

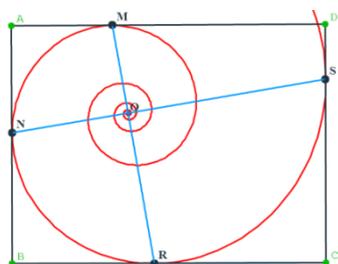
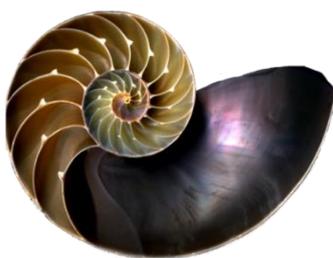
## Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*

José R. Galo Sánchez  
Ángel Cabezudo Bueno  
Ildefonso Fernández Trujillo

Red Educativa Digital Descartes  
[reddescartes.org](http://reddescartes.org) [proyectodescartes.org](http://proyectodescartes.org)

### Resumen

Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción áurea o divina o a construir objetos a partir de esta razón porque se presuponen serán apreciados como bellos por el simple hecho de seguir dicha pauta. Esto, como no, también ha acontecido con la modelación matemática de la concha del *Nautilus pompilius* sobre la que suele afirmarse que su forma y crecimiento es áureo. Sin embargo, en este artículo se muestra y se analiza en detalle cómo dicha concha lo que realmente sigue es **un patrón ubicado en la denominada proporción cordobesa o humana**. Con apoyo en un recurso interactivo desarrollado con la herramienta *Descartes* se motiva el análisis y comportamiento y se procede a partir de la *yocto-yotta* realidad observada a construir el modelo matemático.

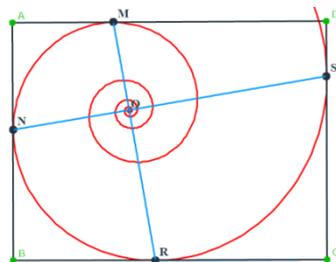


proporción áurea o divina o a construir objetos a partir de esta razón porque se presuponen serán apreciados como bellos por el simple hecho de seguir dicha pauta. Esto, como no, también ha acontecido con la modelación matemática de la concha del *Nautilus pompilius* sobre la que suele afirmarse que su forma y crecimiento es áureo. Sin embargo, en este artículo se muestra y se analiza en detalle cómo dicha concha lo que realmente sigue es **un patrón ubicado en la denominada proporción cordobesa o humana**. Con apoyo en un recurso interactivo desarrollado con la herramienta *Descartes* se motiva el análisis y comportamiento y se procede a partir de la *yocto-yotta* realidad observada a construir el modelo matemático.

## On the form and the Cordovan growth *Nautilus pompilius*

### Abstract

There is a tendency to try to associate or to find the golden ratio or the divine proportion in everything that is beautiful, or to try to create objects according to this ratio or proportion because it is assumed that they will be appreciated as beautiful objects due to the simple fact that they follow that pattern. This, of course, has also occurred with the mathematical modeling of the shell of *Nautilus pompilius*, which is said to have a golden shape and growth. Nevertheless, in this article it is shown and analysed in detail how this shell really follows a pattern that lies in the so-called Cordovan ratio or human proportion. With the help of an interactive resource developed with the *Descartes* tool, we motivate the analysis and behaviour and we proceed to create the mathematical model from the previously observed *yocto-yotta* reality.



proportion in everything that is beautiful, or to try to create objects according to this ratio or proportion because it is assumed that they will be appreciated as beautiful objects due to the simple fact that they follow that pattern. This, of course, has also occurred with the mathematical modeling of the shell of *Nautilus pompilius*, which is said to have a golden shape and growth. Nevertheless, in this article it is shown and analysed in detail how this shell really follows a pattern that lies in the so-called Cordovan ratio or human proportion. With the help of an interactive resource developed with the *Descartes* tool, we motivate the analysis and behaviour and we proceed to create the mathematical model from the previously observed *yocto-yotta* reality.

## 1 Introducción

¿La Naturaleza es matemática o matematizamos la Naturaleza? Independientemente de cuál fuera la alternativa cierta --si alguna lo es, o si no lo fuera ninguna de ellas, o si lo son ambas-- lo que sí parece obvio es que basta observar nuestro entorno para reconocer atractivas formas naturales y asimilarlas a modelos matemáticos que recíprocamente se mimetizan, estableciendo un hipertúnel entre la concreción y la abstracción, entre el mundo real y el virtual, que permite observar lo que en otras ocasiones hemos ubicado o definido con la frase "[Las Matemáticas en la belleza y la belleza de las Matemáticas](#)" (Galo Sánchez J. , 2004).

El *Nautilus pompilius* (Fig. 1), cefalópodo del género *Nautilus*, es un ejemplo de esa belleza matemática-natural. Una belleza que parcialmente se oculta en el interior de su concha y que queda puesta de manifiesto efectuando una sección (Fig. 2) o bien mediante una radiografía (Fig. 3).



Fig. 1 *Nautilus pompilius* (fuente [wikipedia](#))

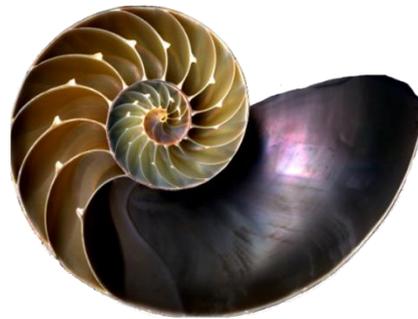


Fig. 2 Sección de la concha del *Nautilus pompilius* (fuente [imagexia](#))

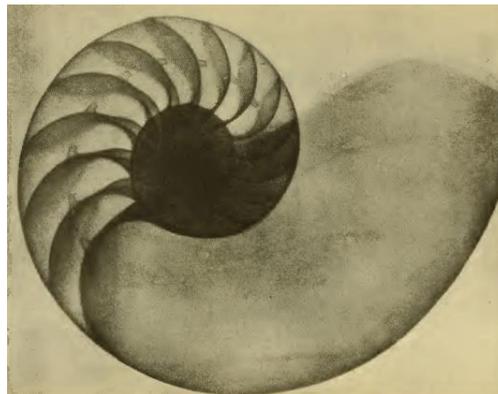


Fig. 3 Radiografía de la concha del *Nautilus Pompilius*.(fuente: (Thompson, 1945) procedente de Green and Gardiner, in *Proc. Malacol. Soc.* ii, 1897)

Un cefalópodo del orden de los [nautilidos \(Nautilida\)](#) que lleva haciendo matemáticas desde el periodo Devónico —hace más de 400 millones de años— hasta nuestra actualidad, y que nos invita a matematizar. Y esto es el objeto y el fin de este estudio: ¿Qué forma tiene la sección de la concha y sus cámaras? ¿Por qué adopta ese patrón y cómo se generan?

El estudio morfológico de los seres vivos es algo intrínseco a la Biología, pero pensamos que cuando se introduce una visión científica global, interdisciplinaria, es cuando se consigue un salto cualitativo esencial al aportarse no sólo la parte descriptiva —el qué— sino también la explicativa o justificativa —el por qué—. En esa línea, y centrados en el contexto aquí contemplado, podemos señalar el trabajo de D’Arcy Wentworth Thompson “[On Growth and Form](#)” (Thompson, 1945) y también, como referencia a la introducción del ordenador como medio para el análisis y la representación, indiquemos el trabajo de Raup “Computer as Aid in Describing Form in Gastropod Shells” (Raup, 1962).

En este artículo, nuestro centro de interés se ubica en la modelación matemática del *Nautilus pompilius* y para ello partiendo de la realidad de nuestro mundo físico tratamos de trasladar éste al mundo matemático virtual, es decir, entendemos que nuestro mundo o “yocto-yotta realidad”<sup>1</sup> es una proyección discreta del mundo matemático o “continuo virtual”. De manera que considerando la belleza concreta tratamos de realizar una sublimación o cambio de estado que nos permita admirar la belleza abstracta y a través de ésta tratar de comprender el por qué acontece la primera.

Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción áurea o divina

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033 \dots, \quad (1)$$

o a construir a partir de esta razón objetos que, por usar esta proporción, se presupone o se estima que serán apreciados como bellos. Y ello, como no, [también ha acontecido](#) con el *Nautilus pompilius* (Peterson, 2005), si bien sin éxito (Fig. 4) porque como se dice coloquialmente “la realidad es tozuda”. Aquí<sup>2</sup> (Fig. 5) mostraremos que la proporción por la que se rige el *Nautilus* es la denominada proporción cordobesa o humana<sup>3</sup>:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1,306562 \dots \quad (2)$$

Y no sólo observaremos que el perfil de esta concha sigue el patrón de la espiral logarítmica cordobesa, sino que todo su interior, el sifúnculo y septos siguen el mismo patrón de crecimiento humano-cordobés. Así pues, en este caso, vemos cómo la empecinada esperanza de encontrar el ideal de belleza divino se ve trastocada y lo que aparece es el ideal de belleza humano en nuestra “yocto-yotta realidad”.

---

<sup>1</sup> En longitud, [el orden de magnitud](#) de aquello que es físicamente apreciable o medible en nuestro entorno se ubica actualmente en el rango determinado por el intervalo  $[10^{-35}, 10^{26}]$  metros, es decir, desde la longitud de Planck al tamaño del universo observable. Pero en el [Sistema Internacional](#) el rango de prefijos para múltiplos y divisores se sitúa en el intervalo [yocto,yotta], es decir,  $[10^{-24}, 10^{24}]$ , y de ahí surge nuestra denominación de yocto-yotta realidad.

<sup>2</sup> En la sección segunda de este artículo, “La espiral logarítmica”, se detalla por qué estas espirales logarítmicas son denominadas áurea y cordobesa.

<sup>3</sup> El término proporción cordobesa o humana es debido a [Rafael de la Hoz Arderius](#), quien introdujo ésta

<sup>3</sup> El término proporción cordobesa o humana es debido a [Rafael de la Hoz Arderius](#), quien introdujo ésta en [su artículo](#) (Hoz Arderius, La proporción cordobesa, 1973). Puede también consultarse en [este documento](#) (Hoz Arderius, La proporción cordobesa, 1996).

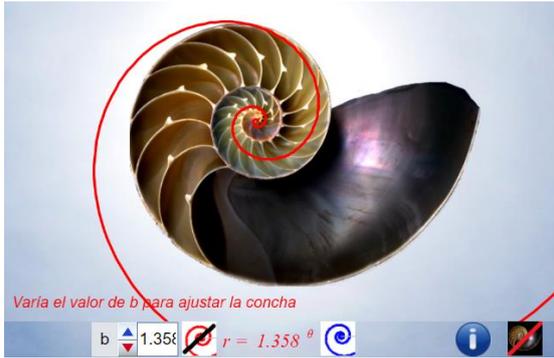


Fig. 4 Ajuste por una espiral logarítmica áurea o divina



Fig. 5 Ajuste por una espiral logarítmica cordobesa o humana

## 2. La espiral logarítmica

En nuestro trabajo “[El grillo y la espiral logarítmica](#)” (Galo Sánchez, Cabezudo Bueno, & Fernández Trujillo, 2016) sintetizamos la construcción dinámica de la denominada espiral logarítmica —o también equiangular, geométrica o como más poéticamente Bernoulli la denominó: “*spira mirabilis*” o espiral maravillosa—, desglosamos las propiedades de esta espiral maravillosa e iniciamos nuestro estudio de modelización matemática del *Nautilus pompilius*. Incluimos aquí un resumen de todo ello, dado que utilizaremos estas propiedades y datos en el desarrollo del modelo global.

