ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Valeria Bertossi
Sonia Pastorelli
Eva Casco

Buenos Aires, 2019

Versión de impresión del libro digital interactivo

torelli, Casco

Bertossi, Valeria
Ecuaciones diferenciales ordinarias : libro digital interactivo / Valeria Bertossi ; Sonia Pastorelli ; Eva Casco ; contribuciones de Emmanuel García ; Juan Guillermo Rivera Berrío ; José Román Galo Sánchez. - 1a ed . - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : edUTecNe, 2019.
Libro digital, HTML

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-4998-06-4

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. 2. Matemática. 3. Matemática para Ingenieros.
Colab. I. García, Emmanuel, colab. II. Rivera Berrío, Juan Guillermo, colab. III. Galo Sánchez, José Román.
CDD 515.352

ISBN 978-987-4998-06-4
9 789874 998064

edUTecNe

REUN
Red de Editoriales de Universidades Nacionales

LUA
Libro Universitario Argentino

Esta obra está bajo licencia Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento – No Comercial – Compartir Igual.
Todos los objetos interactivos y los contenidos de esta obra están protegidos por la Ley de Propiedad Intelectual.

A Lautaro, por su amorosa paciencia;
a Cristian, por su apoyo incondicional;
y a mis queridos alumnos, que sin ellos no hubiera sido posible esta obra.

Valeria

A Humberto Pampliglioni, mi profesor modelo.
A mis alumnos, que me enseñan constantemente
Y son mi fuente de inspiración.
A Virginia y Eduardo De Santis, que día a día me enlazan a lo importante.
A Dios, que guía mis elecciones y me regala la dicha de ser docente.

Sonia

A la U.T.N., que me ha formado y ha puesto en mi camino docentes motivadores,
amantes del Cálculo, que me han transmitido
sus conocimientos, su pasión y dedicación a la labor docente.
A mis hijos, Ma. Pilar y Nicolás, y a Sandro, por su comprensión
y apoyo permanente en mi labor ; y a mi familia, por estar siempre.
A mis alumnos, motivo por el cual no pierdo el entusiasmo de seguir creciendo,
pues sin ellos no tendría sentido mi trabajo.

Eva

Bertossi, Pastorelli, Casco

Prólogo.

Hoy en día nos encontramos en una sociedad en transformación, con nuevas posibilidades para el acceso al conocimiento y con herramientas que potencian la relación entre los conceptos al momento de aprender. La adaptación de los procesos de enseñanza/aprendizaje a esta sociedad, a sus procesos, a sus nuevas costumbres y requerimientos es un gran desafío que como docentes pretendemos abordar.

La idea de este libro nace a partir de los escritos de la Mg. Ing. Sonia Pastorelli. Y, como en el marco de la cultura del aprendizaje nos encontramos ante la necesidad de brindarle a los jóvenes un nuevo escenario que aproveche las TIC, es así como surge el diseño y programación de un simulador de sistemas dinámicos bidimensionales, DaVinci, como tesis final de la carrera de grado en Ingeniería en Sistemas de Información de la Ing. Valeria Bertossi, que fuera dirigida por la Mg. Ing. Pastorelli. El simulador resultó muy útil a la hora de enseñar y nos motivó, como docentes, a explotar el potencial de las tecnologías emergentes al servicio de diversos propósitos educativos. Por ello nos propusimos un largo camino cuyo producto resultara este libro digital de ecuaciones diferenciales, con la dirección de la Ing. Eva Casco y el apoyo de la UTN, en el que las autoras volcamos todo nuestro conocimiento y experticia.

Este objeto de aprendizaje interactivo combina la multimedia con objetivos didácticos propios y actividades interactivas de aprendizaje para su consecución, pues poseen un gran potencial comunicativo, informacional, colaborativo, interactivo, creativo e innovador.

A través de él esperamos que nuestros alumnos puedan conocer y apropiarse de la realidad desde sus contemporáneos recursos tecnológicos.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Índice.

Prólogo. 3
Índice. 4

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Primer Orden 7
1. 1. Ecuación diferencial (ED). 7
Solución y tipos de soluciones. 8
Ecuación de Abel. 9
1.2. Algunos métodos para determinar la solución de una EDO de primer orden. 11
1.2.1. EDO de primer orden de variables separables. 11
1.2.2. EDO de primer orden homogénea. 12
1.2.3. EDO Lineal de primer orden. 14
1.2.4. EDO Exacta de primer orden. 16
1.2.5. EDO de primer orden transformables en exactas. 18
Condición de existencia del factor integrante Ix: 18
Condición de existencia del factor integrante Iy: 18
1.3. Aplicaciones. 21
1.3.1. Trayectorias de flujo. 21
1.3.2. Familias ortogonales. 22
1.3.3. Circuitos eléctricos con impedancia. 24
Ejercitación propuesta 28

2. Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal (EDO L) de Orden Superior. 33
Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de orden n con coeficientes constantes (EDO L cc). 33
2. 1. Teoremas sobre EDO L de orden n. 33
2. 2. EDO Lineal Homogénea con coeficientes constantes (EDO LH cc). 35
2.3. EDO de orden superior no homogénea con coeficientes constantes (EDO L NH cc). 44
2.3.1. Variación de los parámetros. 45
2.3.2. Coeficientes a determinar (o coeficientes indeterminados). 51
Ejercitación propuesta. 62

3. Sistema Lineal de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales con coeficientes constantes. 65
3.1. Resolución de SL EDO por método de eliminación. 65

Bertossi, Pastorelli, Casco

3.2. Resolución de SL EDO usando matriz exponencial: uso del Álgebra Lineal. 70
3.2.1. Sistemas Homogéneos. 70
Matriz exponencial. 70
3.2.1.1. $\boldsymbol{As}$ es diagonal. 74
3.2.1.2. $\boldsymbol{As}$ no es diagonal, pero es diagonalizable. 74
3.2.1.3. La matriz $\boldsymbol{As}$ no es diagonalizable. 78
3.2.2. Sistemas No Homogéneos. 79
Ejercitación propuesta 90

4. Teoría cualitativa. 93
4.1. Estabilidad de los sistemas lineales. 93
4.2. Punto de equilibrio de un sistema lineal. Estabilidad. 103
Sistemas autónomos y no autónomos. 103
Plano de Fase y Órbita. 104
Punto crítico. 105
Estabilidad del punto crítico. 108
Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales homogéneos. 108
Nodo. 109
Punto de silla. 109
Centro. 110
Foco. 110
Tabla Resumen para punto crítico aislado 111
Ejercitación propuesta. 116

Ejercitación complementaria. 119

Apéndice 124
Fórmula exponencial de un complejo. 124
Matriz exponencial. 125
Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. $\boldsymbol{As}$: matriz cuadrada. 125
Tabla Resumen. 125
Epílogo. 127
Bibliografía y Sitios Web. 129

Bertossi, Pastorelli, Casco

SECCIÓN I

ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER ORDEN

Bertossi, Pastorelli, Casco

"¿Cómo puede ser que la Matemática,
siendo al fin y al cabo,
un producto del pensamiento humano
independiente de la experiencia,
esté tan admirablemente adaptada
a los objetos de la realidad?"

Albert Einstein

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Primer Orden

En muchos problemas ingenieriles las relaciones entre variables se establecen en función de razones de cambio. Algunos ejemplos son:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

En esta sección se formalizará el concepto y se verán técnicas para resolver algunas de las ecuaciones diferenciales más usadas en ingeniería.

1. 1. Ecuación diferencial (ED).

Una ecuación diferencial es aquélla en la que interviene al menos una derivada o diferencial de una función incógnita. Por ejemplo:

$$x'(t) = 2\,x(t) \qquad y''(x) - 2y'(x) = x \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = sen(x) \qquad x\,dx + y^2dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = sen(y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Las ED pueden clasificarse según distintos puntos de vista:

a) Según la cantidad de variables independientes $\begin{cases} ordinaria \\ parcial \end{cases}$

La **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) es una ecuación que contiene funciones de una sola variable independiente y una o más de sus derivadas con respecto a dicha variable.

Ejemplos:

$$y''(x) - 2y'(x) = x$$

$$x\,dx + y^2dy = 0$$

$$x'_1(t) - x'_2(t) = x_1(t) + t + 1$$

La **ecuación diferencial parcial** (EDP) es una ecuación que contiene funciones de dos o más variables independientes y algunas de sus derivadas con respecto a esas variables.

Ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

b) Según el orden: El orden de una ED es el mayor orden de derivación que aparece en la ecuación.

Belfossi, Pastorelli, Casco

Por ejemplo, $\boldsymbol{x'(t) = 2\,x(t)}$ es de primer orden; mientras que $\boldsymbol{\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ es de orden 3.

c) Por el tipo de operación (lineal o no) a la que está afectada la función incógnita

$$\begin{cases} lineal \\ no\ lineal \end{cases}$$

Por ejemplo, $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0}$ y $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = sen(x)}$ son lineales, mientras que $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = sen(y)}$ no lo es.

Estas clasificaciones suelen determinar el método de solución, de allí que es importante reconocerlas. En este libro sólo se tratarán las EDO.

Solución y tipos de soluciones.

Una solución de una ecuación diferencial es toda relación entre las variables que no contenga derivadas ni diferenciales y que, al remplazarla en la ED, la verifique en un intervalo de las variables, es decir, la transforme en una identidad.

No todas las ED tienen solución. El tratamiento de la existencia y unicidad de la misma reviste cierta complejidad, por lo que no se abordará dicho problema en este libro. Como cualquier ecuación, las ED pueden o no tener solución, pero si la tienen, no será única.

Por ejemplo, la EDO lineal de segundo orden $\boldsymbol{y' + y'' = 0}$ admite la solución $\boldsymbol{y = e^{-x}}$ ya que la verifica. Notar que $\boldsymbol{\underbrace{(-e^{-x})}_{y'} + \underbrace{e^{-x}}_{y''} = 0}$.

El lector puede probar que $\boldsymbol{y = 4 - e^{-x}}$ también es solución.

Hay tres tipos de soluciones para las ED:

Solución general: es de tipo genérico, contiene constantes arbitrarias (**tantas como el orden de la ED**). Así, $\boldsymbol{y = A + Be^{-x}}$ es la solución general de la ecuación de segundo orden $\boldsymbol{y' + y'' = 0}$.

Solución particular: es cualquier solución que puede obtenerse asignando valores particulares a las constantes arbitrarias. En consecuencia, $\boldsymbol{y = 4 - e^{-x}}$ e $\boldsymbol{y = e^{-x}}$ son dos soluciones particulares de $\boldsymbol{y' + y'' = 0}$. En general, estas soluciones se obtienen con datos adicionales sobre la función buscada, denominados *condiciones de frontera o iniciales*, tales como $\boldsymbol{y(x_o) = y_o}$ o $\boldsymbol{y(0) = y_o}$.

Solución singular: solución de la ED que no puede ser obtenida particularizando la solución general.

EJEMPLO 1:

La EDO $\boldsymbol{y = 2xy' - y\,(y')^2}$ admite por solución general la familia de parábolas $\boldsymbol{y^2 = 2c\,x - c^2}$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

RESOLUCIÓN:

Notar que la solución general tiene una constante dado que la ecuación es de orden 1.

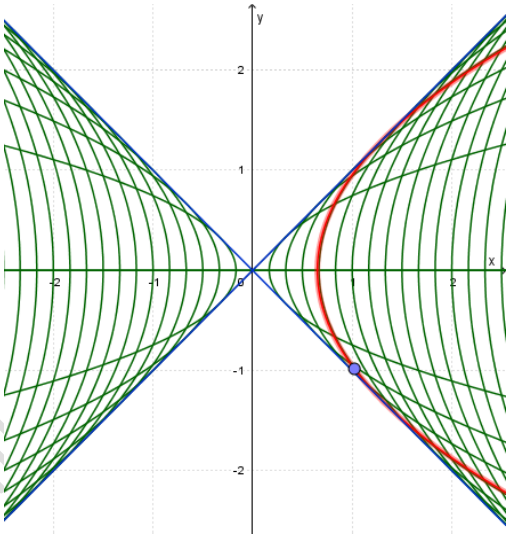
Para verificarla se deriva m. a m.:

$$\mathbf{2y\,y' = 2c \;\Rightarrow\; y' = c\,y^{-1}}$$

Remplazando en la ED:

$$\mathbf{y = 2xy' - y\,(y')^2 \overset{¿?}{=} 2xc\,y^{-1} - c^2\,y^{-1} \;\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow\; y \overset{¿?}{=} (2xc - c^2)\,y^{-1} \Rightarrow y^2 \overset{¿?}{=} 2xc - c^2}$$



Sustituyendo $\boldsymbol{y^2}$ por $\boldsymbol{2c\,x - c^2}$ se verifica finalmente la solución propuesta porque se obtuvo $\boldsymbol{2x\,c - c^2 = 2x\,c - c^2}$ (identidad).

Usando una condición de frontera, por ejemplo, que el punto $\boldsymbol{(1;-1)}$ verifica la solución, se puede determinar el valor de $\boldsymbol{c}$:

$$\mathbf{(-1)^2 = 2c\,(1) - c^2 \Rightarrow c = 1}$$

Así, $\boldsymbol{y^2 = 2\,x - 1}$ es **una** solución particular (la curva solución que contiene al punto $\boldsymbol{(1;-1)}$). Pero el lector puede verificar que esta ED también admite las soluciones $\boldsymbol{y = x}$ e $\boldsymbol{y = -x}$, que son dos rectas envolventes de la familia anterior, las que no pudieron ser obtenidas de la solución general $\boldsymbol{y^2 = 2c\,x - c^2}$, por lo que se las denomina **soluciones singulares** (las que no se tratarán en este libro).

Bertossi, Pastorelli

Al igual que para resolver una ecuación, no existe ***método único*** para resolver una ED, pero sí existen algunos métodos prescriptivos para ciertas clases o familias de EDO. Es más, muchas ED que aparecen naturalmente en otras ciencias no han sido solucionadas (aún).

Algunas se resuelven por "inspección" (ensayo y error), lo que consiste en "intuir" una solución, y luego confirmar si dicha solución imaginada verifica la ecuación.

Ecuación de Abel

El ensayo y error se puede utilizar para resolver la EDO denominada **ecuación de Abel**: $\boldsymbol{y' = k\,y}$. Esta ecuación, frecuente en muchas ramas de la ciencia, expresa que la razón de cambio, $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$, de una función $\boldsymbol{y(x)}$ es proporcional al valor de dicha función para todo $\boldsymbol{x}$. No es difícil imaginar una función cuya derivada sea proporcional a sí misma: la función que califica es la exponencial $\boldsymbol{y = Ce^{k\,x}}$ ya que $\boldsymbol{y' = k\,Ce^{k\,x} = k\,y(x)}$ (la derivada es proporcional a la función).

Si además se conoce el valor inicial C_o de la función buscada (esto es $y(0) = C_o$) puede determinarse la única solución del problema. Así, $y(0) = C_o = Ce^{k\,0} = C$. Luego, $y = C_o e^{k\,x}$.

EJEMPLO 2:

Por experimentación se sabe que la desintegración radiactiva se comporta según el siguiente principio: ***La tasa a la que una cantidad de un isótopo radiactivo se desintegra es proporcional a la cantidad de isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende únicamente de la partícula radiactiva considerada.***

La vida media de un isótopo radiactivo es el tiempo que tarda una cantidad de material radiactivo en desintegrarse a la mitad de su cantidad original. Se sabe que la vida media del carbono 14 es 5730 años. Dicho dato es importante porque puede ser utilizado para determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del material orgánico, dado que el isótopo C-14 constituye una porción constante del carbono total y una vez que la materia muere, el C-14 presente se desintegra. Entonces, al medir la cantidad de C-14 que aún permanece en la materia orgánica puede calcularse el "tiempo desde la muerte". Utilizar los datos dados para determinar la cantidad de años de la que data un fósil que tiene un 10 % del C-14 original.

Bertossi, Pastorelli, Casco

RESOLUCIÓN:

La EDO que modela la cantidad de carbono a través del tiempo es $\frac{dy}{dt} = k\,y(t)$.

Entonces, $y(t) = C_o e^{k\,t}$. La constante k puede determinarse usando el dato que la vida media es $t_{v\frac{1}{2}} = 5730$ años.

Luego, $y\left(t_{v\frac{1}{2}}\right) = 0,5C_o = C_o e^{k\,5730}$.

Luego, $e^{5730\,k} = 0,5 \Longrightarrow k = \frac{ln\,(0,5)}{5730} \cong -0.000120968$.

Notar que k es negativa dado que la cantidad de C-14 disminuye (la función solución es una exponencial decreciente; luego, su razón de cambio es negativa).

La función que modela la cantidad de carbono presente luego de t años es:

$$y(t) = C_o e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}\,t}$$

Llamando t_m al tiempo de data del fósil, y utilizando la ecuación anterior:

$$y(t_m) = 0,1C_o = C_o e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}\,t_m}$$

Así, $0,10 = e^{\frac{ln\,(0,5)}{5730}\,t_m} \Longrightarrow ln\,0,10 = \frac{ln\,(0,5)}{5730}\,t_m \Longrightarrow t_m = 5730\frac{ln\,(0,10)}{ln(0,5)} \Longrightarrow t_m \cong 19000$ años.

En adelante, se desarrollarán métodos que permiten resolver algunas de las EDO que comúnmente se utilizan en ingeniería.

Se separá el estudio en dos partes: las EDO de primer orden y las EDO de orden superior (esto es, orden mayor o igual a 2).

1.2. Algunos métodos para determinar la solución de una EDO de primer orden.

Las EDO de primer orden pueden escribirse genéricamente como $\boldsymbol{F(x,y,y')=0}$, mientras que la solución general es una familia de curvas cuya ecuación tendrá la forma $\boldsymbol{f(x,y,C)=0}$, siendo $\boldsymbol{C}$ una constante arbitraria.

Se tratarán métodos para solucionar las EDO de primer orden:

$$\begin{cases} \textit{de variables separables} \\ \textit{homogéneas} \\ \textit{lineales de primer orden} \\ \textit{exactas} \\ \textit{transformables en exactas} \end{cases}$$

1.2.1. EDO de primer orden de variables separables.

La ecuación $\boldsymbol{F(x,y,y')=0}$ se denomina de variables separables si se puede reescribir de la forma: $\boldsymbol{g(y)dy=f(x)dx}$. O en su forma equivalente: $\boldsymbol{g(y)y'=f(x)}$.

Para resolver la ecuación se integra miembro a miembro: $\int \boldsymbol{g(y)dy}=\int \boldsymbol{f(x)dx}$. Si ambas integrales pueden ser resueltas, el problema estará solucionado. Notar que al resolver cada integral aparecerán en ambos miembros una constante de integración, las que se reunirán en una.

EJEMPLO 3:

Resolver $\boldsymbol{y'}=\frac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{x\,y+x\,y^3}}, \boldsymbol{x}>0, y\neq \boldsymbol{0}$.

RESOLUCIÓN:

$$\boldsymbol{y'=\frac{ln(x)}{x\,y+x\,y^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{ln(x)}{x\,(y+y^3)} \Rightarrow (y+y^3)\,dy=\frac{ln\,(x)}{x}\,dx}$$

$$\boldsymbol{\int (y+y^3)\,dy=\int \frac{ln(x)}{x}\,dx \quad \therefore \quad \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4=}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}ln^2(x)+C}$$

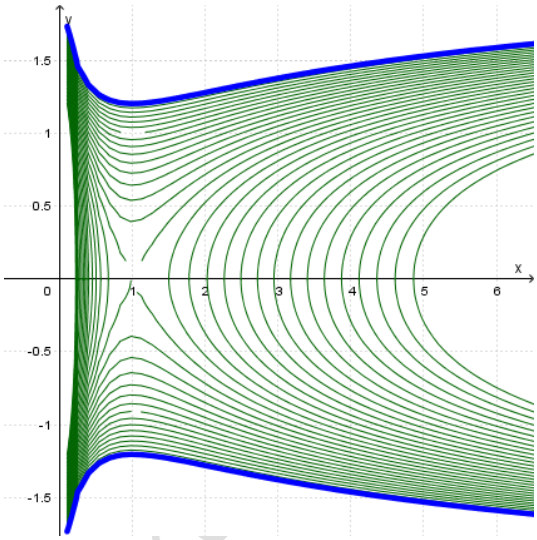
Luego, expresada en forma implícita, la solución es:

$$\boldsymbol{y^4+2y^2-ln^2(x)+C=0}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Si el lector piensa que el último sumando debió ser $\boldsymbol{2C}$, note que el doble de una constante arbitraria es otra constante arbitraria.

En el gráfico de la derecha se aprecian algunas de las soluciones particulares.

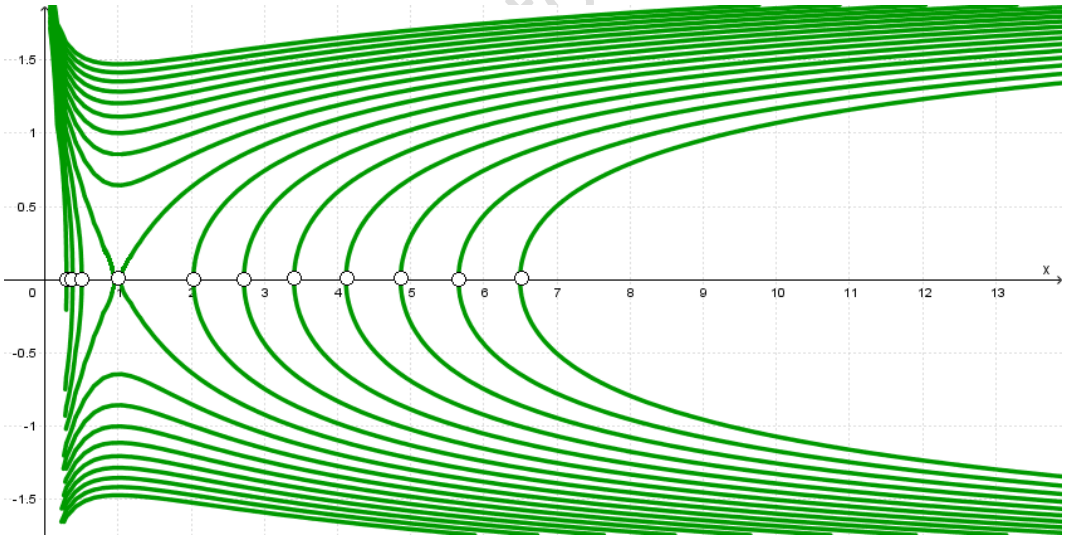


Note que dichas curvas no intersecan al eje $\boldsymbol{y}$, ya que el dominio de la ecuación exige que $\boldsymbol{x} > 0$.

Si bien el dominio también requiere que $\boldsymbol{y \neq 0}$, lo que implica que tampoco hay intersección de las curvas con el eje $\boldsymbol{x}$, a simple vista pareciera que sí las hubiera. Esto se debe al método de graficación del Geogebra (calcula en forma numérica algunos puntos pertenecientes a la curva y luego los une con pequeños segmentos de recta).

Es de destacar la importancia de tener presente el dominio de la ecuación original para interpretar correctamente la salida provista por los softwares graficadores.

Por consiguiente, la salida gráfica debe ser interpretada como la que se muestra a continuación:



1.2.2. EDO de primer orden homogénea.

La ecuación $\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$ se denomina homogénea si se puede reescribir de la forma $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$. Con la sustitución $\boldsymbol{v = \frac{y}{x}}$ se la transforma en una EDO de variables separables.

$$v(x) = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = v(x)x$$

Notar que v depende de x. Derivando m. a m. respecto de x:

$$y' = v'x + v$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$$v'x + v = f(v)$$

Operando $\frac{dv}{dx}x = f(v) - v \;\Longrightarrow\; \frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$. De este modo, la ecuación tiene las variables separadas. Se resuelve como la desarrollada en el apartado 1.2.1. para finalmente reemplazar $v = \frac{y}{x}$.

EJEMPLO 4:

Resolver $xy\,y' = x^2 + y^2$.

RESOLUCIÓN:

$$xy\,y' = x^2 + y^2 \;\Longrightarrow\; y' = \frac{x^2+y^2}{x\,y} = \frac{x^2}{x\,y} + \frac{y^2}{x\,y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Luego:

$$y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \frac{1}{v} + v$$

Se reescribió la ecuación $y' = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Entonces es homogénea; y para resolverla, se la transforma en una EDO de variables separadas haciendo el cambio $v = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = v\,x$.

