El modelo cordobés del Nautilus

1. Al menos desde 1838 Moseley (The Rev. H. Moseley, On the geometrical forms of turbinated and discoid shells, Phil. Trans. 1838, Pt. i, pp. 351-370) indica que el Nautilus pompilius **crece siguiendo una espiral logarítmica** y que el **factor de crecimiento es 3** (pulsación radial).
2. Lo anterior se reproduce en el libro de Thompson (Thompson, D. (1945). On Growth and Form. New York: Macmillan Co). Y ahí se detalla que el ángulo asociado a esta espiral es de 80º 5’.
3. Los datos anteriores no se discuten en toda la literatura que he consultado y son suficientes para identificar la espiral logarítmica que sigue el Nautilus.
   Por ejemplo:
   a. En el documento que enlazas de Ivars Peterson, --me imagino que es éste pues no he podido acceder con tu enlace, y aprovecho para comentar que para mí ésta no es una buena referencia por lo que después detallaré--, al final cita otro artículo de Sharp (mucho más fundamentado) y éste indica:
      i. Que “detecta un promedio de 2.94. Aunque los errores son bastante altos, muestra un valor en la región de 3. Otras medidas que he visto también son alrededor de 3.”
      ii. “Hay una discusión mucho más larga y más detallada sobre este tema en [Fonseca 1993]. También encuentra que la proporción para una vuelta del Nautilus es muy cercana a 3”.
   b. El artículo antes citado de Fonseca: (Fonseca, R. (1993). Shape and Order in Organic Nature: The Nautilus Pompilius. *Leonardo, 26*(3), 201-204. doi:10.2307/1575811) precisamente lo que hace es rebatir un artículo de Fletcher (Rachel Fletcher, "Proportion and the Living World," Parabola 13: no. 1 (Feb. 1988)). Ésta última afirma que el Nautilus tiene una pulsación cuadrantal 1:sqrt(Phi), que es la que tú usas en tu artículo de divulgación, pero Fonseca muestra que el planteamiento de Fletcher es erróneo y el crecimiento realmente es 3.

Primera posible conclusión: Desde hace, al menos, casi 200 años nadie parece discutir que el factor de crecimiento del Nautilus pompilius es 3 o próximo a 3 (no obstante, se capta por ciertas expresiones y matizaciones en la redacción de Moseley y Thompson, que el 3 es algo forzado para dar simplicidad y es fruto de cierto redondeo por exceso, en nuestro modelo cordobés el valor es 2,914)

A Sharp, como he indicado, le da un promedio de 2.94 que cito porque se acerca mucho al teórico del modelo cordobés de Nautilus. Si bien él se sitúa, prudentemente, “en medidas en la región de 3” y afirma que “otras medidas que ha visto también son alrededor de 3”.

En nuestro artículo partimos de ese 3, pero nosotros abordamos una **aproximación global** --lo que hacemos es superponer la espiral sobre la sección usando una escena interactiva de Descartes-- **frente a la local** que es la que realiza Moseley, y que es la que se realiza habitualmente al abordar mediciones de segmentos cada una de ellas sujeta a un error de medida y a una determinación aproximada del polo de la espiral que introduce a su vez un error adicional (esto lo pone en evidencia Thompson en relación a la medida de Moseley y lo reflejamos también en un apéndice de nuestro artículo). Nosotros mostramos que la espiral de crecimiento 3 al superponerla sobre la sección se desvía y la que mejor se ajusta es la cordobesa. Factor de crecimiento 2,914… y ángulo 80,32º

pulsación	espiral áurea	espiral cordobesa	espiral crecimiento 3	artículo divermates
cuadrantal	ϕ=1,61803...	ς=1,3065...	r=1,31607	sqrt(ϕ)=1,2720...
diametral	ϕ^2=2,61803...	ς^2=1,7071...	r^2=1,7320...	ϕ=1,61803...
radial	ϕ^4=6,85410...	ς^4=2,9142...	r^4=3	ϕ^2=2,61803...

Segunda posible conclusión: El modelo teórico cordobés del Nautilus se aproxima muy bien al factor de crecimiento 3 aceptado en la literatura.

Analizando los errores, si se parte de que el factor de crecimiento aceptado sería r^4= 3 ± 0,1, al calcular la pulsación cuadrantal r (que es la que define el tipo de espiral) se obtendría que r=1,316 ± 0,011, es decir 1,305 ≤ r ≤ 1,327. En ese intervalo está la espiral cordobesa.

Nosotros abogamos por el crecimiento cordobés porque así acontece en los ajustes realizados y por estar dentro del rango de valores admisibles considerando el margen de error en el supuesto admitido de 3 --realmente alrededor de 3--, pero adicionalmente nos reafirmamos en la propuesta del modelo cordobés porque globalmente es un ajuste mejor.