La espiral logarítmica es una curva plana que en coordenadas polares se puede representar mediante la ecuación:

$$r = a b^\theta \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

o bien estandarizándola tomando como base el número  $e$ :

$$r = a e^{k\theta} \quad (4)$$

En las espirales logarítmicas podemos detallar:

- a) El análisis de la curva de ecuación (3) puede reducirse a los casos en que  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $b > 1$ .
  - a. Si  $a = 0$ , la ecuación (3) determina un único punto que es el origen de coordenadas.
  - b. Si  $a < 0$  la espiral (3) es la curva simétrica, respecto al polo, de la espiral correspondiente a la ecuación  $r = |a| b^\theta$ .
  - c. Si  $b = 1$ , la ecuación (3) queda reducida a  $r = a$  que es una circunferencia de radio  $|a|$ .
  - d. Si  $0 < b < 1$ , la espiral (3) equivale a la espiral simétrica, respecto al eje polar  $\theta = 0$  y por tanto con inversión de giro, de la espiral  $r = a c^{-\theta}$  con  $c > 1$ , pues basta reescribir  $b = \frac{1}{c}$ .
- b) La ecuación (3) puede reescribirse usando cualquier otra base  $c$  sin más que considerar la expresión de  $b$  como una potencia

$$b = c^d \quad (5)$$

y de ahí se obtiene

$$r = a c^{d\theta}. \quad (6)$$

Es en particular lo realizado en (4).

- c) El coeficiente  $a$  en (3) es un factor de escala o también puede interpretarse como un giro respecto a la espiral de ecuación  $r = b^\theta$ . Basta reescribir

$$a = b^{\theta_0}, \quad (7)$$

Es decir,

$$\theta_0 = \log_b a \quad (8)$$

y (3) equivale a  $r = b^{\theta+\theta_0}$ , es decir un giro de ángulo  $-\theta_0$ . Así pues, todas las espirales (3) que comparten la misma base  $b$  son coincidentes, son la misma espiral sólo que girada. O también puede interpretarse que comparativamente la espiral  $r = a b^\theta$  tiene un ángulo de retardo<sup>4</sup>  $\theta_0$  en su crecimiento respecto a la  $r = b^\theta$ , es decir, si representamos está última en el intervalo  $(-\infty, \beta]$ , entonces  $r = a b^\theta$  es esta misma espiral sólo que representada en el intervalo  $(-\infty, \beta-\theta_0]$ .

- d) La espiral de ecuación (3) es geométrica en el sentido de que las distancias al polo de todos los puntos de ella ubicados en una misma semirrecta  $\theta = \alpha$  están en progresión geométrica de razón  $b^{2\pi}$ . Ello es debido a que todos esos puntos se corresponden con  $r_n = a b^{\alpha+2\pi n}$  y por tanto

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = b^{2\pi}. \quad (9)$$

Este valor  $b^{2\pi}$  se dice que es el factor de crecimiento de la espiral (3).

- e) La espiral de ecuación (3) es equiangular<sup>5</sup>, es decir, en todo punto de ella el ángulo que forma el radio vector (segmento que une el polo con ese punto) y la tangente en él es siempre constante. Ese ángulo viene dado por:

$$\cos \psi = \frac{\ln b}{\sqrt{1+\ln^2 b}}. \quad (10)$$

Para determinarlo, por ejemplo, basta considerar las ecuaciones cartesianas del radio vector y del vector tangente

$$\begin{cases} x = a b^\theta \cos \theta \\ y = a b^\theta \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = a b^\theta \ln b \cos \theta - a b^\theta \sin \theta \\ y' = a b^\theta \ln b \sin \theta + a b^\theta \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

y determinar  $\cos \psi$  a través del producto escalar.

Si se considera la expresión (4) entonces ahí

$$k = \cot g(\psi). \quad (12)$$

- f) Por el carácter equiangular, fijado un punto  $M$  de la espiral de ecuación (3) (ver Fig. 6), ésta puede inscribirse en un rectángulo de módulo o proporción

$$b^{\frac{\pi}{2}}. \quad (13)$$

Para los detalles puede consultarse nuestro recurso "[El grillo y la espiral logarítmica](#)" (Galo Sánchez, Cabezudo Bueno, & Fernández Trujillo, 2016).

<sup>4</sup> Esté término es el usado por (Thompson, 1945) en la p. 799.

<sup>5</sup> Es bien conocido que la circunferencia es una curva equiangular, es decir, que en cualquier punto de la misma, el ángulo que forma el radio con la tangente es siempre constante e igual a un ángulo recto. René Descartes (1596-1650) fue quien se planteó la determinación de una curva que también fuera equiangular, pero que el ángulo fuera el que previamente se deseara, es decir, una generalización de lo que acontece en la circunferencia. Jakob Bernoulli (1654-1705) la analizó y la denominó "Spira mirabilis" o espiral maravillosa.

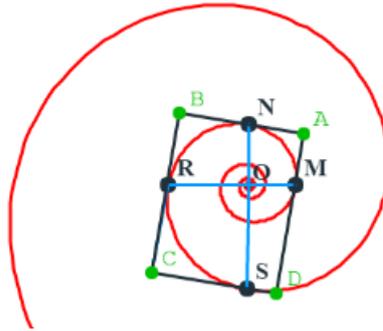


Fig. 6 Rectángulo circunscrito a la espiral

Como consecuencia de esta propiedad denominaremos:

- a. **Espiral logarítmica áurea** a aquella que su rectángulo circunscrito asociado es áureo, es decir, que el módulo o proporción de este rectángulo se corresponde con el número áureo (1). Por tanto, dado que ha de ser  $b^{\frac{\pi}{2}} = \Phi$ , o bien  $b = \Phi^{\frac{2}{\pi}}$ , tenemos que:

- i. Su ecuación es:

$$r = a \left( \Phi^{\frac{2}{\pi}} \right)^{\theta} = a (1,358456 \dots)^{\theta}. \quad (14)$$

- ii. El factor de crecimiento (9) es:

$$\left( \Phi^{\frac{2}{\pi}} \right)^{2\pi} = \Phi^4 = 6,854104 \dots \quad (15)$$

- iii. El ángulo característico (10) de la espiral es:

$$\psi \simeq 72,97^{\circ}. \quad (16)$$

- iv. El ángulo característico del rectángulo áureo ( $\angle CAD$  en la Fig. 6) aproximadamente:

$$31,72^{\circ}. \quad (17)$$

- b. **Espiral logarítmica cordobesa** a aquella que su rectángulo circunscrito asociado es cordobés, es decir, que su proporción es la proporción dada por el número cordobés  $\zeta$  (2). Para ello ha de ser  $b^{\frac{\pi}{2}} = \zeta$  o lo que es equivalente  $b = \zeta^{\frac{2}{\pi}}$ .

- i. Su ecuación es:

$$r = a \left( \zeta^{\frac{2}{\pi}} \right)^{\theta} = a (1,185580 \dots)^{\theta}. \quad (18)$$

- ii. El factor de crecimiento (9) es:

$$\left( \zeta^{\frac{2}{\pi}} \right)^{2\pi} = \zeta^4 = 2,914214 \dots \quad (19)$$

- iii. El ángulo característico (10) de la espiral es:

$$\psi \simeq 80,32^{\circ}. \quad (20)$$

- iv. El ángulo característico del rectángulo áureo ( $\angle CAD$  en la Fig. 6) es aproximadamente:

$$37,43^{\circ}. \quad (21)$$

- g) La región plana delimitada por la espiral de ecuación (3) puede aproximarse por hexágonos contruidos en base a los rectángulos circunscritos asociados a ella.

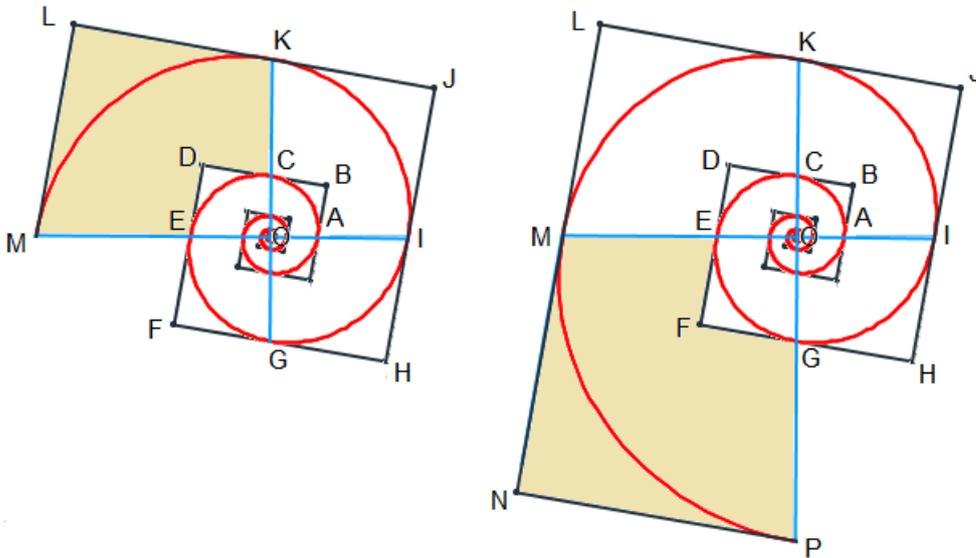


Fig. 7 Crecimiento gnomónico de paso  $\frac{\pi}{2}$

En la figura Fig. 7 el hexágono CKLMED es el gnomon del hexágono CDFHJK, pues al añadirlo a éste el hexágono EFHJLM obtenido es semejante al CDFHJK con razón de semejanza  $b^{\frac{\pi}{2}}$ . Análogamente un nuevo gnomon es EMNPGF y además esos dos gnómones son a su vez semejantes, con igual razón. Así pues, de manera similar a (9), el factor de crecimiento en cada paso de esta aproximación discreta sería  $b^{\frac{\pi}{2}}$ .

De manera general puede aproximarse mediante gnómones obtenidos con paso  $\frac{2\pi}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq 3$ , y con factor de crecimiento en cada paso  $b^{\frac{2\pi}{n}}$  (ver Fig. 8).