Entonces:

$$y' = v'x + v = \frac{1}{v} + v \;\Longrightarrow\; v'x = \frac{1}{v} \Longrightarrow v\,dv = \frac{dx}{x}$$

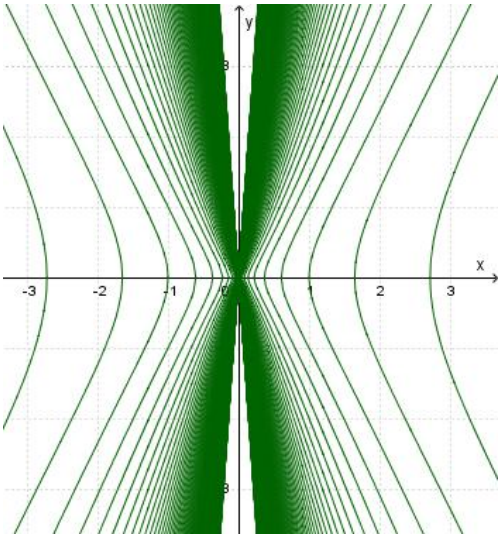
Integrando m. a m.:

$$\int v\,dv = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow 0,5\,v^2 = ln|x| + C$$

Volviendo a la variable original:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\,ln|x| + C \Longrightarrow y^2 = 2\,x^2\,ln|x| + C\,x^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{2\,x^2\,ln|x| + C\,x^2}$$



En el gráfico se pueden apreciar algunas curvas integrantes de la familia solución.

Bertossi, Pastorelli, Casco

1.2.3. EDO Lineal de primer orden.

Es aquélla que puede escribirse de la forma $\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)}$ donde $\boldsymbol{P(x)}$ y $\boldsymbol{Q(x)}$ son funciones continuas sobre un intervalo dado. Por ejemplo, $\boldsymbol{y' + \frac{1}{x}\, y = x^2}$; $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Para resolverla se empleará un recurso muy utilizado en la resolución de ecuaciones diferenciales que es el uso de un **factor integrante**. Pero para entender mejor la esencia del procedimiento se resolverá, a modo de ejemplo constructivo, la ecuación $\boldsymbol{y' + \frac{1}{x}\, y = x^2}$; $\boldsymbol{x} > 0$.

La clave para resolverla será multiplicar m. a m. por la función $\boldsymbol{x}$ (operación válida ya que $\boldsymbol{x \neq 0}$).

$$\boldsymbol{y' + \frac{1}{x}\, y = x^2 \;\Longrightarrow\; \left(y' + \frac{1}{x}\, y\right) x = x^2 x \;\Longrightarrow\; xy' + \; y = x^3}$$

Si se observa con atención, los dos sumandos del primer miembro se pueden expresar como la derivada del producto "xy" ya que $\boldsymbol{xy' + y = (xy)'}$. Así, la ecuación se reescribe $\boldsymbol{(xy)' = x^3}$.

Integrando m. a m. se tiene:

$$\int \boldsymbol{(xy)'dx} = \int \boldsymbol{x^3 dx}$$

Usando propiedades de la integral indefinida:

$$\int \boldsymbol{(xy)'dx} = \boldsymbol{xy} = \int \boldsymbol{x^3 dx} = \boldsymbol{\frac{x^4}{4} + C}$$

$$\boldsymbol{xy = \frac{x^4}{4} + C}$$

Explicitando la solución general:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}}$$

Notar que la clave fue transformar el primer miembro en la derivada de un producto (al multiplicar por el factor $\boldsymbol{x}$), lo que permitió luego calcular su integral. A ese factor ($\boldsymbol{x}$ en este caso) se lo denomina **factor integrante**.

Se probará ahora que $\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)}$ tiene como factor integrante una función $\boldsymbol{I(x)}$ calculándolo.

$$\boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)} \;\Longrightarrow\; \text{multiplicando m. a m. por } \boldsymbol{I(x)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{I(x)y' + I(x)P(x)\, y = I(x)Q(x)}$$

Al igual que en el ejemplo anterior se supone que el primer miembro es la derivada de un producto:

$$\underbrace{\boldsymbol{I(x)y' + I(x)P(x)\, y}}_{\boldsymbol{(I(x)y)'}} = \boldsymbol{I(x)Q(x)} \; (*)$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Entonces deberá cumplirse:

$$(I(x)y)' = I(x)y' + I'(x)y = I(x)y' + I(x)P(x)\,y$$

Luego, $I(x)$ debe ser tal que convierta en igualdad:

$$I(x)y' + I'(x)y = I(x)y' + I(x)P(x)\,y$$

$$I'(x)y = I(x)P(x)\,y \Longrightarrow \frac{I'(x)}{I(x)} = P(x) \Longrightarrow \frac{I'(x)dx}{I(x)} = P(x)dx \Longrightarrow \int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int P(x)dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \ln I(x) = \int P(x)dx + C$$

Dado que $P(x)$ es continua, se garantiza la existencia de $I(x)$.

Luego:

$$I(x) = e^{\int P(x)dx + C}$$

El valor C indica que hay infinitos factores integrantes, pero para resolver la EDO se necesita sólo uno. Por ello se adoptará el más sencillo: $C = 0$. Luego, $I(x) = e^{\int P(x)dx}$. Así, reemplazando en $(*)$:

$$\left(e^{\int P(x)dx}\,y\right)' = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

Integrando m. a m.:

$$\int \left(e^{\int P(x)dx}\,y\right)' dx = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx$$

$$e^{\int P(x)dx}\,y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + C$$

Explicitando la solución buscada:

$$y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + C\right)$$

Nuevamente, la existencia de y está garantizada porque $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo dado, y, por lo tanto, integrables en él.

Resumiendo:

Dada $y' + P(x)y = Q(x)$; $P(x)$ y $Q(x)$ funciones continuas sobre un intervalo $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx + C\right).$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 5:

Resolver $y' + \frac{1}{x}\, y = x^2$; siendo $x > 0$.

RESOLUCIÓN:

La EDO $y' + \frac{1}{x}\, y = x^2$ es lineal ya que tiene la forma $y' + P(x)\, y = Q(x)$. En ella, $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = x^2$, continuas en el intervalo dado: $x > 0$.

La solución será:

$$y = \frac{1}{e^{\int P(x)dx}}\left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\, dx + C\right) = \frac{1}{e^{\int \frac{1}{x}dx}}\left(\int e^{\int \frac{1}{x}dx} x^2\, dx + C\right)$$

$$y = \frac{1}{e^{ln|x|}}\left(\int e^{ln|x|} x^2\, dx + C\right) = \frac{1}{|x|}\left(\int |x| x^2\, dx + C\right)$$

Usando $e^{ln|x|} = |x|$ y el hecho que sólo se busca la solución si $x > 0$:

$$e^{ln|x|} = |x| = x$$

$$y = \frac{1}{x}\left(\int x^3\, dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + C\right)$$

$$y = \left(\frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}\right)$$

Si el lector se pregunta por qué se eligió como dominio $x > 0$, recordar que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ deben ser continuas.

Se deja como ejercicio probar que al mismo resultado se llega si $x < 0$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

1.2.4. EDO Exacta de primer orden.

Es aquélla que puede llevarse a la forma $f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0$ ó $f_x(x,y) + f_y(x,y)\, y' = 0$, siendo $f(x,y)$ una función con derivadas de segundo orden continuas en una región D de $\mathbb{R}^2$.

Recuerde que y es función de x. La solución de la ecuación puede sospecharse $f(x,y) = C$, dado que si se aplica la regla de la cadena se obtendrá la EDO dada, luego, la verifica.

La pregunta obligada es cómo advertir que $P(x,y) + Q(x,y)\, y' = 0$ puede llevarse a $f_x(x,y) + f_y(x,y)\, y' = 0$. Dicho de otra manera, ¿existe la función $f(x,y)$ tal que $f_x(x,y) = P(x,y)$ y $f_y(x,y) = Q(x,y)$?

Recordando el teorema de Clairaut, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$. Por lo tanto, deberá cumplirse

$\boldsymbol{f_{xy}(x,y) = P_y(x,y)}$ y $\boldsymbol{f_{yx}(x,y) = Q_x(x,y)}$.

Luego, el ***criterio de exactitud*** puede expresarse como:

La EDO $\boldsymbol{P(x,y) + Q(x,y)\, y' = 0}$; $\boldsymbol{P(x,y)}$ y $\boldsymbol{Q(x,y)}$ funciones con derivadas continuas sobre una región **D** del plano $\boldsymbol{xy}$, es exacta si y sólo si $\boldsymbol{P_y(x,y) = Q_x(x,y)}$.

Si se da dicha condición se buscará entonces la función $\boldsymbol{f(x,y)}$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_x(x,y) = P(x,y)} \\ \boldsymbol{f_y(x,y) = Q(x,y)} \end{cases}$$

EJEMPLO 6:

Resolver $\boldsymbol{4x^3y + y + (x^4 + x - cos\ y)y' = 0}$.

RESOLUCIÓN:

Para determinar si la EDO es exacta se debe usar el criterio de exactitud.

$$\boldsymbol{P(x,y) = 4x^3y + y \implies \frac{\partial P}{\partial y} = 4x^3 + 1}$$

$$\boldsymbol{Q(x,y) = x^4 + x - cos(y) \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x^3 + 1}$$

Dado que $\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$, la ecuación es exacta.

Luego, la solución es $\boldsymbol{f(x,y) = C}$ siendo $\boldsymbol{f(x,y)}$ una función tal que:

$$\boldsymbol{f_x(x,y) = P(x,y) = 4x^3y + y} \qquad (\mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{f_y(x,y) = Q(x,y) = x^4 + x - cos(y)} \qquad (\mathbf{2})$$

Integrando la $(\mathbf{1})$:

$$\boldsymbol{f = \int f_x(x,y)\, dx = \int (4x^3y + y)\, dx = x^4y + xy + h(y)}$$

Al integrar respecto de la variable $\boldsymbol{x}$ debe agregar $\boldsymbol{h(y)}$. Note que la misma al derivarse respecto de $\boldsymbol{x}$ es nula.

Derivando ahora la obtenida anteriormente con respecto a la variable $\boldsymbol{y}$ y utilizando la $(\mathbf{2})$:

$$\boldsymbol{f_y = x^4 + x + h'(y) = x^4 + x - cos(y)}$$

Luego, $\boldsymbol{h'(y) = -cos(y)}$.

Finalmente, $\boldsymbol{h = sen(y)}$.

Recordando que la solución responde a la forma $\boldsymbol{f(x,y) = C}$, la solución es:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$x^4y + xy + sen(y) = C.$$

1.2.5. EDO de primer orden transformables en exactas.

Muchas ED se transforman en exactas usando un **factor integrante**. Se desarrollará ahora un método para concluir si una EDO de primer orden tiene o no un **factor integrante** del tipo $I(x)$ o $I(y)$ que la convierta en una EDO exacta, para la cual ya se desarrolló un método que la soluciona.

Condición de existencia del factor integrante $I(x)$:

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

Multiplicando m. a m. por $I(x)$:

$$I(x)P(x,y)dx + I(x)Q(x,y)dy = 0$$

Usando el criterio de exactitud:

$$\frac{\partial(I(x)P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(I(x)Q(x,y))}{\partial x}$$

Desarrollando las derivadas:

$$\underbrace{\frac{\partial I(x)}{\partial y}}_{=0} P(x,y) + I(x)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial I(x)}{\partial x} Q(x,y) + I(x)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Agrupando los términos que contienen $I(x)$:

$$I(x)(P_y - Q_x) = I'(x)Q(x,y)$$

Luego, $\frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} = \frac{I'(x)}{I(x)}$. Notar que si existe ese $I(x)$ buscado, el segundo miembro es una función que sólo depende de la variable x; luego el primer miembro también deberá serlo, es decir $\frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)}$ es función de x (condición de existencia de $I(x)$).

En ese caso, integrando m. a m.:

$$\int \frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} dx = \int \frac{I'(x)}{I(x)} dx \Rightarrow \ln I(x) = \int \frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} dx$$

Luego, el factor integrante es: $I(x) = e^{\int \frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} dx}$

Condición de existencia del factor integrante $I(y)$:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Multiplicando m. a m. por $I(y)$:

$$I(y)P(x,y)dx + I(y)Q(x,y)dy = 0$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Usando el criterio de exactitud:

$$\frac{\partial\big(I(y)P(x,y)\big)}{\partial y}=\frac{\partial\big(I(y)Q(x,y)\big)}{\partial x}$$

Desarrollando las derivadas:

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y}P(x,y)+I(y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial I(y)}{\partial x}}_{=0}Q(x,y)+I(y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Agrupando los términos que contienen $I(y)$:

$$I'(y)P(x,y)=I(y)\big(Q_x-P_y\big)$$

Luego, $\frac{I'(y)}{I(y)}=\frac{(Q_x-P_y)}{P(x,y)}$. Notar que, si existe ese $I(y)$ buscado, el segundo miembro es una función que sólo depende de la variable y, luego, el primer miembro también deberá serlo.

En ese caso, integrando m. a m.:

$$\int\frac{\big(Q_x-P_y\big)}{P(x,y)}dy=\int\frac{I'(y)}{I(y)}dy\Rightarrow\ln I(y)=\int\frac{\big(Q_x-P_y\big)}{P(x,y)}dy$$

Luego, el factor integrante es: $I(y)=e^{\int\frac{(Q_x-P_y)}{P(x,y)}dy}$

Finalmente puede resumirse:

Dada la EDO $P(x,y)+Q(x,y)\,y'=0$; $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ funciones con derivadas continuas sobre una región **R** del plano xy:

Si $\frac{(P_y-Q_x)}{Q(x,y)}$ es función sólo de $x\Longrightarrow$ el factor integrante $I(x)=e^{\int\frac{(P_y-Q_x)}{Q(x,y)}dx}$ la transforma en exacta.

Si $\frac{(Q_x-P_y)}{P(x,y)}$ es función sólo de $y\Longrightarrow$ el factor integrante $I(y)=e^{\int\frac{(Q_x-P_y)}{P(x,y)}dy}$ la transforma en exacta.

Nota: Este teorema no asegura que todas las EDO de primer orden tengan factor integrante, ni tampoco permite encontrar todos los factores integrantes posibles de la misma. Sólo permite encontrar, suponiendo que los tenga, *factores integrantes univariables*.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 7:

Encontrar la solución particular de $2xy + 3x^2y + 3y^2 + (x^2 + 2y)y' = 0$ usando la condición de frontera $y(1) = 2$.

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{2xy + 3x^2y + 3y^2}_{P} + \underbrace{(x^2 + 2y)}_{Q}\, y' = 0$$

Explorando si existe factor $I(x)$:

$$\frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} = \frac{(2x+3x^2+6y)-(2x)}{x^2+2y} = \frac{3x^2+6y}{x^2+2y} = 3$$

Notar que $I(x) = 3$ no depende de la variable y. Luego, puede concluirse que existe el factor integrante. El mismo será:

$$I(x) = e^{\int \frac{(P_y - Q_x)}{Q(x,y)} dx} = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

Luego, la nueva EDO $\underbrace{e^{3x}(2xy + 3x^2y + 3y^2)}_{P^*} + \underbrace{e^{3x}(x^2 + 2y)}_{Q^*}\, y' = 0$ será exacta.

Se verificará primero este hecho (lo que permitiría detectar algún error). Es exacta si se cumple:

$$P^*{}_y = Q^*{}_x; \Longrightarrow \frac{\partial e^{3x}(2xy+3x^2y+3y^2)}{\partial y} \overset{¿?}{=} \frac{\partial e^{3x}(x^2+2y)}{\partial x}$$

$$e^{3x}\,(2x + 3x^2 + 6y) \overset{¿?}{=} 3e^{3x}\,(x^2 + 2y) + e^{3x}2x$$

$$e^{3x}\,(2x + 3x^2 + 6y) = e^{3x}\,(3x^2 + 6y + 2x)$$

Ahora, verificada que la nueva EDO es exacta, se resolverá usando el procedimiento descripto, esto es, buscar la función f tal que $\begin{cases} f_x = e^{3x}\,(2xy + 3x^2y + 3y^2) \\ f_y = e^{3x}\,(x^2 + 2y) \end{cases}$

Se comenzará integrando la segunda ecuación del sistema (por simplicidad):

$$f = \int f_y dy = \int e^{3x}(x^2 + 2y)\, dy = \int (e^{3x}x^2 + 2ye^{3x})dy = e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 + h(x)$$

$$f = e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 + h(x)$$

Derivando la anterior y usando la primera condición del sistema:

$$f_x = 3y\, e^{3x}x^2 + 2xy\, e^{3x} + 3\, e^{3x}y^2 + h'(x) = e^{3x}(2xy + 3x^2y + 3y^2) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \; 3y\, e^{3x}x^2 + 2xy\, e^{3x} + 3\, e^{3x}y^2 + h'(x) = e^{3x}2xy + 3e^{3x}x^2y + 3e^{3x}y^2 \;\Longrightarrow h'(x) = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow h(x) = K$ (constante que se unifica con la proveniente de la solución $f(x,y) = C$).

Luego, la solución general es $e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = C$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Para determinar la solución particular se determinará la constante C usando la condición de frontera $y(1) = 2$, esto es, si $x = 1 \implies y = 2$.

Reemplazando en $e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = C$ se tiene $e^{3.1}1^2 2 + e^{31}2^2 = 6\,e^3 = C$.

Por lo tanto, la solución particular es $e^{3x}x^2y + e^{3x}y^2 = 6\,e^3$.

1.3. Aplicaciones.

Hasta aquí se han desarrollado algunos de los métodos más comunes que resuelven EDO de primer orden. Se verán ahora algunas aplicaciones de las mismas.

1.3.1. Trayectorias de flujo.

Las trayectorias de flujo de un campo vectorial son las seguidas por una partícula cuyo campo de velocidad es el campo vectorial dado. Por consiguiente, los vectores del campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.

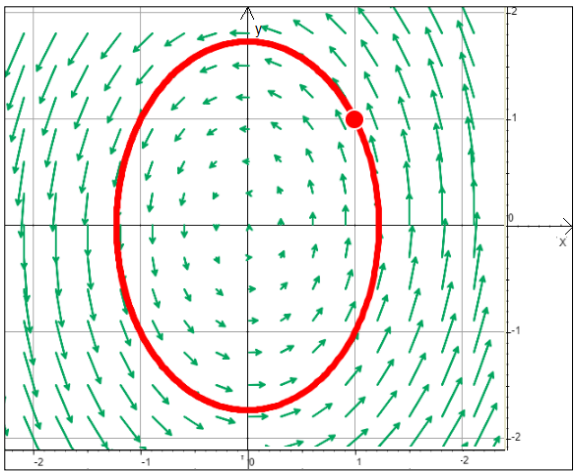
Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 8:

a) Graficar el campo estacionario $\vec{v} = (-\frac{y}{2}, x)$.
b) Visualizar la línea de flujo de una partícula que se suelta en el punto $(1; 1)$.
c) Determinar la ecuación de la familia de líneas de flujo y describirlas geométricamente.
d) Determinar la que contiene al punto $(x_o; y_o)$, particularizando luego con $(1; 1)$. ¿Coincide con la imaginada?

RESOLUCIÓN:

a) y b) Utilizar el simulador DaVinci .



c) Si la trayectoria es:

$$\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big) \implies \vec{r}\,'(t) = \vec{v} \implies$$

$$\implies \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}\right) = \left(-\frac{y}{2}, x\right) \implies \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{-\frac{y}{2}}{x}$$

Simplificando y separando variables:

$$-2x\,dx = y\,dy$$

Resolviendo la ecuación:

$$\int -2x\;dx = \int y\,dy \Rightarrow -x^2 + C = \frac{y^2}{2} \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

La familia $x^2 + \frac{y^2}{2} = C$ está integrada por elipses concéntricas con semieje mayor sobre el $eje\ y$.

d) Para determinar la solución particular que contiene al punto $(x_o; y_o)$ sólo se debe calcular la constante C, reemplazando x por x_o e y por y_o en la ecuación de la familia:

$$x_0^2 + \frac{y_0^2}{2} = C \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{2} = x_0^2 + \frac{y_0^2}{2}$$

La línea de flujo que pasa por $(1; 1)$ es la elipse: $\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} = 1$.

1.3.2. Familias ortogonales.

Una trayectoria ortogonal a una familia de curvas $y = f_1(x, C)$ es otra curva que cruza a cada una de las curvas de la familia de manera ortogonal. La colección de trayectorias ortogonales de una familia forma lo que se denomina familia ortogonal $y = f_2(x, K)$. Se dice que son familias mutuamente ortogonales. Por cada punto $(x; y)$ cuya abscisa pertenezca al dominio pasa una integrante de cada una de ellas. Las rectas tangentes a las mismas forman un ángulo recto. Luego, sus pendientes $m_1 = \frac{df_1}{dx}$ y $m_2 = \frac{df_2}{dx}$ verifican la relación $m_1 m_2 = -1$. Entonces $\frac{df_1}{dx}\frac{df_2}{dx} = -1$. Esto permite concluir que, conocida la ecuación $y = f_1(x, C)$ que representa una familia de curvas, su familia ortogonal estará representada por la ED $\frac{df_2}{dx} = -\frac{1}{\frac{df_1}{dx}}$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 9:

Determinar la familia ortogonal de $x^2 - y^2 = k$ y graficar algunas curvas de ambas.

RESOLUCIÓN:

En primer lugar, se calcula m_1. En este caso, al ser una función implícita $F(x, y) = K$ puede usarse derivación implícita:

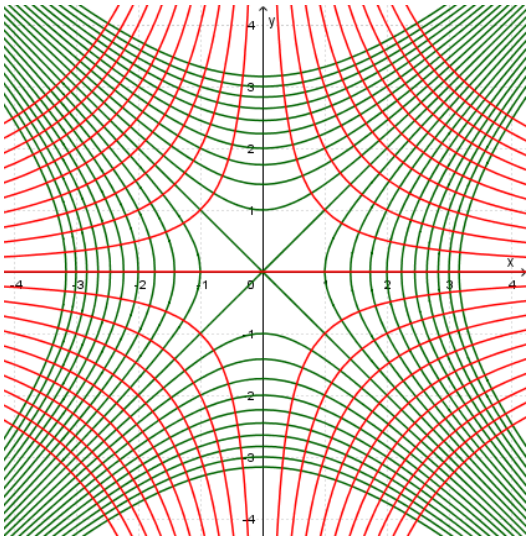
$$\frac{df_1}{dx} = y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

Luego la familia ortogonal deberá verificar la EDO:

$$y' = \frac{df_2}{dx} = -\frac{1}{\frac{df_1}{dx}} = -\frac{y}{x}$$

Resumiendo, se debe resolver:

$$y' = -\frac{y}{x}$$



Separando variables:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Resolviendo la ecuación:

$$\int -\frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow ln|y| = -ln|x| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; ln|yx| = C \; \Rightarrow \; xy = C$$

La familia ortogonal de la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = k$ es otra familia de hipérbolas $xy = C$.

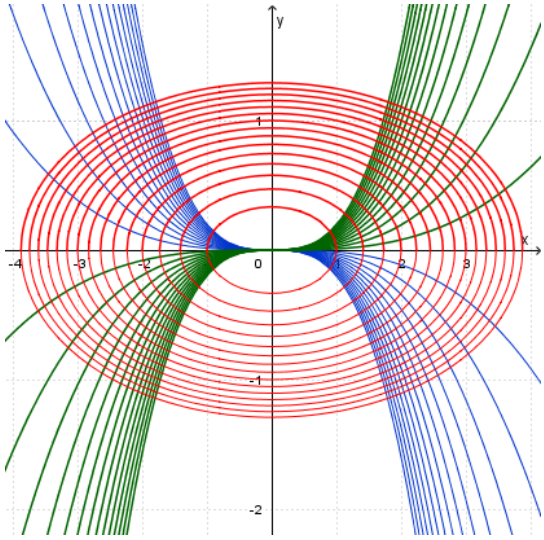
EJEMPLO 10:

Determinar la familia ortogonal de $y = k\,x^3$ y graficar algunas curvas de ambas.

RESOLUCIÓN:

$$y = k\,x^3 \quad \Rightarrow \quad m_1 = y' = k\,3x^2$$

Aquí es necesario reemplazar $k = \frac{y}{x^3}$.



Luego:

$$m_1 = \frac{y}{x^3}3x^2 = \frac{3y}{x}$$

Entonces la familia ortogonal es tal que:

$$y' = \frac{df_2}{dx} = -\frac{1}{\frac{df_1}{dx}} = -\frac{x}{3y} \Rightarrow 3y\,dy = -x\,dx$$

Resolviendo la ecuación:

$$\int 3y\,dy = \int -x\,dx \Rightarrow 3\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y^2 + x^2 = C \text{ (notar } 2C \text{ es una constante)}$$

Entonces, la familia de elipses $3y^2 + x^2 = C$ es ortogonal a la familia de parábolas cúbicas $y = k\,x^3$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 11:

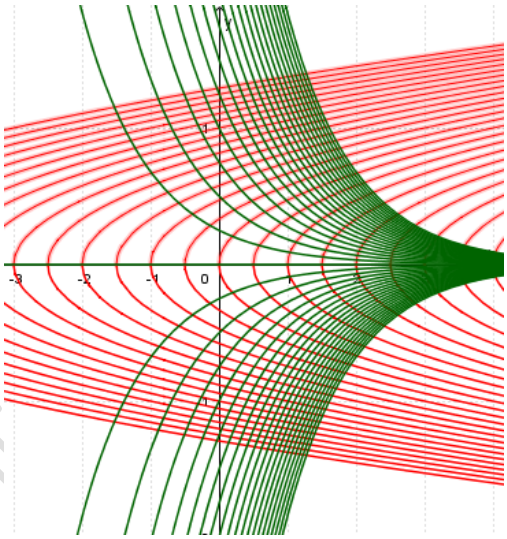
Mostrar que las familias $y = k\,e^{-x}$ e $y^2 = 2x + C$ son ortogonales. Graficar.

