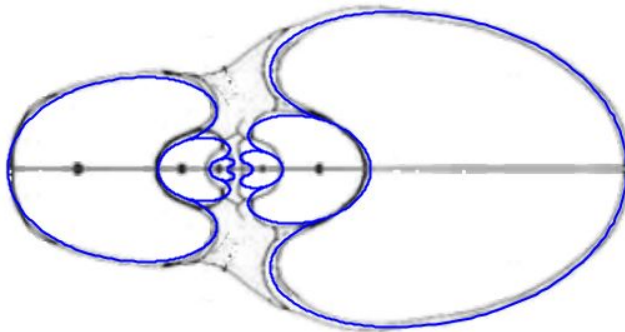
Modelo de la concha ventral

Semielíptico



Modelo de los salientes dorsales

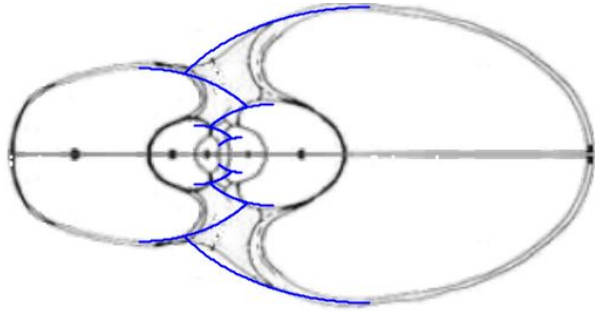
Arco elíptico



Modelo teórico del callo umbilical ombligo

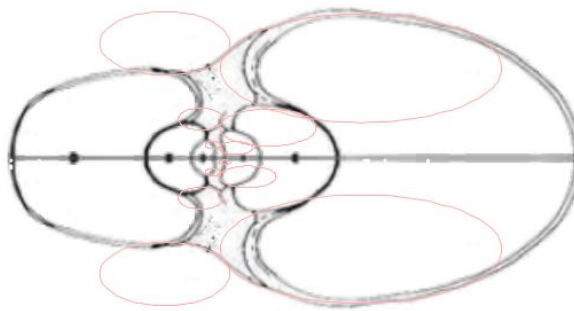
Modelo del callo umbilical

Arco convexo de elipse ventral



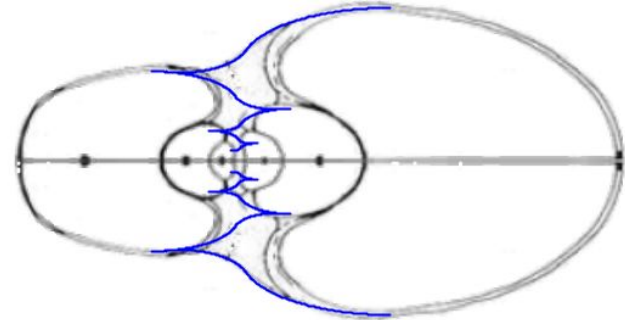
Modelo del callo umbilical

Elipses tangentes



Modelo del callo umbilical

Arcos de elipses tangentes



Modelo de la concha ventral

Semielíptico



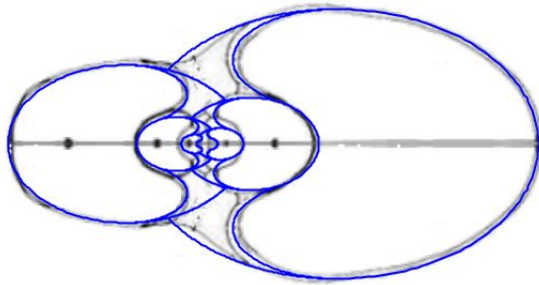