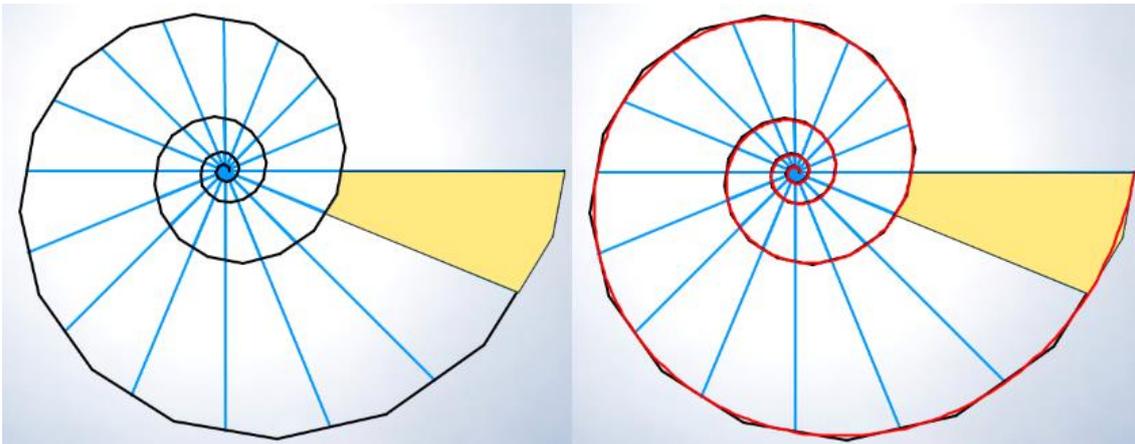


Fig. 8 Crecimiento gnomónico de paso  $\frac{2\pi}{n}$  con  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq 3$ . Caso en que  $n=16$ .

A la izquierda aproximación gnomónica y a la derecha la misma aproximación y la espiral aproximada en rojo

Y en el caso límite en el que  $n \rightarrow \infty$  el factor de crecimiento sería  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{\frac{2\pi}{n}} = 1$ , es decir que el factor de crecimiento instantáneo es la unidad. Esto puede considerarse como una explicación al emblema empleado por [Jakob Bernoulli](#) en relación a la espiral logarítmica: “Eadem mutato resurgo” (Mutante y permanente, vuelvo a resurgir siendo la misma).

- h) La longitud del arco de la espiral de ecuación (3) comprendido entre el polo y el punto correspondiente a  $r = a b^\beta$  es

$$l = \frac{\sqrt{1+\ln^2 b}}{\ln b} a b^\beta \quad (22)$$

o bien teniendo en cuenta (10) tenemos que

$$l = \frac{r}{\cos \psi}. \quad (23)$$

Para su cálculo basta aplicar que para la curva en polares  $r = f(\theta)$ , la longitud de arco entre dos puntos de argumento  $\theta_0$  y  $\theta_1$  respectivamente es  $l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta$  y considerar  $f(\theta) = a b^\theta$  y  $\theta_0 = -\infty$  y  $\theta_1 = \beta$ .

Consecuentemente la longitud del arco de espiral (3) comprendido entre los puntos  $P$  y  $Q$  correspondientes a  $r = a b^\beta$  y  $r = a b^\gamma$  respectivamente es:

$$l_{PQ} = \frac{\sqrt{1+\ln^2 b}}{\ln b} a (b^\gamma - b^\beta) \quad (24)$$

### 3. Modelización del *Nautilus pompilius*

#### 3.1 Consideraciones generales

La superficie tridimensional de cualquier concha puede considerarse que está generada por la revolución alrededor de un eje fijo de una curva cerrada, la generatriz, la cual incrementa sus dimensiones pero manteniendo la semejanza. Si seleccionamos un punto de esa generatriz, o bien un punto de la región que delimita, y unimos todos los puntos homólogos a él obtenemos otra curva que traza la dirección de crecimiento. Si esta traza está ubicada en un plano perpendicular al eje de giro entonces se dice que la concha es discoidal —que es lo que acontece en el *Nautilus*— y si por el contrario tiene forma de una [hélice cónica](#) se dice que la concha es turbinada o helico-espiral. Como generatriz puede considerarse cualquier sección de la concha, sea paralela, normal o con cualquier inclinación respecto al eje de giro. Usualmente se considera la sección transversal obtenida por el corte con un plano que contenga al eje de giro y suele coincidir con la forma de la boca de la concha siempre que ésta se ubique en un plano (ver Fig. 9), pero se detectan diferencias<sup>6</sup>.

De manera muy resumida, en la imagen de la sección de la concha del *Nautilus pompilius* (Fig. 2), podemos observar diferentes detalles<sup>7</sup> morfológicos que caracterizan la concha de estos y otros animales.

- a) La concha en sí, cuya sección a simple vista se observa que adopta una forma espiral. En ella podemos contabilizar el número de ciclos o verticilos.
- b) La protoconcha o cámara inicial formada en la vida embrionaria y larvaria. Y la [teleoconcha](#) o concha que se construye durante el crecimiento desde la forma juvenil a la adulta.

<sup>6</sup> En una nota al pie en (Thompson, 1945) p. 813 se especifica: “En el *Nautilus* la «capucha» tiene dimensiones algo diferentes en los dos sexos, y estas diferencias quedan impresas sobre la concha, es decir, sobre su «curva generatriz». Esta última constituye una elipse algo más ancha en el macho que en la hembra. Sin embargo, esta diferencia no es detectable en los ejemplares jóvenes; en otras palabras, la forma de la curva generatriz se altera perceptiblemente al avanzar en edad.”

<sup>7</sup> Consultar la ficha de la Dra. Villaseñor (Villaseñor, 2007) sobre los [Ammonoideos](#) que son cefalópodos fósiles coetáneos del *Nautilus* hasta el Paleógeno.

- c) La parte que presenta cámaras llamada fragmocono.
- d) Los septos o tabiques que conforman las cámaras y que se intersecan con la pared del fragmocono en la sutura.
- e) Los restos del canal en el que se ubica el [sifúnculo](#)<sup>8</sup> o tubo sifonal que une las cámaras del fragmocono.
- f) La última cámara, que no tiene sifón, que es la zona donde reside el organismo, su habitación.

Del análisis realizado por Thompson (Thompson, 1945) para conchas discoidales<sup>9</sup> se pueden establecer dos parámetros que son determinantes del crecimiento y de la forma:

- a) El ángulo característico de la espiral logarítmica.
- b) El ángulo de retardo o diferencia entre el crecimiento de la parte interior y exterior de cada verticilo, dado que la concha se puede asimilar a un cono enrollado sobre sí mismo (Fig. 10) —la imagen se ha tomado del libro de (Ghyca, 1983)—.



Fig. 9 Visión frontal de la concha del *Nautilus pompilius* donde se observa su boca (generatriz)

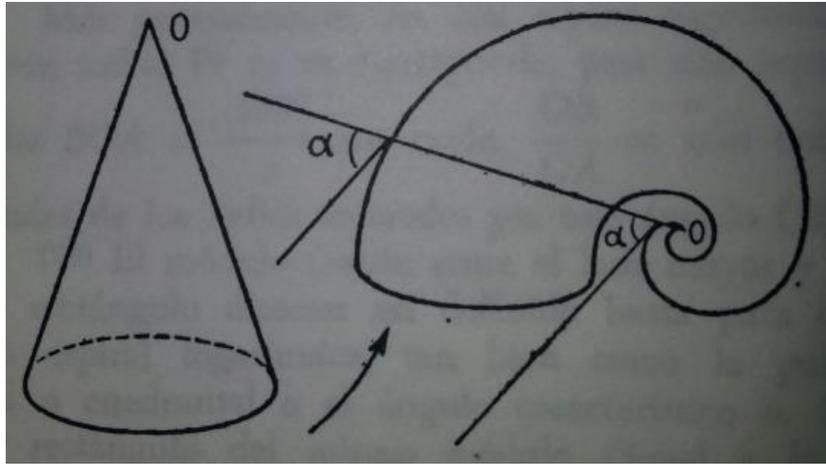


Fig. 10 La concha como deformación topológica de un cono

Si se desea abordar el modelo espacial es necesario considerar como tercer parámetro su curva generatriz.

### 3.2 Iniciando la modelización

En el apéndice I se aborda un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus pompilius*. Efectuando un [recuento de los verticilos](#), nos encontramos que las cámaras ocupan aproximadamente dos verticilos y medio (Fig. 11) y la cámara habitacional comprende un sector de amplitud  $\frac{3\pi}{4}$  (Fig. 12), lo que totaliza  $\frac{23\pi}{4}$ , es decir, tres vueltas menos un octavo. En el primer verticilo se contabilizan ocho cámaras, dieciséis en el segundo y ocho en la siguiente mitad.

<sup>8</sup> Este enlace aporta una descripción funcional del sifúnculo y de las cámaras.

<sup>9</sup> Para conchas turbinadas o helico-espinales puede consultarse el libro de Thompson citado y las variaciones que introduce Raup en "[The geometry of coiling in gastropods](#)" (Raup, 1961)



Fig. 11 Recuento de verticilos y cámaras en el *Nautilus*

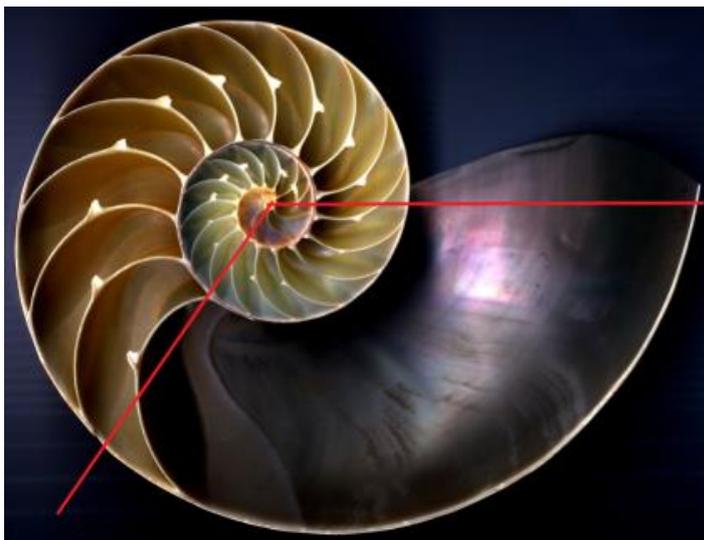


Fig. 12 Amplitud de la cámara habitacional

Según lo especificado en (9), para determinar si la espiral de la sección de la concha es logarítmica basta verificar que el crecimiento sea geométrico determinando la razón o factor de crecimiento. Para ello, la modelización tradicional se basa esencialmente en la medición, pero en nuestro caso, este análisis ha sido sustituido por la utilización de una escena desarrollada con la herramienta [Descartes](#) titulada “Sobre el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*”<sup>10</sup>, en la que podemos dibujar diferentes espirales logarítmicas, superponiéndolas con la imagen, y entre ellas seleccionar aquella que mejor se ajusta<sup>11</sup>. En la escena citada se puede seleccionar la base  $b$  de la potencia que caracteriza a la espiral logarítmica  $r = b^\theta$  y

<sup>10</sup> Consultar la dirección: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Nautilus-JS/](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/)

<sup>11</sup> Hemos de señalar que el procedimiento tradicional en base a mediciones puede decirse que es local (basado en algunas mediciones puntuales), mientras que el uso de la escena es global al ser un ajuste comparativo entre dos curvas, una la correspondiente a la sección de la concha y otra la aportada por la escena.

determinar qué valor es el que conduce a ese mejor ajuste. Puede observarse (ver Fig. 5 o interactuar con la escena) que esa mejor aproximación se alcanza cuando  $b \approx 1,186$  y este valor se corresponde con la espiral logarítmica cordobesa (18), es decir, de base<sup>12</sup>:

$$\kappa = 1,18558 \dots (25)$$

Surge nuestra primera asociación entre el *Nautilus* y la proporción cordobesa, pero adelantemos que todo girará alrededor de ella —lo cual *a priori* es lo lógico, pues es de esperar un único patrón de crecimiento, que es lo que confirmaremos *a posteriori*—.