RESOLUCIÓN:

$$f_1\colon y = k\,e^{-x} \quad \text{y} \quad f_2\colon\ y^2 = 2x + C$$

$$m_1 = y' = -ke^{-x} = -\frac{y}{e^{-x}}e^{-x} = -y \ \therefore \quad m_1 = -y$$

Para calcular la pendiente en cada punto de la segunda familia se usará derivación implícita.



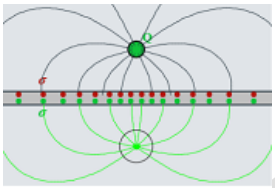
Luego:

$$m_2 = -\frac{-2}{2y} = \frac{1}{y} \Longrightarrow m_2 = \frac{1}{y}$$

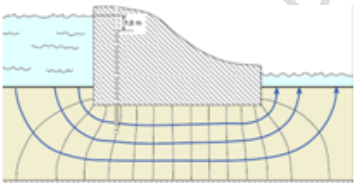
Finalmente, para todo punto (x, y) del plano se verifica $m_1\,m_2 = -y\frac{1}{y} = -1$. Por lo tanto, las familias son ortogonales.

También pudo probarse que son ortogonales determinando la ecuación diferencial que representa a una de ellas y resolviendo $\frac{df_2}{dx} = -\left(\frac{df_1}{dx}\right)^{-1}$.

Bertossi, Pastorelli



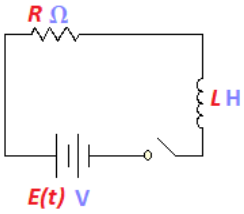
Las familias ortogonales son muy utilizadas en ingeniería. Por ejemplo, en eléctrica, las líneas de fuerza del campo eléctrico son ortogonales a las líneas equipotenciales si se plantea el problema en dos dimensiones.



Idéntica situación se da en problemas de flujo bidimensionales (como el correspondiente a una presa hidráulica tal cual se muestra en el corte): las líneas de flujo (trayectoria del agua) son perpendiculares a las líneas equipotenciales (líneas que unen los puntos con igual presión).

1.3.3. Circuitos eléctricos con impedancia.

EJEMPLO 12:



En el gráfico se muestra un circuito eléctrico sencillo. En el mismo hay una batería que genera fuerza electromotriz capaz de mantener una diferencia de potencial $E(t)$ y una corriente $I(t)$, la que se medirá en amperes A. El circuito tiene además una resistencia R y un

inductor de inductancia $\boldsymbol{L}$.

Se desea conocer la corriente $\boldsymbol{I(t)}$ que se generará en el circuito.

a) Para cualquier $\boldsymbol{E(t)}$; $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{L}$

b) $\boldsymbol{E(t) = 12V}$; $\boldsymbol{R = 2\Omega}$; $\boldsymbol{L = 1H}$.

c) $\boldsymbol{E(t) = 12\ sen(t)}$; $\boldsymbol{R = 2\Omega}$; $\boldsymbol{L = 1H}$.

Nota: en el Sistema Internacional de Unidades:

El voltio $\boldsymbol{V}$ se define como la diferencia de potencial a lo largo de un conductor cuando una corriente de $\boldsymbol{1A}$ utiliza $\boldsymbol{1W}$ (watt) de potencia: $\boldsymbol{V = W/A}$.

Ampere $\boldsymbol{A}$ es la unidad de intensidad de corriente eléctrica. El Coulomb $\boldsymbol{C}$ es la cantidad de carga desplazada por una corriente de $\boldsymbol{1A}$ en el tiempo de $\boldsymbol{1}$ segundo $\boldsymbol{s}$. Así $\boldsymbol{A = \frac{C}{s}}$.

El Ohm $\boldsymbol{\Omega}$ es la unidad de resistencia eléctrica tal que $\boldsymbol{\Omega = \frac{V}{A}}$.

El Henrio $\boldsymbol{H}$ es la inductancia eléctrica de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de $\boldsymbol{1V}$, cuando la corriente eléctrica que recorre el circuito varía uniformemente a razón de $\boldsymbol{1A}$ por segundo. Equivale $\boldsymbol{H = \Omega\ s}$.

RESOLUCIÓN:

a) La ley de Ohm expresa que en cada resistencia $\boldsymbol{R}$ la caída de potencial es proporcional a la resistencia y a la corriente ($\boldsymbol{\Delta V_R = R\,I}$), mientras que la caída en el inductor es proporcional tanto a la inductancia como a la variación de corriente en él ($\boldsymbol{\Delta V_L = L\frac{d\,I}{d\,t}}$). Una de las leyes de Kirchoff establece que el voltaje que proporciona la fuente $\boldsymbol{E(t)}$ es equivalente a la suma de las caídas de potencial en el circuito (debido a la resistencia y a la inductancia).

$$\boldsymbol{E(t) = \Delta V_L + \Delta V_R = L\frac{d\,I}{d\,t} + IR}$$

Note que la EDO resultante $\boldsymbol{L\frac{d\,I}{d\,t} + I\,R = E(t)}$ es lineal.

Reescribiéndola, $\boldsymbol{I'(t) + \frac{R}{L}\,I(t) = \frac{E(t)}{L}}$, siendo $\boldsymbol{P(t) = \frac{R}{L}}$ y $\boldsymbol{Q(t) = \frac{E(t)}{L}}$.

Luego, la solución general es $\boldsymbol{I(t) = \frac{1}{e^{\int \frac{R}{L}dt}}\left(\int e^{\int \frac{R}{L}dt}\frac{E(t)}{L}dt + C\right)}$.

Para calcular la solución particular debe usarse la condición inicial $\boldsymbol{I(0) = 0}$.

Advertir que si $\boldsymbol{R}$ está dada en que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{L}$ en $\boldsymbol{H}$, entonces $\boldsymbol{\frac{R}{L} = \frac{\Omega}{H} = \frac{\Omega}{\Omega\ s} = s^{-1}}$, luego $\boldsymbol{e^{\int \frac{R}{L}dt}}$ es adimensional si $\boldsymbol{t}$ es el tiempo en segundos.

Por otro lado:

$$\boldsymbol{\frac{E(t)}{L} = \frac{V}{H} = \frac{W/A}{\Omega\ s} = \frac{W/A}{V/A\ s} = \frac{W}{s} = \frac{A}{s}}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Luego $\int e^{\int \frac{R}{L}dt} \frac{E(t)}{L} dt$, estará en Ampere si E está en Voltios, L en Henrios, R en Ohms y t en segundos.

Así, teniendo cuidado de utilizar las unidades del sistema internacional es posible prescindir de ellas en la resolución de la ecuación.

b) $R = 2\Omega$; $L = 1H$ y $E(t) = 12V$.

$$\frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{E(t)}{L} = \frac{12}{1} = 12$$

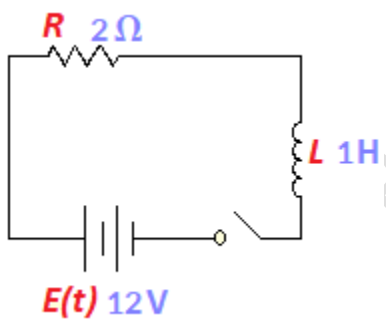
$$I(t) = \frac{1}{e^{\int 2\,dt}}\left(\int e^{\int 2\,dt} 12\,dt + C\right) = \frac{1}{e^{2\,t}}\left(12\frac{e^{2\,t}}{2} + C\right) = 6 + \frac{C}{e^{2\,t}}$$

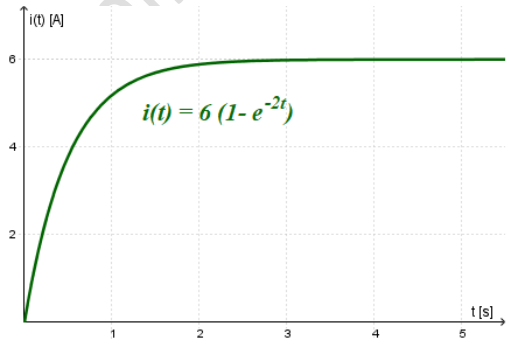
Utilizando $I(0) = 0 = 6 + \frac{C}{e^0}$; $C = -6$.

Luego:

$$I(t) = 6(1 - e^{-2t})$$

Notar que, en este caso particular, rápidamente la corriente se estabiliza en $6A$, prácticamente.





c) $R = 2\Omega$; $L = 1H$ y $E(t) = 12\,sen(6\,t)\,V$

$$\frac{R}{L} = \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{E(t)}{L} = \frac{12}{1} = 12\,sen(6t)$$

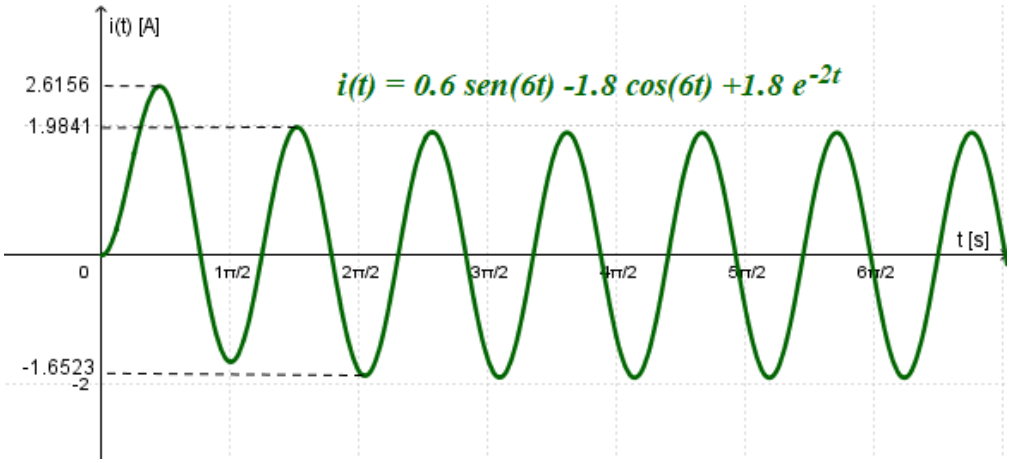
$$I(t) = \frac{1}{e^{\int 2\,dt}}\left(\int e^{\int 2\,dt} 12\;sen(6t)dt + C\right) = \frac{1}{e^{2\,t}}\left(12\int e^{2t}\;sen(6t)\,dt + C\right)$$

Siendo $\int e^{2t}\;sen(6t)dt = \frac{e^{2t}}{20}[\,sen(6t) - 3\cos(6t)]$

$$I(t) = \frac{1}{e^{2t}}\left(12\;\frac{e^{2t}}{20}[\,sen(6t) - 3\cos(6t)] + C\right)$$

Utilizando $I(0) = 0 = -1,8 + C \Rightarrow C = 1,8$.

$$i(t) = 0,6\,sen(6t) - 1,8\cos(6t) + 1,8\,e^{-2t}$$



Tanto de la expresión analítica de $\boldsymbol{I(t)}$ como de su gráfico se desprende que la corriente no es periódica, sin embargo, cuando $\boldsymbol{t \to \infty}$, el sumando $\boldsymbol{1,8\, e^{-2t}}$ pierde su influencia sobre la corriente ($\boldsymbol{lim_{n\to\infty}\, 1,8\, e^{-2t} = 0}$), entonces $\boldsymbol{I(t)}$ tiende a estabilizarse en un comportamiento periódico ($\boldsymbol{I(t) = 0,6\, sen(6t) - 1,8\, cos\,(6t)}$), donde la corriente máxima será $\boldsymbol{I_{max} \cong 1.897}$.

Se deja como ejercicio resolver el caso genérico, fuerza: $\boldsymbol{E(t) = A\, sen(k\, t);}$ inductancia $\boldsymbol{L}$ y resistencia $\boldsymbol{R}$; esto es la EDO a resolver es:

$$\boldsymbol{L\, I'(t) + R\, I(t) = A\, sen(kt)}$$

En este caso se deberá probar que la corriente estará dada por:

$$\boldsymbol{I(t) = \frac{A\, L\, k}{L^2k^2 + R^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{A}{L^2k^2 + R^2}(R\ sen(kt) - k\, L\, cos(kt))}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Ejercitación propuesta

Conceptos básicos, ecuaciones separables y homogéneas.

1. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial:*

a) $x^2y' + y = 0$ Rta: $y = Ce^{1/x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}$ Rta: $(y-1)e^y = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$

2. *Resuelva el problema con valor inicial:*

a) $\frac{dy}{dx} = y^2 + 1\,, y(1) = 0$ Rta: $y = tg(x-1)$

b) $\frac{du}{dt} = \frac{2t+1}{2(u-1)}\,, u(0) = -1$ Rta: $u = 1 - \sqrt{t^2+t+4}$

3. *Resuelva el problema con valor inicial* $y' = y\ sen(x)\,, y(0) = 1$. *Investigue el concepto de campo direccional y grafíquelo junto a la solución usando un SAC.* Rta: $y = e^{1-cos(x)}$

4. *Dibuje el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para dibujar la curva solución que pase a través del punto dado.*

$y' = y^2\,, (0,1)$ Rta: $y = \frac{1}{1-x}$

5. *Dada:* $y' = \frac{1}{y}$

a) *Dibuje el campo direccional.*

b) *Grafique algunas curvas solución, sin resolver la ecuación diferencial.*

c) *Resuelva la ecuación diferencial.* Rta: $y = \pm\sqrt{2}\sqrt{x+C}$

d) *Dibuje las soluciones obtenidas en el inciso (c) y compárelas con las gráficas del (b).*

6. *Diga si la ecuación es homogénea:*

a) $x^2 + 1 + 2xyy' = 0$ Rta: $No\ homogénea$

b) $y' = ln\,y - ln\,x$ Rta: $Homogénea$

7. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:*

a) $y' = \frac{(x-y)}{x}$ Rta: $y = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ Rta: $y = \pm x\sqrt{C + 2\ ln(x)}$

c) $xy' = y + xe^{y/x}$ Rta: $y = -x\ ln(C - ln|x|)$

Bertossi, Pastorelli, Casco

8. *Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Dibuje a varios miembros de cada familia:*

a) $y = kx^2$ Rta: $x^2 + 2y^2 = C$

b) $y = (x + k)^{-1}$ Rta: $y^3 = 3(x + C)$

c) $x^2 - 2y^2 = k$ Rta: $y = {}^{C}/_{x^2}$

9. *Sean* $y(t)$ *y* $V(t)$ *la altura y el volumen de agua que hay dentro de un tanque, en un tiempo* t *dado. Si el agua se derrama a través de un orificio que está en el fondo del tanque y cuya área es* a*, entonces la ley de Torricelli dice que:* $\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$ *, donde* g *es la aceleración debida a la gravedad.*

a) *Suponga que el tanque es cilíndrico y que tiene una altura de 2 metros y un radio de 0,5 metros y además que el orificio es circular y con un radio de 2 centímetros. Si se considera* $g = 9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}$*, muestre que* y *satisface la ecuación diferencial:* $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{25^2}\sqrt{19{,}6}\sqrt{y}$

b) *Resuelva esta ecuación para determinar la altura del agua en función del tiempo* t*, suponiendo que el tanque está lleno en el tiempo* $t = 0$.

c) *¿Cuánto tiempo pasará para que el tanque se vacíe por completo?*

Rta: b) $y(t) = 2 - \frac{17500\sqrt{5}t - 49t^2}{3905250}$ c) $\frac{1250\sqrt{5}}{7}\ s \approx 6\,min\ 39\ s$

Ecuaciones lineales de primer orden.

1. *Determine si la ecuación diferencial es lineal:*

a) $y' + x^2y = y^2$ Rta: $No\ lineal$

b) $xy' = x - y$ Rta: $Lineal$

2. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:*

a) $y' - 3y = e^x$ Rta: $y = Ce^{3x} - \frac{1}{2}e^x$

b) $y' - 2xy = x$ Rta: $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$

c) $y'\cos(x) = y\,sen(x) + sen(2x), \quad -{}^{\pi}/_{2} < x < {}^{\pi}/_{2}$

Rta: $y = \frac{1}{2}sec(x) - cos(x) + C\,sec(x)$

d) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2$ Rta: $y = \frac{1}{2}x + Ce^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx$

e) $\frac{dy}{d\theta} - y\,tg(\theta) = 1, \quad -{}^{\pi}/_{2} < \theta < {}^{\pi}/_{2}$ Rta: $y = tg(\theta) + C\,sec(\theta)$

3. *Resuelva el problema con valor inicial:*

Bertossi, Pastorelli, Casco

a) $y' + y = x + e^x, \;\; y(0) = 0$ Rta: $y = x - 1 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = x - 1 + Ch(x)$

b) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}, \;\; y(0) = 3$ Rta: $y = (x^2 + 3)e^{x^2}$

c) $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = cos(x), \;\; y(\pi) = 0$ Rta: $y = {sen(x)}/{x^2}$

4. *Resolver* $y' = 1 + 3x - 2y\,, \;\; y(1) = 2$ Rta: $0{,}75\, e^{2-2x} + 1{,}5x - 0{,}25$

5. *La ecuación no lineal* $y' + P(x)\, y = Q(x)y^n$ *se la denomina ecuación de Bernoulli.*

a) Muestre que se transforma en una EDO lineal realizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$.

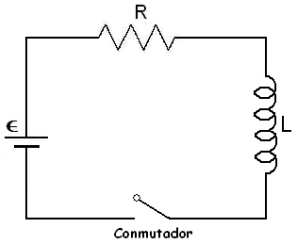
b) Use el resultado anterior para resolver y verificar las ecuaciones

b-1 $y' + e^x\, y = e^x y^2$ Rta: $y = \frac{1}{1 - Ce^{e^x}}$

b-2 $y' + \; y = \frac{x^4}{y^2}\;; y'(-1) = 1$ Rta:

$$y = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{e^{-3-3x}\left(-226 - 90\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{69}-11}} \;\; + 9\sqrt[3]{12\sqrt{69} - 44} + 2e^{3+3x}(8 - 24x + 36x^2 - 36x^3 + 27x^4)\right)}$$

6. *En el circuito mostrado en la figura, una batería (ε) suministra un voltaje constante de* $4\,[V]$, *la inductancia es de* $2\,[H]$, *la resistencia es de* $10\,[\Omega]$, *y además* $I(0) = 0$.

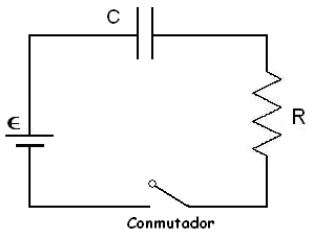


a) *Encuentre* $I(t)$.

b) *Determine la corriente después de* $0{,}1\,[s]$.

Rta: a) $I(t) = 4 - 4e^{-5t}$ b) $4 - 4e^{-1/2} \approx 1{,}57[A]$

7. *La figura muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz (fem), un capacitor con una capacitancia C farads* $[F]$, *y un resistor con una resistencia de* R *ohms* $[\Omega]$.



La caída de tensión a través del capacitor es ${Q}/{C}$, *donde* Q *es la carga (en Coulomb). La segunda ley de Kirchoff establece:* $RI + \frac{Q}{C} = \epsilon(t)$

Pero, $I = \frac{dQ}{dt}$, *así que se tiene:* $R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = \epsilon(t)$

Suponga que la resistencia es de $5\,[\Omega]$, *la capacitancia es de* $0{,}05\,[F]$, *que una batería suministra un voltaje constante de* $60\,[V]$ *y que la carga inicial* $Q\,(0) = 0\,[C]$. *Determine la carga y la corriente en el tiempo* t.

Rta: $Q(t) = 3(1 - e^{-4t}), \;\; I(t) = 12e^{-4t}$

Bertossi, Pastorelli, Casco

8. *Los psicólogos interesados en la teoría del aprendizaje estudian las* ***curvas de aprendizaje****. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que está aprendiendo alguna habilidad, como una función del tiempo de capacitación t. La derivada ${dP}/{dt}$ representa la razón con la cual el desempeño mejora. Si M es el nivel máximo de desempeño que puede tener un aprendiz, resulta razonable suponer que ${dP}/{dt}$ es proporcional a $M - P(t)$. (Al principio, el aprendizaje es rápido. Después, conforme el desempeño aumenta y se aproxima a su valor máximo, la razón de aprendizaje disminuye). En consecuencia: ${dP}/{dt} = k\big(M - P(t)\big)$.*
Donde k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial lineal y dibuje la curva de aprendizaje.

Rta: $P(t) = M + Ce^{-kt}$

9. *Un objeto con una masa m se lanza desde su estado de reposo y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, entonces la velocidad es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, entonces la fuerza de atracción sobre un objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva; además, la ley de Newton establece que*

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

a) *Resuelva esta ecuación diferencial para determinar la velocidad en el tiempo t.*

b) *¿Cuál es la velocidad límite?*

c) *Determine la distancia del objeto que cae, después de t segundos.*

Rta: a) $v(t) = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$ b) $v_{lim} = \frac{mg}{c}$ c) $s(t) = \frac{mg}{c}\left[t + \left(\frac{m}{c}e^{-ct/m}\right)\right] - \frac{m^2 g}{c^2}$

Ecuaciones exactas.

1. *Determine si cada ecuación diferencial es exacta:*

a) $x\,sen(y) + y\cos(x)\ y' = 0$

b) $2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$

c) $(x - y) + (x + y)\frac{dy}{dx} = 0$

Rta: a) *No exacta* b) *Exacta* c) *No exacta*

2. *Determine si la ecuación diferencial es exacta. Si es así, resuélvala:*

a) $2x + y + (x + 2y)y' = 0$ Rta: $y = \frac{1}{2}\left(-x \pm \sqrt{4c - 3x^2}\right)$

b) $3xy - 2 + (3y^2 - x^2)y' = 0$ Rta: *No exacta*

c) $sen(y) + (1 + x\cos(y))\,y' = 0$ Rta: $x\,sen(y) + y = C$

Bertossi, Pastorelli, Casco

d) $(x+y)\, e^{x/y} + \left(x - \frac{x^2}{y}\right) e^{x/y}\, y' = 0$ Rta: $xye^{x/y} = C$

e) $x\, ln(y)\, dx - \ (x + y\, ln(x))dy = 0$ Rta: *No exacta*

f) $\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^3} = \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}$ Rta: $xy^{-1} - yx^{-2} = C$

3. Resuelva el problema con valor inicial:

a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy)y' = 0,\ y(1) = \ 2$ Rta: $x^2y + 3xy^2 + x^3 = 15$

b) $1 + y\, cos(xy) + x\, cos(xy)\, y' = 0,\ y(1) = \ 0$ Rta: $y = \frac{arc\ sen(1-x)}{x}$

4. Muestre que la ecuación dada no es exacta, pero que se convierte en exacta cuando se multiplica por el factor integrante especificado. Después, resuelva la ecuación.

a) $y^2 + (1 + xy)y' = 0,\ \ I(x,y) = e^{xy}$ Rta: $ye^{xy} = C$

5. Encuentre un factor integrante y después resuelva la ecuación:

a) $3xy + 2y^2 + (x^2 + 2xy)y' = 0$ Rta: $x^3y + x^2y^2 = C$

b) $2xy + 3x^2y + 3y^2 + (x^2 + 2y)y' = 0$ Rta: $e^{3x}(x^2y + y^2) = C$

6. Pruebe que toda ecuación diferencial separable es exacta.

Bertossi, Pastorelli, Casco

SECCIÓN II

Ecuación Diferencial Ordinaria de Orden Superior

Bertossi, Pastorelli, Casco

"Uno no puede discutir con un teorema matemático"

Stephen Hawking

2. Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal (EDO L) de Orden Superior.

Es aquélla que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \ \wedge \ a_n(x) \neq 0}$$

Salvo casos especiales, los métodos de solución de ED de orden $\boldsymbol{n} > 1$ son complejos y en muchos de ellos no es posible obtener una solución exacta, debiéndose emplear métodos numéricos para alcanzar soluciones aproximadas. En este libro se tratarán las denominadas con coeficientes constantes.

Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de orden n con coeficientes constantes (EDO L cc).

Es aquélla que se puede escribir como:

$$\boldsymbol{a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0\, y = f(x),\ a_n \neq 0 \ \wedge a_i \in \mathbb{R}}$$

En el caso particular que $\boldsymbol{f(x) = 0}$, la ecuación anterior se denomina homogénea (EDO LH cc).

2. 1. Teoremas sobre EDO L de orden n.