Tercera posible conclusión: El modelo teórico cordobés del Nautilus no difiere de lo indicado en el modelo aceptado en la literatura. Y adicionalmente en nuestro estudio ¡se explican aspectos no indicados en otros análisis!

La coincidencia de que la espiral de Nautilus tiene nombre: “la espiral cordobesa”, no dejaría de ser una mera curiosidad (tan insignificante como si hubiera sido áurea o si no hubiera tenido ningún nombre propio como hasta ahora), pero con la que se puede jugar filosóficamente, confrontando humano versus divino y demás consideraciones posibles de adorno y divulgación por existir otros ámbitos en los que se han comparado la proporción divina o áurea con la humana o cordobesa. El verdadero valor añadido de nuestro análisis es que se introducen y se da explicación a aspectos antes no reflejados: el sifúnculo es una espiral cordobesa, los septos son arcos de espirales cordobesas y los polos de éstas están en otra espiral cordobesa. Todo punto del corte del Nautilus es la intersección de dos espirales cordobesas… Todo es cordobés en el Nautilus y está reflejado bastante detallado en nuestro artículo.

Fig. 26. Espiral que aproxima los septos (amarilla) y la que describe el polo (magenta).

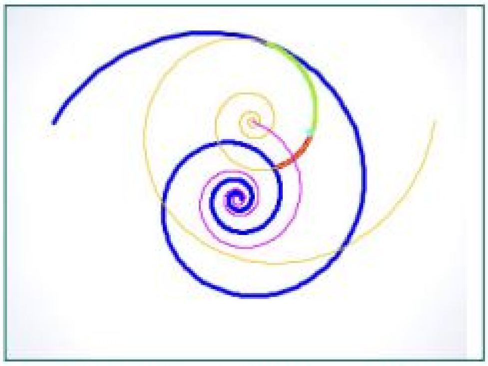

Fig. 27. Detalle de la espirales sobre las que se aproximan los septos.

Nuestra afirmación de que el Nautilus es cordobés muestra un modelo teórico de Nautilus con una intersección plausible en lo que nosotros denominamos yocto-yotta realidad (se ajusta a las diversas imágenes usadas y referencias bibliográficas encontradas)

Comentarios a tus observaciones y preguntas en el correo

La referencia sobre la espiral de Nautilus la teníamos en un trabajo antiguo, de hace más 15 años, que hicimos sobre la sección áurea. Pero como bien dice, al revisar la bibliografía no aparece nada al respecto, así que debimos cometer algún error aquella vez, o encontrar el dato en alguna otra referencia bibliográfica que no tenemos anotada

Coincidimos en que las referencias citadas en tu artículo divulgador no recogen la pulsación diametral 1:Phi que presupones para el Nautilus, pero sí se asocia con otro molusco. Casualmente la referencia de Peterson que has incluido me ha llevado a la antes citada de Rachel Fletcher,("Proportion and the Living World," Parabola 13: no. 1 (Feb. 1988)) donde sí se plantea ese modelo 1:Phi para el Nautilus, si bien es rebatido detalladamente por Fonseca (1993). Así pues, existen al menos esa referencia 1:Phi para el Nautilus, pero está rebatida.

El modelo diametral 1:Phi tiene un factor de crecimiento 2,61 que difiere bastante de 3.
Para que (phi^n)^4=3 ha de ser n=0,57… que sería el modelo cuadrantal 1:phi^0,57 (diferente de phi^0,5), o modelo diametral 1:phi^1,14… (diferente de 1:phi)

Al redactar estas últimas entradas sí que comprobamos con calibre que la espiral basada en raíz de phi se aproximaba razonablemente a las medidas del Nautilus que tenemos, aunque estas medidas siempre tienen margen de error claro.

Lógicamente en toda medida hay un error, pero que puede ser controlado. Influye la medida, pero también el método.
No es lo mismo medir la pulsación cuadrantal r o la diametral r^2 y en base a ella calcular la radial (r^4) porque el error se propaga. Si se parte de la pulsación cuadrantal tendríamos

espiral cordobesa	espiral crecimiento 3	artículo divermates
ς=1,3065...	r=1,31607	sqrt(ϕ)=1,2720...

Entre las dos últimas la variación es de sólo 4 centésimas, pero la propagación del error (al elevar a la potencia cuarta) se traslada a 4 décimas en el factor de crecimiento.2,61 frente a 3 que es un error considerable.

Precisamente para poder controlar mejor el error lo adecuado, pienso, es medir la pulsación radial porque a partir de ella al obtener la radial (raíz cuarta) el error sigue controlado. Eso hace Moseley y Sharp.