Así pues, en base a esta observación, el factor de crecimiento que asignamos al *Nautilus pompilius* es 2,914214 ... que es el factor correspondiente a la espiral logarítmica cordobesa determinado en (19). Este factor ya indicamos que difiere bastante del correspondiente a la espiral logarítmica áurea 6,854104 ... indicado en (15) (ver Fig. 4). Y también hemos de indicar que tampoco coincide con el factor de crecimiento de 3,00 que fue determinado por Moseley (Moseley, 1813) y referenciado en la página 770 de (Thompson, 1945). Moseley<sup>13</sup> indica en su artículo en las pp. 355-356 el procedimiento seguido y detalla la dificultad para determinar y establecer la curva sobre la que medir y consecuentemente los segmentos radiales que sirven de base en esa medida (ver Apéndice III), y sobre ello incide Thompson al señalar:

«Observe also that Moseley gets a very good approximate result by his measurements "upon a radius vector," although he has to be content with a very rough determination of the pole.»<sup>14</sup>.

Un factor de crecimiento 3,00 se corresponde con la espiral logarítmica de base

$$b = 3^{\frac{1}{2\pi}} = 1,191067 \dots (26)$$

y en la Fig. 13 puede observarse la diferencia existente entre ésta y la sección de la concha objeto de estudio.



Fig. 13 Espiral logarítmica con factor de crecimiento 3,00 y su comparación con la sección de la concha del *Nautilus pompilius*

<sup>12</sup> Dado que utilizaremos el valor 1,185580 ... reiteradamente asignamos el símbolo  $\kappa$  a éste.

<sup>13</sup> Puede consultarse desde <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/128/351.full.pdf+html> o bien localmente desde [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Nautilus-JS/referencias/Phil.%20Trans.%20R.%20Soc.%20Lond.-1838-Moseley-rstl.1838.0018.pdf](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/Phil.%20Trans.%20R.%20Soc.%20Lond.-1838-Moseley-rstl.1838.0018.pdf)

<sup>14</sup> «Obsérvese también que Moseley consigue un resultado aproximado muy bueno mediante sus mediciones "sobre un radio vector," aunque tiene que contentarse con una determinación muy aproximada del polo.»

Por tanto y en base a lo expuesto y observado nosotros marcamos, abogamos y defendemos el **carácter cordobés** del *Nautilus pompilius*.

### 3.3 Aproximación gnomónica de las cámaras (primera fase)

Ajustada la forma global de la sección de la concha fijémonos en el rastro dejado por el *Nautilus* en su crecimiento. Lo más ostensible son las diferentes cámaras que presenta, delimitadas por los denominados septos, y la conexión entre ellas correspondiente al paso del sífinculo. Centrémonos y analicemos inicialmente dichas cámaras que, como hemos indicado, en el último verticilo se contabilizan en un número de dieciséis. Por tanto, dentro del crecimiento continuo de la concha y, consecuentemente, de la sección antes estudiada podríamos decir que los septos surgen como consecuencia de un crecimiento discreto de paso

$$\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \quad (27)$$

que casualmente o más bien por causalidad tiene una connotación en la proporción cordobesa dado que el gnomon de un triángulo cordobés es un triángulo escaleno de ángulos  $\frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{2\pi}{8}$  y  $\frac{5\pi}{8}$ . Puede consultarse el artículo “La Geometría de los polígonos cordobeses” (Redondo Buitrago & Reyes Iglesias, 2009)<sup>15</sup> y también observar las imágenes en la Fig. 14 y Fig. 15 que hemos tomado de ahí, retocando algunas etiquetas o denominaciones.

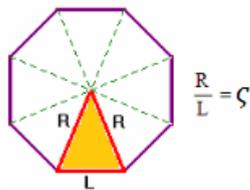


Fig. 14 Proporción cordobesa en el octógono y triángulo cordobés

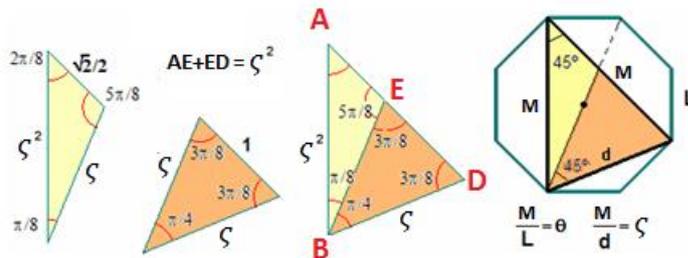


Fig. 15 Triángulo cordobés (naranja) y su gnomon (amarillo). El número cordobés  $\zeta$ , el número de plata  $\theta$  y su relación  $\theta = \sqrt{2}\zeta^2$

En la introducción (ver Fig. 8) indicamos cómo se puede aproximar de manera discreta la región de plano delimitada por cualquier espiral logarítmica mediante hexágonos, construidos en base a radios vectores y a las tangentes a la espiral, siguiendo un crecimiento gnomónico de paso  $\frac{2\pi}{n}$  con  $n \geq 3$ . En la Fig. 16 se refleja la aproximación de las cámaras con gnomones de paso  $\frac{2\pi}{16}$ . Se tiene un primer modelo que muestra el crecimiento del *Nautilus*. Obviamente como modelo discreto es una primera aproximación que esboza un patrón o pauta. Además, se observa cómo al abordar una aproximación discreta de las cámaras, la espiral de la sección de la concha se aproxima mal dado que se está realizando una aproximación mediante una poligonal, mientras que el crecimiento de la concha es continuo. Hemos pues de tratar de mejorar el modelo (Fig. 17) y así mejorar la precisión de la aproximación.

<sup>15</sup> Accesible desde esta dirección: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/antonia2010/cord.pdf>

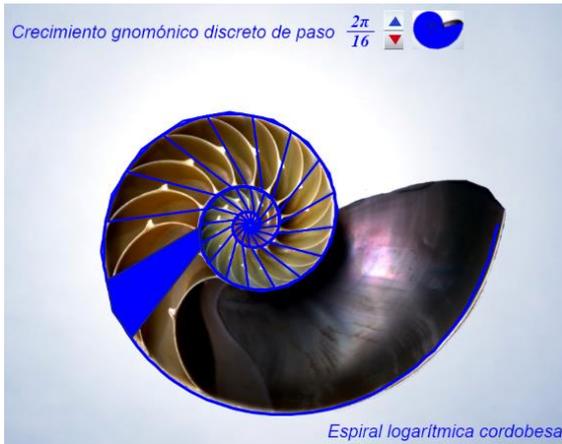


Fig. 16 Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso  $\frac{2\pi}{16}$ . Comparativa.



Fig. 17 Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso  $\frac{2\pi}{16}$ .

### 3.4 Aproximación del sífinculo

En los septos puede observarse los restos de los orificios que permiten el paso del sífinculo por las cámaras. Estos, visualmente, siguen un patrón espiral y es de esperar que sea una espiral logarítmica  $r = b^\theta$ , pero si utilizamos el recurso interactivo para su aproximación, de manera análoga a como hemos hecho con la sección de la concha, podemos comprobar que no hay ninguna espiral que se ajuste bien al sífinculo. Conceptualmente parece más lógico intuir que cualquier punto ubicado en el interior de la concha habrá surgido como consecuencia de un crecimiento análogo al de la concha, si bien afectado por un factor de escala, es decir, todo punto debería pertenecer a una espiral logarítmica cordobesa de ecuación  $r = a \kappa^\theta$ . Ello se puede observar en la escena sin más que cambiar el valor de  $a$ , y comprobar que todos los puntos del interior de la concha formarían parte de espirales cordobesas en las que  $0,34 < a < 1$ . En particular podemos comprobar que los puntos del sífinculo están ubicados en una espiral de este tipo en la que aproximadamente  $a$  toma valores en el intervalo:  $0,65 \leq a \leq 0,7$ . Y de esta observación surge la cuestión: ¿A qué valores teóricos se corresponden esos valores experimentales?

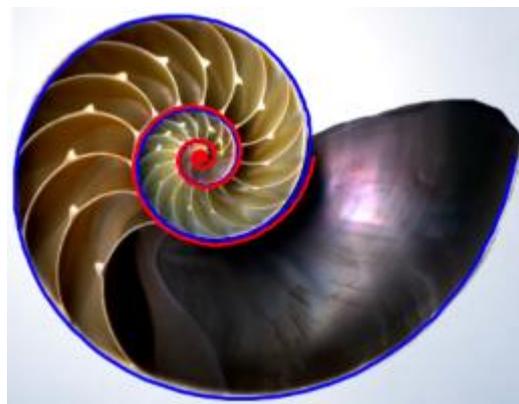


Fig. 18 Distinción de la capa interior y exterior en la sección de concha. A la izquierda fotografía (Thompson, 1945) p.843 y a la derecha modelación matemática.

Aunque, en nuestro mundo matemático, hemos aproximado la sección de la concha como una única curva, realmente el crecimiento del *Nautilus* se produce siguiendo ese cono que hemos reflejado en la Fig. 10 —pero en este caso curvándose lo suficiente para que haya un solapamiento—, es decir, al crecer podemos ver cómo lo que era el exterior de la concha pasa a ser el interior y ello acontece superponiéndose una nueva capa sobre la anterior, una capa diferente<sup>16</sup>. En la Fig. 18 se observa esa separación en la fotografía de la izquierda y en la imagen de la derecha se ha reflejado esa distinción utilizando dos espirales logarítmicas cordobesas próximas y diferenciando con dos colores, azul y rojo, ambas capas. Matemáticamente podemos expresarlo como dos espirales de ecuaciones<sup>17</sup>:

$$r = \kappa^\theta \quad \text{y} \quad r = \kappa^{\theta-2\pi} \quad (28)$$

o bien

$$r = \kappa^\theta \quad \text{y} \quad r = \kappa^{-2\pi}\kappa^\theta = 0,3431 \dots \kappa^\theta \quad (29)$$

lo cual puede interpretarse como que la velocidad o razón de crecimiento entre la capa interior y la exterior es de 0,3431... a 1, o bien que la capa exterior crece  $\frac{1}{0,3431\dots} = 2,914214\dots$  veces más rápido que la interior (en definitiva el factor de crecimiento), o bien según lo indicado en (7) que la capa interior tiene un ángulo de retardo de  $2\pi$ .

Consecuentemente la sección del *Nautilus* es una región del plano de ecuación:

$$r = a \kappa^\theta \quad \begin{cases} \kappa^{-2\pi} \leq a \leq 1 \\ 0 < \theta \leq 2\pi n \end{cases} \quad (30)$$

donde remarcamos que  $\kappa = 1,185580\dots$  es la base correspondiente a la espiral logarítmica cordobesa y  $n$  el número de ciclos o verticilos. Siendo precisos podemos señalar que la región anterior se corresponde con la teleoconcha, mientras que la protoconcha se ajustaría teóricamente con los valores

$$-\infty < \theta \leq 0 \quad (31)$$

¿Cuál de las espirales anteriores (30) se corresponde con el sifúnculo? Si consideramos la espiral intermedia entre la interior y la exterior —lo cual sería consistente con el hecho de que el sifúnculo fuera el eje del cono citado— entonces tendría que ser que

$$a = \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} = \frac{0,3431\dots + 1}{2} = 0,6715 \dots \quad (31)$$

que está en el rango aproximado de valores determinado en la escena. Consecuentemente según (8) el sifúnculo tiene un ángulo de retardo  $\theta_0 = \log_\kappa 0,6715 \dots = -2,3394 \dots \simeq -\frac{3\pi}{4}$  frente a la concha exterior.