Teorema 1: *Condición suficiente para la unicidad de la solución de una EDO L cc con valores iniciales.*

H) Dado el sistema formado por una EDO L cc de orden $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n}$ condiciones iniciales, donde $\boldsymbol{f(x)}$ es continua en $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{x_0 \in I}$, $\boldsymbol{a_n \neq 0}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)} \\ \boldsymbol{y(x_0) = c_0} \\ \boldsymbol{y'(x_0) = c_1} \\ \boldsymbol{\cdots} \\ \boldsymbol{y^{(n-1)}_{(x_0)} = c_{n-1}} \end{cases}$$

T) Existe una única función $\boldsymbol{y(x)}$ que satisface el sistema en $\boldsymbol{I}$.

Sin demostración.■ **Nota:** Cuando en este texto se indica "sin demostración" es porque la misma escapa a las posibilidades de este curso.

El teorema 1 (que en realidad es válido cuando $\boldsymbol{a_i}$ son funciones continuas en algún intervalo $\boldsymbol{I}$ permite concluir que la solución general de $\boldsymbol{a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)}$ será una ecuación que contiene $\boldsymbol{n}$ parámetros, los que luego se determinarán usando las $\boldsymbol{n}$ condiciones iniciales.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Teorema 2: *Principio de la superposición.*

H) y_1 es solución de $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f_1(x)$

y_2 es solución de $a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f_2(x)$

T) $y = y_1 + y_2$ es solución de:
$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Demostración:

Por hipótesis:

$$a_0(x)y_1 + a_1(x)y'_1 + \cdots + a_n(x)y_1^{(n)} = f_1(x)$$
$$a_0(x)y_2 + a_1(x)y'_2 + \cdots + a_n(x)y_2^{(n)} = f_2(x)$$

Sumando m. a m. y sacando factor común se obtiene:

$$a_0(x)(y_1 + y_2) + a_1(x)\left(y'_1 + y'_2\right) + \cdots + a_n(x)\left(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}\right) = f_1(x) + f_2(x)$$

Usando la propiedad lineal de la derivada: $y_1^{(n)} + y_2^{(n)} = (y_1 + y_2)^{(n)}$

$$a_0(x)(y_1 + y_2) + a_1(x)(y_1 + y_2)' + \cdots + a_n(x)(y_1 + y_2)^{(n)} = f_1(x) + f_2(x)$$

$$a_0(x)y + a_1(x)\, y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = f_1(x) + f_2(x)$$

Teorema 3: *Existencia de n funciones linealmente independientes que son solución de la EDO L cc de orden n.*

H) Dada $y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_o y(x) = 0$

T) Existen n funciones linealmente independientes que la solucionan.

Sin demostración.■

Bertossi, Pastorelli, Casco

Teorema 4: *Combinación lineal de las soluciones de una EDO homogénea.*

H) $y_1(x)$ e $y_2(x)$, soluciones de $a_0\, y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n\, y^{(n)}(x) = 0.$ $(*)$

c_1 y c_2, constantes cualesquiera; a_i funciones continuas en algún intervalo I.

T) $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es solución de:

$$a_0\, y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n\, y^{(n)}(x) = 0$$

Demostración:

Por propiedades de la derivada:

$$y^{(n)} = c_1 {y_1}^{(n)} + c_2 {y_2}^{(n)}$$

Reemplazando en el primer miembro de la EDO:

$$a_0\,[c_1 y_1 + c_2 y_2] + a_1\,[c_1 {y'}_1 + c_2 {y'}_2] + \cdots + a_n\,[c_1 {y_1}^{(n)} + c_2 {y_2}^{(n)}]$$

Reagrupando y utilizando como factor común a c_1 y c_2:

$$c_1 \left[\underbrace{a_0\, y_1 + a_1\, y'_1 + \cdots + a_n\, y_1{}^{(n)}}_{=0 \;\; ya\ que\ por\ por\ hipótesis\ y_1\ es\ solución\ de\ la\ ecuación\ homogénea\ (*)} \right] +$$

$$+ c_2 \left[\underbrace{a_0\, y_2 + a_2\, y'_2 + \cdots + a_n\, y_2{}^{(n)}}_{=0 \;\; ya\ que\ por\ por\ hipótesis\ y_2\ es\ solución\ de\ la\ ecuación\ homogénea\ (*)} \right] = 0$$

Lo que significa que $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ verifica $a_0\, y + a_1 y' + \cdots + a_n\, y^{(n)} = 0.$

Bertossi, Pastorelli, Casco

2. 2. EDO Lineal Homogénea con coeficientes constantes (EDO LH cc).

Combinando los teoremas anteriores es posible concluir que para encontrar la solución de una EDO LH de orden n es suficiente encontrar n funciones y_i linealmente independientes, $i = 1..n$.

La solución general será $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$; c_i constantes.

Teorema 5: *La ecuación característica.*

H) $y = e^{mx}$ es solución de $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_o y(x) = 0$.

T) m es solución de la ecuación $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_o = 0$.

Demostración:

Para demostrar este teorema se usará un recurso muy común: el "ensayo y error", que en otras palabras es proponer una solución, ya sea azarosamente o con algún criterio intuitivo, y aceptarla o descartarla, según verifique o no la ecuación. En matemática suele decirse "por inspección". Dado que se buscan funciones tales que una combinación lineal de sus derivadas se anule, es bastante lógico pensar que la misma debe tener la particularidad que sus derivadas se parezcan entre sí y a ella misma.

Una función que califica es:

$$y = e^{mx}$$

Así:

$$y' = me^{mx};\ y'' = m^2 e^{mx};\ y^{(n)} = m^n e^{mx}$$

Reemplazando en la EDO homogénea:

$$a_0 e^{mx} + a_1 m e^{mx} + a_2 m^2 e^{mx} + \cdots + a_n m^n e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_n m^n) = 0$$

Dado que $e^{mx} \neq 0$, se necesita entonces que $a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_n m^n = 0$, que es lo que se pretendía demostrar. El lector puede probar la que la recíproca también es cierta.

La ecuación $a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \cdots + a_n m^n = 0$ se denomina **ecuación característica**, y a su primer miembro, **polinomio característico**.

Dado que se trabajará sólo con $a_i \in \mathbb{R}$ será un polinomio de grado n, luego, por el teorema fundamental del álgebra, se sabe tiene n raíces; las que pueden ser reales o complejas, simples o múltiples. Se denominará m_i, $i = 1 \cdots n$, a dichas raíces.

Si las n raíces son distintas se cuenta entonces con las n soluciones linealmente independientes necesarias para formar la solución general (notar que si $m_1 \neq m_2$ la única solución de $Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} = 0$ es $A = 0$ y $B = 0$, luego $e^{m_1 x}$ y $e^{m_2 x}$ son linealmente independientes). De lo contrario, si alguna de las raíces tuviera orden de multiplicidad mayor a 1, deberán encontrarse las funciones faltantes para completar las necesarias n.

Además, para el caso que las raíces sean complejas, deberán realizarse algunas

Bertossi, Pastorelli, Casco

consideraciones para que las soluciones aportadas por este teorema conserven el tratamiento de la EDO en el campo de los reales. Se tratarán a continuación los cuatro tipos posibles de raíces del polinomio característico con coeficientes reales, explorando en primer lugar el caso particular de la de orden 2.

Teorema 6: *Solución general de la EDO LH cc de segundo orden con coeficientes reales según el tipo de raíces de su polinomio característico.*

H) $\boldsymbol{a\,y'' + by' + cy = 0}$; $\boldsymbol{p(m) = a\,m^2 + b\,m + c}$ y $\boldsymbol{m_1\,, m_2}$ raíces de $\boldsymbol{p(m)}$.

T) a) $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ raíces reales distintas: $\boldsymbol{y = c_1\,e^{m_1\,x} + c_2\,e^{m_2\,x}}$.

b) $\boldsymbol{m_1 = m_2 \quad \Longrightarrow \quad y = c_1\,e^{m_1\,x} + c_2\,x\,e^{m_1\,x}}$.

c) $\boldsymbol{m_{1,2} = \alpha \pm \beta\,i}$ raíces complejas conjugadas $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{y = c_1\,e^{\alpha x} cos(\,\beta x) + c_2\;e^{\alpha x} sen(\,\beta x)}$$

Demostración:

En todos los casos se busca un par de soluciones *Li*. Se sabe que el polinomio $\boldsymbol{a\,m^2 + b\,m + c}$ tiene exactamente dos raíces, pudiendo ser éstas reales (iguales o distintas) o complejas, dependiendo de si $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ es positivo, negativo o nulo. Se analizarán por separado las tres posibilidades.

a) Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac} > 0$, por el teorema de la ecuación característica, las funciones $\boldsymbol{e^{m_1 x}}$ y $\boldsymbol{e^{m_2 x}}$ son dos soluciones de la EDO. Note que si $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$ la única solución de $\boldsymbol{Ae^{m_1 x} + Be^{m_2 x} = 0}$ es $\boldsymbol{A = B = 0}$, luego, $\boldsymbol{e^{m_1 x}}$ y $\boldsymbol{e^{m_2 x}}$ son linealmente independientes. Luego, la solución general será:

$$\boldsymbol{y \;=\; c_1\,e^{m_1\,x} + c_2\,e^{m_2\,x} \;=\; c_1\,e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x} + c_2\,e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}}$$

b) Si $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0}$ tiene dos raíces reales iguales, $\boldsymbol{m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}}$, el teorema de la ecuación característica sólo aporta una de las soluciones: $\boldsymbol{y_1 \;=\; e^{m_1\,x} \;=\; e^{-\frac{b}{2a}x}}$. Se debe probar que bajo estas condiciones $\boldsymbol{y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}}$ es también solución (solución propuesta).

Derivando:

$$\boldsymbol{y'_2 = e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}}$$

$$\boldsymbol{y''_2 = -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x} = -\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Reemplazando en $ay'' + by' + cy$, se pretende demostrar que se reduce a $\mathbf{0}$.

$$ay'' + by' + cy = a\left(-\frac{b}{a}e^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a^2}xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) + b\left(e^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x}\right) + c\left(xe^{-\frac{b}{2a}x}\right)$$

Desarrollando y reagrupando:

$$ay'' + by' + cy = -be^{-\frac{b}{2a}x} + \frac{b^2}{4a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + be^{-\frac{b}{2a}x} - \frac{b^2}{2a}xe^{-\frac{b}{2a}x} + cxe^{-\frac{b}{2a}x}$$

$$ay'' + by' + cy = \left(\frac{-b^2}{4a} + c\right)xe^{-\frac{b}{2a}x} \underbrace{=}_{\substack{Reemplazando \\ b^2=4ac}} \left(\frac{-4ac}{4a} + c\right)xe^{-\frac{b}{2a}x} = 0$$

Entonces que $ay'' + by' + cy = 0$, lo que prueba que $y_2 = xe^{-\frac{b}{2a}x}$ es solución de la EDO si $b^2 - 4ac = 0$ (esto es, si $-\frac{b}{2a}$ es raíz doble de la ecuación característica).

Luego, la solución general es:

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, x\, e^{m_1 x} = c_1\, e^{\frac{-b}{2a}x} + c_2\, x\, e^{\frac{-b}{2a}x}$$

c) $p(m)$ tiene dos raíces complejas conjugadas si $b^2 - 4ac < 0$. Note que $m_1 \neq m_2$, luego el teorema de la ecuación característica aporta las dos soluciones *Li* buscadas.

Éstas son $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ e $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$.

Así, la solución general puede expresarse como:

$$y(x) = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x}$$

El problema radica que estas soluciones son complejas. Usando la forma exponencial de un complejo (ver apéndice):

$$y(x) = Ae^{\alpha x}(cos(\beta x) + i\, sen(\beta x)) + Be^{\alpha x}(cos(-\beta x) + i\, sen(-\beta x))$$

Siendo coseno una función par y el seno impar:

$$y(x) = Ae^{\alpha x}(cos(\beta x) + i\, sen(\beta x)) + Be^{\alpha x}(cos(\beta x) - i\, sen(\beta x))$$

Reagrupando:

$$y(x) = \underbrace{(A + B)}_{c_1} e^{\alpha x} cos(\beta x) + \underbrace{i(A - B)}_{c_2} e^{\alpha x} sen(\beta x)$$

Esta expresión da las soluciones reales y complejas de la ecuación diferencial, aunque en este texto sólo se está interesado en los coeficientes que arrojan valores c_1 y c_2 reales. Es de observar que $e^{\alpha x}\, cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}\, sen(\beta x)$ son funciones linealmente independientes.

Luego, la solución general es:

$$y(x) = e^{\alpha x}\,(c_1\, cos(\beta x) + c_2\, sen(\beta x))$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 1:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^2 - 3m + 2 = 0$.

Las raíces son $m_{1,2} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.2}}{2\,.1} = \frac{3\pm1}{2}$.

Luego, $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$.

Solución general: $y = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x}$.

Verificación:

$$y' = c_1\, e^x + 2\, c_2\, e^{2x}$$

$$y'' = c_1\, e^x + 4\, c_2\, e^{2x}$$

$$y'' - 3y' + 2y = c_1\, e^x + 4\, c_2\, e^{2x} - 3\,(c_1\, e^x + 2\, c_2\, e^{2x}) + 2\,(c_1\, e^x + c_2\, e^{2x}) =$$

$$= c_1\, e^x + 4\, c_2\, e^{2x} - 3\, c_1\, e^x - 6\, c_2\, e^{2x} + 2\, c_1\, e^x + 2\, c_2\, e^{2x} = 0$$

EJEMPLO 2:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $y'' + y = 0$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^2 + 1 = 0$.

$$m_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4.1.1}}{2\,.1} = \frac{\pm 2i}{2}$$

Las raíces son complejas: $m = \pm i$.

Luego,

$$y(x) = e^{0x}[c_1\, cos(1x) + c_2\, sen(1x)] \;\Rightarrow\; y(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x)$$

Verificación:

$$y' = -c_1\, sen(x) + c_2\, cos(x)$$

$$y'' = -c_1\, cos(x) - c_2\, sen(x)$$

$$y'' + y = -c_1\, cos(x) - c_2\, sen(x) + c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) = 0$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 3:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $y'' + 2y' + y = 0$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^2 + 2m + 1 = 0$.

$$m_{1,2} = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Tiene dos raíces iguales $m = -1$.

Entonces la solución general es $y = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$.

Verificación:

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x}$$

$$y'' = c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y =$$

$$= c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} + 2(-c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-x} - c_2\, x\, e^{-x}) + c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} =$$

$$= c_1 e^{-x} - 2\, c_2\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} - 2\, c_1 e^{-x} + 2\, c_2\, e^{-x} - 2c_2\, x\, e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x} = 0$$

EJEMPLO 4:

Ecuación diferencial con un parámetro. Resolver $y'' + ky' + y = 0, k \in \mathbb{R}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^2 + km + 1 = 0$.

Las raíces son $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$.

Las raíces serán reales (iguales o distintas) o complejas, según el valor de k. Así, se distinguen tres casos según $k^2 - 4$ sea positivo, negativo o nulo.

Como las soluciones son diferentes, deben tratarse como casos distintos:

- $k^2 - 4 = 0 \implies k = \pm 2$; la ecuación característica tiene dos raíces reales iguales $\implies$

$$\implies y = A\, e^{\frac{-k}{2}x} + Bx\, e^{\frac{-k}{2}x}$$

- $k^2 - 4 > 0 \implies k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas $\implies y = Ae^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}x} + Be^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}x}$

- $k^2 - 4 < 0 \implies k \in (-2, 2)$; la ecuación característica tiene dos raíces complejas $\implies$

$$\implies y = e^{\frac{-k}{2}x}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x\right) + B\, sen\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x\right)\right]$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

El teorema 6 puede generalizarse para una ecuación diferencial ordinaria lineal y homogénea de orden $\boldsymbol{n}$ con coeficientes constantes reales a través del teorema 7.

Teorema 7: *Solución general de la EDO LH cc reales constantes de orden* $\boldsymbol{n}$.

H) $\boldsymbol{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0}$; $\boldsymbol{a_n \neq 0}$

$\boldsymbol{p(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1} m + a_n}$ polinomio característico de la EDO LH.

T) La solución general tendrá $\boldsymbol{n}$ sumandos que se determinarán con las siguientes reglas:

a) Por cada **raíz real simple** $\boldsymbol{m}$ de $\boldsymbol{p(m)}$ la solución general tendrá un sumando $\boldsymbol{c\, e^{mx}}$.

b) Por cada **par de raíces complejas simples** $\boldsymbol{\alpha \pm \beta i}$ de $\boldsymbol{p(m)}$ la solución general tendrá 2 sumandos: $\boldsymbol{c_1 e^{\propto x} cos(\beta x) + c_2 e^{\propto x} sen(\beta x)}$.

c) Por cada **raíz real** $\boldsymbol{m}$ **de orden de multiplicidad** $\boldsymbol{k}$ de $\boldsymbol{p(m)}$ la solución tendrá $\boldsymbol{k}$ sumandos de la forma $\boldsymbol{c_i x^r e^{mx}}$; $\boldsymbol{r = 0, 1, \ldots, k-1}$.

d) Por cada **par de raíces complejas múltiples de orden de multiplicidad** $\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{\alpha \pm \beta i}$ la solución general tendrá $\boldsymbol{2k}$ sumandos del tipo $\boldsymbol{x^r e^{\propto x}\big(A_1\, cos(\beta x) + A_2\, sen(\beta x)\big)}$ con $\boldsymbol{r = 0, 1, \ldots, k-1}$.

Sin demostración.■

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 5:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que: $4y''' - y' = 0$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$4m^3 - m = 0$$

Factorizando:

$$4m^3 - m = 4\,m\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) = 4\,m\left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces son reales y simples: 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

Luego, la solución es:

$$y = A_1\,e^{0x} + A_2\,e^{-\frac{1}{2}x} + A_3\,e^{\frac{1}{2}x} = A_1 + A_2\,e^{-\frac{1}{2}x} + A_3\,e^{\frac{1}{2}x}$$

EJEMPLO 6:

Resolver $y^{(4)} + y^{(3)} - 7y^{(2)} - y^{(1)} + 6y = 0$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$m^4 + m^3 - 7m^2 - m + 6 = 0$$

Usando el lema de Gauss pueden determinarse sus raíces (o al menos dos de ellas, para luego de factorizar parcialmente el polinomio y usar la resolvente para determinar las restantes).

Las raíces son todas reales y distintas: $3; -1; 1; 2$.

Luego, la solución es:

$$y = A_1\,e^{-3x} + A_2\,e^{-x} + A_3\,e^{x} + A_4\,e^{2x}$$

EJEMPLO 7:

Resolver $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 14y^{(2)} + 4y^{(1)} + 13y = 0$ sabiendo que $y = cos\,(x)$ la soluciona.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$m^4 + 4m^3 + 14\,m^2 + 4m + 13 = 0$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Para conocer las 4 raíces se usa el hecho que $\boldsymbol{cos(x)}$ es solución. Ello implica que la ecuación característica admite el cero complejo $\mathbf{0} \pm \boldsymbol{i}$, ($\boldsymbol{cos}\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e^{0x} cos}\ (\boldsymbol{x})$). La ecuación característica tendrá como factor el polinomio $\boldsymbol{m^2} + \mathbf{1}$. Haciendo el cociente entre los polinomios puede concluirse que:

$$\boldsymbol{m^4 + 4m^3 + 14\, m^2 + 4m + 13 = (m^2 + 1)(m^2 + 4m + 13)}$$

La resolvente permite concluir que las dos raíces restantes serán también complejas: $\boldsymbol{-2 \pm 3i}$.

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1\ cos(x) + A_2\ sen(x) + A_3\ e^{-2x}\ cos(3x) + A_4\ e^{-2x}\ sen\ (3x)}$$

EJEMPLO 8:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y' - y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = 0}$$

Las raíces de ésta son $\boldsymbol{m = -1}$ y $\boldsymbol{m = 1}$ (con orden de multiplicidad 3). Puede probarse esto utilizando el Lema de Gauss para determinar las dos primeras raíces ($\mathbf{1}$ y $-\mathbf{1}$).

Usar la regla de Ruffini para factorizar:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = (m - 1)(m + 1)(m^2 - 2m + 1)}$$

Finalmente, emplear la resolvente para probar que las dos raíces restantes también son iguales a $\mathbf{1}$.

La ecuación característica factorizada es entonces:

$$\boldsymbol{m^4 - 2m^3 + 2m - 1 = (m - 1)^3 (m + 1)}$$

Luego, la solución es:

$$\boldsymbol{y = A_1\ e^{-x} + A_2\ e^x + A_3 x\ e^x + A_4\ x^2\ e^x}$$

EJEMPLO 9:

Resolver $\boldsymbol{y^{(4)} + 6y^{(2)} + 9y = 0}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$m^4 + 6m^2 + 9 = 0$$

Notando que es un trinomio cuadrado perfecto:

$$m^4 + 6m^2 + 9 = (m^2 + 3)^2 = 0$$

Luego el par de raíces complejas $\pm\sqrt{3}i$ son raíces cuyo orden de multiplicidad es 2.

Luego, la solución es:

$$y = A_1 x\, cos(\sqrt{3}\, x) + A_2 x\, sen(\sqrt{3}\, x) + A_3\, cos(\sqrt{3}\, x) + A_4\, sen(\sqrt{3}\, x)$$

2.3. EDO de orden superior no homogénea con coeficientes constantes (EDO L NH cc).

Recordar que no homogénea implica que $f(x)$ no es la función nula. Se mostrará ahora que para determinar **todas** las soluciones de una EDO lineal no homogénea (ya sea con coeficientes constantes o variables), solamente se necesita hallar **una** solución de ella y la solución general de su homóloga homogénea.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Teorema 8: *Solución general de EDO lineal no homogénea de orden* n.

H) $a_0; a_1; \cdots; a_n$ y $f(x)$ funciones continuas en I

y_p e y^* son soluciones de:

$$a_0\, y(x) + a_1\, y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x) \quad (1)$$

$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ es solución general de:

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \qquad (2)$$

T) $y^* = y_p + y_c$ es solución de $a_0\, y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x)$

Demostración:

Por hipótesis:

$$\begin{cases} a_0\, y^* + a_1\, y^{*\prime}(x) + \cdots + a_n y^{*(n)} = f(x) \\ a_0\, y_p + a_1 y_p'(x) + \cdots + a_n y_p{}^{(n)} = f(x) \end{cases}$$

Restando m. a m. y sacando factor común:

$$a_0(y^* - y_p) + a_1(y^{*\prime} - y'_p) + \cdots + a_n\left(y^{*(n)} - y_p^{(n)}\right) = 0$$

Haciendo uso de la propiedad de la derivada: $\left(y^{*(n)} - y_p^{(n)}\right) = \left(y^* - y_p\right)^{(n)}$, se tiene que la función $y = y^* - y_p$ verifica la ecuación (2), luego, es por hipótesis y_c .

Así:

$$y^* - y_p = y_c$$

Y despejando:

$$y^* = y_p + y_c$$

Se usará el teorema anterior para el caso en que todas las a_i son constantes, luego, será válido en el intervalo donde $f(x)$ sea continua. Este teorema permite centrar la atención en la búsqueda de una **solución propia** y_p; solución de $a_0\, y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x)$; dado que la solución de $a_0\, y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0$ se determina fácilmente como se hizo en la subsección 2.2.

Notar que esta última solución aporta las n constantes necesarias para formar la solución general.

Existen dos métodos, cada uno con sus ventajas y desventajas. Para usar cualquiera de ellos, la solución de la homogénea $a_0\, y(x) + a_1 y(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0$ juega un papel importante. Dichos métodos son:

- **Variación de los parámetros** o **de las constantes**: tiene por ventaja su generalidad, es decir que se aplica a **cualquier** EDO L NH cc. Consiste en transformar la EDO en un sistema de n ecuaciones donde las n incógnitas son funciones. El obstáculo en su aplicación está asociado a cálculos tediosos.
- **Coeficientes a determinar:** lleva corrientemente a cálculos sencillos pero tiene por desventaja su particularidad, dado que sólo se aplica a algunas EDO; aquéllas en las que intervienen funciones $f(x)$ cuyas derivadas tienen formas semejantes a $f(x)$.

2.3.1. Variación de los parámetros.

Se demostrará este método para una EDO de segundo orden, y luego se generalizará para uno de orden n.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Teorema 9: *Método de variación de los parámetros para* $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$

H) $\boldsymbol{y_1;\ y_2}$ soluciones *Li* de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$

Existen 2 funciones $\boldsymbol{u_i}$ derivables tales que solucionan $\boldsymbol{S} = \begin{cases} \boldsymbol{u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0} \\ \boldsymbol{u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}} \end{cases}$

T) $\boldsymbol{y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)}$ es solución de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$

Demostración:

Siendo $\boldsymbol{y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$ solución de la ecuación homogénea asociada a la que se desea resolver este método consiste en suponer que la solución propia de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$ será $\boldsymbol{y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)}$. Esta suposición es la que da origen al nombre del método dado que se cambian los parámetros $\boldsymbol{c_i}$ por las funciones $\boldsymbol{u_i(x)}$ (se hacen variables los parámetros). Se simplificará la notación de las funciones $\boldsymbol{y_i(x)}$ y $\boldsymbol{u_i(x)}$ con $\boldsymbol{y_i}$ y $\boldsymbol{u_i}$ prescindiendo de denotar que dependen de $\boldsymbol{x}$.