Modelo de los salientes dorsales

Arco elíptico



Modelo del callo umbilical

Arco convexo de elipse ventral



Modelo de la concha ventral

Semielíptico



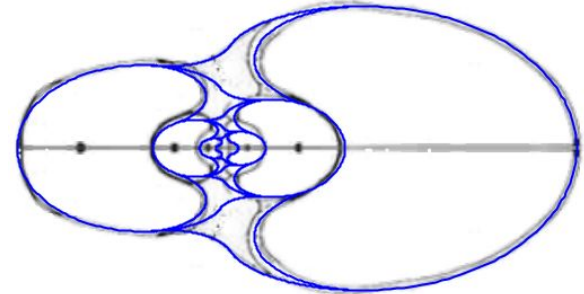
Modelo de los salientes dorsales

Arco elíptico



Modelo del callo umbilical

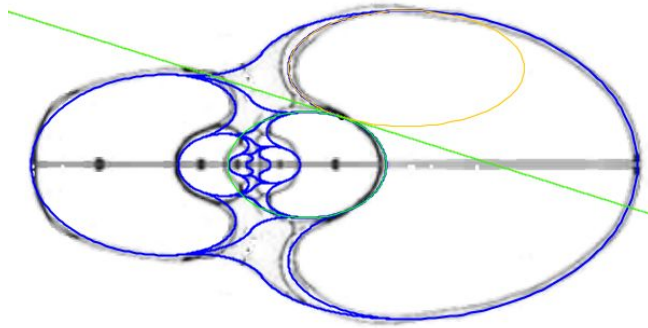
Arcos de elipses tangentes



Tangencias en el modelo teórico

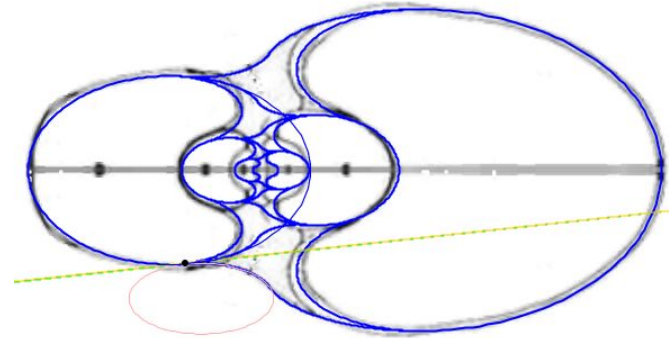
Tangencias

Entre la concha dorsal y el saliente ▼



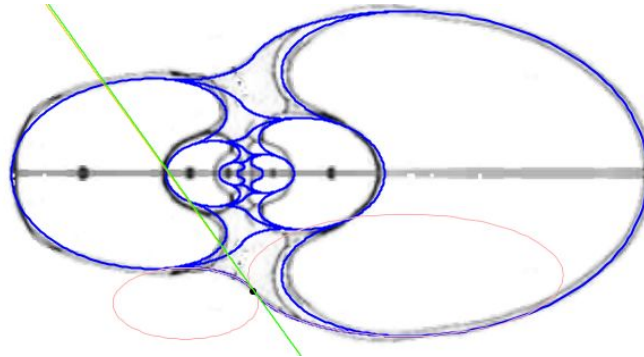
Tangencias

Entre el ombligo y el saliente ▼



