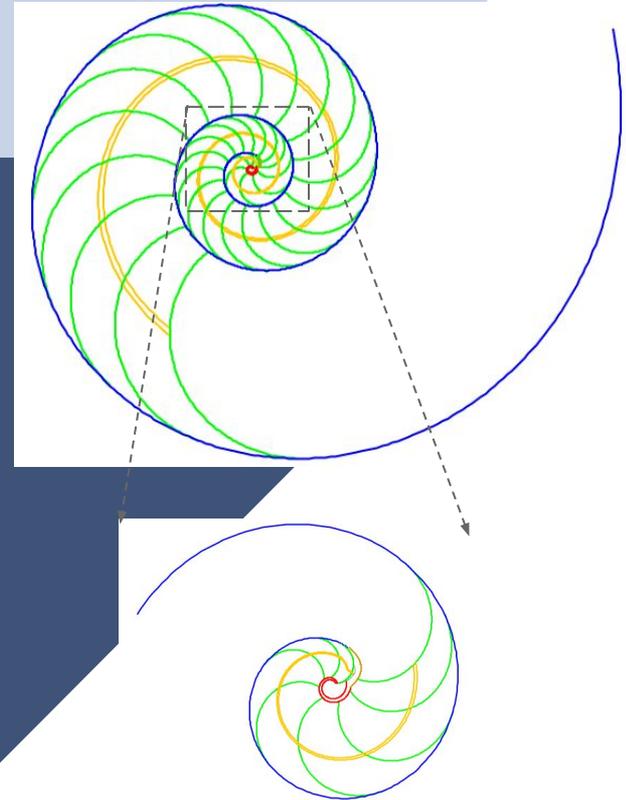




# Ontogenia matemática del Nautilus

Modelo matemático desde la etapa embrionaria a la adulta



**ontogenia** De *onto-* y *-genia*, a partir del al. *Ontogenie*. f. *Biol.* Desarrollo del individuo, referido en especial al período embrionario.

Dr. José R. Galo Sánchez



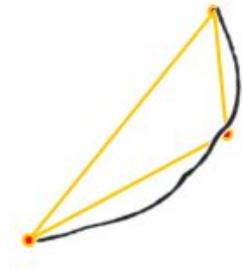
**CC by-nc-nd**



# La concha embrionaria y la primera cámara

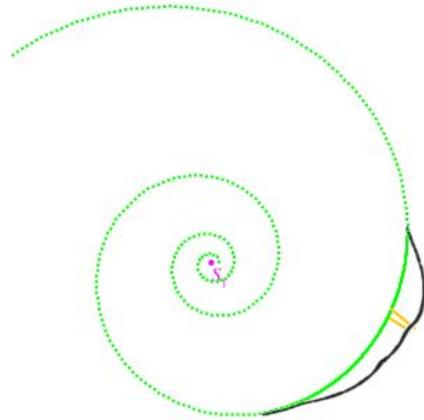
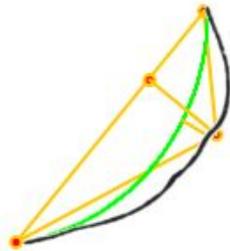
## La concha embrionaria

- ❖ Sección asimétrica.
- ❖ En ella se inscribe el **gnomon** de un triángulo cordobés.
  - Un vértice se ubica en el inicio del sífunculo.
  - Los otros dos en las constricciones ventral y dorsal.



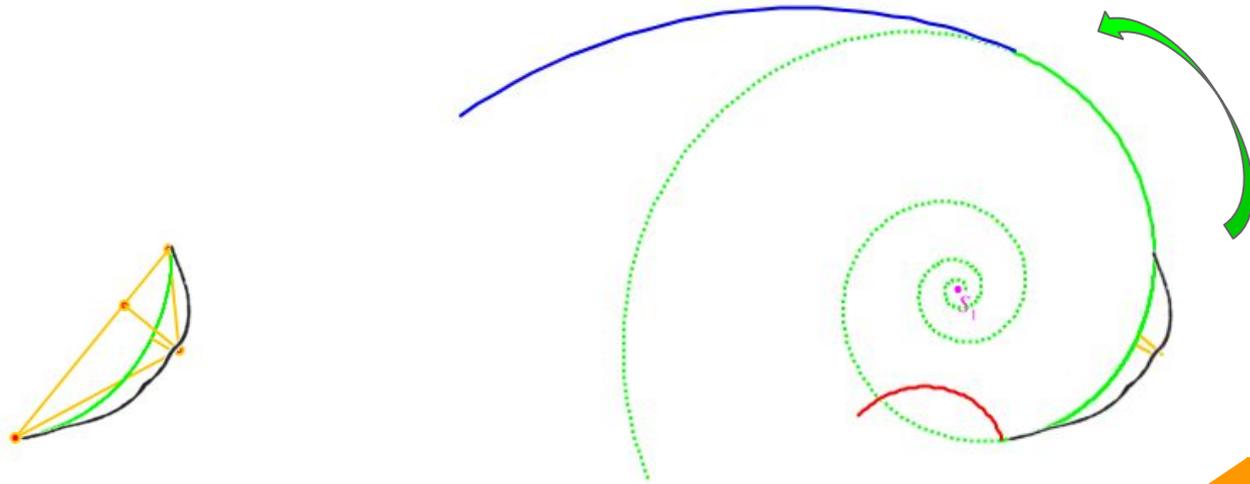
## Primera cámara

- ❖ Primera cámara:
  - El **primer septo** es un arco de una espiral cordobesa que pasa por las constricciones de la concha.
  - El **sifúnculo** de la primera cámara es recto y coincide con la altura del gnomon.



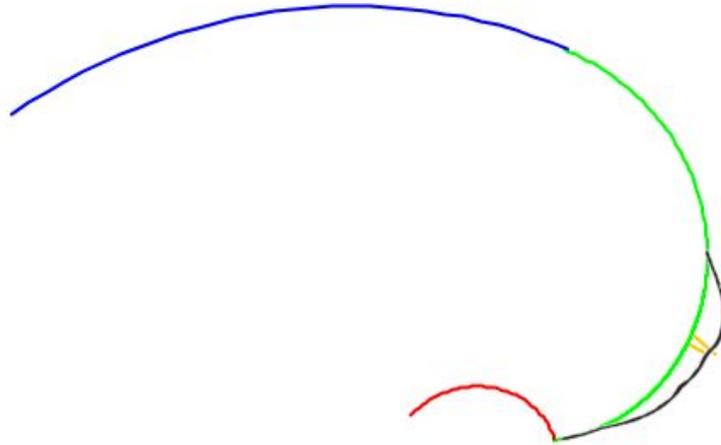
## Ampliación del fragmacono

- ❖ El **primer septo** se extiende en la dirección ventral siguiendo el arco de la espiral cordobesa.
- ❖ El fragmacono se amplía respecto al fragmacono embrionario.



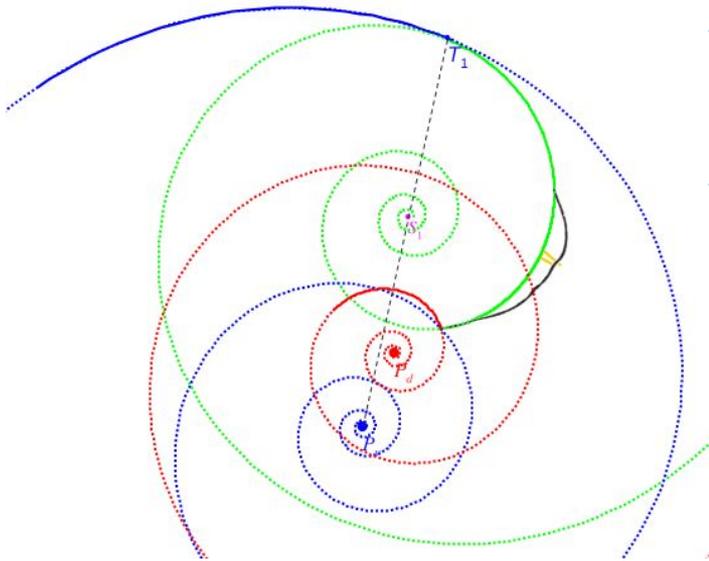
## Fragmacono postembrionario en la etapa de la primera cámara

- ❖ El fragmacono postembrionario se inicia a continuación de la ampliación del **primer septo**.
- ❖ Está comprendido entre la **pared dorsal** y la **pared ventral**.