Así:

$$\boldsymbol{y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2}$$

Calculando la primera derivada:

$$\boldsymbol{y'_p = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'}$$

Reordenando:

$$\boldsymbol{y'_p = \underbrace{u_1' y_1 + u_2' y_2}_{\substack{=0\ por\ hipótesis \\ (primera\ ecuación\ de\ S)}} + u_1 y_1' + u_2 y_2' \quad \Rightarrow \quad y'_p = u_1 y_1' + u_2 y_2'}$$

Calculando la $\boldsymbol{y''_p}$:

$$\boldsymbol{y''_p = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''}$$

La $\boldsymbol{y_p}$ será solución de la EDO $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = f(x)}$ si la verifica. Reemplazando $\boldsymbol{y_p}$, $\boldsymbol{y'_p}$ e $\boldsymbol{y''_p}$ en el primer miembro de la ecuación se tiene:

$$\boldsymbol{a(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + b\,(u_1 y_1' + u_2 y_2') + c(u_1 y_1 + u_2 y_2) \overset{¿?}{=} f(x)}$$

Agrupando los términos que tienen factor común $\boldsymbol{u_i}$:

$$\boldsymbol{u_1 \left(\underbrace{a y_1'' + b\, y_1' + c\, y_1}_{=0} \right) + u_2 \left(\underbrace{a y_2'' + b y_2' + c\, y_2}_{=0} \right) + a(\underbrace{u_2' y_2' + u_1' y_1'}_{=\frac{f(x)}{a}}) \overset{¿?}{=} f(x)}$$

Los dos términos entre paréntesis son nulos por hipótesis, ya que $\boldsymbol{y_1}$ e $\boldsymbol{y_2}$ son soluciones de

Bernossi, Pastorelli, Casco

la EDO homogénea. El tercer paréntesis, también por hipótesis es equivalente a $\frac{f(x)}{a}$ por la segunda ecuación de S. Entonces, utilizando y_p se redujo la EDO a la identidad $f(x) = f(x)$.

Por ello y_p es solución propia.

EJEMPLO 10:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que $y'' + y = sec(x)$.

RESOLUCIÓN:

Dado que la ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ tiene raíces complejas porque $m = \pm i$, entonces:

$$y_p = c_1\, cos(x) + c_2\, sen\,(x)$$

Usando variación de los parámetros se propone la solución:

$$y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen\,(x)$$

El sistema a resolver es:

$$S = \begin{cases} u_1'\, cos(x) + u_2'\, sen\,(x) = 0 \\ u_1'(-sen(x)) + u_2'\, cos(x) = sec(x) \end{cases}$$

Usando Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ sec(x) & cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = -sen(x)\, sec(x) = -tg(x)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -sen(x) & sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = 1$$

Integrando:

$$u_1 = \int u_1'\, dx = \int -tg\,(x)\, dx = ln|cos\,(x)|$$

$$u_2 = \int u_2'\, dx = \int 1\, dx = x$$

La solución propia es:

$$y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen\,(x) = ln|cos(x)|\, cos\,(x) + x\, sen(x)$$

La solución general es:

$$y = y_c + y_p = A_1\, cos(x) + A_2\, sen\,(x) + cos(x)\, ln|cos\,(x)| + x\, sen(x)$$

Bertossi Pastorelli Casco

EJEMPLO 11:

Determinar la expresión general de $y(x)$ tal que $y'' + y = cos(x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ tiene raíces complejas porque $m = \pm i$, entonces:

$$y_p = A_1\, cos(x) + A_2\, sen(x)$$

Usando variación de los parámetros se propone la solución $y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen(x)$

El sistema a resolver es:

$$S = \begin{cases} u_1'\ cos(x) + u_2'\ sen(x) = 0 \\ u_1'\ (-sen(x)) + u_2'\ (cos(x)) = cos(x) \end{cases}$$

Usando Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) \\ cos(x) & cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = -sen(x)\, cos(x) \Rightarrow u_1 = \int u_1'\, dx =$$

$$= \int -sen\ (x)\, cos(x)\ dx = \frac{cos^2(x)}{2}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{vmatrix}} = cos^2(x) \Rightarrow u_2 = \int u_2'\, dx =$$

$$= \int cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}(x + sen(x)\, cos(x))$$

$$y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen\ (x) = \frac{cos^2(x)}{2} cos(x) + \frac{1}{2}(x + sen(x)\, cos(x))\, sen(x) =$$

$$= \frac{x\, sen(x)\ + cos^3(x) + cos(x)\ sen^2(x)}{2} = \frac{1}{2} x\, sen(x) + \frac{1}{2} cos(x)(cos^2(x) + sen^2(x)) =$$

$$= \frac{1}{2} x\, sen(x) + \frac{1}{2} cos(x)$$

Se omite el sumando $\frac{1}{2} cos(x)$, dado que está incluido dentro del sumando $A_1\, cos(x)$ de la solución característica.

Luego:

$$y_p = \frac{1}{2} x\, sen(x)$$

$$y = y_c + y_p = A_1\, cos(x) + A_2\, sen(x) + \frac{1}{2} x\, sen(x)$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Usando una demostración similar al caso particular de una EDO de orden 2 hecho anteriormente puede probarse el siguiente teorema:

Teorema 10: *Método de variación de los parámetros para una EDO L de orden* $\boldsymbol{n}$.

H) $\boldsymbol{y_1;\ y_2; \dots ; y_n}$ soluciones *Li* de $\boldsymbol{a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0}$

$\exists$ $\boldsymbol{n}$ funciones $\boldsymbol{u_i}$ derivables tales que:

$$\boldsymbol{S} = \begin{cases} \boldsymbol{u_1' y_1} + \boldsymbol{u_2' y_2} + \dots + \boldsymbol{u_n' y_n} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u_1' y_1'} + \boldsymbol{u_2' y_2'} + \dots + \boldsymbol{u_n' y_n'} = \boldsymbol{0} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \boldsymbol{u_1' y_1^{(n-2)}} + \boldsymbol{u_2' y_2^{(n-2)}} + \dots + \boldsymbol{u_n' y_n^{(n-2)}} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u_1' y_1^{(n-1)}} + \boldsymbol{u_2' y_2^{(n-1)}} + \dots + \boldsymbol{u_n' y_n^{(n-1)}} = \boldsymbol{\frac{f(x)}{a_n}} \end{cases}$$

T) $\boldsymbol{y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x) + \cdots + u_n(x)\, y_n(x)}$ es solución de:

$$\boldsymbol{a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x)},$$ no siendo $\boldsymbol{f(x)}$ la función nula.

Este teorema da las herramientas para resolver una EDO L NH de orden cualquiera. Notar que $\boldsymbol{S}$ es un sistema lineal cuyas incógnitas son $\boldsymbol{u_i'}$; $\boldsymbol{i = 1, \dots, n}$. Los coeficientes del sistema lineal son las funciones que generan el espacio solución de la EDO homogénea asociada y las $\boldsymbol{n-1}$ primeras derivadas de cada una. El sistema $\boldsymbol{S}$ puede ser escrito de la forma matricial como $\boldsymbol{Mu' = T}$.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} & \boldsymbol{y_2} & \dots & \boldsymbol{y_n} \\ \boldsymbol{y_1'} & \boldsymbol{y_2'} & \dots & \boldsymbol{y_n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{y_1^{(n-2)}} & \boldsymbol{y_2^{(n-2)}} & \dots & \boldsymbol{y_n^{(n-2)}} \\ \boldsymbol{y_1^{(n-1)}} & \boldsymbol{y_2^{(n-1)}} & \dots & \boldsymbol{y_1^{(n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u_1'} \\ \boldsymbol{u_2'} \\ \dots \\ \boldsymbol{u_{n-1}'} \\ \boldsymbol{u_n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \dots \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\frac{f(x)}{a_n}} \end{pmatrix}$$

Al determinante de matriz $\boldsymbol{M}$ se lo denomina **Wronskiano** y puede mostrarse que es **no nulo** si y sólo si el conjunto formado por las $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{y_i}$ son linealmente independientes (lo que en el teorema 10 está garantizado por hipótesis). Esto conlleva a que el sistema $\boldsymbol{S}$ sea compatible determinado y permite encontrar las $\boldsymbol{n}$ funciones $\boldsymbol{u_i'}$. Integrándolas se pueden encontrar las $\boldsymbol{u_i}$ buscadas.

EJEMPLO 12:

Resolver $\boldsymbol{y''' + y' = sec(x)}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^3 + m = (m^2 + 1)\, m = 0}$. Tiene dos raíces complejas

Bertossi, Pastorelli, Casco

simples ($\boldsymbol{m = \pm i}$) y una real, también simple ($\boldsymbol{m = 0}$).

Luego, $\boldsymbol{y_c = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + c_3}$.

Usando variación de los parámetros se propone la solución:

$$\boldsymbol{y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen(x) + u_3}$$

El sistema a resolver es:

$$\boldsymbol{S = \begin{cases} cos(x)\ u_1' \ + sen(x)\, u_2' + 1\, u_3' = 0 \\ -sen\,(x)\, u_1' \ + cos(x)\ u_2' + 0\, u_3' = 0 \\ -\,cos(x)\, u_1' - sen(x)\, u_2' + 0\, u_3' = sec(x) \end{cases}}$$

Usando Cramer:

$$\boldsymbol{u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(x) & 1 \\ 0 & cos(x) & 0 \\ sec(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) & 1 \\ -sen(x) & cos(x) & 0 \\ -\,cos(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow u_1 = \int u_1'\, dx = \int -1\, dx = \ u_1 = -x}$$

$$\boldsymbol{u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & 0 & 1 \\ -sen(x) & 0 & 0 \\ -\,cos(x) & sec(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) & 1 \\ -sen(x) & cos(x) & 0 \\ -cos(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-tg\ (x)}{1} \Rightarrow u_2 = \int u_2'\, dx = \int -tg\ (x)\, dx = ln\,|cos(x)|}$$

$$\boldsymbol{u_3' = \frac{\begin{vmatrix} cos(x) & sen\ (x) & 0 \\ -sen(x) & cos(x) & 0 \\ -\,cos(x) & -sen(x) & sec(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cos(x) & sen(x) & 1 \\ -sen(x) & cos(x) & 0 \\ -\,cos(x) & -sen(x) & 0 \end{vmatrix}} = \frac{sec(x)}{1} \ \Rightarrow u_3 = \int u_3'\, dx = \int sec(x) dx =}$$

$$\boldsymbol{= ln|sec(x) + tg(x)|}$$

Reemplazando en $\boldsymbol{y_p = u_1\, cos(x) + u_2\, sen(x) + u_3}$:

$$\boldsymbol{y_p = (-x)\, cos(x) + (ln|cos(x)|)\, sen(x) + \ ln|sec(x) + tg(x)|}$$

Luego:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + c_3 - x\, cos(x) + sen(x)\, ln|cos(x)| +}$$

$$\boldsymbol{+ln|sec(x) + tg(x)|}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Luego de los ejemplos anteriores puede notarse que este método es eficaz, dado que, siempre que se conozcan las soluciones de la ecuación característica, es posible resolver la EDO L NH, cualquiera sea la $\boldsymbol{f(x)}$. Sin embargo, aún en casos sencillos, necesita de numerosos cálculos muchas veces engorrosos. Sin embargo, son algoritmizables, por lo que los SAC lo utilizan.

Por fortuna, para las $\boldsymbol{f(x)}$ más frecuentes en problemas de física e ingeniería, es posible utilizar un método más eficiente ya que logra resolver las EDO con menos cálculos, denominado **coeficientes indeterminados**, el que se desarrollará en el apartado 2.3.2.

2.3.2. Coeficientes a determinar (o coeficientes indeterminados).

Como se expresó anteriormente, este método es una regla particular para resolver la ecuación:

$$\boldsymbol{a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x)}$$

Se podrá usar sólo si $\boldsymbol{f(x)}$ tiene la forma: $\boldsymbol{e^{a\,x}[P_n(x)\,cos(bx) + Q_m(x)\,sen(bx)]}$, siendo $\boldsymbol{P_n(x)}$ y $\boldsymbol{Q_m(x)}$ polinomios de grado $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{m}$ respectivamente y $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ constantes.

Notar que $\boldsymbol{f(x)}$ puede tener distintas formas de acuerdo a los distintos parámetros, muchas de ellas presentes frecuentemente en ecuaciones que modelan problemas reales de economía, ingeniería o biología. Por ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$; $\boldsymbol{f(x) = ke^{a\,x}}$; $\boldsymbol{f(x) = k\,cos(bx)}$; $\boldsymbol{f(x) = e^{a\,x}P_n(x)}$; $\boldsymbol{f(x) = k\,e^{a\,x}\,cos(bx)}$; $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)\,sen(bx)}$.

Se aplica para dichas funciones porque ellas tienen derivadas que conservan sus características al derivar, esto es, una combinación lineal de sus derivadas tendrá la misma forma. Este método consiste en plantear una solución que se "sospecha" factible. Se ilustrará el método con algunos ejemplos sobre cómo elegir dicha función para luego formalizar la elección.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 14:

Resolver la ecuación $\boldsymbol{y'' - y = 4x^2 - 3}$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $\boldsymbol{m^2 - 1 = 0}$. Tiene 2 raíces reales ($\boldsymbol{m = \pm 1}$).

Luego, $\boldsymbol{y_c = c_1 e^x + c_2 e^{-x}}$.

Para la solución propia se debe proponer una posible. Dado que se busca una función que derivada dos veces y sumada a su opuesta sea un polinomio de grado 2 ($\boldsymbol{4x^2 - 3}$) "se conjeturará" que $\boldsymbol{y_p = Ax^2 + Bx + C}$ (esto es porque $\boldsymbol{y'' - y}$ tiene altas probabilidades de ser también un polinomio de grado 2). Se deben determinar los coeficientes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ para que $\boldsymbol{y_p}$ verifique la EDO.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\,x^2 + B\,x + C \\ y'_p &= 2A\,x + B \\ y''_p &= 2A \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $y'' - y = 4x^2 - 3$:

$$\underbrace{2A}_{y''_p} - \underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{y_p} = 4x^2 - 3 \Rightarrow -Ax^2 - Bx + 2A - C = 4x^2 - 3$$

Para obtener la solución se debe pensar que se buscan dos polinomios idénticos, y que esto se logra sólo si los coeficientes homólogos son iguales. Esto lleva a plantear el sistema:

$$\begin{cases} -A = 4 & \textit{igualando coeficientes de } x^2 \\ -B = 0 & \textit{igualando coeficientes de } x \\ 2A - C = -3 & \textit{igualando términos independientes} \end{cases} \xrightarrow[\textit{resolviendo}]{} \begin{cases} A = -4 \\ B = 0 \\ C = -5 \end{cases}$$

Siendo:

$$y_p = -4x^2 - 5$$

La solución de la EDO dada será:

$$y = A_1 e^x + A_2\, e^{-x} - 4x^2 - 5$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 15:

Resolver la ecuación $y'' - y = cos(x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^2 - 1 = 0$. Tiene 2 raíces reales ($m = \pm 1$).

Luego, $y_c = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$.

Para la solución propia se debe proponer una factible. Se "conjetura" $y_p = A\, cos(x) + B\, sen(x)$. Se deben determinar los coeficientes A y B para que y_p verifique la EDO.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\, cos(x) + B\, sen(x) \\ y'_p &= -A\, sen(x) + B\, cos(x) \\ y''_p &= -A\, cos(x) - B\, sen(x) \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $y'' - y = \cos(x)$:

$$\underbrace{\big(-A\, cos(x) - B\, sen(x)\big)}_{y''_p} - \underbrace{\big(A\, cos(x) + B\, sen(x)\big)}_{y_p} = cos(x) - 2A\, cos(x) - 2B\, sen(x) =$$

$$= cos(x)$$

Para que esta expresión sea una identidad los coeficientes se elegirán con las condiciones:

$$\begin{cases} -2A = 1 & igualando\ coeficientes\ de\ \boldsymbol{cos}(x) \\ -2B = 0 & igualando\ coeficientes\ de\ \boldsymbol{sen}(x) \end{cases} \xrightarrow[resolviendo]{} \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$y_p = -\frac{1}{2}\,cos(x)$$

Y la solución general es:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\,cos(x)$$

Notar que aquí también, al igual que en el *Ejemplo 14*, la elección de la solución propia se fundamenta en el hecho que tanto ella como sus derivadas pueden ser combinaciones lineales de la función $f(x)$.

EJEMPLO 16:

Resolver $y'' + y = cos\,(x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica $m^2 + 1 = 0$ tiene raíces complejas porque $m = \pm i$.

Entonces $y_p = c_1\,cos(x) + c_2\,sen\,(x)$.

Dado que se busca una función que al sumarle su segunda derivada dé $cos(x)$, al igual que en el *Ejemplo 15*, se puede imaginar una $y_p = A\,cos(x) + B\,sen(x)$.

Procediendo de igual manera:

$$\left.\begin{aligned} y_p &= A\,cos(x) + B\,sen(x) \\ y'_p &= -A\,sen(x) + B\,cos(x) \\ y''_p &= -A\,cos(x) - B\,sen(x) \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando en $y'' + y = cos\,(x)$:

$$\big(-A\,cos(x) - B\,sen(x)\big) + \big(A\,cos(x) + B\,sen(x)\big) = cos(x)$$

Sumando los términos homólogos se obtiene:

$$¡0 = cos\,(x)!$$

Se obtuvo un sistema **incompatible** (recordar que la ecuación debe verificarse $\forall x$).

¿Por qué en el *Ejemplo 15* el método permitió encontrar la solución y en éste no? La respuesta es sencilla: ***la función "supuesta" no fue la correcta.***

Un lector avezado pudo notar que si la solución complementaria es $y_c = A\,cos(x) + B\,sen(x)$, la solución propia nunca pudo haber tenido la misma "forma" (la

Bertossi, Pastorelli, Casco

primera debe verificar $y'' + y = 0$ y la segunda $y'' + y = cos\,(x)$. Es por ello que es neurálgico para este método conocer la solución complementaria, porque en el caso que la propuesta hubiese coincidido con la misma, se debe elegir otra. La selección se hace con similar criterio, esto es, buscar una función cuyas derivadas conserven las características de $f(x)$. La técnica es proponer la misma que se eligió anteriormente, pero multiplicada por x.

Este ejercicio, entonces, no fue correctamente resuelto. Vea la resolución correcta en el *Ejemplo 17*.

EJEMPLO 17:

Resolver la ecuación del *Ejemplo 16*, $y'' + y = cos\,(x)$, usando $y_p = x\big(A\,cos(x) + B\,sen(x)\big)$.

RESOLUCIÓN:

$$y_p = x\,(A\,cos(x) + B\,sen\,(x))$$
$$y'_p = A\,cos(x) + B\,sen\,(x) + x\,(-A\,sen\,(x) + B\,cos(x))$$
$$y''_p = -A\,sen\,(x) + B\,cos(x) + (-A\,sen\,(x) + B\,cos(x)) + x\,(-A\,cos\,(x) - B\,sen(x))$$

Agrupando términos y reemplazando en $y'' + y = cos\,(x)$:

$$\underbrace{-2A\,sen\,(x) + 2\,B\,cos(x) + x\,(-A\,cos(x) - B\,sen(x))}_{y''_p} + \underbrace{x\,\big(A\,cos(x) + B\,sen(x)\big)}_{y_p} = cos(x)$$

Simplificando:

$$-2A\,sen(x) + 2B\,cos(x) = cos\,(x)$$

$$\begin{cases} -2A = 0 & igualando\ coeficientes\ de\ sen(x) \\ 2B = 1 & igualando\ coeficientes\ de\ cos(x) \end{cases} \xRightarrow[resolviendo]{} \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{2}\,sen(x)$$

La solución general es:

$$y = c_1\,cos(x) + c_2\,sen(x) + \frac{1}{2}x\,sen(x)$$

Éste es idéntico al *Ejemplo 11*, que se resolvió como ilustración del método de variación de los parámetros. Notar que los cálculos fueron aquí más sencillos.

Berrossi, Pastorelli, Casco

El éxito del método "coeficientes a determinar" para encontrar la solución propia de una EDO L NH cc depende de la **correcta** elección de la solución propuesta. Para una buena elección, plantear una forma análoga a $f(x)$ y compararla con la solución característica, si está contenida en ella (ya sea completamente o algún sumando), se la debe multiplicar por x **(¡y repetir el procedimiento!)**

EJEMPLO 18:

Resolver la ecuación $y''' - y'' = 4x$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica es $m^3 - m^2 = m^2(m-1) = 0$. Tiene todas raíces reales, una simple ($m = 1$) y una doble ($m = 0$).

Esto hace que $y_c = c_1\, e^x + c_2\, e^{0.x} + c_3\, x\, e^0 = c_1\, e^x + c_2 + c_3\, x$.

Dado que $f(x) = 4x$ es un polinomio de primer grado, la función "imaginada" es otro polinomio del mismo grado: $y_p = Ax + B$. Notar que ésta está contenida en y_c (en los sumandos $c_2 + c_3\, x$).

Se propone, entonces, $y_p = x\ (Ax + B) = Ax^2 + Bx$. Pero parte de ésta ($Bx$) también incluida en y_c (en el sumando $c_3\, x$). Se formula, entonces, $y_p = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$. Notar que ninguno de los sumandos está contenido en y_c.

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 \\ y'_p &= 3Ax^2 + 2Bx \\ y''_p &= 6Ax + 2B \\ y'''_p &= 6A \end{aligned}\right\}$$

Remplazando en $y''' - y'' = 4x$:

$$6A - (6Ax + 2B) = 4x$$

Luego, para que la anterior resulte una identidad:

$$\left.\begin{aligned} -6A &= 4 \\ 6A - 2B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{2}{3} \\ B = -2 \end{cases}$$

Siendo entonces:

$$y_p = -\frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$

Y la solución general:

$$y = A_1\, e^x + A_2 + A_3\, x - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Formalización de las reglas para proponer la solución propia de la ecuación $(\mathbf{1})$:

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + a_2 y^{(2)}(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = f(x) \qquad (1)$$

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + a_2 y^{(2)}(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0$$

I) Si $f(x)=e^{a\,x}P_n(x) \quad \Rightarrow \quad y_p = e^{a\,x}Q_n(x)$; $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ polinomios de grado n

II) Si $f(x) = e^{a\,x}\left[P_{n_1}(x)\cos(bx) + R_{n_2}(x)sen(bx)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_p = e^{a\,x}[Q_m(x)\cos(bx) + R_m(x)\,sen(bx)]$$

Siendo P_{n_1} y R_{n_2} polinomios de grado n_1 y n_2 respectivamente; Q_m y R_m polinomios de grado $m = mayor(n_1, n_2)$

III) Si luego de aplicar las dos reglas anteriores algún sumando de y_p está contenido en la solución complementaria multiplique la y_p anterior por el factor x^k, donde k es el menor entero positivo tal que ningún termino de $x^k\,y_p$ pertenece a y_c.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 19:

Para cada EDO proponer (no resolver) la solución propia para el método de los coeficientes a determinar:

$a)\ -y''' + 3y'' - 4y = sen(3x)$

$b)\ -y''' + 3y'' - 4y = x^2\,sen(x) + x\cos(x)$

$c)\ -y''' + 3y'' - 4y = x\ e^{2x}$

$d)\ 2y'' + 4y = sen(2x) + 3x\cos(x)$

$e)\ y'' - 4y' = x^{-1}$

$f)\ y''' + y'' - 2y' = -Sh(x)$

RESOLUCIÓN:

En todos los casos, para proponer correctamente es **conveniente** conocer la solución complementaria. (EC: Ecuación característica).

$a)$ EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\,e^{2x} + A_2\,x\,e^{2x} + A_3\,e^{-x}$$

$$y_p = A\,sen(3x) + B\cos(3x)$$

$$b)\ -y''' + 3y'' - 4y = \underbrace{x^2}_{\substack{polinomio\\ grado\ 2}}\ sen(x) + \underbrace{x}_{\substack{polinomio\\ grado\ 1}}\ \cos(x)$$

EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\, e^{2x} + A_2\, x\, e^{2x} + A_3\, e^{-x}$$

$$y_p = (Ax^2 + B\,x + C)sen(x) + (D\,x^2 + E\,x + F)\,cos(x)$$

$c)$ $-y''' + 3y'' - 4y = \underbrace{x}_{\substack{polinomio \\ grado\ 1}} \quad e^{2x}$

EC: $-m^3 + 3m^2 - 4 = -(m-2)^2(m+1)$

$$y_c = A_1\, e^{2x} + A_2\, x\, e^{2x} + A_3\, e^{-x}$$

$$y_p = x^2\,(Ax + B)\,e^{2x} = (A\,x^3 + B\,x^2)\,e^{2x}$$

Advertir que no pudo elegirse $(A\,x + B)\,e^{2x}$ debido a que está contenida en la solución complementaria; y tampoco $x\,(A\,x + B)$ porque parte de ésta está contenida en y_c.