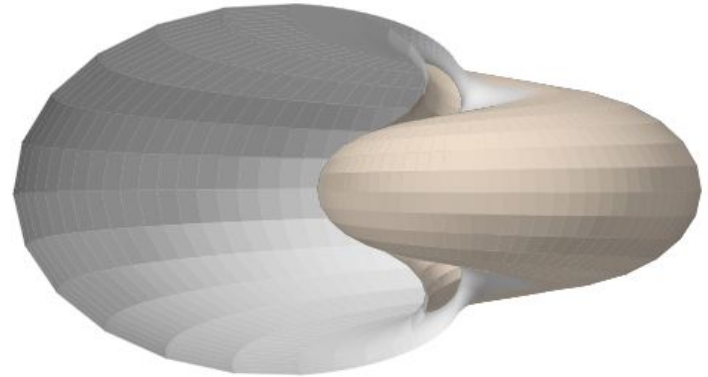
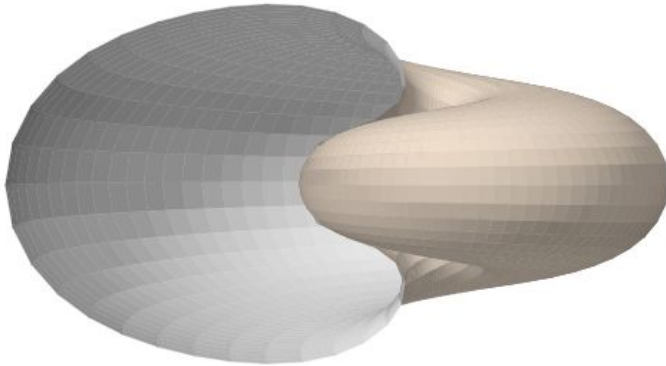
Tangencias

Distinta convexidad en el ombligo ▼





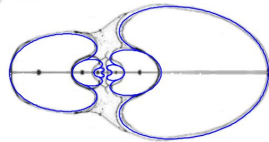
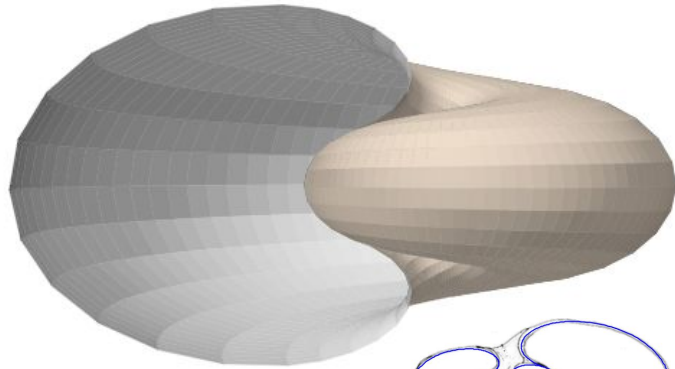
Modelo uniforme teórico



Modelos teóricos de la concha y del perfil del callo umbilical

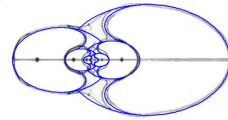
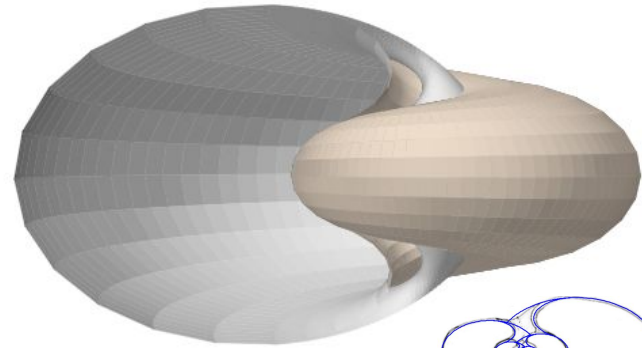
Modelo teórico de la concha del tipo

Arcos elípticos en la concha



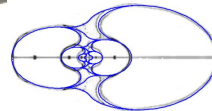
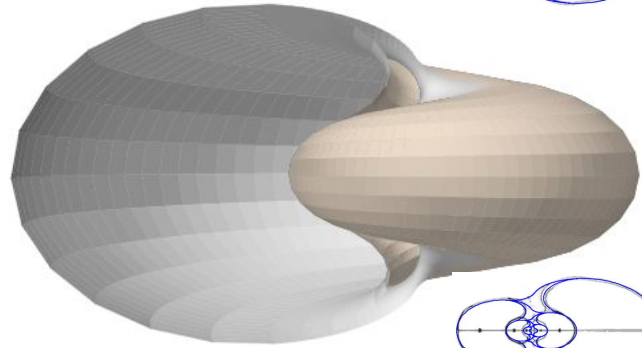
Modelo teórico del ombligo