El planteamiento, a mi parecer inadecuado, acontece en el artículo de Ivars Peterson cuando dice: “In 1999, retired mathematician Clement Falbo measured a series of nautilus shells at San Francisco's California Academy of Sciences, and he found that while they were indeed logarithmic spirals (like the golden spiral), their ratios ranged from about 1.24 to 1.43, with an average ratio of about 1.33 to 1, not even close to the 1.618... ratio of the Golden Spiral” El procedimiento era “he found that the spirals of these shells could be inscribed within rectangles with sides in the ratio of about 1.33; not 1.618”, es decir, mide la razón entre los lados de ese rectángulo, lo que ocasiona de partida una propagación del error al medir la pulsación cuadrantal de manera indirecta a partir de los lados del rectángulo circunscrito, y de ahí la diversidad de valores de esa razón en un rango de amplitud casi de dos décimas. Por todo esto, aparte de “los descubrimientos que ¿hace? respecto a que las conchas se podían inscribir en rectángulos”, te indicaba que este artículo no me gustaba nada[1].

En nuestro caso no acontece esto porque, como he indicado antes, **lo que hacemos en una aproximación global** ya que comparamos la sección del Nautilus con la espiral completa lo que facilita dicha comparación y la ubicación aproximada del polo con menor error.

Que indicaría que en algunos casos existen Nautilus cercanos a phi^2, aunque en media están más cercanos a la proporción cordobesa.

Es incidir en lo anterior. El factor de crecimiento phi^2 está muy alejado de 3 y ese valor queda incluido como consecuencia del amplio rango de valores [1,24, 1,43] al haber abordado la pulsación cuadrantal.

[1] También es erróneo lo que pone: A logarithmic spiral follows the rule that, for a given rotation angle (such as one revolution), the distance from the pole (spiral origin) is multiplied by a fixed amount. A logarithmic spiral. When this fixed amount is the golden ratio, (1 sqrt[5])/2, or 1.6180339887. . . , you get a particular type of logarithmic spiral. Such a logarithmic spiral can be inscribed in a rectangle whose sides have lengths defined by the golden ratio. Afirma que la espiral logarítmica áurea es la de factor de crecimiento phi y dice que el rectángulo circunscrito tiene proporción phi, lo cuales erróneo. Espiral áurea proporción del rectángulo phi y factor de crecimiento phi^4

¿Usted encontró algunos datos de tamaño promedio del Nautilus o simplemente se ajustó a la foto que aparece en el texto? En un primer vistazo a su extenso trabajo no he sido capaz de localizar referencia a datos de este tipo.
He usado antes el tuteo, así pues, si te parece continuemos con él.

Como ya he indicado, en nuestro artículo se toma como referencia el factor de crecimiento 3 de Moseley (se incluye un apéndice en el que se indica éste, el procedimiento usado por él y las dificultades en el mismo que son las que conducen al redondeo a 3, antes citado). Sobre este factor de crecimiento de 3 se basa la justificación inicial de que la espiral cordobesa encaja en ese crecimiento, pero nosotros ponemos de manifiesto que realmente la espiral cordobesa se ajusta mejor que la indicada por Moseley (ventaja de la aproximación global, en lugar de la local).

El ajuste lo hemos verificado con multitud de imágenes que existen en internet (empezando por todas aquellas que aparecen en los libros sobre la proporción áurea, que son incluidas ex profeso para hacer asociaciones de ideas Nautilus-áureo como sin querer, queriendo). Suficientes imágenes para que estadísticamente sea significativo el ajuste indicado a la espiral cordobesa y consecuentemente permitiendo defender con garantía nuestra propuesta. No se detalla en el artículo, pero las escenas interactivas que se enlazan y están disponibles en proyectodescartes.org permiten a cualquiera cambiar la imagen y comprobar dicho ajuste (la reproducción de la experiencia es asequible para cualquiera a bajo coste, se proporciona la herramienta). En esa verificación hemos incluido el modelo escaneado por el Museo 3D de Thompson y también algunos

Añadiremos a nuestros artículos una corrección con referencia a su trabajo en cuanto tengamos oportunidad.
Muchas gracias por la observación, lástima no haber encontrado su artículo antes de redactar el nuestro.

Gracias por su interés y la divulgación de nuestro trabajo será bien muy bien recibida. Atento a sus observaciones y/o peticiones.

Referencias bibliográficas indicadas

Thompson, D. (1945). On Growth and Form. New York: Macmillan Co.

En p. 771 se reproduce lo indicado por Mosley y establece que **el factor de crecimiento del Nautilus es 3** y que el ángulo de la espiral logarítmica correspondiente es **80º 5’** (p791)

Fig. 367), *ab* is one-third of *bc*, *de* of *ef*, *gh* of *hi*, and *kl* of *lm*. The curve is therefore an equiangular spiral."