<sup>16</sup> La necesaria distinción de estas capas, para poder abordar la medición necesaria para deducir el factor de crecimiento, era manifestada por Moseley (Moseley, 1813), ver Apéndice II.

<sup>17</sup> Según (8) la espiral correspondiente a la capa interior tiene un ángulo de retardo de  $-2\pi$ , respecto a la exterior.

### 3.5 Aproximación gnomónica de las cámaras (segunda fase)

Ajustado el sífúnculo, éste divide el interior de la sección del *Nautilus* y cada una de las cámaras en dos regiones que pueden aproximarse gnomónicamente con el paso discreto indicado de  $\frac{2\pi}{16}$ , lo cual puede observarse en Fig. 19 y Fig. 20. La aproximación mejora, si bien en la espiral exterior y el sífúnculo, en los espacios entre cámaras, sigue denotándose esa aproximación angulosa de las tangentes como consecuencia de la aproximación discreta.

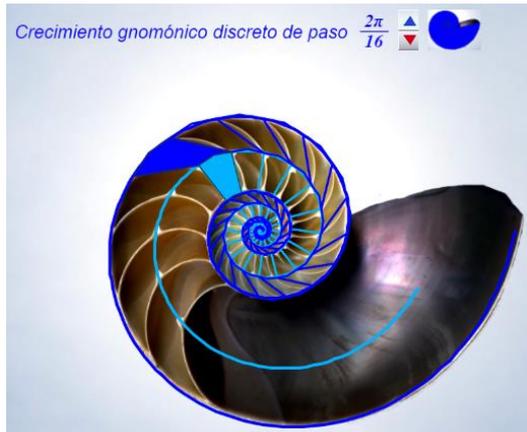


Fig. 19 Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso  $\frac{2\pi}{16}$  apoyándose en el sífúnculo. Comparativa.



Fig. 20 Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso  $\frac{2\pi}{16}$  apoyándose en el sífúnculo.

### 3.6 Aproximación gnomónica de las cámaras (tercera fase)

Los pasos para abordar una mejora en la aproximación se muestran obvios:

- Ampliar el número de espirales logarítmicas cordobesas intermedias (ver Fig. 21 y Fig. 22).



Fig. 21 Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso  $\frac{2\pi}{16}$  apoyándose en familias de espirales cordobesas. Comparativa.



Fig. 22 Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso  $\frac{2\pi}{16}$  apoyándose en familias de espirales cordobesas.

- Considerar un paso menor entre septos abordando una división de las cámaras y por tanto acercándose el modelo al crecimiento continuo (ver Fig. 23 y Fig. 24).



Fig. 23 Aproximación de las cámaras con hexágonos de paso  $\frac{2\pi}{5 \cdot 16}$  apoyándose en 15 espirales cordobesas. Comparativa.



Fig. 24 Modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso  $\frac{2\pi}{5 \cdot 16}$  apoyándose en varias espirales cordobesas.

### 3.7 Hacia el modelo continuo

La proporción cordobesa se ha manifestado como patrón único en la morfología y crecimiento del *Nautilus pompilius*. Pero siguiendo la misma pauta, posiblemente no nos equivocaremos si formulamos la conjetura de que los septos deberían seguir también un patrón cordobés. Para iniciar su verificación podemos utilizar nuestro recurso interactivo y abordar una comparación de dichos septos, al igual que hicimos con la sección de la concha, con espirales logarítmicas y en particular con la espiral logarítmica cordobesa. Como fruto de esa comparativa, en la que se puede desplazar el polo y la base de la potencia que define a la espiral para ir cotejando, se observa que cuando la espiral es cordobesa (en concreto cuando aproximadamente<sup>18</sup>  $r = 0,5 \kappa^\theta$ ) los septos encajan, según puede verse representado en la espiral gris de la Fig. 25. En concreto se observa que todos los septos son arcos de esa espiral.

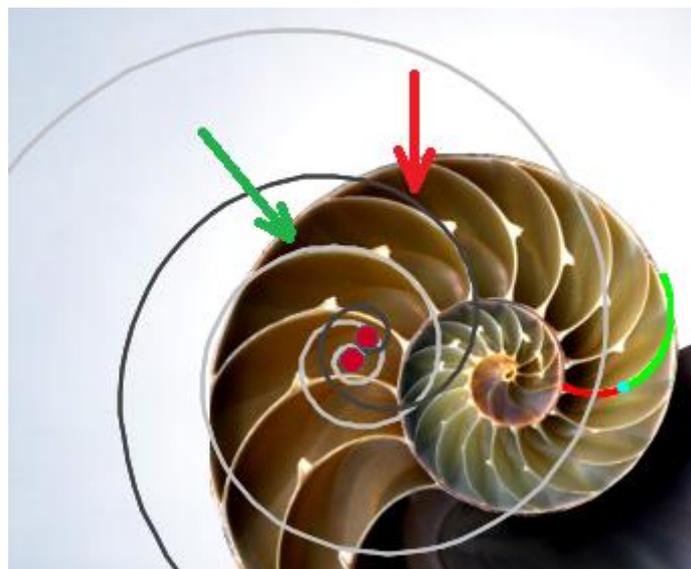


Fig. 25 Ajuste de los septos con arcos de espirales logarítmicas y en particular con la cordobesa (color gris)

<sup>18</sup> Posteriormente determinaremos el valor teórico del factor de escala de esta espiral cordobesa. Ver (49).

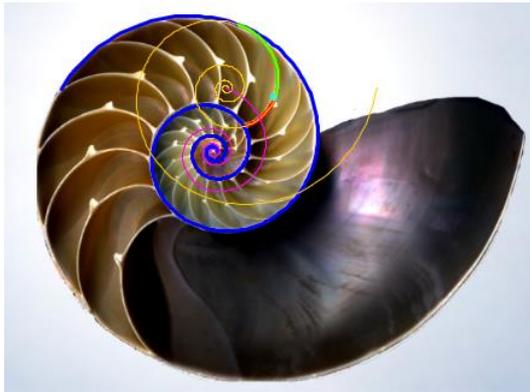


Fig. 26 Espiral que aproxima los septos (amarilla) y la que describe el polo (magenta)

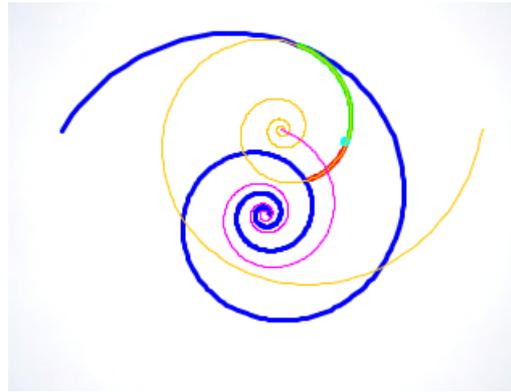


Fig. 27 Detalle de las espirales sobre las que se aproximan los septos

Es más, en el proceso de cotejar con la espiral logarítmica cordobesa (ver espiral amarilla en la Fig. 26) se puede observar cómo una vez encajado un septo, para encajar el siguiente es necesario trasladar el polo de esa espiral y que la curva que describe ese polo se asemeja a una espiral (la magenta en la Fig. 26) —analizando las coordenadas se comprueba que es también una espiral logarítmica cordobesa—. Adicionalmente al pasar de un septo a otro, el arco de la espiral con el que coteja es uno que se obtiene como consecuencia de un desplazamiento en esa espiral, es decir, si al pasar de un septo a otro equivale a incrementar el ángulo en la espiral azul de la Fig. 26 en  $\frac{2\pi}{16}$ , el arco del segundo septo es una traslación en la espiral amarilla del septo anterior en ese mismo ángulo según veremos más adelante. Ver el detalle de las espirales citadas en la Fig. 27 e interactuando en el recurso.

En la Fig. 28 puede observarse la modelización de los septos donde se ha distinguido cada uno de los arcos en los que queda dividido por el sífúnculo con colores diferentes (rojo y verde). En la Fig. 29 podemos ver una comparativa entre el modelo matemático y la sección de la concha, en él puede observarse y señalarse que en los últimos septos hay cierta discrepancia, situación que concuerda con referencias biológicas en las que indican diferentes estadios de crecimiento y marcan un estadio adulto caracterizado por cambios morfológicos que afectan a los últimos septos<sup>19</sup>. En nuestro caso (Fig. 29) se muestra un aumento en el espacio real entre septos frente al teórico esperado. No olvidemos, lo ya indicado, que un modelo matemático no es más que una proyección idealizada y de pautas fijas. No obstante aquí es fácil, si se desea, introducir en el modelo matemático la simulación de ese cambio en el crecimiento adulto, pues basta hacer una traslación<sup>20</sup> del polo y septo en un ángulo aproximadamente de  $\frac{\pi}{16}$ . Es más puede considerarse un modelo matemático mixto contemplando un tipo de crecimiento hasta la fase juvenil e incluir esa traslación en el comportamiento adulto, pero en lo que sigue optamos por un modelo matemático puro, sin incluir los cambios señalados en dicho estadio.

<sup>19</sup> En (Villaseñor, 2007) pueden consultarse los estadios de crecimiento de los Ammonoideos y en particular el estadio adulto.

<sup>20</sup> En las Fig. 21 y Fig. 23 hemos reflejado esa traslación y ahí puede observarse cómo las cámaras del estadio adulto se ajustan muy bien y las del estadio juvenil son las que ahí presentan ese desfase.

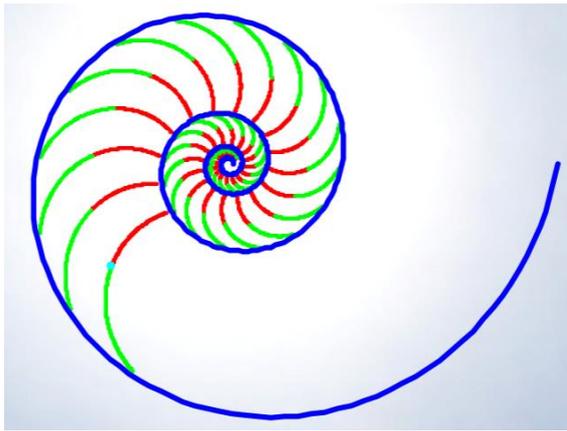


Fig. 28 Aproximación de los septos. Modelo matemático.

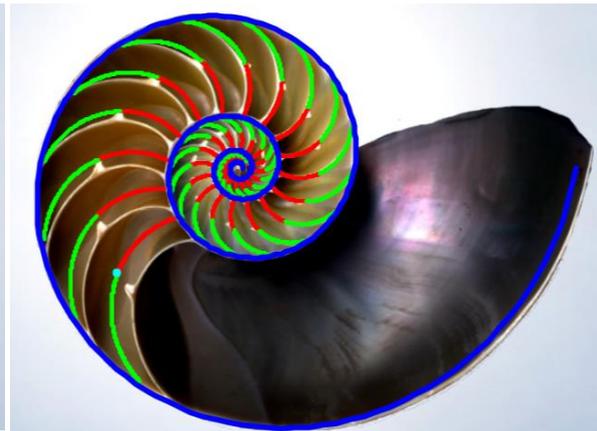


Fig. 29 Comparación del modelo matemático con la sección de la concha.