Arco ventral



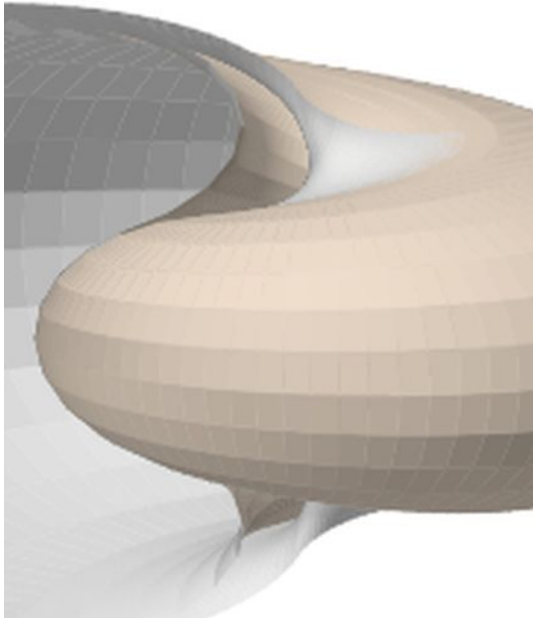
Modelo teórico del ombligo

Arcos elípticos



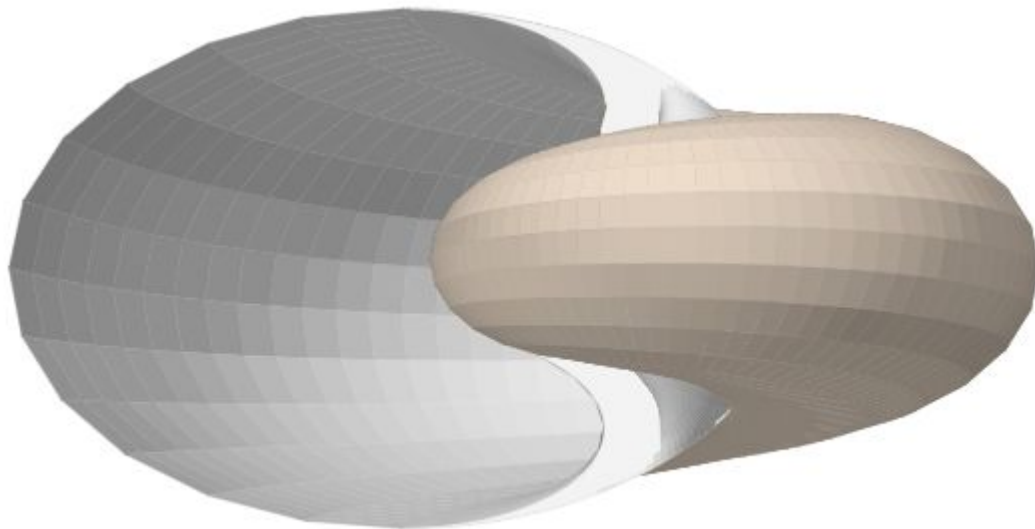
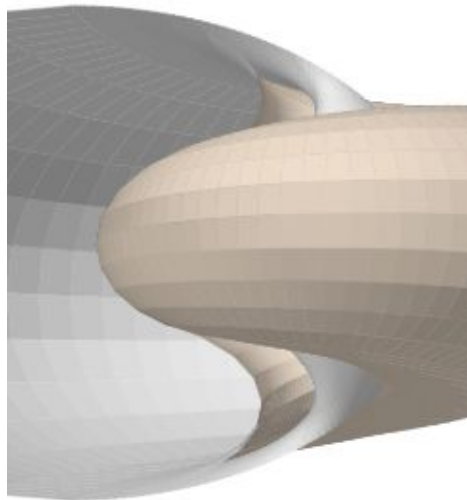
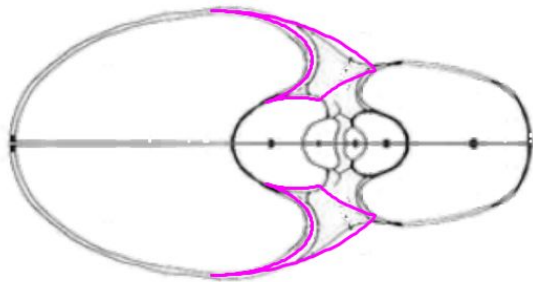
Tapando el callo umbilical