## Pared ventral y dorsal en la etapa de la primera cámara

- ❖ La **pared ventral** es un arco de una espiral cordobesa de polo  $P_v$ .
- ❖ La **pared dorsal** es un arco de una espiral cordobesa de polo  $P_d$ .
- ❖ La ampliación del **primer septo** de polo  $S_1$  es tangente a la **pared ventral**.



- ❖ El **polo ventral**  $P_v$  y el **polo dorsal**  $P_d$  son distintos.
- ❖  $P_v$ ,  $S_1$  y el punto de tangencia  $T_1$  del **primer septo** con la **pared ventral** están alineados por ser espirales cordobesas tangenciales (equianguulares).

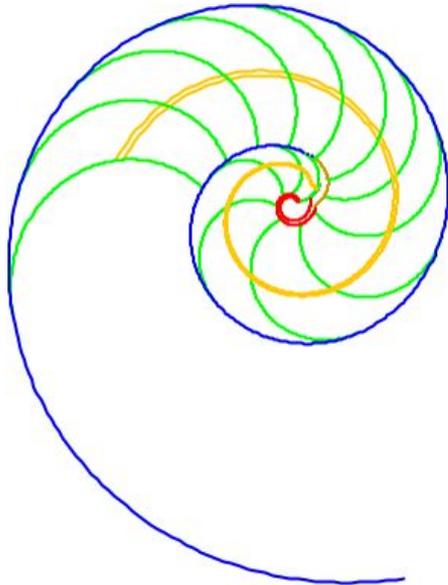




La pared ventral

# La pared ventral

La **pared ventral** desde la primera cámara hasta la etapa adulta, permanece invariante en su forma: es una **espiral cordobesa**.



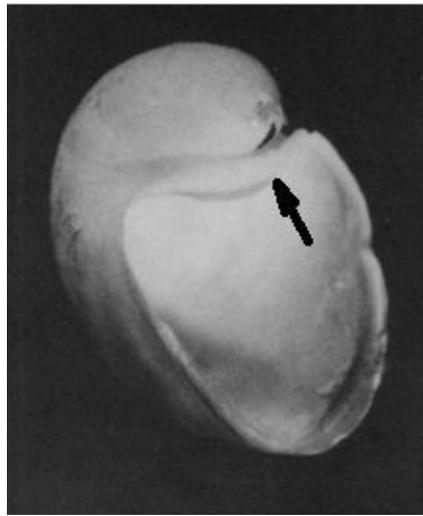
$$r = \kappa^\theta, \kappa = 1,18558\dots, \theta \in [\theta_i, \theta_f]$$

ecuación en coordenadas polares  
el polo es  $P_v(0,0)$

$$\begin{cases} x = \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_f]$$

ecuación en coordenadas cartesianas

Tomaremos esta ecuación como sistema de referencia para ubicar el resto de elementos del modelo ontogénico del Nautilus.

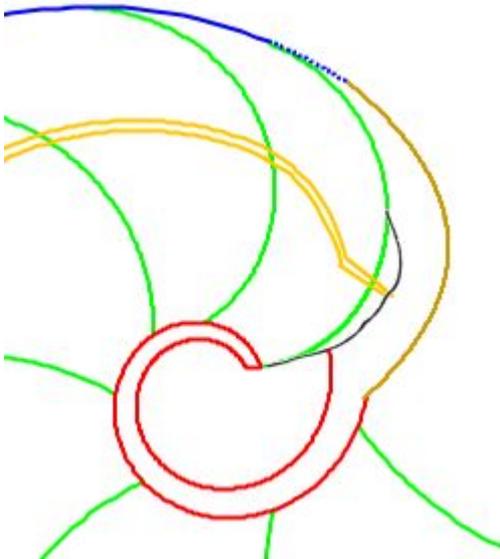


La pared dorsal

## La pared dorsal en el primer verticilo

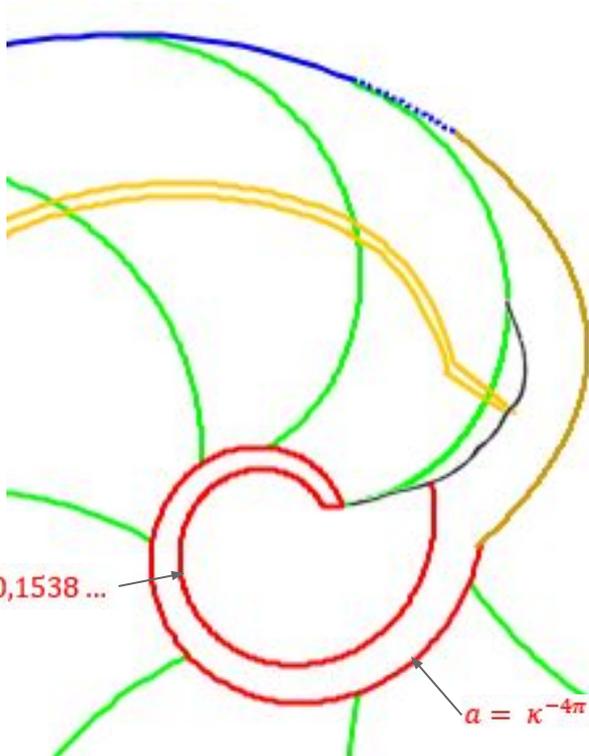
La pared dorsal en el primer verticilo presenta tres etapas diferenciadas:

- Del primer al séptimo **septo**: **espiral cordobesa**\*.
- Del séptimo al décimo **septo**: **pared de transición** parabólica.
- Del décimo al undécimo **septo**: **arco de espiral cordobesa** que enlaza con la **pared ventral inicial**



\*En la primera etapa es necesario dar un grosor a la pared dorsal para que el segundo y tercer septo la intersequen y para reflejar adecuadamente en enlace con la pared de transición.

# La pared dorsal en el primer verticilo (ecuaciones)



$$\alpha = \kappa^{-3,5\pi} = 0,1538 \dots$$

$$\alpha = \kappa^{-4\pi} = 0,1177 \dots$$

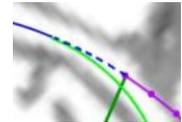
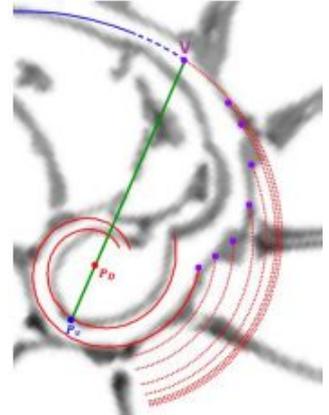
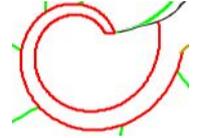
$$\begin{cases} x = D_x + a \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = D_y + a \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \theta \in [\theta_i, \theta_i + \frac{7\pi}{4}]$$