$d)$ $2y'' + 4y = sen(2x) + 3x\,cos(x)$

EC: $2m^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; m = \pm\sqrt{2}$

$$y_c = A_1\, cos(\sqrt{2}x) + A_2\, sen(\sqrt{2}x)$$

Para esta EDO conviene utilizar el principio de superposición ya que el seno y el coseno no tienen el mismo argumento (uno tiene $2x$ y el otro x).

Para: $2y'' + 4y = sen(2x)$

$$y_{p_1} = A\,sen(2x) + B\,cos(2x)$$

Para: $2y'' + 4y = 3x\,cos(x)$

$$y_{p_2} = (Ax + B)\,sen(x) + (Cx + D)\,cos(x)$$

$e)$ $y'' - 4y' = x^{-1}$

No es posible utilizar el método de coeficientes a determinar, dado que $x^{-1} = \frac{1}{x}$ no es una de las funciones a la que se le pueda aplicar el método. Notar que una combinación lineal de las derivadas de $\frac{1}{x}$ jamás podrá ser $\frac{1}{x}$.

$f)$ $y''' + y'' - 2y' = -2Sh(x)$

Si bien no es posible utilizar el método de coeficientes a determinar directamente, dado que $2Sh(x)$ no es una de las funciones que califica para aplicarlo, es posible hacerlo si se utiliza la equivalencia $Sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Se debe resolver $y''' + y'' - 2y' = -e^x + e^{-x}$.

Usando el principio de superposición, es conveniente encontrar la solución propia de $y''' + y'' - 2y' = -e^x$ e $y''' + y'' - 2y' = e^{-x}$ separadamente.

EC: $m^3 + 2m^2 - 2m = m(m-1)(m+2)$

Luego:

$$y_c = A_1 + A_2\, e^{x} + A_3\, e^{-2x}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Para $y''' + y'' - 2y' = -e^x$, $y_{p_1} = Ax\,e^x$ (dado que Ae^x está incluida en y_c).

Para $y''' + y'' - 2y' = e^{-x}$, $y_{p2} = Be^{-x}$.

EJEMPLO 20:

Resolver la ecuación $y''' - 4y' = x^2 + x\,sen(2x)$.

RESOLUCIÓN:

La ecuación característica, $m^3 - 4m = (m-2)(m+2)m = 0$ tiene 3 raíces reales simples.

Luego:

$$y_c = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-2x} + A_3$$

Usando el principio de superposición, se resolverán por separado $y''' - 4y' = x^2$ e $y''' - 4y' = x\ sen(2x)$.

- $y''' - 4y' = x^2$

Dado que x^2 es un polinomio de segundo grado, se propone:

$$y_p = x\,(Ax^2 + Bx + C)$$

Notar que si se adoptara $Ax^2 + Bx + C$, C está incluida en la y_c (representada por el sumando A_3).

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y_p'' &= 6Ax + 2B \\ y_p''' &= 6A \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo en $y''' - 4y' = x^2$:

$$6A - (3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2$$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios:

$$\begin{cases} 6A - 4C = 0 \\ -8B = 0 \\ -12A = 1 \end{cases} \xrightarrow[resolviendo]{} \begin{cases} A = -\frac{1}{12} \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Luego:

$$y_{p_1} = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x$$

- $y''' - 4y' = x\,sen(2x)$

La $f(x) = x\,sen(2x)$ tiene la forma:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$f(x) = e^{a\,x}\left[P_{n_1}(x)\cos(bx) + R_{n_2}(x)sen(bx)\right]$$

Siendo: $\alpha = 0$; $P_{n_1}(x) = 0$; $R_{n_2} = x$; $b = 2$.

Como el grado de P es $n_1 = 0$ y el de R es $n_2 = 1$, los polinomios que multiplicarán a $sen(2x)$ y a $cos(2x)$ serán de grado 1.

Se propone:

$$y_p = (Ax + B)sen(2x) + (Cx + D)cos(2x)$$

Luego:

$$y'_p = (A - 2D - 2C\,x)\,sen(2x) + (C + 2B + 2A\,x)\,cos(2x)$$

$$y'''_p = (-12A + 8D + 8C\,x)\,sen(2x) + (-12C - 8B - 8A\,x)\,cos(2x)$$

Sustituyendo en $y''' - 4y' = x\,sen(2x)$:

$$(-12A + 8D + 8C\,x)\,sen(2x) + (-12C - 8B - 8A\,x)\,cos(2x) -$$

$$-4[(A - 2D - 2C\,x)\,sen(2x) + (C + 2B + 2A\,x)\,cos(2x)] = x\,sen(2x)$$

Igualando los coeficientes:

$$\begin{cases} -12A + 8D - 4A + 8D = 0 \\ 8C + 8C = 1 \\ -12C - 8B - 4C - 8B = 0 \\ -8A - 8A = 0 \end{cases} \xRightarrow{resolviendo} \begin{cases} A = D = 0 \\ B = -\dfrac{1}{16} \\ C = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

$$y_{p_2} = -\frac{1}{16}\,sen(2x) + \frac{1}{16}x\,cos(2x)$$

Luego, usando el principio de superposición:

$$y = A_1e^{2x} + A_2e^{-2x} + A_3 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x + -\frac{1}{16}\,sen(2x) + \frac{1}{16}\,x\,cos(2x)$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 21:

Resolver la ecuación $y'' - ky' + y = e^{-x}$, siendo k una constante real.

RESOLUCIÓN:

La solución complementaria depende de k (ver el *Ejemplo 4*).

Así:

$$y_c = \begin{cases} c_1\, e^{\frac{-k}{2}x} + c_2\, x\, e^{\frac{-k}{2}x} & si\ \ k = \pm 2 \\ c_1\, e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}x} + c_2\, e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}x} & si\ \ k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ e^{\frac{-k}{2}x}\left[c_1\, cos\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\mathrm{x}\right) + c_2\, sen\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}\mathrm{x}\right)\right] & si\ \ k \in (-2, 2) \end{cases}$$

Para determinar la solución propia usando el coeficiente a determinar se propone $y_p = C\, e^{-x}$, salvo para el caso en que $k = 2$, dado que allí la solución propia conjeturada está incluída en la complementaria.

Caso a) $k \neq 2$

$$y_p = C\, e^{-x}$$

$$y'_p = -C\, e^{-x}$$

$$y''_p = C\, e^{-x}$$

Reemplazando en la EDO $y'' + ky' + y = e^{-x}$:

$$Ce^{-x} - kCe^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}$$

$$C - kC + C = 1$$

$$C(2-k) = 1$$

$$C = \frac{1}{2-k}$$

Luego:

$$y_p = \frac{1}{2-k} e^{-x}$$

Caso b) $k = 2$

$$y_c = c_1\, e^{-x} + c_2\, x\, e^{-x}$$

$$y_{p=} C\, x^2\, e^{-x}$$

$$y'_p = C\,(2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x})$$

$$y''_p = C\,(2e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2x\, e^{-x} + x^2\, e^{-x}). = C\, e^{-x}(2 - 4x + x^2)$$

Reemplazando en la EDO $y'' + 2y' + y = e^{-x}$:

$$C\, e^{-x}(2 - 4x + x^2) + 2C\,(2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x}) + C\, x^2\, e^{-x} = e^{-x}$$

$$C\, e^{-x}\,(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2) = e^{-x}$$

$$2C = 1$$

$$C = \frac{1}{2}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Luego:

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

Concluyendo:

$$y = \begin{cases} c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x} & si\ k = 2 \\ c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + \frac{1}{4} e^{-x} & si\ k = -2 \\ c_1 e^{\frac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}x} + \frac{1}{2-k} e^{-x} & si\ k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \\ e^{\frac{-k}{2}x}\left[A_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x\right) + A_2\, sen\left(\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{2-k} e^{-x} & si\ k \in (-2, 2) \end{cases}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Ejercitación propuesta.

1. *Resuelva las siguientes diferenciales:*

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$

b) $3y'' - 8y' - 3y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{-\frac{x}{3}} + c_2 e^{3x}$

c) $y'' + 2y' + 10y = 0$ Rta: $y = e^{-x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 sen(3x)\right)$

d) $y'' = y$ Rta: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

e) $y'' + 25y = 0$ Rta: $y = c_1 \cos(5x) + c_2 sen(5x)$

f) $2y'' + y' = 0$ Rta: $y = c_1 + c_2 e^{-x/2}$

g) $y'' - y' + 2y = 0$ Rta: $y = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right)$

h) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - y = 0$ Rta: $y = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}$

i) $2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ Rta: $y = e^{-x/4}\left[c_1 \cos(\sqrt{23}\, x/4) + c_2\, sen(\sqrt{23}\, x/4)\right]$

2. *Resuelva el problema con valor inicial:*

a) $y'' + 3y' - 4y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = -3$ Rta: $y = e^{x} + e^{-4x}$

b) $y'' - 2y' + 2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ Rta: $y = e^{x}\left(\cos(x) + sen(x)\right)$

c) $y'' - 2y' - 3y = 0;\ y(1) = 3,\ y'(1) = 1$ Rta: $y = 2e^{1-x} + e^{3(x-1)}$

d) $y'' + 9y = 0;\ y(\pi/3) = 0, y'(\pi/3) = 1$ Rta: $y = -\frac{1}{3} sen(3x)$

3. *Resuelva, si fuese posible, cada problema con valor en la frontera:*

a) $y'' + 4y' + 4y = 0;\ y(0) = 0,\ y(1) = 3$ Rta: $y = 3xe^{-2x+2}$

b) $y'' + y = 0;\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$ Rta: $c\, sen(x)$

4. *a- Demuestre que el problema con valor en la frontera* $y'' + \alpha y = 0,\ y(0) = 0,\ y(L) = 0$, *tiene sólo la solución trivial* $y = 0$ *para los casos* $\alpha = 0$ *y* $\alpha < 0$.

b- Para el caso $\alpha > 0$, *determine los valores de* α *para los que este problema tiene una solución distinta de la trivial, y proporcione la solución correspondiente.*

Rta: b) $\alpha = n^2\pi^2 L^{-2},\ n\ es\ un\ entero,\ y = sen(n\pi x L^{-1})$

5. *Resuelva la ecuación diferencial o el problema con valor inicial, utilizando el método de los coeficientes indeterminados.*

a) $y'' - y' - 6y = \cos(3x)$ Rta: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{5}{78}\cos(3x) - \frac{1}{78} sen(3x)$

Bertossi, Pastorelli, Casco

b) $y" - 4y' + 4y = e^{-x}$ Rta: $y = e^{2x}(c_1 x + c_2) + \frac{1}{9}e^{-x}$

c) $y" + 36y = 2x^2 - x$ Rta: $y = c_1\, cos(6x) + c_2\, sen(6x) + \left(\frac{x^2}{18}\right) - \left(\frac{x}{36}\right) - \frac{1}{324}$

d) $y" - 2y' + 5y = x + sen(3x),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$

Rta: $y = e^x\left(\frac{523}{650}cos(2x) + \frac{797}{1300}sen(2x)\right) + \frac{1}{5}x + \frac{2}{25} + \frac{3}{26}cos(3x) - \frac{1}{13}\ sen\ (3x\ )$

e) $y" - y = xe^{3x},\ \ y(0) = 0, y'(0) = 1$ Rta: $y = \frac{5}{8}e^x - \frac{17}{32}e^{-x} + e^{3x}\left(\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}\right)$

6. Escriba una solución propuesta para el método de los coeficientes indeterminados. No determine los coeficientes:

a) $y" + 2y' + 6y = x^4 e^{2x}$ Rta: $y_p = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)e^{2x}$

b) $y" - 2y' + 2y = e^x cos(x)$ Rta: $y_p = xe^x(A\ cos(x) + B\ sen(x))$

7. Resuelva la ecuación diferencial utilizando: (a) coeficientes indeterminados, y (b) variación de parámetros:

a) $y" + 4y = x$ Rta: $y = c_1\, cos(2x) + c_2\, sen(2x) + \frac{1}{4}x$

b) $y" - 2y' + y = e^{2x}$ Rta: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^{2x}$

8. Resuelva la ecuación diferencial empleando el método de la variación de parámetros:

a) $y" + y = sec\ (x),\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ Rta: $y = (c_1 + x)\, sen(x) + (c_2 + ln(cos\ (x)))\, cos(x)$

b) $y" - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Rta: $y = [c_1 - x + ln(1 + e^x)]e^x + [c_2 + ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$

c) $y" - y = {}^{1}/_{x}$ Rta: $y = \left[c_1 - \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{x}dx\right]e^{-x} + \left[c_2 + \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{x}dx\right]e^x$

9. ***Optativo****: Mostrar, utilizando al menos dos métodos, que* $y = \frac{1}{\omega}\int_0^x f(t)\ sen\omega(x - t)dt$ *es una solución propia de* $y'' + \omega^2 y = f(x)$. *Ayuda: Resolver verificando y usando variación de los parámetros.*

10. Seguramente el lector notó que al determinar las u_i *en el método de variación de los parámetros usando* $\int u_i'\, dx$ *se omitió en la resolución de las integrales la constante de integración. Dar razones para dicha omisión.*

11. Resolver usando coeficientes indeterminados y variación de los parámetros las EDO:

a) $y''' - 4y' = 4$ Rta: $-x + A + B\ e^{2\,x} + C\ e^{-2x}$

b) $y''' + 4y' = 4$ Rta: $x + A + B\ cos\ (2x) + C\ sen\ (2x)$

Bertossi, Pastorelli, Casco

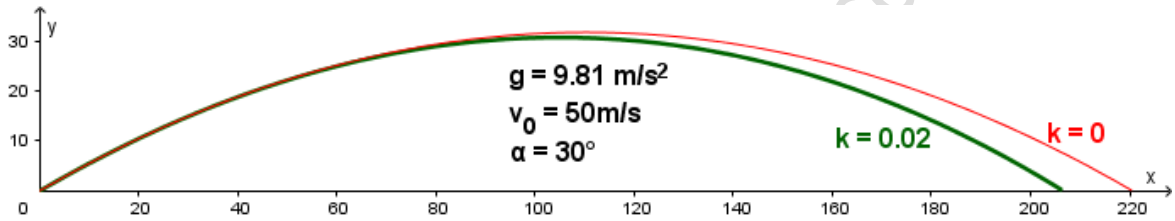
c) $y''' + 4y'' = 4$ Rta: $\frac{x^2}{2} + A\,e^{-4x} + B + Cx$

12. ***Movimiento del proyectil en un medio viscoso:*** *Encontrar la posición $\vec{r}$ del proyectil de masa m disparado desde $(0,0)$ con rapidez v_0 y ángulo sobre la horizontal α, suponiendo que después de disparado, además la fuerza gravitacional existe una de rozamiento que es proporcional y opuesta a la velocidad $\vec{F} = -k\,m\vec{v}$. Utilizar un SAC para comparar las trayectorias a iguales v_0 y α con y sin rozamiento.*

Rta: $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big)$ siendo:

$$x(t) = \frac{v_0\,cos(\alpha)}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$y(t) = \frac{v_0\,sen(\alpha)}{k}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt^2}{2}$$



Bertossi, Pastor

SECCIÓN III

Sistema Lineal
de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
con coeficientes constantes

Bertossi, Pastorelli, Casco

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples,
es sólo porque no se da cuenta
de lo complicada que es la vida"

John Von Neumann

3. Sistema Lineal de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales con coeficientes constantes.

Hasta el momento, se estudió la solución de **una** EDO L (con o sin los datos de valores iniciales, dando por resultado una familia solución o una única solución, dependiendo del caso). Ahora se tratará el problema referido a resolver sistemas EDO lineales, esto es encontrar las funciones que solucionan simultáneamente un conjunto de ED.

Normalmente esos sistemas aparecen en modelos que involucran determinar más de una función de la misma variable independiente, la que normalmente suele ser el tiempo. Por ejemplo, determinar la posición de un móvil sujeto a un campo de velocidad conocido, o determinar la concentración de un químico en distintos tanques comunicados entre sí. En esta sección se asumirá como variable independiente a $\boldsymbol{t}$ y como funciones incógnita a $\boldsymbol{x_1}(\mathbf{t})$; $\boldsymbol{x_2}(\mathbf{t})$ (en general, $\boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{t})$), aunque para facilitar la notación se omitirá indicar la dependencia de $\boldsymbol{t}$, nombrándolas como $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$. Hay métodos muy sencillos que permiten transformar un sistema lineal de cualquier orden en uno de primer orden; por ello se tratarán sólo éstos.

Se resolverá un sistema de ecuaciones diferenciales (SL EDO) por dos métodos, uno denominado **método de eliminación** y otro, **matricial**.

Bertossi, Pastorelli, Casco

3.1. Resolución de SL EDO por método de eliminación.

El nombre de este método elemental proviene del hecho que transforma el SL EDO en otro, pero que posee una incógnita de orden superior de una única función incógnita. Esto se puede resolver usando los procedimientos de la sección II. Consiste en despejar de una de las ecuaciones una de las funciones y reemplazarla en las otras, obteniendo así un nuevo sistema con una ecuación menos. Se repite la operación hasta lograr una única ecuación lineal.

EJEMPLO 1:

Resolver el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x'_1 = -3x_1 + x_2} \\ \boldsymbol{x'_2 = 4x_1 - 3x_2} \end{cases}$, sabiendo que $\boldsymbol{x_1(0) = 1}$ y $\boldsymbol{x_2(0) = 0}$.

RESOLUCIÓN:

Despejando de la primera ecuación:

$$\boldsymbol{x_2 = x'_1 + 3x_1}$$

Derivando m. a m.:

$$\boldsymbol{x'_2 = x''_1 + 3x'_1}$$

Reemplazando éstas en la segunda ecuación del sistema, se tiene uno equivalente:

$$\underbrace{\boldsymbol{x''_1 + 3x'_1}}_{\boldsymbol{x'_2}} = \boldsymbol{4x_1 - 3\,\underbrace{(x'_1 + 3x_1)}_{x_2}}$$

El que se reduce a:

$$\begin{cases} x_2 = x'_1 + 3x_1 \\ x''_1 + 6x'_1 + 5x_1 = 0 \end{cases}$$

Notar que ésta es una EDO de segundo orden. La ecuación característica de la misma es $m^2 + 6m + 5 = 0$; que tiene por solución dos raíces reales distintas: $m_1 = -1$ y $m_2 = -5$.

Luego:

$$x_1 = Ae^{-t} + Be^{-5t}$$

Reemplazando este resultado en la primera ecuación del último sistema se obtiene:

$$x_2 = x'_1 + 3x_1 = -Ae^{-t} - 5Be^{-5t} + 3\left(Ae^{-t} + Be^{-5t}\right) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-5t}$$

Luego, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{-t} + Be^{-5t} \\ x_2 = 2Ae^{-t} - 2Be^{-5t} \end{cases}$$

Utilizando las condiciones iniciales:

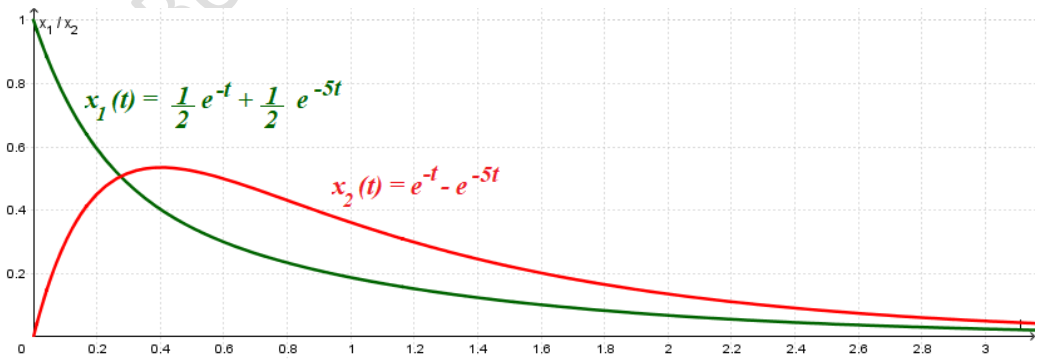
$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = 2A - 2B \end{cases}$$

Luego:

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Finalmente, el sistema tiene por solución:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \\ x_2 = e^{-t} - e^{-5t} \end{cases}$$



Utilizar el simulador DaVinci para graficar las soluciones encontradas. Notar que si $t \to \infty$, ambas funciones solución tienden a $\mathbf{0}$.

Éste puede tener una interpretación física. Suponiendo el campo de velocidad:

Bertossi, Pastorelli, Casco

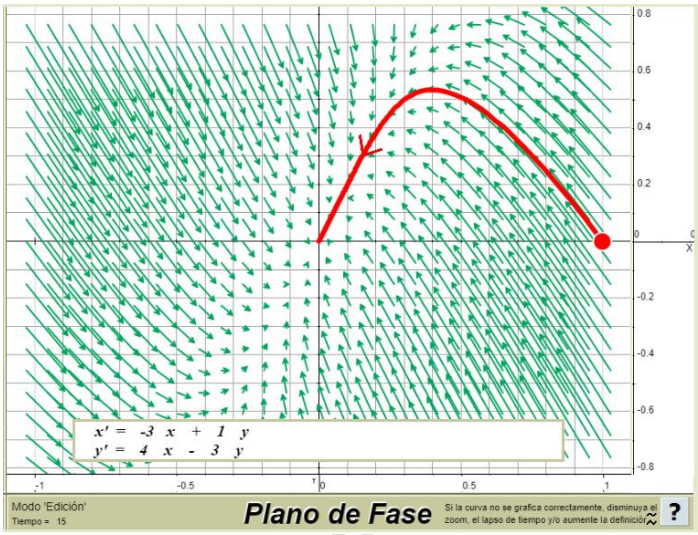
$$\vec{v} = (-3x + y; 4x - 3y)$$

Se desea encontrar la trayectoria de la partícula que se suelta en $(1; 0)$; o sea, la línea de flujo. Notar que se debe resolver $\vec{v} = (x'(t); y'(t)) = (-3x + y; 4x - 3y)$, siendo $x(0) = 1;\ y(0) = 0$.

Más allá del cambio de notación, el sistema es el resuelto recientemente. Con el simulador puede apreciarse en el *Plano de Fase* el campo de velocidad $\vec{v}$ y la trayectoria $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big)$ encontrada. En tanto que en el *Plano de las Series de Tiempo* se observan las gráficas de las funciones solución:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-5t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{-5t} \end{cases}$$

Notar que si $t \to \infty$ la partícula se acerca al origen $(0; 0)$.



Bert elli, Casco

EJEMPLO 2:

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_3' = x_1 - 3x_3 + t \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

Despejando x_3 de la primera ecuación se tiene $x_3 = -x_1' - x_1 + x_2$ y derivando, $x'_3 = -x_1'' - x'_1 + x'_2$. Reemplazando éstas en las otras dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1'' - x'_1 + x'_2 = x_1 - 3(-x_1' - x_1 + x_2) + t \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1'' - 4x'_1 + x'_2 = 4x_1 - 3x_2 + t \end{cases}$$

El procedimiento general apuntaría a despejar x_1 de la primera ecuación y, luego de calcular x'_1, reemplazarlas en la segunda. En este caso no es necesario, dado que al reemplazar x_2' en la segunda se simplifican varios términos y la ecuación resultante es una EDO de una única función incógnita: $-x_1'' - 4x'_1 + (4x_1 - 3x_2) = 4x_1 - 3x_2 + t$; simplificando $x_1'' + 4x'_1 = -t$.

Al resolver $x_1'' + 4x'_1 = -t$ se tiene como ecuación característica $m^2 + 4m = m(m+4) = 0$; luego, la solución complementaria será $x_{1c} = Ae^{0t} + Be^{-4t} = A + Be^{-4t}$; y la particular, siendo que $f(t) = t$ es un polinomio de primer grado, tendrá la forma $x_{1p} = (C_1 + C_2 t)t = C_1 t + C_2 t^2$ (notar que fue necesario multiplicar por t, dado que en el caso de haberse adoptado $C_1 + C_2 t$ el sumando C_1 sería incorrecto dado que forma parte ya de la solución complementaria).

Así, $x'_{1p} = C_1 + 2\,C_2 t$ y $x''_{1p} = 2\,C_2$; luego, reemplazando en $x_1'' + 4x'_1 = -t$ se obtiene $2\,C_2 + 4(C_1 + 2\,C_2 t\ ) = -t$.

Para determinar las constantes, se resuelve el sistema $\begin{cases} 2\,C_2 + 4C_1 = 0 \\ 8\,C_2 = -1 \end{cases}$; luego: $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{16} \\ C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$.

Entonces:

$$x_1(t) = A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2$$

Introduciendo ésta en $x_2' = 4x_1 - 3x_2$ se lleva a la ecuación diferencial lineal de primer orden $x_2' + 3x_2 = 4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2$.