Al considerar como base del modelado la sección transversal de la concha y el perfil del callo umbilical, éste queda sin rellenar observándose un hueco y pudiendo ver la pared dorsal a través de él. Para una imagen más realista es necesario rellenar ese vacío, es decir, modelar el callo en sí.

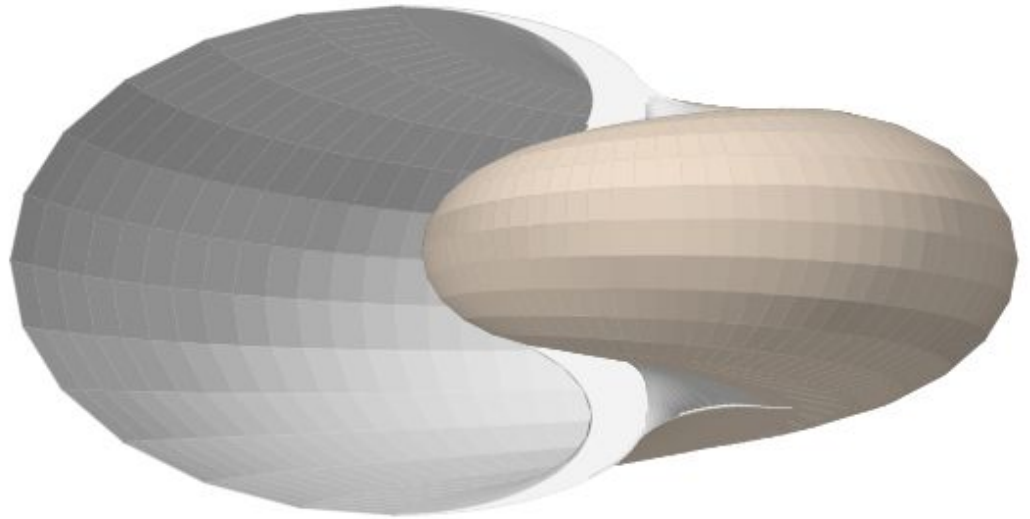
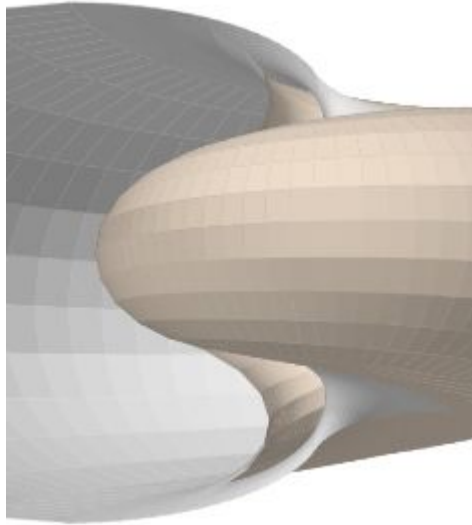
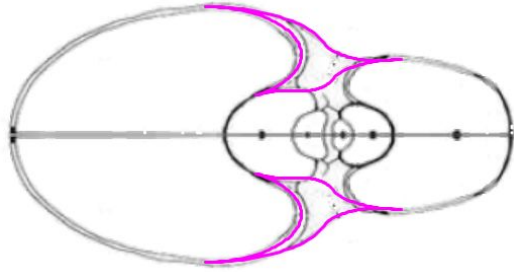