La pauta observada hasta ahora se prolonga y todo encaja en un patrón único cimentado en la proporción cordobesa. Y esto nos permite establecer un modelo matemático global que reproduce globalmente la morfología y el crecimiento continuo del *Nautilus pompilius* (Fig. 30). Modelo que puede observarse en una animación del recurso interactivo y que procederemos a describir y a analizar.



Fig. 30 Modelo matemático del *Nautilus pompilius*

### 3.8 El modelo matemático

El modelo matemático tiene como patrón básico el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. Por tanto, todo punto del interior y concha (Fig. 30) pertenece a la región plana de ecuación (30), en definitiva a una espiral de ecuación  $r = a \kappa^\theta$  que denominaremos

“longitudinal” y a su vez pertenece a un arco de una espiral logarítmica cordobesa<sup>21</sup> “transversal” (como parte de un septo o de un arco semejante) de ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = P_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = P_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\alpha, \beta] \quad (32)$$

donde  $d \simeq 0,5$  en base a lo observado en el recurso interactivo y lo reflejado en la Fig. 25 , y tendremos que determinar para cada septo tanto el valor del polo  $(P_x, P_y)$  como el de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Así pues, según lo analizado previamente, en el instante de crecimiento dado por un ángulo  $\lambda$ :

- Los puntos de la concha exterior son los que verifican

$$r = \kappa^\theta \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (33)$$

- Los puntos de la concha interior pertenecen a

$$r = \kappa^{\theta-2\pi} \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (34)$$

- Los puntos del sífunculo

$$r = \kappa^{\theta-\frac{3\pi}{4}} \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (35)$$

Y las cámaras siguen un crecimiento gnomónico.

### 3.8.1 Análisis de las cámaras

Los puntos  $A, A', A''$  reflejados en la Fig. 31 expresados según sus coordenadas en polares de acuerdo con (27) y (33) serían:

$$A(\kappa^{\theta_1}, \theta_1), A'(\kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}}, \theta_1 + \frac{2\pi}{16}), A''(\kappa^{\theta_1+2\frac{2\pi}{16}}, \theta_1 + 2\frac{2\pi}{16}) \quad (36)$$

y análogamente  $B, B', B''$  por (34) son:

$$B(\kappa^{\theta_2-2\pi}, \theta_2), B'(\kappa^{\theta_2-2\pi+\frac{2\pi}{16}}, \theta_2 + \frac{2\pi}{16}), B''(\kappa^{\theta_2-2\pi+2\frac{2\pi}{16}}, \theta_2 + 2\frac{2\pi}{16}) \quad (37)$$

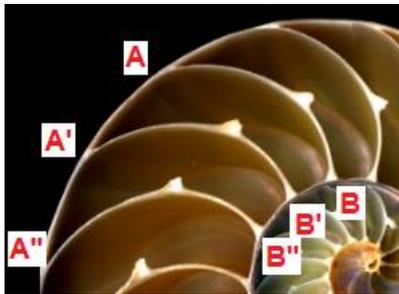


Fig. 31 Detalle de las cámaras

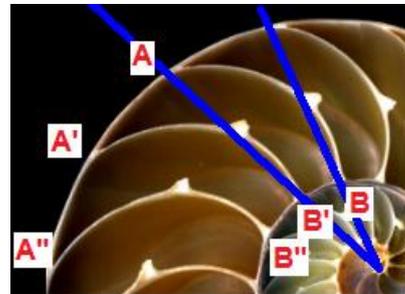


Fig. 32 Desfase angular entre el punto inicial y el final de un septo

<sup>21</sup> Todos esos arcos no son más que traslaciones de arcos de la espiral logarítmica cordobesa de ecuación  $r = d \kappa^\theta$ .

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  puede observarse en la Fig. 32 que son diferentes, hay un desfase angular entre el punto inicial de un septo y el punto final del mismo.

Por el crecimiento gnomónico la cámara  $A'A''B''B'$  es semejante a la  $AA'B'B$ , consecuentemente:

$$\frac{d(A',A'')}{d(A',A)} = \frac{d(A'',B'')}{d(A',B')} = \frac{d(B'',B')}{d(B',B)} = \frac{d(A',B')}{d(A,B)} \quad (38)$$

donde  $d(\cdot, \cdot)$  representa la longitud del arco de espiral correspondiente.

Aplicando (24)

$$d(A',A'') = l_{A'A''} = \frac{\sqrt{1+\ln^2\kappa}}{\ln\kappa} (\kappa^{\theta_1+2\frac{2\pi}{16}} - \kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}}) \quad (39)$$

$$d(A,A') = l_{AA'} = \frac{\sqrt{1+\ln^2\kappa}}{\ln\kappa} (\kappa^{\theta_1+\frac{2\pi}{16}} - \kappa^{\theta_1}) \quad (40)$$

Y por tanto

$$\frac{d(A',A'')}{d(A,A')} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (41)$$

Análogamente de (37) y (24)

$$\frac{d(B',B'')}{d(B,B')} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (42)$$

Por lo que por (38)

$$\frac{d(A'',B'')}{d(A',B')} = \frac{d(A',B')}{d(A,B)} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (43)$$

Dado que  $B$  y  $A$  son puntos de un septo, según (32), el arco  $\widehat{BA}$  puede representarse mediante la ecuación

$$\begin{cases} x = C_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = C_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_3, \theta_3 + \Delta\theta_3] \quad (44)$$

donde  $\Delta\theta_3$  representa un incremento del ángulo  $\theta_3$  y  $(C_x, C_y)$  es el polo de la espiral a la que pertenece ese arco. En la figura Fig. 33 es el arco de color verde que pertenece a la espiral pintada con igual color, pero con menor grosor.

Análogamente para  $B'$  y  $A'$  tendríamos

$$\begin{cases} x = C'_x + d \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = C'_y + d \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_4, \theta_4 + \Delta\theta_4] \quad (45)$$

que en la figura Fig. 33 sería el arco de color rojo correspondiente a la espiral de igual color.

Por lo que por (24):

$$\frac{d(A',B')}{d(A,B)} = \frac{\kappa^{\theta_4}}{\kappa^{\theta_3}} \frac{\kappa^{\Delta\theta_4-1}}{\kappa^{\Delta\theta_3-1}} \quad (46)$$

Y por (43) ha de ser

$$\frac{\kappa^{\theta_4}}{\kappa^{\theta_3}} \frac{\kappa^{\Delta\theta_4-1}}{\kappa^{\Delta\theta_3-1}} = \kappa^{\frac{2\pi}{16}} \quad (47)$$

y por tanto  $\theta_4 - \theta_3 = \frac{2\pi}{16}$  y  $\Delta\theta_3 = \Delta\theta_4$ .

Es decir, dos septos consecutivos se corresponden con dos arcos de igual amplitud  $\Delta$  de la espiral de ecuación (32), pero que se diferencian en un ángulo de  $\frac{2\pi}{16}$ . Así pues, si en (44)  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , entonces en (45)  $\theta \in \left[\alpha + \frac{2\pi}{16}, \beta + \frac{2\pi}{16}\right]$ .

### 3.8.2 Los septos

Utilizando el recurso interactivo, se observa que los polos  $C(C_x, C_y)$  y  $C'(C'_x, C'_y)$  y todos los análogos correspondientes al resto de septos son puntos pertenecientes a una espiral cordobesa, la dibujada de color magenta en la Fig. 33, y que aproximadamente es la de ecuación:

$$r = 0,5 \kappa^\theta \quad (48)$$

Ésta, quizás, realmente podría corresponderse con la espiral intermedia entre la de la concha interior (34) y la del sífúnculo (35), es decir,  $r = e \kappa^\theta$  con

$$e = \frac{\frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2} + \kappa^{-2\pi}}{2} = \frac{3\kappa^{-2\pi+1}}{4} = 0,507359 \dots \quad (49)$$

que es el valor teórico que le asignaremos en nuestro modelo.

$$0,507359 \dots = \kappa^{-1,268782 \dots \pi} \simeq \kappa^{-\frac{10}{8}\pi} \quad (50)$$

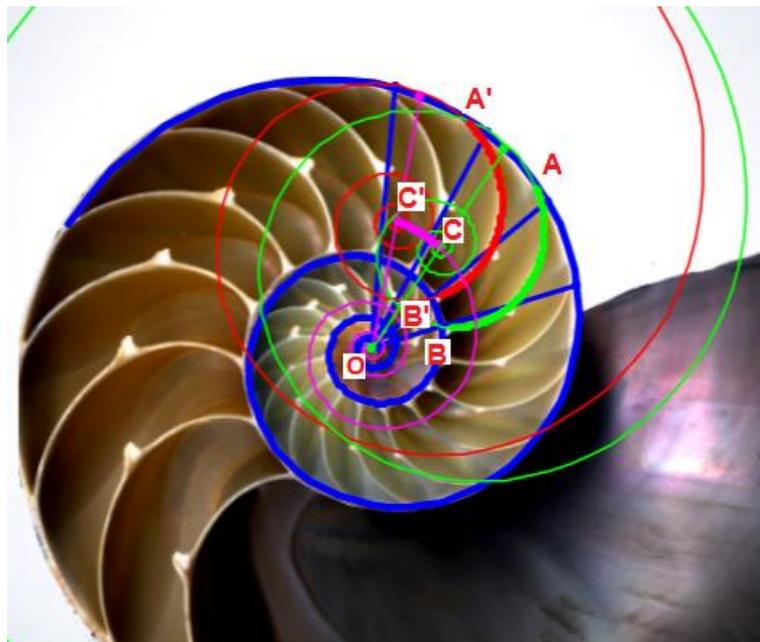


Fig. 33 Ubicación del polo en la espiral de cada septo y arco de cada uno de ellos

Y de acuerdo a lo denotado en (36) y (37) las coordenadas polares de esos dos polos serían

$$C(e \kappa^{\theta_5}, \theta_5) \quad (51)$$

$$C'(e \kappa^{\theta_5 + \frac{2\pi}{16}}, \theta_5 + \frac{2\pi}{16}) \quad (52)$$

Es decir, hay un desplazamiento de  $\frac{2\pi}{16}$  que se corresponde lógicamente con el crecimiento angular gnomónico entre septos. Para justificar esto último basta aplicar lo realizado anteriormente con las cámaras, por ejemplo, a los triángulos  $OAC$  y  $OA'C'$ .<sup>22</sup>

Con la escena interactiva hemos determinado que si denotamos por  $n$  la posición del  $n$ -ésimo septo contabilizado en el sentido de crecimiento del *Nautilus*, entonces los ángulos antes citados se corresponden con los siguientes valores

$$\theta_1 = n \frac{2\pi}{16} \quad (53)$$

$$\theta_2 = (n - 1) \frac{2\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \quad (54)$$

$$\theta_3 = (n - 6) \frac{2\pi}{16} + \frac{3\pi}{64} \quad (55)$$

$$\Delta\theta_3 = \frac{5\pi}{8} \quad (56)$$

$$\theta_5 = (n + 1) \frac{2\pi}{16} - \frac{\pi}{16} \quad (57)$$

### Base teórica del fragmocono

El fragmocono se configura como adición a la protoconcha. En la Fig. 34 se puede observar una fotografía de la protoconcha y el inicio del fragmocono en un ammonites y en la Fig. 35 hemos superpuesto lo que podría considerarse como la base inicial teórica del fragmocono (triángulo naranja) y de su gnomon (triángulo amarillo) en el que se ubica el primer septo.