$$P_D(D_x, D_y) = (0.035, 0.080)$$

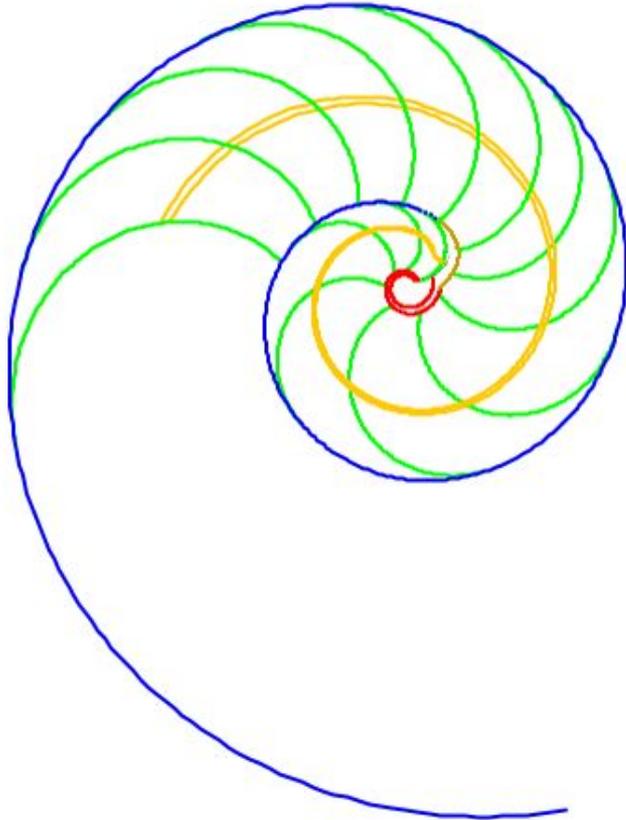
Puntos de una familia de arcos de espirales cordobesas que describen una parábola

$$x = -3,8329y^2 + 1,699096461y + 0,07999021$$

$$r = \kappa^\theta \text{ con } \theta \in [\theta_i, \theta_i + 0,19]$$

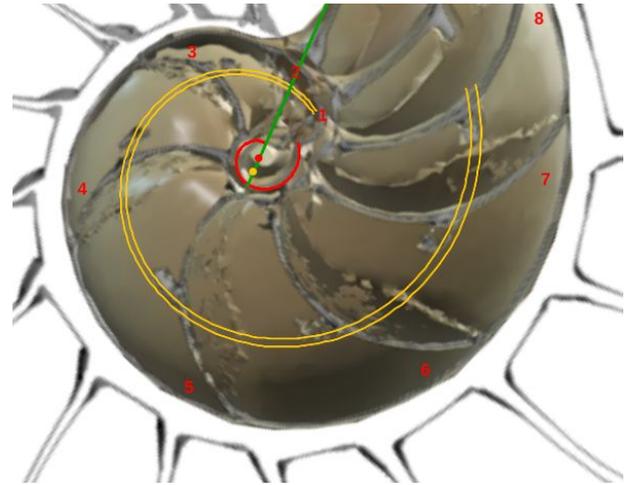
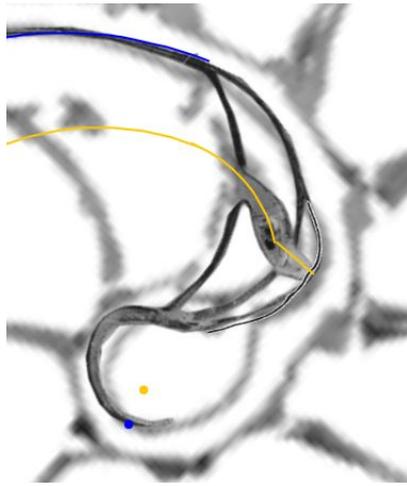


## La pared dorsal en el segundo y tercer verticilo



La pared dorsal en el segundo y tercer verticilo coincide con la pared ventral del verticilo anterior

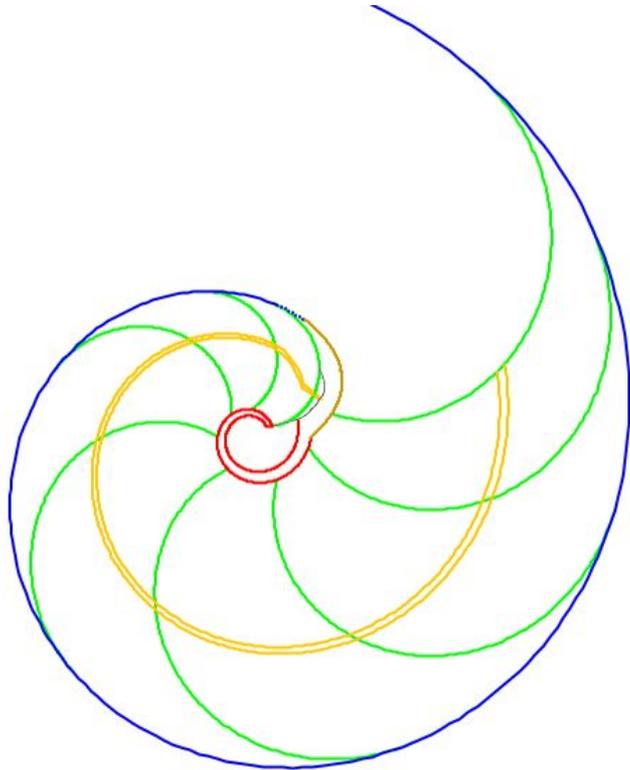
$$r = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta, \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f]$$



# El sífúnculo

## El sifúnculo en el primer verticilo

El **sifúnculo** en el primer verticilo presenta tres etapas diferenciadas:



- En la primera cámara es rectilíneo y sigue la dirección de la altura del gnomon del triángulo cordobés.
- En la segunda cámara se traslada adaptándose a la ampliación del primer septo y del fragmacono.
- Tercera a octava cámara es un arco de espiral cordobesa con polo  $P_{sf}$ , diferente del ventral  $P_v$  y del dorsal  $P_d$ .

# El sífunculo en el primer verticilo (ecuaciones)

Primera cámara es un segmento rectilíneo en la dirección de la altura del gnomon del triángulo cordobés que aproxima la concha embrionaria.

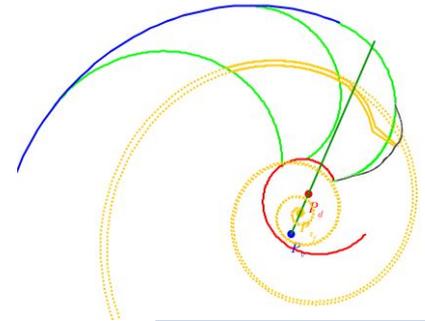
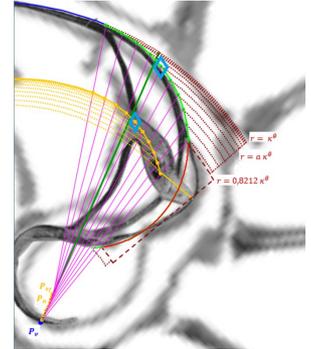
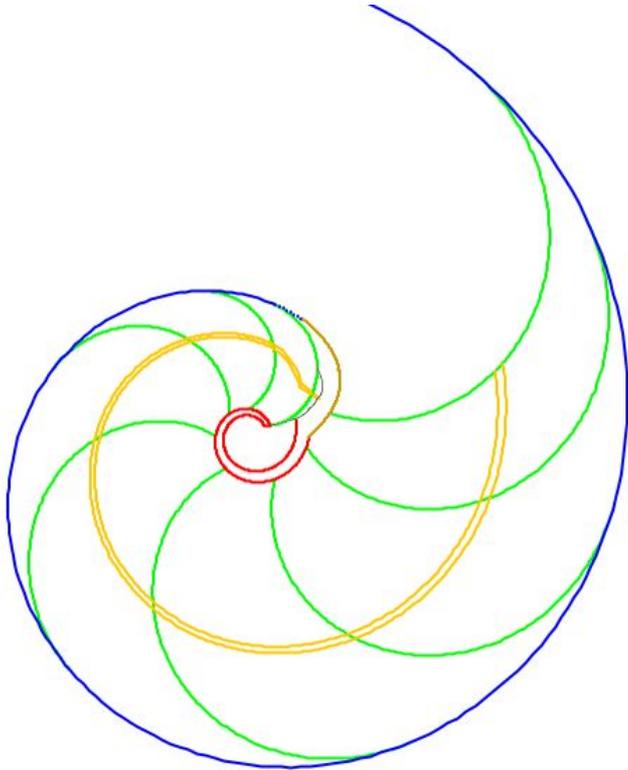
Segunda cámara es una espiral cordobesa con traslación de su polo proporcional a la ampliación del fragmacono.