Siendo $P(t) = 3$ y $Q(t) = 4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2$ y utilizando:

$$x_2 = e^{-\int 3dt}\left[C + \int e^{\int 3dt}\left(4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right)dt\right] =$$

$$= e^{-3t}\left[C + \int e^{3t}\left(4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right)\right] =$$

$$= e^{-3t}\left[C + \int \left(4Ae^{3t} + 4Be^{-t} + \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{2}t^2e^{3t}\right)\right]$$

Resolviendo la integral es posible llegar a:

$$x_2 = e^{-3t}\left[C + \frac{4}{3}Ae^{3t} - 4Be^{-t} - \frac{1}{36}e^{3t} + \frac{1}{12}e^{3t}t - \frac{1}{27}e^{3t} + + \frac{1}{9}e^{3t}t - \frac{1}{6}e^{3t}t^2\right]$$

Simplificando:

Bercossi, Pastorelli, Casco

$$x_2 = e^{-3t}C + \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2$$

Para obtener x_3 es posible reemplazar los resultados anteriores en $x'_3 = -x''_1 - x'_1 + x'_2$.

Luego:

$$x'_3 = \frac{55}{144} + 4\,Be^{-4t} - 3Ce^{-3t} - \frac{t}{12}$$

Resolviendo esta ecuación de variables separables se tiene:

$$x_3(t) = \frac{55}{144}t - Be^{-4t} + Ce^{-3t} - \frac{t^2}{24} + D$$

Notar que hasta aquí parecen ser 4 las constantes. Se sabe que en realidad son 3. La cuarta, D, es seguro una combinación lineal de las anteriores. Para obtenerla, simplemente se reemplazan las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ obtenidas en el sistema. Reemplazando en $x'_1 = -x_1 + x_2 - x_3$ se tendrá:

$$-4Be^{-4t} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}t =$$

$$= -\left(A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2\right) + \left(e^{-3t}C + \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2\right) -$$

$$-\left(\frac{55}{144}t - Be^{-4t} + Ce^{-3t} - \frac{t^2}{24} + D\right)$$

Operando en el segundo miembro y agrupando términos comunes:

$$-4Be^{-4t} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}t = -\frac{7}{108} + \frac{A}{3} - D - 4Be^{-4t} - \frac{t}{4}$$

Luego, $\frac{1}{16} = -\frac{7}{108} + \frac{A}{3} - D$; por lo que $D = -\frac{55}{432} + \frac{A}{3}$.

Finalmente, el conjunto solución es:

$$x_1(t) = A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2$$

$$x_2(t) = \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} + e^{-3t}C - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2$$

$$x_3(t) = \frac{A}{3} - Be^{-4t} + Ce^{-3t} + \frac{55}{144}t - \frac{t^2}{24} - \frac{55}{432}$$

Se deja como ejercicio verificar la solución.

Habrá notado el lector, a partir de los ejemplos, que este procedimiento resulta muy laborioso, lo que justifica indagar en un método más eficiente y sistemático para resolver sistemas similares a éste. Se tratará el mismo problema en la subsección 3.2. con el uso del

Bertossi, Pastorelli, Casco

álgebra lineal.

3.2. Resolución de SL EDO usando matriz exponencial: uso del Álgebra Lineal.

3.2.1. Sistemas Homogéneos.

Suponer el sistema:

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \cdots\ \cdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in R$ (aunque podrían ser funciones continuas, sólo se trabajará con constantes reales). El mismo se puede escribir de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o en su forma vectorial:

$$\overrightarrow{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t)$$

Si $\vec{x}(t) = \{x_1(t);\ x_2(t);\ \ldots;\ x_n(t)\}$ son soluciones del sistema $\overrightarrow{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t)$ y, además, el conjunto es linealmente independiente, se lo denomina **conjunto fundamental de soluciones**.

Observar la similitud de $\overrightarrow{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t)$ con la ecuación de Abel $x'(t) = a\, x(t)$, la que tiene por solución desarrollando en serie:

$$x(t) = C\ e^{a\,t} = C\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{a^nt^n}{n!} + \cdots\right)$$

El segundo teorema de esta sección mostrará que una expresión similar es la solución del sistema de EDO.

Matriz exponencial.

Se comenzará por la definir conceptos necesarios del álgebra lineal. Sea la matriz cuadrada A, se denomina matriz exponencial a la matriz:

$$e^{A_s} = I + A_s + \frac{1}{2!}{A_s}^2 + \frac{1}{3!}{A_s}^3 + \cdots + \frac{1}{n!}{A_s}^n + \cdots$$

Luego:

$$e^{A_s t} = I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 3:

Calcular $e^0 = e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$.

RESOLUCIÓN:

$$e^0 = I + 0 + \frac{1}{2!}(0)^2 + \frac{1}{3!}(0)^3 + \cdots = I$$

Adoptando $A^0 = I$ la anterior permite escribir $e^{A_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {A_s}^n$ y $e^{A_s t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {A_s}^n t^n$.

EJEMPLO 4:

Siendo $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ mostrar que $e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}\,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}\,t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}\,t} \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN:

En el caso que A_s sea una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, calcular e^{Dt} es un problema sencillo, dado que:

$$D^n = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} {a_{11}}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {a_{22}}^n & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {a_{nn}}^n \end{pmatrix}$$

Luego:

$$e^{Dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(Dt)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} {a_{11}}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {a_{22}}^n & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {a_{nn}}^n \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_{11}t)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_{22}t)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(a_{22}t)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}\,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}\,t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}\,t} \end{pmatrix}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Teorema 1: *Convergencia de la matriz exponencial* $e^{A_s t}$.

H) $e^{A_s t} = I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A_s t)^n$

T) $\mathbf{e}^{A_s \mathbf{t}}$ es convergente para todo t.

Sin demostración.■

Teorema 2: *Solución general de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales; forma matricial.*

H) $A_s \in R^{n\times n}$; con coeficientes reales

$\vec{x}(t)$ función vectorial derivable sobre R^n

$\vec{K} \in R^n$ cuyas componentes son constantes cualquiera

T) $\vec{X}(t) = e^{At}\,\vec{K}$ es solución de $\vec{x}'(t) = A_s\,\vec{x}(t)$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Demostración:

Por hipótesis:

$$e^{A_s t} = I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_s^n t^n$$

Usando el teorema que expresa que una serie de potencias puede derivarse término a término sin que por ello cambie su radio de convergencia, se tiene:

$$\frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \frac{d(e^{A_s t})}{dt}\vec{K} = \frac{d\left(I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots\right)}{dt}\vec{K} =$$

$$= \frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}{A_s}^n t^n\,\vec{K} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n!}{A_s}^n t^n\right)\vec{K} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}{A_s}^n t^{n-1}\,\vec{K}$$

Notar que la derivada del primer término de la serie $\left(\frac{dI}{dt}\right)$ es nulo, de allí que la última sumatoria comience desde $n = 1$. Haciendo algunas simplificaciones se tiene:

$$\frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1!}{A_s}^n t^{n-1}\vec{K} \underbrace{=}_{\substack{cambiando\\ n-1=m}} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}{A_s}^{m+1} t^m \vec{K}$$

$$\frac{d\left(e^{A_s t}\vec{K}\right)}{dt} \underbrace{=}_{\substack{Usando\\ {A_s}^{m+1}=A_s\,{A_s}^m}} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}A_s\,{A_s}^m t^m\,\vec{K}$$

$$\frac{d(e^{A_s t}\vec{K})}{dt} \underbrace{=}_{\substack{Sacando\ \ factor\ común \\ las\ matriz\ As\ y\ extrayéndola \\ fuera\ de\ la\ sumatoria;\ ídem\ \vec{K}}} A_s\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}{A_s}^m t^m\right)\vec{K} \underbrace{=}_{\substack{Usando\ la \\ definición\ de \\ matriz\ exponencial}} A_s\, e^{A_s\, t}\,\vec{K}$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{e^{A_s\, t}\vec{K}}_{\vec{X}(t)}\right) = A_s\ \underbrace{e^{A_s\, t}\vec{K}}_{\vec{X}(t)}$$

Lo que prueba que $\vec{X}(t)$ es la solución general de la ecuación $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t)$.

Observaciones:

Si se conoce la condición inicial $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \vec{x_0}$ se puede determinar fácilmente el valor de $\vec{K}$ pues $\vec{x_0} = \vec{x}(0) = \mathbf{e}^{A_s 0}\vec{K} = I\vec{K} = \vec{K}$. De forma similar, mostrar la segunda afirmación del teorema 3.

Teorema 3: *Solución particular de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales; forma matricial.*

La solución particular de $\begin{cases} \vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) \\ \vec{x}(0) = \vec{x_0} \end{cases}$ es $\vec{X}(t) = e^{A_s t}\,\vec{x_0}$

y la de $\begin{cases} \vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) \\ \vec{x}(t_i) = \vec{x_i} \end{cases}$ es $\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_i)}\vec{x_i}$

Este teorema da el procedimiento para encontrar la solución particular del sistema $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t)$ si se conoce la condición inicial $\vec{x}(0)$.

El método se reduce a calcular la matriz $e^{A_s t}$, denominada **matriz fundamental del sistema** o **solución matricial fundamental**. La complejidad de la determinación $e^{A_s t}$ depende de A_s.

Por orden de complejidad, se tratarán los tres casos posibles:

1) A_s es diagonal.

2) A_s no es diagonal, pero es diagonalizable.

3) A_s no es diagonalizable.

Bertossi, Pastorelli, Casco

3.2.1.1. A_s es diagonal.

La solución es $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{a_{11}\,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}\,t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}\,t} \end{pmatrix}\vec{K}$

EJEMPLO 5:

Obtener la solución general del sistema $S = \begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -x_2 \\ x_3' = 0 \end{cases}$ y la particular sabiendo que $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

RESOLUCIÓN:

En forma matricial, S es:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La solución general es:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\,t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\,t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{2\,t} \\ Be^{-\,t} \\ C \end{pmatrix}$$

Y la particular:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2\,t} \\ 4e^{-\,t} \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.2.1.2. A_s no es diagonal, pero es diagonalizable.

Tampoco es difícil utilizar el teorema 3 si la matriz A_s es diagonalizable, esto es, existe la matriz invertible C tal que $A_s = CDC^{-1}$.

Bajo estas condiciones:

$$A_s{}^n = C\,D^n C^{-1} \quad \text{y} \quad (A_s t)^n = C\,(Dt)^n C^{-1}$$

$$e^{A_s t} = I + A_s t + \frac{1}{2!}(A_s t)^2 + \frac{1}{3!}(A_s t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(A_s t)^n + \cdots$$

Reescribiendo:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$e^{A_s t} = CIC^{-1} + CDtC^{-1} + C\frac{(Dt)^2}{2!}C^{-1} + C\frac{(Dt)^3}{3!}C^{-1} + \cdots + \ C\frac{(Dt)^n}{n!}C^{-1} + \cdots$$

Notando que cada sumando de la serie tiene como primera matriz del producto a C y última a C^{-1}, se extraen de ellas como factores comunes:

$$e^{A_s t} = C\left[I + D\,t + \frac{1}{2!}(Dt)^2 + \frac{1}{3!}(Dt)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(Dt)^n + \cdots\right]C^{-1}$$

$$e^{A_s t} = \ C\,e^{Dt}C^{-1}$$

Luego:

$$\vec{X}(t) = C\begin{pmatrix} e^{a_{11}\,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}\,t} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}\,t} \end{pmatrix}C^{-1}\vec{K}$$

EJEMPLO 6:

Dado el sistema $S = \begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 2\,x_2 \end{cases}$, obtener:

a) La solución matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular, tal que $x_1(0) = 6$ y $x_2(0) = 7$.

d) la solución particular, tal que $x_1(1) = 0$ y $x_2(-1) = 3$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial de S es:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A_s son tales que:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 9 - \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Para determinar los autovectores se resuelve $A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$.

Luego:

$$\lambda_1 = -3 \ \Rightarrow \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(notar que } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{)}$$

$$\lambda_2 = 3 \ \Rightarrow \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{(notar que } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\text{)}$$

Con estos datos es posible diagonalizar A_s según $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

Bertossi, Pastorelli, Casco

a) $e^{A_s t} = C\, e^{Dt} C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$e^{A_s t} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5e^{-3t} + e^{3t} & -e^{-3t} + e^{3t} \\ -5e^{-3t} + 5e^{3t} & e^{-3t} + 5e^{3t} \end{pmatrix}$$

b) La solución general es $\vec{X}(t) = e^{A_s t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) \\ A\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) \end{pmatrix}$.

c) La solución particular se obtiene planteando $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{13}{6}e^{3t} \\ -\frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{65}{6}e^{3t} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{13}{6}e^{3t} \\ X_2 = -\frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{65}{6}e^{3t} \end{cases}$$

d) Del ítem b: $\begin{cases} X_1(t) = A\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) \\ X_2(t) = A\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) \end{cases}$

Usando las condiciones iniciales $\begin{cases} X_1(1) = 0 = A\left(\frac{5}{6}e^{-3} + \frac{1}{6}e^{3}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3} + \frac{1}{6}e^{3}\right) \\ X_2(-1) = 3 = A\left(-\frac{5}{6}e^{3} + \frac{5}{6}e^{-3}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{3} + \frac{5}{6}e^{-3}\right) \end{cases}$

Resolviendo este sistema se obtendrá $A = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}$ y $B = \frac{18e^3}{5+e^6}$, por lo que la solución será:

$$X_1(t) = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + \frac{18e^3}{5+e^6}\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right)$$

$$X_2(t) = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + \frac{18e^3}{5+e^6}\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right)$$

Nota: $X_1(t)$ y $X_2(t)$ podrían simplificarse si se continúa operando. Queda como ejercicio resolver este sistema usando el método de eliminación, debiendo llegar al mismo resultado.

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 7:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, determinar:

a) La matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -1$.

d) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(\pi) = 0$.

RESOLUCIÓN:

a) En este caso los autolvalores son complejos ya que $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm i$.

El espacio propio es $gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2-i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

La matriz A_s es diagonalizable según $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$e^{A_s t} = C\, e^{Dt} C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{5i}{2} & \frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}$$

Reemplazando $e^{it} = cos(t) + i\, sen(t)$ y $e^{-it} = cos(-t) + i\, sen(-t) = \cos(t) - i\, sen(t)$:

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) + i\, sen(t) & 0 \\ 0 & cos(t) - i\, sen(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{5i}{2} & \frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, simplificando el producto matricial anterior:

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen\,(t) & -sen(t) \\ 5\, sen\,(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = e^{A_s t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, cos(t) + 2A\, sen(t) - B\, sen(t) \\ 5A\, sen(t) + B\, cos(t) - 2B\, sen(t) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} A\, cos(t) + (2A - B)\, sen(t) \\ (5A - 2B)\, sen(t) + B\, cos(t) \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(t) + 3\, sen(t) \\ 7\, sen(t) - cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = cos(t) + 3\, sen(t) \\ X_2 = 7\, sen(t) - cos(t) \end{cases}$

d) $\begin{cases} A = 1 \\ -B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = cos(t) + 2\, sen(t) \\ X_2 = 5\, sen(t) \end{cases}$

Bertossi, Pastorelli, Casco

3.2.1.3. La matriz A_s no es diagonalizable.

Aquí es necesario recurrir a la forma canónica de Jordan de la matriz $\boldsymbol{A_s}$. Así, puede mostrarse existe la matriz $\boldsymbol{J}$ tal que $\boldsymbol{A_s = C\,J\,C^{-1}}$.

Se tratará sólo el caso $\boldsymbol{A_s} \in \boldsymbol{R^{2\times 2}}$, no diagonalizable. El polinomio característico tiene dos raíces iguales $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{A_s}$ tiene un único autovector $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$. Se demuestra en cursos avanzados de Álgebra Lineal que el segundo vector columna de $\boldsymbol{C}$ se obtiene de la ecuación $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{A_s} - \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I})\,\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$. Este sistema tiene infinitas soluciones; se debe adoptar una no nula. Además, $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$, y $\boldsymbol{e^{Jt}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e^{\lambda t}} & \boldsymbol{t\,e^{\lambda t}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e^{\lambda t}} \end{pmatrix}$.

Finalmente, $\boldsymbol{e^{A_s t}} = \boldsymbol{C\,e^{Jt}C^{-1}}$. Luego, $\vec{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C\,e^{Jt}C^{-1}}\vec{\boldsymbol{K}}$

EJEMPLO 8:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, determinar:

a) La matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -2$.

RESOLUCIÓN:

Aquí, los autovalores son iguales, ya que $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 8 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1$.

Para calcular $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}}$ se resuelve la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = -1\,\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \;\Longrightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Para calcular $\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$ se resuelve la ecuación usando $\boldsymbol{\lambda = -1}$:

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -2 \\ 8 & -5+1 \end{pmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Longrightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\boldsymbol{A_s}$ se reescribe bajo la forma de Jordan:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) $$\boldsymbol{e^{A_s t}} = \boldsymbol{C\,e^{Jt}C^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} + 4te^{-t} & -2te^{-t} \\ 8te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e^{A_s t}}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(e^{-t} + 4te^{-t}) - 2B\,te^{-t} \\ A8te^{-t} + B(e^{-t} - 4te^{-t}) \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X_1 = Ae^{-t} + (4A - 2B)\,te^{-t} \\ X_2 = Be^{-t} + (8A - 4B)te^{-t} \end{cases}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

c) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = e^{-t} + 8t\, e^{-t} \\ X_2 = 2e^{-t} + 16t\, e^{-t} \end{cases}$

3.2.2. Sistemas No Homogéneos.

Se verá un método para resolver los SL EDO que respondan a la forma $\vec{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$.

Teorema 4:

H) $\vec{x_1}(t)$ y $\vec{x_2}(t)$ son soluciones del sistema no homogéneo $\vec{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ (1)

T) $\vec{x_1}(t) - \vec{x_2}(t)$ es solución del sistema homogéneo $\vec{x'}(t) = A_s \vec{x}(t)$ (2)

Demostración:

Por hipótesis:

$$\vec{x'_1}(t) = A_s\, \vec{x_1}(t) + \vec{f}(t)$$

$$\vec{x'_2}(t) = A_s\, \vec{x_2}(t) + \vec{f}(t)$$

Restando m. a m. estas ecuaciones se tiene:

$$\vec{x'_1}(t) - \vec{x'_2}(t) = A_s\, \vec{x_1}(t) + \vec{f}(t) - (A_s\, \vec{x_2}(t) + \vec{f}(t)) = A_s\, (\vec{x_1}(t) - \vec{x_2}(t))$$

Luego, $\vec{x_1}(t) - \vec{x_2}(t)$ verifica el sistema homogéneo (2).

Esto significa que $\vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{x_c} \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} + \vec{x_c}$. Advierta la similitud del teorema 4 con el teorema 8 desarrollado en la sección II para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Al igual que en su similar, este teorema permite concluir que la solución **general** del sistema no homogéneo (1) puede expresarse como $\vec{X}(t) = \vec{X_c}(t) + \vec{X_p}(t)$, denominando $\vec{X_c}$ a la solución general del sistema homogéneo.

Luego $\vec{x_1}(t) = \vec{X_c}(t) + \vec{x_2}(t)$, lo que se interpreta que cualquier solución del sistema no homogéneo puede expresarse como la suma de la del homogéneo más una propia.

Así la **solución general** del sistema no homogéneo $\vec{x'}(t) = A_s\, \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ será $\vec{X}(t) = \vec{X_c}(t) + \vec{X_p}(t)$, siendo $\vec{X_c}(t) = e^{A_s t}\vec{K}$ y $\vec{X_p}(t)$ una **solución propia**.

Bertossi Pastorelli, Casco

La solución general de $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ es $\vec{X}(t) = e^{A_s\,t}\,\vec{K} + \vec{X_p}(t)$.

Para la determinación de la solución propia $\vec{X_p}(t)$ de un SL EDO de primer orden se demostrará el siguiente teorema:

Teorema 5: *Método de variación de las constantes para determinar la solución propia.*

H) Dada $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$; A_s matriz cuadrada de tamaño n; $\vec{f}(t)$ con funciones componentes continuas.

T) $\vec{X_p}(t) = e^{A_s t}\int e^{-A_s t}\vec{f}(t)\,dt$ es solución propia del sistema no homogéneo.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Demostración:

Por las similitudes mencionadas anteriormente entre los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con las ecuaciones diferenciales lineales no será casual que se utilice el método de *variación de parámetros o de constantes* para determinar $\vec{X_p}(t)$.

Se supondrá entonces que $\vec{X_p}(t) = e^{A_s t}\,\vec{u}(t)$; esto es: se *varía* el vector constante $\vec{K}$ por la función vectorial $\vec{u}(t)$.

Derivando m. a m.:

$$\vec{X'_p} = A_s\,\underbrace{e^{A_s t}\,\vec{u}}_{\vec{X_p}(t)} + e^{A_s t}\,\vec{u}'$$

Así:

$$\vec{X'_p} = A_s\,\vec{X_p} + e^{A_s t}\,\vec{u}' \quad (1)$$

Por otro lado, $\vec{X_p}$ es solución de:

$$\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

Entonces:

$$\vec{X'_p} = A_s\,\vec{X_p} + \vec{f}(t) \qquad (2)$$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2): $e^{A_s t}\,\vec{u}' = \vec{f}(t)$.

Sabiendo que $e^{A_s t}$ es no singular, es posible despejar $\vec{u}' = e^{-A_s t}\vec{f}(t)$, y a partir de ésta calcular $\vec{u}(t) = \int e^{-A_s\,t}\vec{f}(t)\,dt$, siendo entonces la solución propia $\vec{X_p}(t) = e^{A_s t}\int e^{-A_s t}\,\vec{f}(t)\,dt$.

$\vec{X}(t) = e^{A_s t}\,\vec{K} + e^{A_s t}\int e^{-A_s t}\vec{f}(t)\,dt$ es solución general de $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$.

EJEMPLO 9:

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 + e^t \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial es $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$.

Los autovalores de $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ son 6 y 1, dado que ambos son soluciones de:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 0$$

El conjunto de autovectores es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Luego, la diagonalización de la matriz se expresa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

La solución matricial fundamental es:

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} t} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz fundamental es:

$$e^{-A_s t} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = e^{-\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} t} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3e^{-6t} & -2e^{-t} + 2e^{-6t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-6t} & 3e^{-t} + 2e^{-6t} \end{pmatrix}$$

Usando estos datos, la solución complementaria es:

$$\vec{X}_c = e^{A_s t}\,\vec{K} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(2e^t + 3e^{6t}) + B(-2e^t + 2e^{6t}) \\ A(-3e^t + 3e^{6t}) + B(3e^t + 2e^{6t}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_c = \begin{pmatrix} (2A - 2B)e^t + (3A + 2B)e^{6t} \\ (-3A + 2B)e^t + (3A + 2B)e^{6t} \end{pmatrix}$$

Solución propia:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$\vec{X}_p = e^{A_s t} \int e^{-A_s t} \vec{f}(t)\, dt$$

$$\vec{X}_p = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{pmatrix} \int \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3e^{-6t} & -2e^{-t} + 2e^{-6t} \\ -3e^{-t} + 3e^{-6t} & 3e^{-t} + 2e^{-6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{X}_p = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} dt =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2e^t + 3e^{6t} & -2e^t + 2e^{6t} \\ -3e^t + 3e^{6t} & 3e^t + 2e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e^{-5t}}{-5} \\ \frac{e^{-5t}}{-5} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\vec{X} = \vec{X}_c + \vec{X}_p = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} (2A - 2B)e^t + (3A + 2B)e^{6t} \\ (-3A + 3B)e^t + (3A + 2B)e^{6t} \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{(2A - 2B)}{5} e^t + \dfrac{(3A + 2B)}{5} e^{6t} - \dfrac{1}{5} e^t \\ X_2 = \dfrac{(-3A + 3B)}{5} e^t + \dfrac{(3A + 2B)}{5} e^{6t} - \dfrac{1}{5} e^t \end{cases}$$

Bertossi, Fortorelli, Castro

EJEMPLO 10:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$, determinar su solución general.