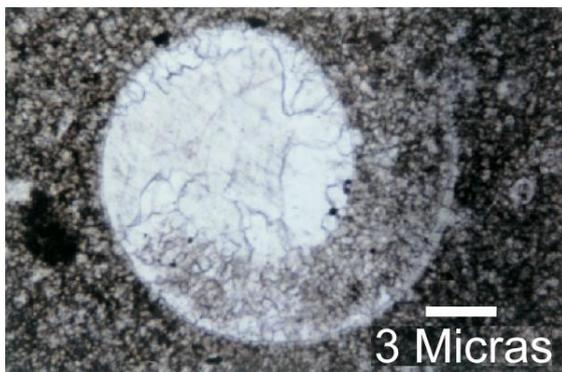


Fig. 34 Protoconcha e inicio del fragmocono en un ammonites (Villaseñor, 2007)

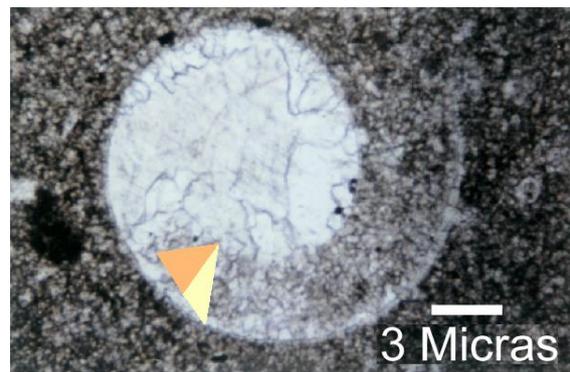


Fig. 35 Base inicial teórica del fragmocono (triángulo naranja) y gnomon del mismo (triángulo amarillo)

<sup>22</sup> Todo esto puede considerarse que son excesivas coincidencias, pero muy al contrario no es más que consecuencia de las propiedades de esta espiral maravillosa, resumidas por Bernoulli en su "Eadem mutato resurgo". Ver en el Apéndice II la propiedad básica que conduce a lo aquí obtenido e indicado.

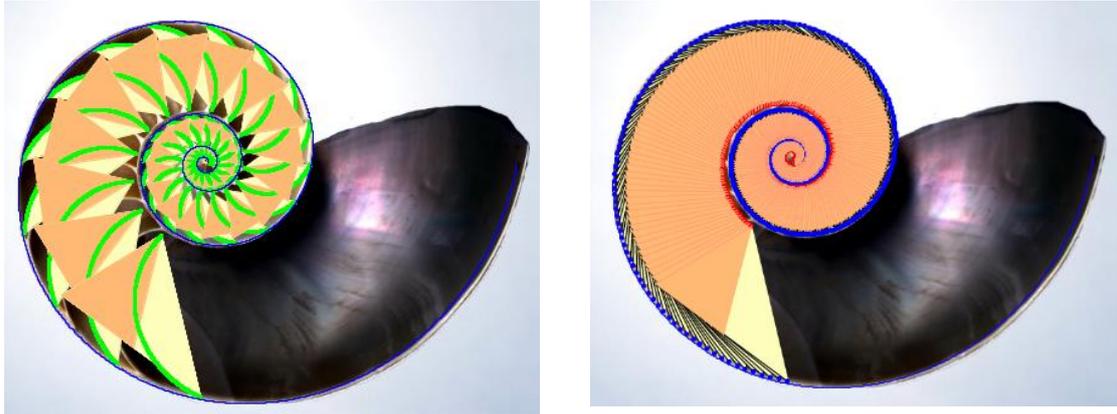


Fig. 36 Simulación del crecimiento discreto del *Nautilus* a partir del triángulo cordobés como base teórica del fragmocono. A la izquierda paso  $\frac{2\pi}{16}$  y a la derecha con paso  $\frac{2\pi}{160}$ .

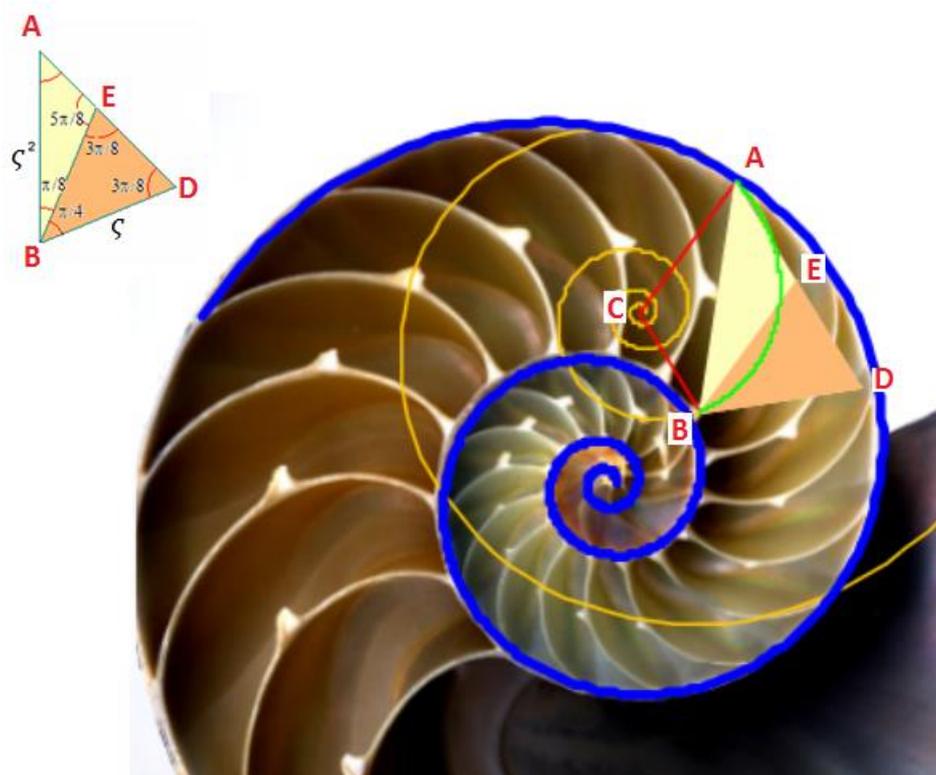


Fig. 37 Base teórica de crecimiento del fragmocono

La amplitud angular de los septos (56) es significativa porque nos aporta información acerca de cuál sería esa base inicial teórica del fragmocono, pues en relación a ella se establece el modelo de crecimiento de la concha y de los septos (ver Fig. 36). En el *Nautilus* dicha base se corresponde con un triángulo semejante al triángulo cordobés  $BDA$  dibujado en la Fig. 37, el cual se obtiene a partir del triángulo cordobés  $BDE$  y de su gnomon  $BEA$ . En esa imagen se observa que el ángulo

$$\widehat{ABE} = \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{16} \quad (58)$$

es el ángulo de crecimiento gnomónico discreto interseptos el cual fue determinado desde el principio del análisis. Y el ángulo

$$\widehat{BEA} = \frac{5\pi}{8} \quad (59)$$

que coincide con el  $\widehat{ACB}$ , es la amplitud del arco de espiral cordobesa que determina cada septo. El triángulo cordobés y su gnomon se configuran como la base del crecimiento del *Nautilus pompilius*, es el germen a partir del cual el *Nautilus* muestra la razón primigenia de su forma y de su crecimiento.

## 4 Conclusiones

A través del detallado y progresivo análisis realizado en este artículo hemos ido construyendo la base teórica o modelo matemático que soporta a la bella morfología del *Nautilus Pompilius* y hemos tratado del encontrar el modelo de crecimiento que conduce a poder explicar y a comprender por qué adquiere esa forma. Desde su inicio la espiral logarítmica cordobesa tomó presencia y a medida que la mirada se deslizaba hacia algún nuevo detalle esta espiral ha vuelto a imponer su presencia marcándonos y alumbrándonos el camino del descubrimiento y de la adquisición del conocimiento. La belleza del *Nautilus pompilius* se sustenta en la proporción cordobesa o humana y todo punto de su concha o del interior ha quedado determinado por la intersección de dos espirales cordobesas. El germen o base inicial matemática que explica el por qué acontece todo lo observado se ha ubicado en el crecimiento gnomónico de un triángulo cordobés, las propiedades de éste se trasladan al desarrollo y comportamiento global detectado y modelado.

## Bibliografía

- Galo Sánchez, J. (2004). *Las matemáticas en la belleza y la belleza de las matemáticas*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Red Educativa Digital Descartes: [http://proyectodescartes.org/uudd/materiales\\_didacticos/belleza-JS/index.htm](http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/belleza-JS/index.htm)
- Galo Sánchez, J., Cabezudo Bueno, Á., y Fernández Trujillo, I. (2016). *El grillo y la espiral logarítmica*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Red Educativa Digital Descartes: <http://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica>
- Ghyca, M. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: Poseidon.
- Hoz Arderius, R. d. (1973). La proporción cordobesa. *Actas de la quinta asamblea de instituciones de Cultura de las Diputaciones Provinciales*. Córdoba: Diputación Provincial de Córdoba.

- Hoz Arderius, R. d. (1996). La proporción cordobesa. *Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación matemática "Thales"* (págs. 67-84). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- Moseley, H. (1813). On the geometrical forms of turbinated and discoid shells. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 128, 351-370.
- Peterson, I. (1 de 4 de 2005). *Sea shell spirals*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de ScienceNews: <https://www.sciencenews.org/article/sea-shell-spirals>
- Raup, D. M. (1961). The geometry of coiling in gastropods. *Proc Natl Acad Sci U S A*. 1961 April; 47(4):, 602-609.
- Raup, D. M. (1962). Computer as Aid in Describing Form in Gastropod Shells. *Science*, vol. 138, no. 3537, 150-152.
- Redondo Buitrago, A., y Reyes Iglesias, E. (2009). *La Geometría de los Polígonos Cordobeses*. Recuperado el 11 de 10 de 2016, de Visual Mathematics: <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/antonia2010/cord.pdf>
- Thompson, D. (1945). *On Growth and Form*. New York: Macmillan Co.
- Villaseñor, A. B. (2007). *Los ammonoideos*. Recuperado el 07 de 08 de 2016, de Instituto de Geología, UNAM: <http://www.geologia.unam.mx/igl/deptos/paleo/villasenor/ammonoideos/>

## Hiperenlaces

En el texto se han incluido hiperenlaces accesibles siempre que se esté usando como documento digital. Para quienes estén leyendo este contenido en un documento estático detallamos la dirección web correspondiente