$$\begin{cases} x = b_a \kappa^{\theta_i} \cos(\theta_i) + \frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2} \kappa^{\theta_a} \cos(\theta_a) \\ y = b_a \kappa^{\theta_i} \sin(\theta_i) + \frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2} \kappa^{\theta_a} \sin(\theta_a) \end{cases}$$

De la tercera a la octava cámara es una espiral cordobesa con polo  $P_{sf}$

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{2} + \frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2} \kappa^{\theta} \cos(\theta) \\ y = \frac{D_y}{2} + \frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2} \kappa^{\theta} \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + \frac{7\pi}{4}]$$

$$P_v(0,0) \quad P_{sf}\left(\frac{D_x}{2}, \frac{D_y}{2}\right) \quad P_D(D_x, D_y)$$



## El sifúnculo en el segundo y tercer verticilo (ecuaciones)

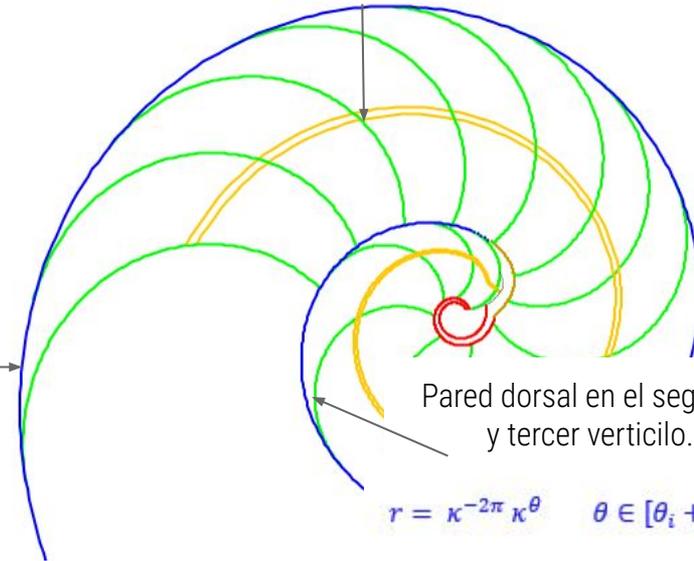
El **sifúnculo** en el segundo y tercer verticilo es el eje del fragmacono, un arco de espiral cordobesa intermedia entre la pared dorsal y la ventral:

Sifúnculo en el segundo y tercer verticilo.

$$r = \frac{1 + \kappa^{-2\pi}}{2} \kappa^\theta \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f]$$

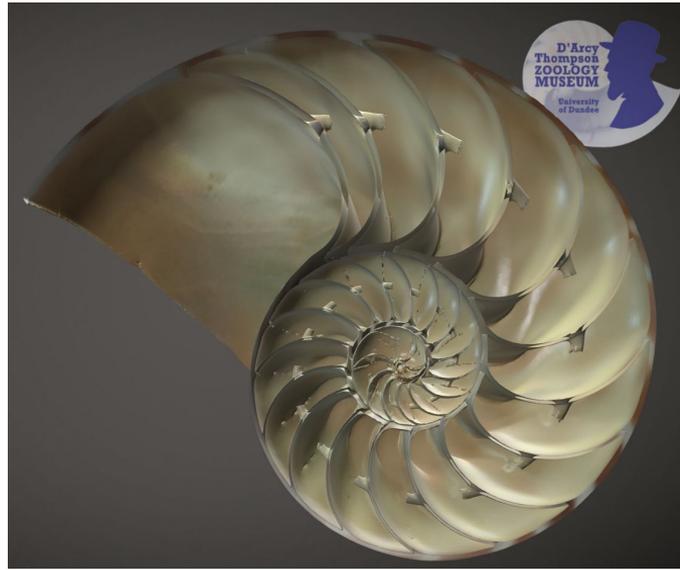
Pared ventral en el segundo y tercer verticilo.

$$r = \kappa^\theta \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f]$$



Pared dorsal en el segundo y tercer verticilo.

$$r = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f]$$



Los septos

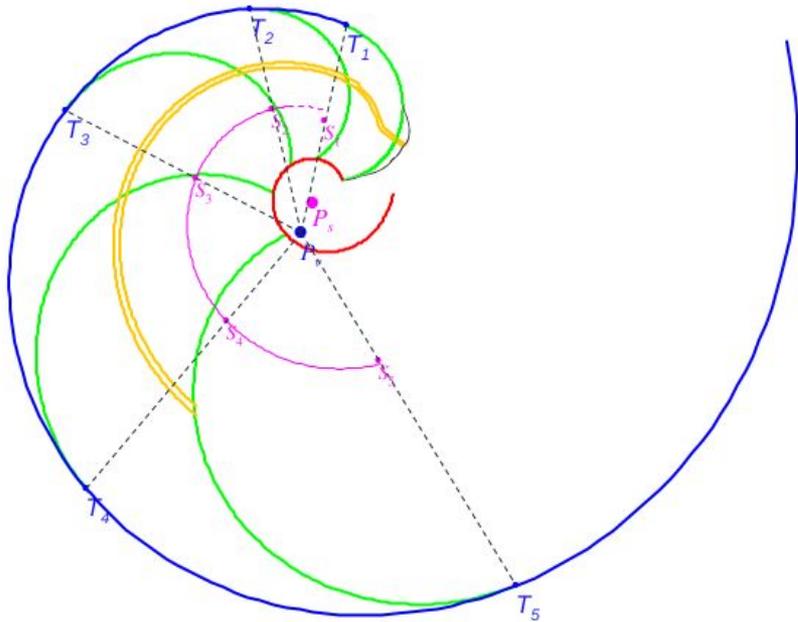
El número de **septos** varía en los tres verticilos del Nautilus:



- En el primer verticilo hay **8 septos**. Paso medio interseptos:  $2\pi/8$ .
- En el segundo verticilo hay **16 septos**. Paso medio interseptos:  $2\pi/16$ .
- En el tercer verticilo **8 septos** aproximadamente con paso medio interseptos:  $2\pi/16$ .

\*El paso radial interseptos en el segundo y tercer verticilo varía según los ejemplares considerados entre  $2\pi/15$  y  $2\pi/16$ . Y suele ser inferior en los últimos septos, en la etapa de madurez.