**Modelado del
callo
umbilical**

Tapa del callo umbilical con un arco ventral



Tapa del callo umbilical con arcos elípticos

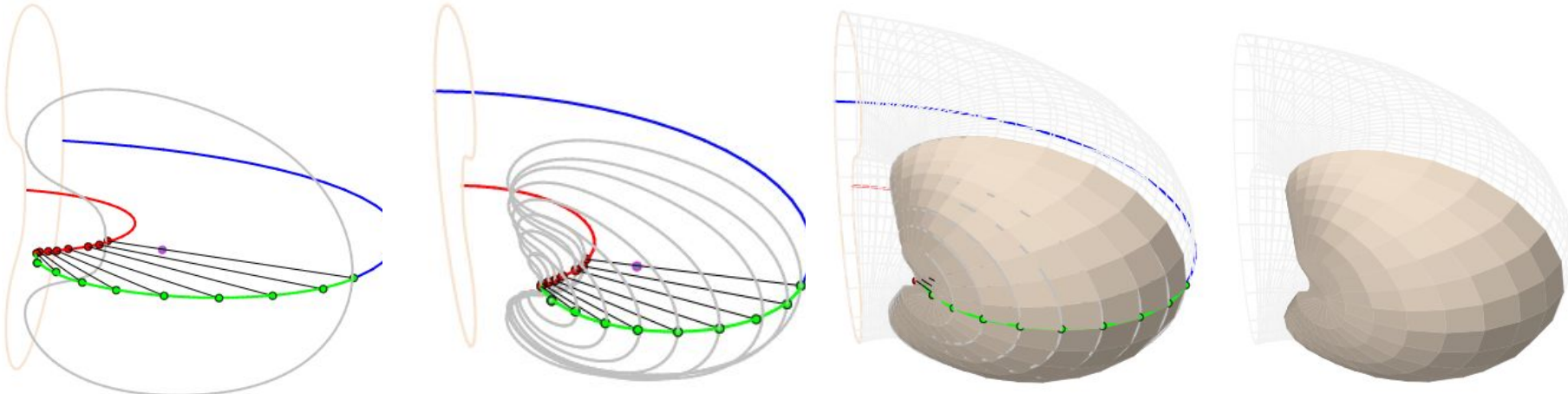




La concha embrionaria inicial :
“una solución de compromiso”
en el modelo uniforme

la concha embrionaria inicial 3D

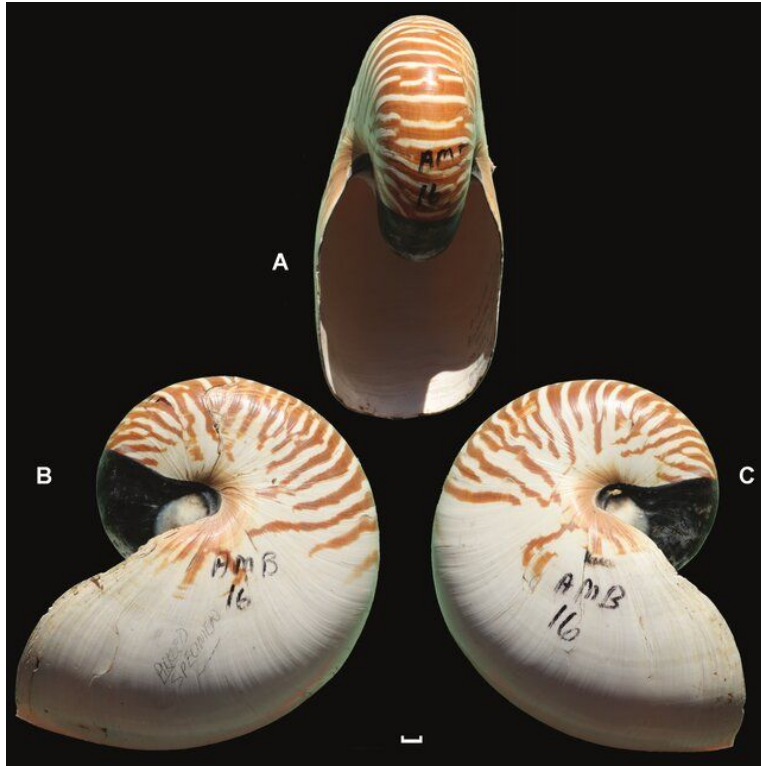
El **modelo uniforme** comienza en la sección determinada por el punto de inicio de la pared ventral y el polo de esa pared. Parte de la la cámara septal entre el primer y segundo septo no sigue el crecimiento uniforme. Para no dejar un vacío extraño en la representación he optado por seccionar transversalmente esa cámara y escalar la sección frontal teórica de la concha ajustándola a cada una de esas secciones. Esta opción no documentada da cierto parecido con la concha inicial de Nautilus.