- i. Las Matemáticas en la belleza y la belleza de las Matemáticas  
<http://proyectodescartes.org/descartescms/matemáticas/item/1756-las-matemáticas-en-la-belleza>
- ii. *Nautilus pompilius*: [https://es.wikipedia.org/wiki/Nautilus\\_pompilius](https://es.wikipedia.org/wiki/Nautilus_pompilius)
- iii. *Nautilus*: <https://en.wikipedia.org/wiki/Nautilus>
- iv. Imagexia: <http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/>
- v. nautilidos (Nautilida): <https://es.wikipedia.org/wiki/Nautilida>
- vi. On Growth and Form: <https://archive.org/details/ongrowthform00thom>
- vii. yocto-yotta: <https://es.wikipedia.org/wiki/Yocto>
- viii. también ha acontecido: <https://www.sciencenews.org/article/sea-shell-spirals>
- ix. el orden de magnitud: [https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rdenes\\_de\\_magnitud\\_\(longitud\)](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%93rdenes_de_magnitud_(longitud))
- x. Sistema Internacional: [https://es.wikipedia.org/wiki/Prefijos\\_del\\_Sistema\\_Internacional](https://es.wikipedia.org/wiki/Prefijos_del_Sistema_Internacional)
- xi. El grillo y la espiral logarítmica:  
<http://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica>
- xii. Rafael de la Hoz Arderius: [https://es.wikipedia.org/wiki/Rafael\\_de\\_La-Hoz\\_Arderius](https://es.wikipedia.org/wiki/Rafael_de_La-Hoz_Arderius)
- xiii. su artículo: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Nautilus-JS/referencias/PROPORCIONCORDOBESA.pdf](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/PROPORCIONCORDOBESA.pdf)

- xiv. este documento: [http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales\\_didacticos/Nautilus-JS/referencias/VIIJAEMproporcioncordobesa.pdf](http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/VIIJAEMproporcioncordobesa.pdf)
- xv. Jakob Bernoulli: [https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob\\_Bernoulli](https://es.wikipedia.org/wiki/Jakob_Bernoulli)
- xvi. hélice cónica: [https://es.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lice\\_\(geometr%C3%ADa\)](https://es.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9lice_(geometr%C3%ADa))
- xvii. Teleoconcha: [https://books.google.es/books?id=dG9JgajDIJsC&pg=PA275&lpg=PA275&dq=teleoconcha&source=bl&ots=Bauryn1Ql&sig=cdBIDlk8pS09bU5R8CNKw\\_AuN-g&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwj1mLCboJPOAhWBThoKHVbsBTAQ6AEITAB#v=onepage&q=teleoconcha&f=false](https://books.google.es/books?id=dG9JgajDIJsC&pg=PA275&lpg=PA275&dq=teleoconcha&source=bl&ots=Bauryn1Ql&sig=cdBIDlk8pS09bU5R8CNKw_AuN-g&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwj1mLCboJPOAhWBThoKHVbsBTAQ6AEITAB#v=onepage&q=teleoconcha&f=false)
- xviii. Sifúnculo: <https://en.wikipedia.org/wiki/Siphuncle>
- xix. Ammonoideos: <http://www.geologia.unam.mx/igl/deptos/paleo/villasenor/ammonoideos/>
- xx. recuento de los verticilos [https://en.wikipedia.org/wiki/Whorl\\_%28mollusc%29](https://en.wikipedia.org/wiki/Whorl_%28mollusc%29)
- xxi. The geometry of coiling in gastropods: <http://www.pnas.org/content/47/4/602>
- xxii. Descartes: <http://reddescartes.org/>

## Apéndice I

Un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus pompilius* nos permite ubicar los elementos que la componen y caracterizan.

1. El perfil sigue la pauta de una espiral, es decir, una línea curva que es descrita por un punto que se va alejando progresivamente de otro punto fijo (el polo) a medida que va girando alrededor de él.
2. En el interior de la concha se observan tres zonas diferenciadas:
  - a) El núcleo inicial correspondiente al estado embrionario o protoconcha (Fig. 38).
  - b) Una segunda zona que está dividida en cámaras por los septos (tabiques de separación), los cuales en su parte central presentan restos del sifúnculo.
  - c) La cámara habitacional del animal que se sitúa en la parte final (Fig. 39).



Fig. 38 Protoconcha



Fig. 39 Cámara habitacional

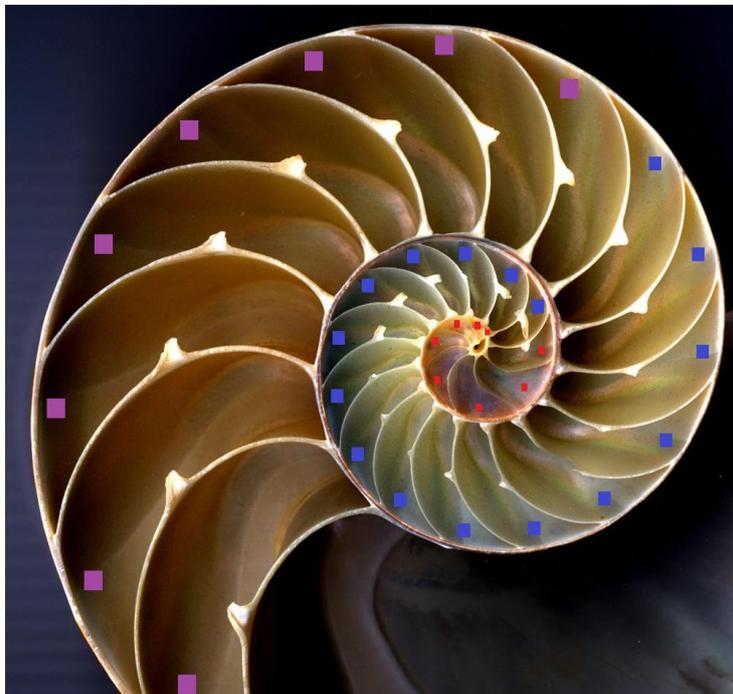


Fig. 40 Cámaras entre septos

3. Las cámaras interseptos, ver Fig. 40, comprenden dos vueltas (verticilos) y media y podemos contabilizar:
  - a) Ocho cámaras en el primer verticilo.
  - b) En el segundo dieciséis.
  - c) Otras ocho cámaras en la media vuelta final.
4. La cámara habitacional que abarca aproximadamente un ángulo de  $\frac{3\pi}{4}$ .

En la literatura biológica están documentadas diferentes fases de crecimiento postembrionario distinguiendo un estadio neánico, uno juvenil y otro adulto lo cual puede asociarse en este caso respectivamente a las primeras ocho cámaras —que tienen una amplitud angular de paso  $\frac{\pi}{4}$ —, a las dieciséis siguientes —con paso  $\frac{\pi}{8}$ — y a las ocho últimas —en las que el paso es algo superior a  $\frac{\pi}{8}$ —. El análisis matemático realizado en este artículo permite reproducir sin dificultad este comportamiento diferenciado, sin embargo nuestro objetivo principal es la obtención del modelo matemático a partir de lo observado en la yoctoyotta realidad, pero sin necesidad de proyectarlo de nuevo en ésta. Así pues, el paso entre septos lo consideraremos constante e igual a  $\frac{\pi}{8}$ , que como se detalla en este documento tiene un fundamento teórico en todo el modelo.

## Apéndice II

Procedimiento seguido por Mosley para determinar el factor de crecimiento del *Nautilus pompilius*.

*“These conclusions were directly verified by the following observations. A shell of the Nautilus pompilius was cut through the middle in a direction perpendicular to its axis, and a tracing was taken of the section of its spiral surface; this tracing is copied in Fig. 41Fig. 41.*

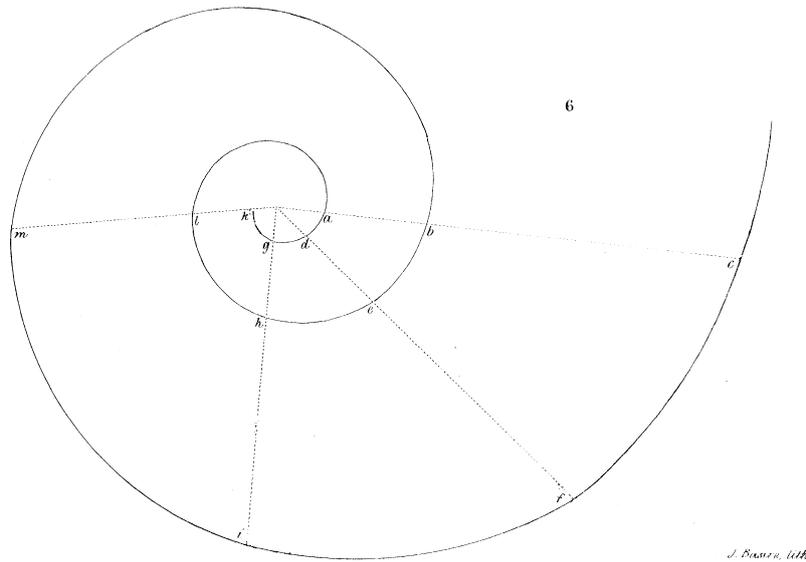


Fig. 41 Determinación empírica del factor de crecimiento

*It was made from the dark line which shows, on the section of the internal whorls of the shell, the line of that pearly surface which the animal deposits as a covering to its completed portion, as it advances in the construction of it. It is important to make this observation, because as it extends one whorl of its shell over another, the animal deposits continually upon the pearly surface of this last a new coating of shell, and thickens it; and it is in the centre of this thickened section that is to be found that section of the pearly surface, of which the edge of the external whorl is a continuation, and from which this tracing was taken.*

It will be found that the distance of any two of its whorls measured upon the same radius vector. Thus

*a b* is one-third of *b c*,  
*d e* is one-third of *e f*,  
*g h* is one-third of *h i*,  
*l k* is one-third of *l m*.

The curve is therefore a *logarithmic spiral*.”

### Apéndice III

En la página 777 de (Thompson, 1945) se enuncia una propiedad de las espirales logarítmicas de gran interés:

Si sobre cualquier radio polar  $OP$  de una espiral logarítmica se dibuja un triángulo  $OPQ$ , el lugar geométrico de los puntos  $Q$  correspondientes a triángulos semejantes a él construidos sobre radios polares es una espiral semejante a la inicial. En la Fig. 42,  $Q, Q', Q''$  están en una espiral semejante a la dibujada.

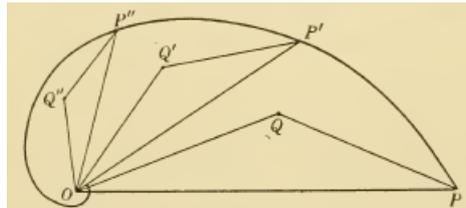


Fig. 42 Semejanza en la espiral logarítmica

La demostración es sencilla ya que al ser los triángulos semejantes entonces:

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ''}{OP''} = k \quad (60)$$

De donde  $OQ = k OP$ , y dado que  $OP$  es el radio vector de una espiral logarítmica  $r = a b^\theta$ , entonces  $OP = a b^\theta$  y por tanto  $OQ = k a b^\theta$ , es decir los puntos  $Q$  pertenecen a una espiral logarítmica de ecuación  $r = k a b^\theta$  semejante a la anterior y con igual razón de semejanza que la existente entre los triángulos.

Esta propiedad se puede generalizar a cualquier otra figura o curva construida sobre un radio vector y así se muestra evidente cómo se reproducen las mismas formas al crecer la espiral.