# Forma y propiedades de los septos



Todos los septos:

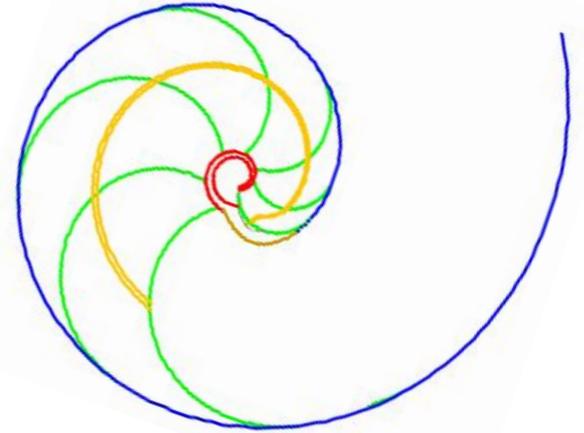
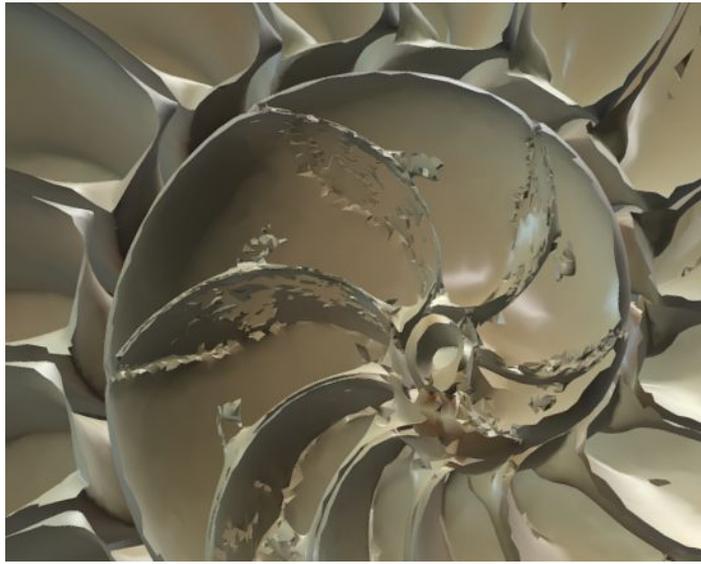
→ son arcos de espirales cordobesas.

$$\begin{cases} x = S_{nx} + d \kappa^\rho \cos(\rho) \\ y = S_{ny} + d \kappa^\rho \sin(\rho) \end{cases} \quad \rho \in [\theta_{pn}, \theta_{pn} + \Delta\theta_{pn}]$$

→ son tangentes a la pared ventral.

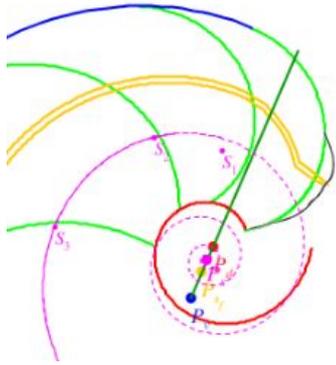
→ tienen su punto de tangencia  $T_n$  y su polo  $S_n$ , alineado con el polo  $P_v$  de la pared ventral\*.

\*Debido a que todo septo es tangente a la pared ventral y dado que ambos son arcos de espirales cordobesas, es decir, equiangulares en todo punto de ellas.



Los septos en el 1.<sup>er</sup> verticilo

# Particularidades de los septos en el 1.º verticilo



En el **primer verticilo**:

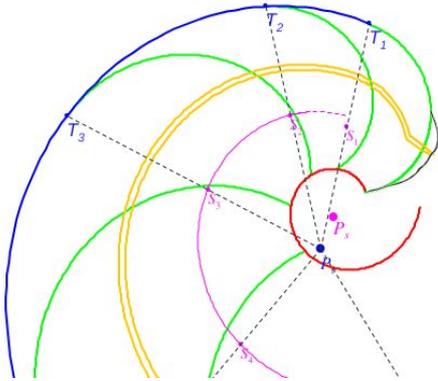
- El polo del primer septo  $S_1$  se ubica en una posición diferenciada.
- Los polos  $S_n$  ( $2 \leq n \leq 7$ ) de los arcos de los septos están en una **espiral cordobesa** de polo  $P_s$  que difiere del polo ventral  $P_v$ .

$$\begin{cases} x = 0,0263 + 0,4331 \kappa^\alpha \cos(\alpha) \\ y = 0,0600 + 0,4331 \kappa^\alpha \sin(\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [\theta_i, \theta_i + 2\pi]$$

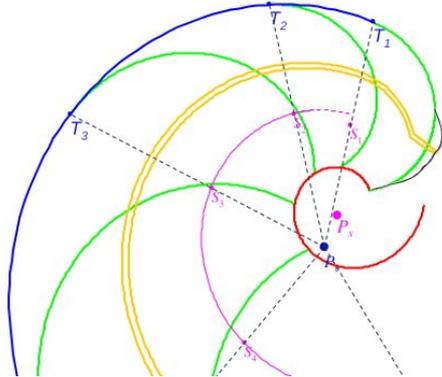
donde  $\overrightarrow{P_v P_s} = \frac{3}{4} \overrightarrow{P_v P_D} = (0,0263, 0,0600)$ .

- La razón entre el radio vector del **septo** y el radio vector de la **pared ventral**:  $S_n T_n / P_v T_n$  es variable\*.

\*Éste es el porqué de que los arcos de los septos tengan diferente escala o ángulo de retardo y es por ello que las cámaras septales tengan un crecimiento volumétrico no gnomónico (siguen un crecimiento logarítmico) y es lo que causa la mejora de la flotabilidad en la etapa de crecimiento inicial.

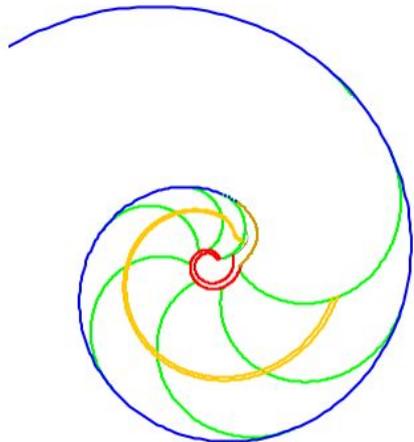


# Los septos en el 1.º verticilo (ecuaciones)



$$n < 8 \quad \begin{cases} x = S_{nx} + a_n \kappa^\sigma \cos(\sigma) \\ y = S_{ny} + a_n \kappa^\sigma \text{sen}(\sigma) \end{cases} \quad \sigma \in [\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n, \theta_i + \varepsilon_n]$$

n	1	2	3	4	5	6	7
$a_n = \frac{S_n T_n}{P_v T_n}$	0,4573	0,4495	0,5565	0,6554	0,6369	0,5635	0,5273
$\varepsilon_n = P_D \widehat{P_v S_n}$	0,19 11°	0,64 37°	1,50 86°	2,86 164°	4,11 236°	5,01 288°	5,74 330°
$\lambda_n$	2,84	2,66	2,53	2,80	3,07	3,09	2,98
Amplitud del septo	163°	152°	145°	160°	176°	177°	171°

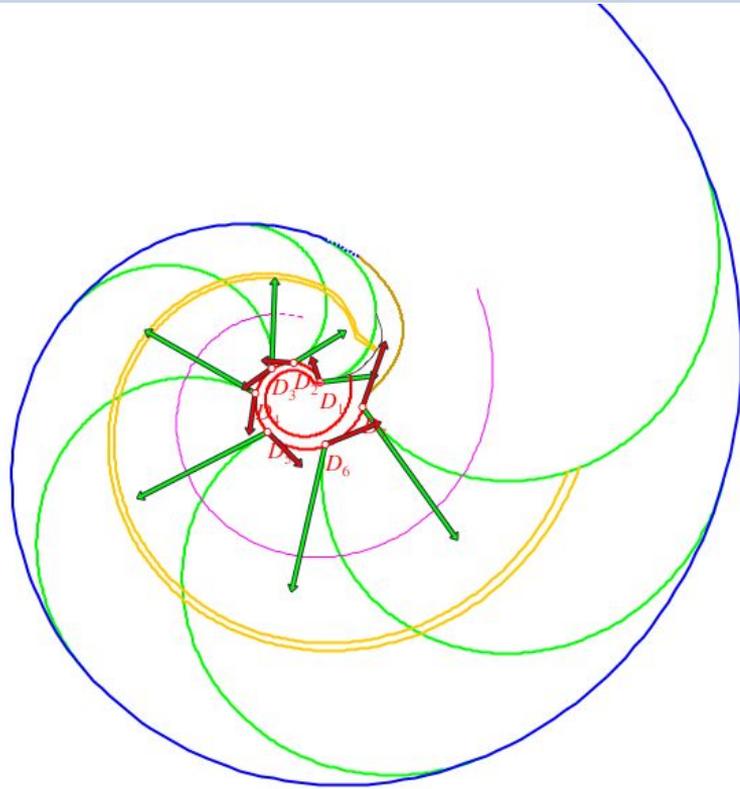


$$n > 1 \quad \begin{cases} S_{nx} = 0,0263 + 0,4331 \kappa^{\theta_{S_1} + \alpha_n} \cos(\theta_{S_1} + \alpha_n) \\ S_{ny} = 0,0600 + 0,4331 \kappa^{\theta_{S_1} + \alpha_n} \text{sen}(\theta_{S_1} + \alpha_n) \end{cases}$$