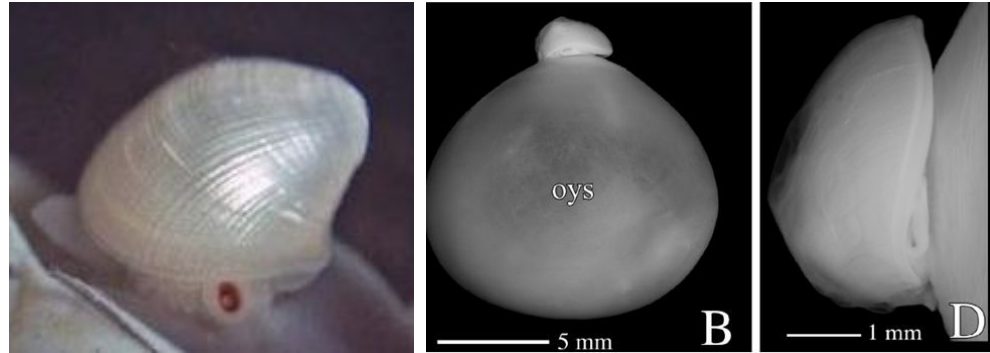
Puntos abiertos



Perfil tridimensional de la abertura de la concha



Si bien para el modelado 3D se ha considerado la sección transversal de la concha, la abertura de ésta no coincide con la sección, sino que presenta un perfil que no es plano, sino cóncavo-convexo, desde las primeras etapas vitales.



Modelado de la boca e inclusión en el modelo 3D del Nautilus.

Septos tridimensionales

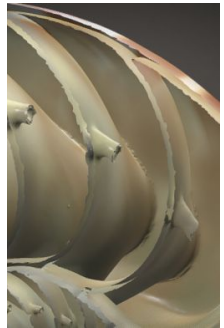


En la sección sagital los septos están modelados por espirales cordobesas, ¿pero cuál es la superficie que modela tridimensionalmente a estos?

A priori su modelado se presenta como ¡un gran reto!

Se observa que la intersección de los septos con la concha se asemeja al perfil de la abertura

**Modelado 3D de los septos
del Nautilus.**





El modelo 3D realizado es el uniforme, es decir, con crecimiento invariable desde su génesis, sin embargo conocemos que no se ajusta al crecimiento real, principalmente en la etapa inicial. Es necesario abordar la modelación ontogénica ya obtenida para la sección sagital. En particular:

- Modelo de la concha embrionaria, semejante a una lapa (ver 1).
- Modelo de la confluencia de la pared dorsal con la concha embrionaria en la transición del primer al segundo verticilo (ver 2).
- Los septos en el primer verticilo

Modelado ontogénico 3D del Nautilus.