The numerical ratio in the case of the *Nautilus* happens to be one of unusual simplicity. Let us take, with Moseley, a somewhat more complicated example.

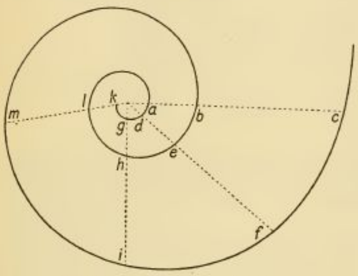

Fig. 367. Spiral of the *Nautilus*.

Fig. 368. *Turritella duplicata* (L.), Moseley's *Turbo duplicatus*. From Chenu. × ½.

p. 771

The shape of a nautiloid spiral

Ratio of breadth of each whorl to the next preceding $r/1$	Constant angle α
1·1	89° 8′
1·25	87 58
1·5	86 18
2·0	83 42
2·5	81 42
3·0	80 5
3·5	78 43
4·0	77 34
4·5	76 32
5·0	75 38
10·0	69 53
20·0	64 31
50·0	58 5
100·0	53 46
1000·0	42 17
10,000	34 19
100,000	28 37
1,000,000	24 28
10,000,000	21 18
100,000,000	18 50
1,000,000,000	16 52

We learn several interesting things from this short table. We see, in the first place, that where each whorl is about three times the breadth of its neighbour and predecessor, as is the case in *Nautilus*, the constant angle is in the neighbourhood of 80°; and hence also that, in all the ordinary ammonitoid shells, and in all the typically spiral shells of the gastropods†, the constant angle is also a large one, being very seldom less than 80°, and usually between 80° and 85°. In the next place, we see that with smaller

* It is obvious that the ratios of opposite whorls, or of radii 180° apart, are represented by the square roots of these values; and the ratios of whorls or radii 90° apart, by the square roots of these again.

† For the correction to be applied in the case of the helicoid, or "turbinate" shells, see p. 816.

p.791

Fonseca, R. (1993). Shape and Order in Organic Nature: The Nautilus Pompilius. *Leonardo, 26*(3), 201-204. doi:10.2307/1575811

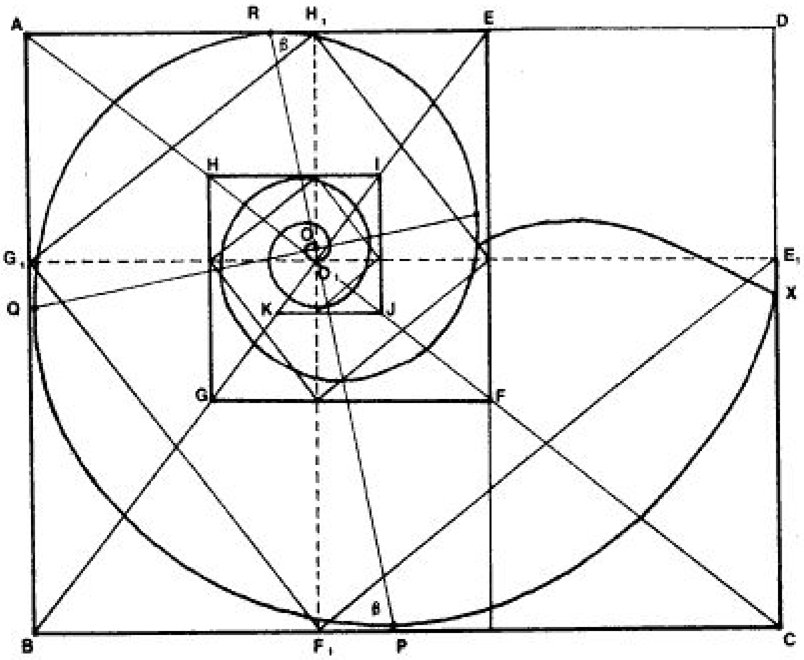

Fig. 2. Fletcher's Nautilus with enclosing rectangle ABCD, such that AB:BC::1:($\sqrt{\phi}$). Fletcher makes O_1, the intersection of AC and BE, the pole of the spiral whereas it should be at O. Also, O_1E_1, O_1F_1, O_1G_1, O_1H_1, etc., are perpendicular to the sides of the enclosing rectangle, whereas BC, AB and AE are tangential to the true radius vectors OP, OQ, OR, such that the average growth-ratio is 1:1.3158, yielding a constant angle of the spiral β=OPB=OQA=ORE, etc., of about 80° [32]. Reprinted from *PARABOLA, the Magazine of Myth and Tradition*, Vol. XIII, No. 1 (Spring 1988). Subscriptions $20/year (4 issues), back issues $8 from PARABOLA, 656 Broadway, New York, NY 10012, U.S.A.