$$\theta_{S_n} = \theta_i + P_D \widehat{P_S S_1} = \theta_i + 0,25$$

	1	2	3	4	5	6	7
$S_{nx}$	0,0499	-0,057	-0,212	-0,150	0,160	0,425	0,430
$S_{ny}$	0,2277	0,250	0,111	-0,180	-0,260	-0,050	0,300
$S_n \widehat{P_S S_{n+1}}$	0,58 33°	0,94 54°	1,15 66°	1,03 59°	0,91 52°	0,80 46°	0,49 28°
$\alpha_n$		0,58 33°	1,52 87°	2,67 153°	3,7 212°	4,61 264°	5,41 310°

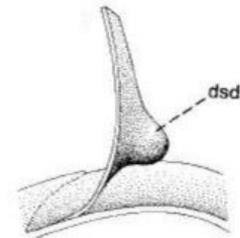
# Incidencia de los septos con la pared dorsal en el 1.<sup>er</sup> verticilo



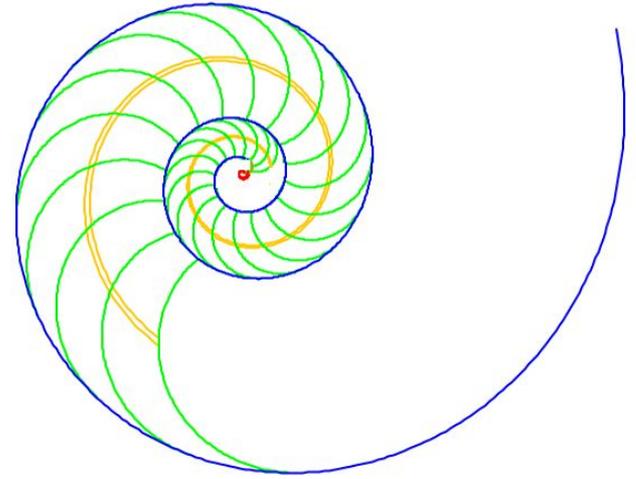
En el **primer verticilo**:

→ Los **septos** inciden oblicuamente en la pared dorsal con un ángulo, que no es recto, y diferente para cada septo.

→ El Nautilus refuerza la unión de **los septos** con la **pared dorsal** mediante la depresión sepal dorsal(dsd).

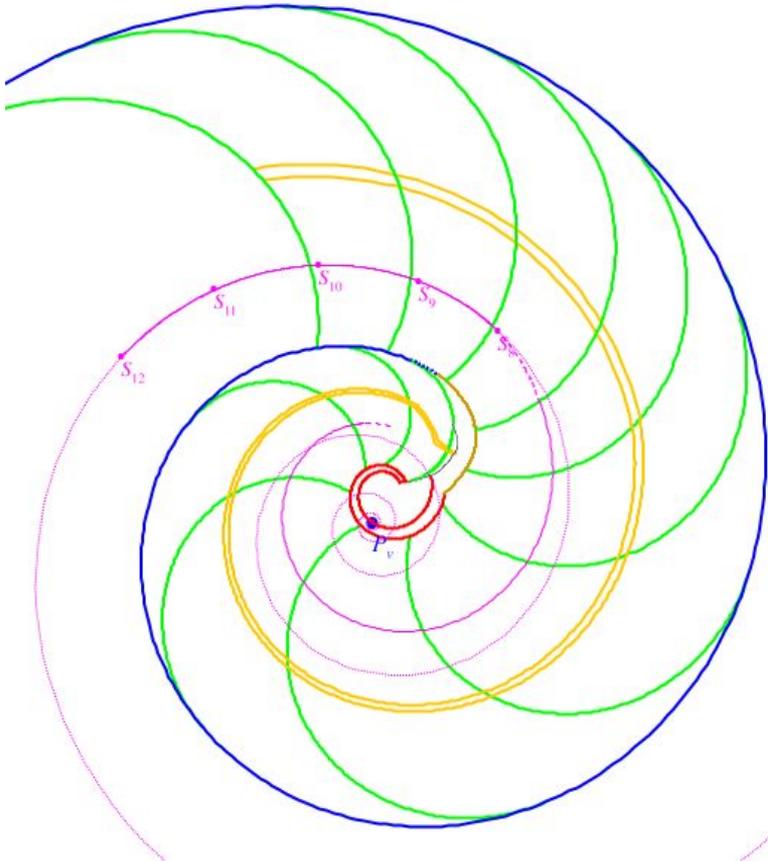


	1	2	3	4	5	6	7
$\widehat{D}_n$	1,79	2,52	2,22	1,94	1,88	2,18	2,18
	102°	144°	127°	111°	108°	125°	125°



Los septos en el 2.<sup>o</sup> y 3.<sup>er</sup> verticilo

## Particularidades de los septos en el 2.º y 3.º verticilo (I)



En el **segundo y tercer verticilo**:

- Los polos  $S_n$  ( $n \geq 8$ ) de los arcos de **los septos** están en **una espiral cordobesa** de polo el polo ventral  $P_v$  y coeficiente 0,5.

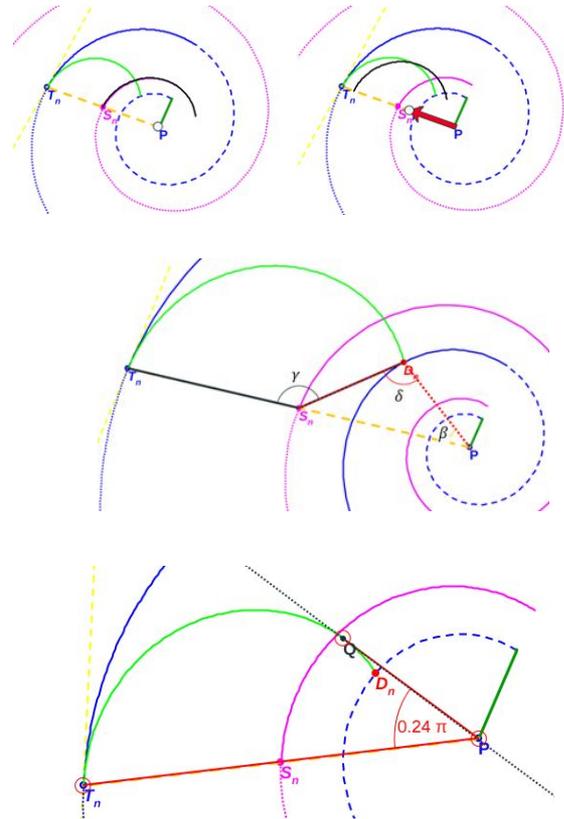
$$\begin{cases} x = 0,5 \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = 0,5 \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f]$$

- La espiral de los polos en el primer verticilo difiere de la espiral de los polos en el segundo y tercer verticilo.

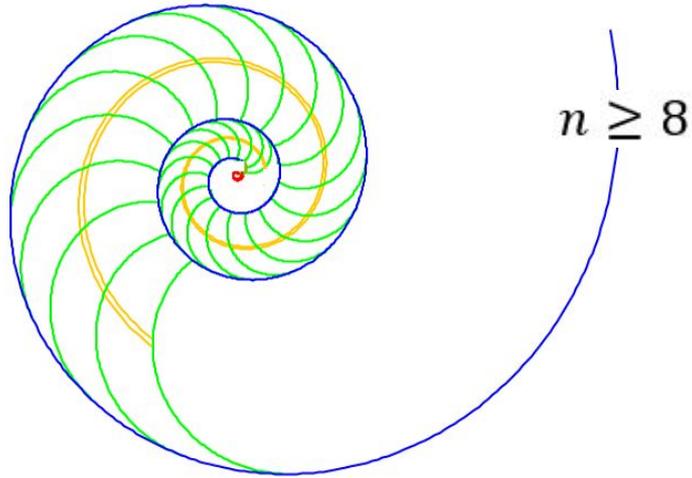
## Particularidades de los septos en el 2.º y 3.º verticilo (II)

En el **segundo y tercer verticilo**:

- Los septos se pueden obtener como traslación de un arco de la **espiral de los polos septales**.
- La amplitud de los arcos de los septos es  $\gamma = 2,5090\dots \text{ rad} \approx 143,76^\circ$ .
- El ángulo de los radios vectores  $P_v T_n$  y  $P_v D_n$  de los septos es  $\beta = 0,6832\dots \text{ rad} \approx 39,37^\circ$ .
- La amplitud angular de los septos (ángulo  $QP_v T_n$ ), donde  $P_v Q$  es la recta tangente al septo desde  $P_v$ , es  $0,24\pi = 43,09^\circ \approx \pi/4$ .



# Los septos en el 2.º y 3.er verticilo (ecuaciones)



$$\begin{cases} x = S_{n_x} + d \kappa^\rho \cos(\rho) \\ y = S_{n_y} + d \kappa^\rho \sin(\rho) \end{cases} \quad \rho \in [\alpha_n - \gamma, \alpha_n]$$

$$d = 0,5 \quad \gamma = 2,5090 \dots \quad \alpha_n = \theta_i + 2\pi + (n - 8) \frac{\pi}{8}$$

$$\begin{cases} S_{n_x} = 0,5 \kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n) \\ S_{n_y} = 0,5 \kappa^{\alpha_n} \sin(\alpha_n) \end{cases}$$

Los puntos de tangencia son:  $T_n(\kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n), \kappa^{\alpha_n} \sin(\alpha_n))$

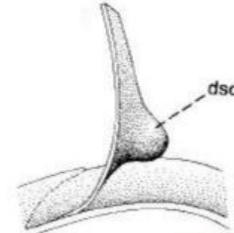
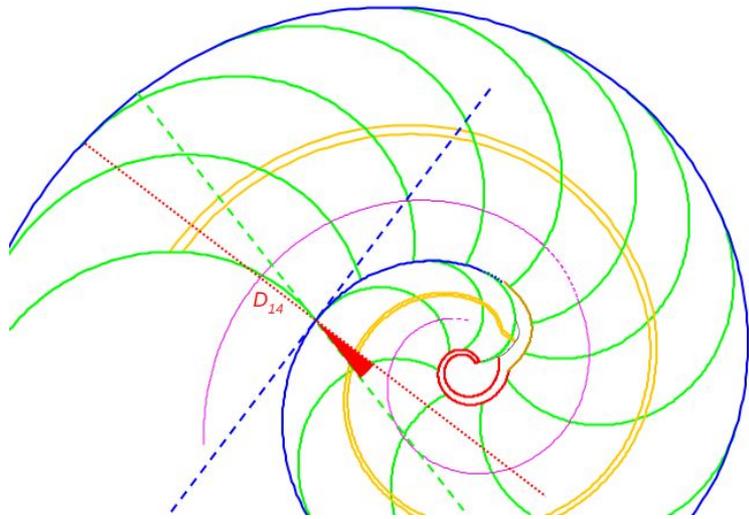
Los puntos de intersección con la pared dorsal pueden escribirse:

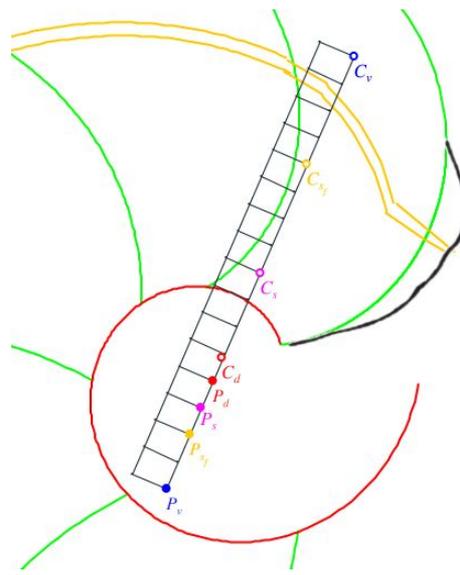
- como punto de la pared dorsal:  $D_n(\kappa^{\beta_n} \cos(\beta_n), \kappa^{\beta_n} \sin(\beta_n))$ , donde denotamos  $\beta_n = \alpha_n - 2\pi - \beta$  con  $\beta = 0,6831$ .
- Como punto del arco de septo:  $D_{n_x} = 0,5 \kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n) + 0,5 \kappa^{\alpha_n - \gamma} \cos(\alpha_n - \gamma)$ ,  
 $D_{n_y} = 0,5 \kappa^{\alpha_n} \sin(\alpha_n) + 0,5 \kappa^{\alpha_n - \gamma} \sin(\alpha_n - \gamma)$ .

## Incidencia de los septos con la pared dorsal (2.º y 3.º verticilo)

En el **segundo y tercer verticilo**:

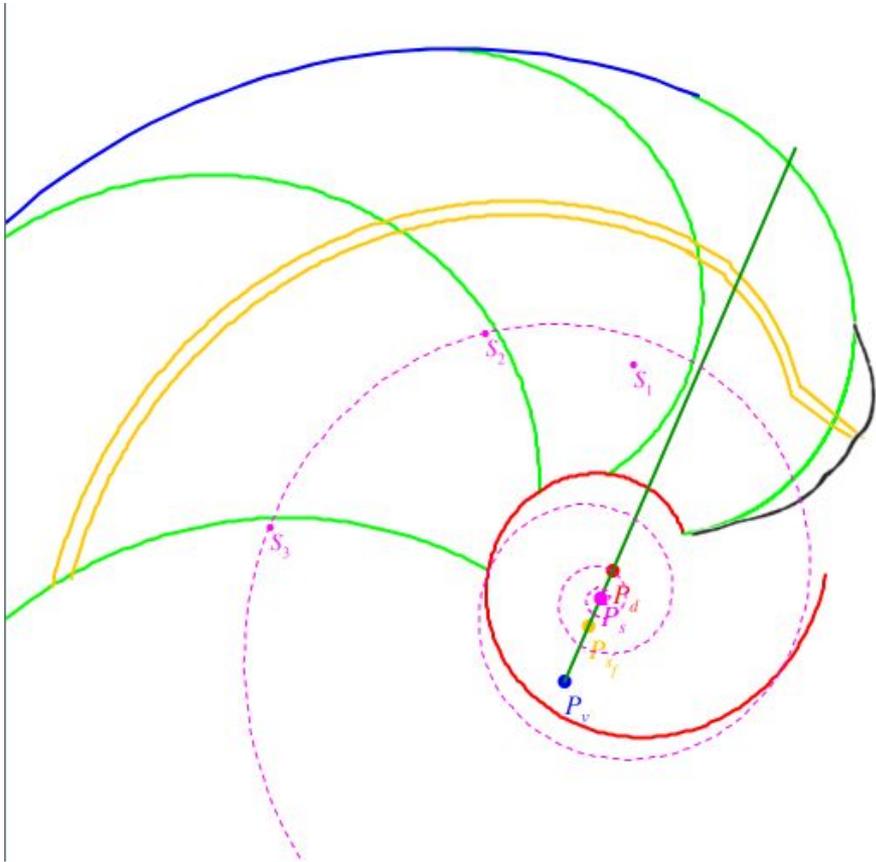
- Los septos no son ortogonales a la pared dorsal. Hay una desviación de  $14,62^\circ$  entre la recta tangente al septo (línea verde a rayas) y la recta normal a la pared dorsal (línea roja de puntos).
- El Nautilus refuerza la unión de los septos con la pared dorsal mediante la depresión septal dorsal (dsd).





Certezas (puntos notables) y  
veleidades (puntos destacables)

## Puntos notables del Nautilus (primer verticilo)



En el **primer verticilo**:

→ Polo de la espiral ventral  $P_v$ .

→ Polo de la espiral dorsal  $P_d$ .

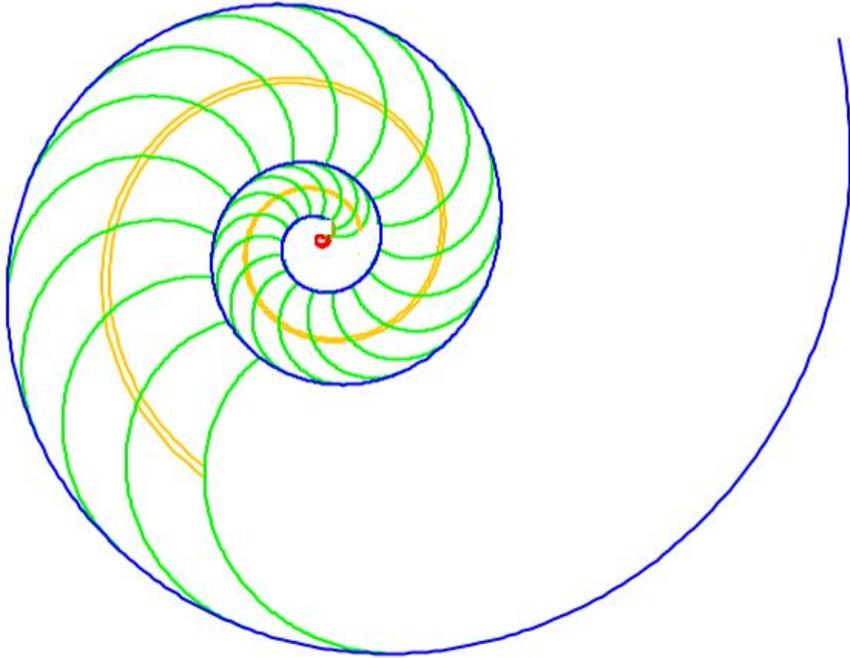
→ Polo de la espiral de los polos de los septos  $P_s$ .

$$\overrightarrow{P_v P_s} = \frac{3}{4} \overrightarrow{P_v P_d}$$

→ Polo de la espiral del sífúnculo  $P_{sf}$ .

$$\overrightarrow{P_v P_{sf}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{P_v P_d}$$

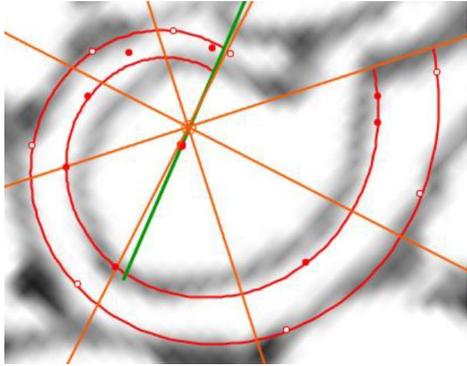
## Puntos notables del Nautilus (segundo y tercer verticilo)



En el **segundo y tercer verticilo**:

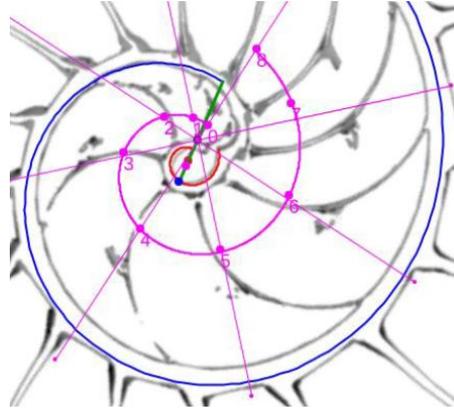
Los polos  $P_v$ ,  $P_d P_s$  y  $P_{sf}$  coinciden.

# Puntos destacables del Nautilus en el primer verticilo



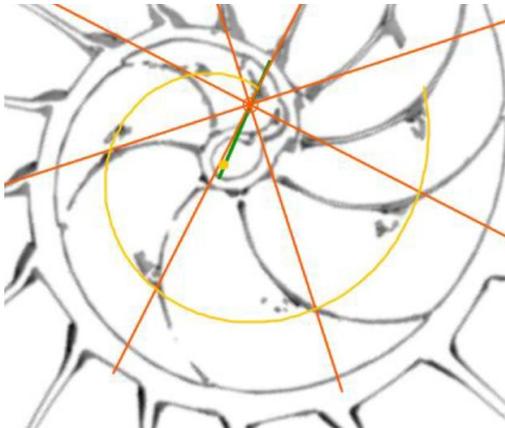
Centro de los puntos dorsales

$C_d$



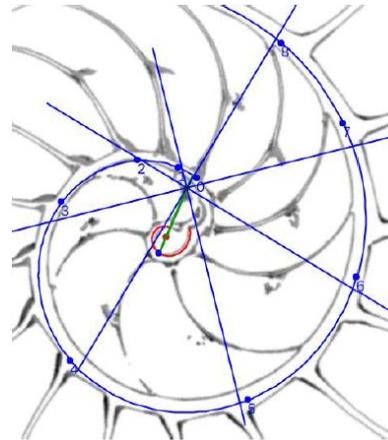
Centro de los polos de los septos dorsales

$C_s$



Centro de los puntos del sifúnculo

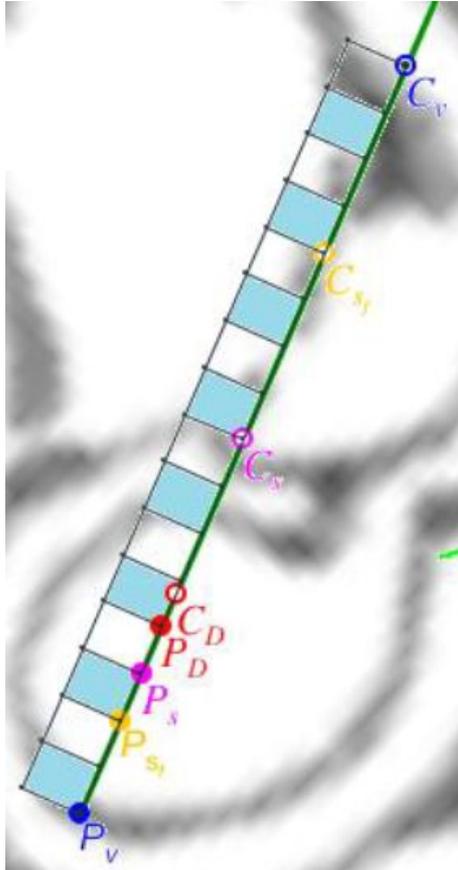
$C_{sf}$



Centro de los polos de los puntos tangenciales

$C_v$

# Relación entre los puntos notables y los destacables



- El centro dorsal  $C_D$ :  $\overrightarrow{P_v C_D} = \frac{6}{5} \overrightarrow{P_v P_D}$ .
- El centro de los polos de los septos  $C_s$ :  $\overrightarrow{P_v C_s} = 2 \overrightarrow{P_v P_D}$ .
- El centro de las intersecciones septo-sifúnculo  $C_{sf}$ :  $\overrightarrow{P_v C_{sf}} = 3 \overrightarrow{P_v P_D}$ .
- El centro ventral  $C_v$ :  $\overrightarrow{P_v C_v} = 4 \overrightarrow{P_v P_D}$ .