RESOLUCIÓN:

Del *Ejemplo 7* resuelto en sistemas homogéneos se sabe que:

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-5i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{5i}{2} & \frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen\,(t) & -sen(t) \\ 5\, sen(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix}$$

Solución complementaria:

$$\vec{X}_c = e^{A_s t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_c = \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen\,(t) & -sen(t) \\ 5\, sen(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\, cos(t) + (2A - B)\, sen(t) \\ (5A - 2B)\, sen(t) + B\, cos(t) \end{pmatrix}$$

Solución propia:

$$\vec{X}_p = e^{A_s t} \int e^{-A_s t} \vec{f}(t)\, dt$$

$$\vec{X}_p =$$
$$= \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen(t) & -sen(t) \\ 5\, sen(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} cos(t) - 2\, sen(t) & sen(t) \\ -5\, sen(t) & cos(t) + 2\, sen\,(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen(t) & -sen(t) \\ 5\, sen(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -cos(t) + 4\, sen\,(t) + t\, sen(t) \\ 10\, sen(t) + t\, cos(t) + 2t\, sen(t) \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} cos(t) + 2\, sen(t) & -sen(t) \\ 5\, sen(t) & cos(t) - 2\, sen(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -sen(t) - (4+t)\cos(t) \\ (2+t)\, sen(t) - (9+2t)\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} -4 - t \\ -9 - 2t \end{pmatrix}$$

Solución general:

$$\vec{X} = \vec{X}_c + \vec{X}_p$$

$$\vec{X} = \vec{X}_c + \vec{X}_p = \begin{pmatrix} A\, cos(t) + (2A - B)\, sen(t) \\ (5A - 2B)\, sen(t) + B\, cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 - t \\ -9 - 2t \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{cases} X_1 = A\, cos(t) + (2A - B)\, sen\,(t) - 4 - t \\ X_2 = (5A - 2B)\, sen(t) + B\, cos(t) - 9 - 2t \end{cases}$$

Bertossi, Pastorelli, Cosco

Si se quiere resolver el sistema no homogéneo $\vec{x}'(t) = A_s\, \vec{x}(t) + \vec{f}(t)$ con valor inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x_0}$, no es difícil comprobar que la solución será:

$$\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_o)}\, \vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{-A_s(t-s)}\, \vec{f}(s) ds \qquad (*)$$

Notar que: $e^{-A_s(t-s)} = e^{-A_s t}\, e^{A_s s}$.

Entonces:

$$\int_{t_0}^{t} e^{-A_s t}\, e^{A_s s}\, \vec{f}(s) ds = e^{-A_s t} \int_{t_0}^{t} e^{A_s s}\, \vec{f}(s) ds$$

ya que $e^{-A_s t}$ es una constante para la integral.

Así:

$$\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_o)}\, \vec{x_0} + e^{A_s t} \int_{t_0}^{t} e^{-A_s s}\, \vec{f}(s) ds$$

Si se deriva m. a m. se tiene, usando las reglas de derivación de la exponencial y la de un producto:

$$\vec{X}'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{A_s(t-t_o)}\right)\vec{x_0} + \frac{d}{dt}\left(e^{A_s t}\right)\int_{t_0}^{t} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds \;+\; e^{A_s t}\;\frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds\right)$$

Por el teorema fundamental de las integrales definidas $\frac{d}{dt}\int_{t_o}^{t} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds = e^{-A_s t}\,\vec{f}(t)$

$$\vec{X}'(t) = A_s\, e^{A_s(t-t_o)}\vec{x_0} + \; A_s\, e^{A_s t}\int_{t_0}^{t} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds + e^{A_s t}e^{-A_s t}\,\vec{f}(t)$$

Sacando como factor común la matriz A_s entre los dos primeros sumandos y considerando que la inversa de $e^{A_s t}$ es $e^{-A_s t}$:

$$\vec{X}'(t) = A_s\underbrace{\left(e^{A_s(t-t_o)}\vec{x_0} + \; e^{A_s t}\int_{t_0}^{t} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds\right)}_{\vec{X}(t)} + I\vec{f}(t)$$

$$\vec{X}'(t) = A_s\,\vec{X}(t) + \vec{f}(t)$$

Luego, verifica la ecuación:

$$\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \; \vec{f}(t)$$

Si se evalúa $\vec{X}(t)$ en t_0:

$$\vec{X}(t_0) = e^{A_s(t_0-t_o)}\,\vec{x_0} \;+\; e^{-A_s t_0}\underbrace{\int_{t_0}^{t_0} e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds}_{\substack{=0 \\ \textit{dado que la longitud del intervalo} \\ \textit{de integración es nulo}}} = \underbrace{e^0}_{I}\,\vec{x_0} \;+\; e^{-A_s\, t_0}\,\mathbf{0} = \vec{x_0}$$

$\vec{X}(t_0) = \vec{x_0}$ verifica la ecuación $(*)$.

La solución de la ecuación con valor inicial $\begin{cases}\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0}\end{cases}$ es

$$\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_o)}\,x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A_s(t-s)}\,\vec{f}(s)ds$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 11:

Dado el sistema del *Ejemplo 10*: $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$, expresar simbólicamente:

a) La solución si $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -1$.

b) La solución propia si $x_1(\pi) = 1$ y $x_2(\pi) = 0$.

RESOLUCIÓN:

a) $t_o = 0\,;\ \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Luego:

$$\vec{X}(t) = e^{A_s t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{A_s t}\int_0^t e^{-A_s s}\,\vec{f}(s)ds$$

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -4 - t + 5\,cos(t) + 2\,sen(t) \\ -9 - 2t + 9\,sen(t) + 8\,cos(t) \end{pmatrix}$$

b) $t_o = \pi\,;\ \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Luego:

$$\vec{X}(t) = e^{A_s(t-\pi)}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{A_s t}\int_\pi^t e^{-A_s\,s}\,\vec{f}(s)ds$$

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -4 - t - (5+\pi)cos(t) - sen(t) \\ -9 - 2t - (9+2\pi)cos(t) - (7+\pi)sen(t) \end{pmatrix}$$

Nota: Los cálculos se realizaron utilizando un SAC.

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\,sen(t) & -sen\,(t) \\ 5\,sen(t) & cos(t) - 2\,sen(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 2\,sen(t) & sen(t) \\ -5\,sen(t) & cos(t) + 2\,sen(t) \end{pmatrix}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 12:

Resolver el sistema $\begin{cases} x'_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_2 = 4x_1 - 3x_2 \\ x'_3 = x_1 - 3x_3 + t \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Primero se resolverá el sistema homogéneo. La diagonalización de la matriz arroja el

resultado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Así:

$$e^{A_s t} = C\, e^{Dt} C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

La solución complementaria es:

$$\overrightarrow{X_c}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_c = e^{A_s t} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3A + B - C) + \frac{1}{4}(A - B + C)e^{-4t} \\ \frac{1}{3}(3A + B - C) - (A - B + C)e^{-4t} + \frac{1}{3}(-B + 4C)e^{-3t} \\ \frac{1}{12}(3A + B - C) - \frac{1}{4}(A - B + C)e^{-4t} + \frac{1}{3}(-B + 4C)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Notar que, sin perder generalidad, cambiando la expresión de las constantes:

$$K_1 = \frac{1}{4}(3A + B - C)$$

$$K_2 = \frac{1}{4}(A - B + C)$$

$$K_3 = \frac{1}{3}(-B + 4C)$$

La solución anterior se puede expresar en forma más sencilla:

$$\overrightarrow{X_c}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} K_1 + K_2\, e^{-4t} \\ \frac{4}{3}K_1 - 4K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} \\ \frac{K_1}{3} - K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Para determinar la solución propia se resuelve la ecuación $\overrightarrow{X_p} = e^{A_s t} \int e^{-A_s t} \vec{f}(t)\, dt$.

Recordando la propiedad de la matriz exponencial *"siendo* $e^{A_s t} = C\, e^{Dt} C^{-1}$ *entonces su inversa es* $(e^{A_s t})^{-1} = e^{-A_s t} = C\, e^{-Dt} C^{-1}$*; esto es, los autovalores son recíprocos, y sus autovectores no cambian"*

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$e^{-A_s t} = C\, e^{-Dt} C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$e^{-A_s t}\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$e^{-A_s t}\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{4} + \frac{1}{4} t\, e^{4t} \\ -\frac{t}{3} + \frac{4}{3} t\, e^{3t} - t\, e^{4t} \\ -\frac{t}{12} + \frac{4}{3} t e^{3t} - \frac{1}{4} t e^{4t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\vec{X_p} = e^{A_s\, t} \int e^{-A_s\, t}\vec{f}(t)\, dt$$

$$\vec{X_p} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}}_{e^{At}} \int \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{t}{4} + \frac{1}{4} t\, e^{4t} \\ -\frac{t}{3} + \frac{4}{3} t\, e^{3t} - t\, e^{4t} \\ -\frac{t}{12} + \frac{4}{3} t e^{3t} - \frac{1}{4} t e^{4t} \end{pmatrix}}_{e^{-At}\vec{f}(t)} dt$$

$$\vec{x_p} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{64} + \frac{t}{16} - \frac{t^2}{8} \\ -\frac{37}{432} + \frac{7t}{36} - \frac{t^2}{6} \\ -\frac{229}{1728} + \frac{55t}{144} - \frac{t^2}{24} \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\vec{X_p} = \vec{X_p} + \vec{X_c}(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 + K_2\, e^{-4t} \\ \frac{4}{3} K_1 - 4K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} \\ \frac{K_1}{3} - K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{64} + \frac{t}{16} - \frac{t^2}{8} \\ -\frac{37}{432} + \frac{7t}{36} - \frac{t^2}{6} \\ -\frac{229}{1728} + \frac{55t}{144} - \frac{t^2}{24} \end{pmatrix}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Luego, la solución es:

$$\begin{cases} x_1(t) = K_1 + K_2\, e^{-4t} - \dfrac{1}{64} + \dfrac{t}{16} - \dfrac{t^2}{8} \\ x_2(t) = \dfrac{4}{3}K_1 - 4K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} - \dfrac{37}{432} + \dfrac{7}{36}t - \dfrac{t^2}{6} \\ x_3(t) = \dfrac{K_1}{3} - K_2\, e^{-4t} + K_3 e^{-3t} - \dfrac{229}{1728} + \dfrac{55}{144}t - \dfrac{t^2}{24} \end{cases}$$

Resta verificar la solución y compararla con la obtenida por el método de eliminación (las que en una primera mirada podrían parecer distintas).

Solución lograda por método de eliminación en el *Ejemplo 2*:

$$\begin{cases} x_1(t) = A + Be^{-4t} + \dfrac{1}{16}t - \dfrac{1}{8}t^2 \\ x_2(t) = \dfrac{4}{3}A - 4Be^{-4t} + e^{-3t}C - \dfrac{7}{108} + \dfrac{7}{36}t - \dfrac{1}{6}t^2 \\ x_3(t) = \dfrac{A}{3} - Be^{-4t} + Ce^{-3t} + \dfrac{55}{144}t - \dfrac{t^2}{24} - \dfrac{55}{432} \end{cases}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Los ejemplos desarrollados en esta sección usando el álgebra lineal seguramente plantean interrogantes al lector. Uno de ellos es que las fórmulas demostradas requieren tediosos cálculos entre matrices, especialmente si éstas son de orden mayor que 2. Sin embargo, ésta es muy útil ya que los cálculos pueden eludirse al traducirlos en un algoritmo sencillo de programar en un sistema algebraico de cómputos.

Otro interrogante es que dicha fórmula sólo permite resolver el problema si las condiciones iniciales con las que se cuenta valorizan todas las incógnitas (compontes de $\vec{X}$) en el mismo valor de t_o. Si se conocen los valores iniciales de las componentes (o incluso de una derivada) en distintos valores de la variable, el problema se resuelve determinando primero la solución general, para luego encontrar las constantes. El siguiente ejemplo ilustra tal situación.

EJEMPLO 13:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$, expresar simbólicamente:

a) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(\pi) = 0$.

b) La solución particular si $x'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ y $x_2(0) = 1$.

RESOLUCIÓN:

La solución general de S es $\begin{cases} X_1 = A\cos(t) + (2A - B)\,sen(t) - 4 - t \\ X_2 = (5A - 2B)\,sen(t) + B\cos(t) - 9 - 2t \end{cases}$ (resuelto ya en el

Ejemplo 10). Usando este resultado y los datos para cada ítem:

a) $\begin{cases} X_1(0) = 1 = A\cos(0) + (2A - B)\,sen\,(0) - 4 - 0 \quad = A - 4 \\ X_2(\pi) = 0 = (5A - 2B)\,sen(\pi) + B\cos(\pi) - 9 - 2\pi = -B - 9 - 2\pi \end{cases}$

Queda así planteado el sistema $\begin{cases} A = 5 \\ B = -9 - 2\pi \end{cases}$ (en este caso ya resuelto). Reemplazando los valores de los parámetros hallados:

$$\begin{cases} X_1(t) = 5\cos(t) + (19 + 2\pi)\,sen(t) - 4 - t \\ X_2(t) = (43 + 4\pi)\,sen(t) - (9 + 2\pi)\,\cos(t) - 9 - 2t \end{cases}$$

b) $X_1'(t) = -A\,sen(t) + (2A - B)\cos(t) - 1$

$$\begin{cases} X_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 = -A\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + (2A - B)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -A - 1 \\ X_2(0) = 1 = (5A - 2B)\,sen(0) + B\cos(0) - 9 - 2(0) = B - 9 \end{cases}$$

Resolviendo $\begin{cases} A = 0 \\ B = 10 \end{cases}$.

Reemplazando los valores de los parámetros hallados:

$$\begin{cases} X_1(t) = -10\,sen(t) - 4 - t \\ X_2(t) = -20sen(t) + 10\cos(t) - 9 - 2t \end{cases}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Ejercitación propuesta

Utilizando los dos métodos (eliminación y matricial) resolver los sistemas planteados.

1. *Dado S:* $\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = -3\,x_1 - x_2 \end{cases}$; *siendo* $x_1(0) = 1;\ x_2(0) = 0$

   a) *Dar la matriz fundamental.*

   b) *Resolver el sistema.*

Rta: a) $A_s = \begin{pmatrix} cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) & \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) & cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$

Rta: b) $\begin{cases} x_1 = cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) \\ x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t) \end{cases}$

2. *Dado S* $\begin{cases} x'_1 = k_1 x_1 \\ x'_2 = k_1 x_1 + k_2 \end{cases}$; *siendo* k_1 *y* k_2 *constantes distintas.*

   a) Dar la solución matricial fundamental.

   b) Resolver el sistema.

Rta: a) $\begin{pmatrix} e^{k_1 t} & 0 \\ -1 + e^{k_1 t} & 1 \end{pmatrix}$

Rta: b) $\begin{cases} x_1 = Ae^{k_1 t} \\ x_2 = k_2 t + e^{k_1 t} A + B \end{cases}$

3. *Dado S:* $\begin{cases} x'_1 = x_1 + 8x_2 + sen(t) \\ x'_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$; *siendo* $x_1(0) = 0$; $x_2(0) = 1$

   a) Dar la matriz fundamental.

   b) Resolver S.

Rta: a) $\begin{pmatrix} \frac{e^{-3t} + 2\,e^{3t}}{3} & \frac{-4e^{-3t} + 4e^{3t}}{3} \\ \frac{-e^{-3t} + e^{3t}}{6} & \frac{2\,e^{-3t} + e^{3t}}{3} \end{pmatrix}$

Rta: b) $\begin{cases} x_1 = -\frac{13}{10}\,e^{-3t} + \frac{7}{5} e^{3t} - 0{,}1\,cos(t) - 0{,}1 sen(t) \\ x_2 = \frac{13}{20}\,e^{-3t} + \frac{7}{20}\,e^{3t} - 0{,}1 sen(t) \end{cases}$

4. *Dado el sistema* $\begin{cases} x'_1 = -4x_1 - x_2 \\ x'_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$ *(necesita usar forma de Jordan)*

Bertossi, Pastorelli, Casco

a) *Calcular la solución general.*

b) *Mostrar que* $\{x_1(t); x_2(t)\} = \{(1-t)e^{-3t}; te^{-3t}\}$ *es solución*

Rta: a) $\begin{cases} x_1 = Ae^{-3t} - (A+B)t\, e^{-3t} \\ x_2 = B\, e^{-3t} \quad + (A+B)te^{-3t} \end{cases}$

Rta: b) $A = 1; B = 0$

5. *Encontrar la solución general de* $\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - x_2 + e^{-3t} \\ x'_2 = 5\, x_1 - 2x_2 \end{cases}$ *(autovalores imaginarios)*

Rta: $\begin{cases} x_1 = -0{,}1\, e^{-3t} \ + A\, cos(t) + (2A - B)sen(t) \\ x_2 = 0{,}5\, e^{-3t} \quad + B\, cos(t) + (5A - 2B)sen(t) \end{cases}$

6. *Dado S:* $\begin{cases} x'_1 = 7x_1 - 2x_2 \\ x'_2 = 10\, x_1 - x_2 \end{cases}$ *(autovalores complejos). Calcular:*

a) *La solución general.*

b) *La solución particular que verifica* $x_1(0) = 0$ *y* $x_2(\pi) = e^{3\pi}$.

Rta: a) $\begin{cases} x_1 = A\, e^{3t}\ \cos(2t) + (2A - B)e^{3t}\, sen\ (2t) \\ x_2 = B\, e^{3t}\ \cos(2t) + (5A - 2B)e^{3t}\, sen\ (2t) \end{cases}$

Rta: b) $Idem\ (a), donde\ A = 0\ y\ B = 1$

7. *Dado S:* $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -4 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. *Calcular:*

a) La solución general.

b) La solución particular siendo $x_1(0) = 0; x'_2(0) = 0; x_3(0) = 3$.

Rta: a) $\begin{cases} x_1 = (4A - 3B + 3C) + (-3A + 3B - 3C)e^t \\ x_2 = (-2A + 2B - 2C)e^t \ + (2A - B + 2C)e^{-t} \\ x_3 = (-4A + 3B - 3C) + (2A - 2B + 2C)e^t \ + (2A - B + 2C)e^{-t} \end{cases}$

Rta: b) $\begin{cases} x_1 = -3 + 3\, e^t \\ x_2 = 2\, e^t \ + 2e^{-t} \\ x_3 = 3 - 2\, e^t \ + 2e^{-t} \end{cases}$

Bertossi, Pastorelli, Casco

SECCIÓN IV

Teoría cualitativa

Bertossi, Pastorelli, Casco

"Parece que uno de los rasgos fundamentales de la naturaleza
es que las leyes físicas fundamentales
se describen en términos de
una teoría matemática de gran belleza y poder,
para comprender la cual se necesita
una norma muy elevada de matemáticas...
Uno quizás pudiera describir la situación diciendo que
Dios es un matemático de orden muy elevado,
y que Él usó matemática muy adelantada
para construir el universo"

Paul Dirac

4. Teoría cualitativa.

En matemática es importante estudiar la estabilidad de las soluciones de ED, es decir, cómo difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales. Dicha estabilidad es muy importante en la ciencia que utilice la ED (por ejemplo, en la Física), ya que, en la realidad, las condiciones iniciales normalmente no se conocen con certeza (datos obtenidos con aparatos de poca precisión), y es importante que pequeños cambios de las mismas no generen comportamientos cualitativos diferentes en la solución encontrada.

Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos es cualitativamente grande se dice que el sistema no presenta estabilidad, y, por supuesto, en ingeniería no se valora positivamente esta situación.

Debido a que toda ED puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales (SED) de primer orden equivalente, el estudio de la estabilidad de las soluciones de ED puede reducirse al estudio de la estabilidad de los SED.

Si bien el análisis se puede hacer para un sistema de $\boldsymbol{n}$ ecuaciones, dado que interesa utilizar características gráficas de la solución, el tratamiento se hará para sistemas con dos incógnitas.

4.1. Estabilidad de los sistemas lineales.

Hasta ahora, el estudio de las ED y SED se ha centrado en el problema de obtener analíticamente las soluciones exponiendo algunos métodos de resolución de ciertos tipos de ecuaciones y sistemas. Interesa ahora dar otro enfoque, esto es, obtener información "cualitativa" sobre el comportamiento de las soluciones. Se usarán ejemplos para caracterizarlo. La solución buscada será interpretada como líneas de flujo de campos de velocidad. Los ejemplos, aún teniendo enunciados similares, arrojarán soluciones muy distintas entre sí. Luego, los resultados obtenidos serán motivo de análisis en la subsección 4.2.

Bertosi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 1: ***Matriz del sistema lineal con autovalores imaginarios puros.***

Determinar la trayectoria que seguirá una partícula que se suelta en el punto $\boldsymbol{P_0(2;0)}$ quedando sujeta al campo de velocidad estacionario o autónomo (estable en el tiempo) $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{4y}\,;-\boldsymbol{x}\,)$.

RESOLUCIÓN:

Dado que $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x}';\ \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{4y}\,;-\boldsymbol{x}\,)$ el problema se resolverá a través del sistema lineal: $\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{4y} \\ \boldsymbol{y}' = -\boldsymbol{x} \end{cases}$, con las condiciones iniciales $\boldsymbol{x(0) = 2};\ \boldsymbol{y(0) = 0}$.

La solución se encontrará resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A_s son $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, mientras que una base del espacio propio es $\left\{\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Diagonalizando:

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La exponencial matricial es:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t\,i} & 0 \\ 0 & e^{-2t\,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(2t) + i\,sen(2t) & 0 \\ 0 & cos(2t) - i\,sen(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} cos(2t) & 2\,sen(2t) \\ -\frac{1}{2}sen\,(2t) & cos(2t) \end{pmatrix}$$

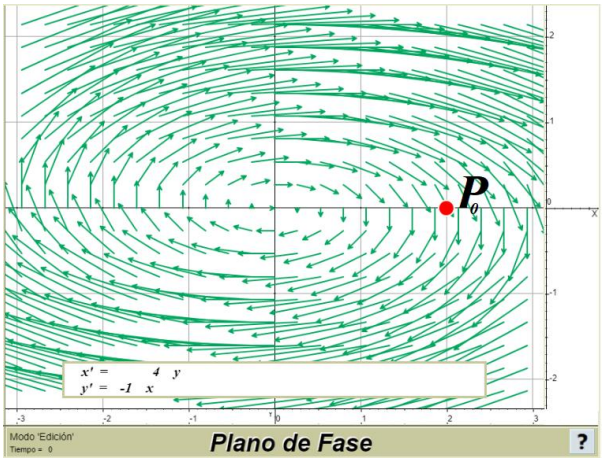
Usando la condición inicial:

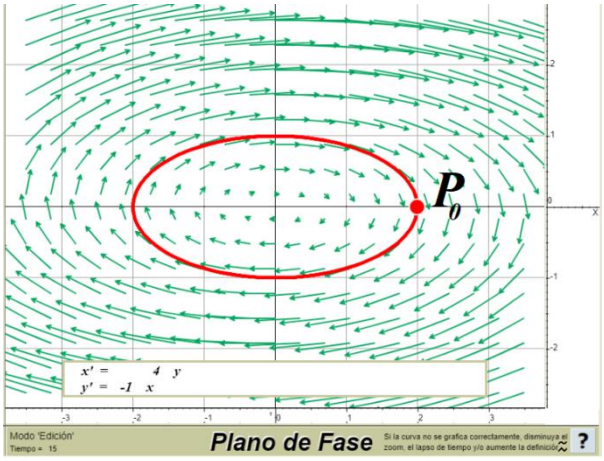
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cos(2t) \\ -sen(2t) \end{pmatrix}$$

La trayectoria es pues:

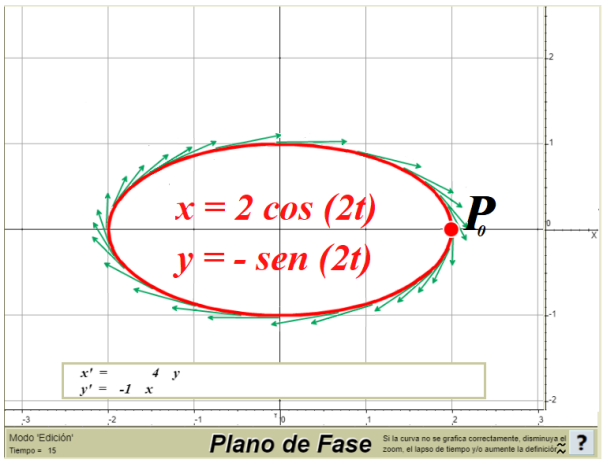
$$\begin{cases} x = 2\,cos(2t) \\ y = -sen\,(2t) \end{cases}$$

Los gráficos siguientes muestran la salida provista por DaVinci del campo de velocidad y la trayectoria solución obtenida. En el último gráfico sólo se graficaron algunos vectores del campo que tienen origen en la trayectoria determinada para que se aprecie claramente la tangencia. También puede realizarse la simulación mediante DaVinci.





Bertossi, Pastorelli, Casco



Notar que si la condición inicial estuviera dada genéricamente por $(x_0; y_0)$ la solución sería:

$$x = x_0\, cos(2t) + 2y_0\, sen(2t); \qquad y = y_0\, cos(2t) - \frac{1}{2} x_0\, sen(2t)$$

Aquí, x e y son funciones de período π (notar que siendo $\lambda = \pm\beta i$ las funciones tienen período $T = \frac{2\pi}{\beta}$). Luego, la línea de flujo será una curva cerrada simple (se deja como ejercicio mostrar que en estos casos es una elipse).

EJEMPLO 2: ***Matriz del sistema lineal con autovalores reales distintos y positivos.***

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(-1; -3)$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v} = (3x - 2y\,; x\,)$.

RESOLUCIÓN:

$\vec{v} = (x';\ y') = (3x - 2y; x\,) \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0) = -1$; $y(0) = -3$.

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -e^{t} + 2e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} & 2e^{t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

Luego:

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^{t} + 4e^{2t} \\ -5e^{t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$x = -5e^{t} + 4e^{2t};\ y = -5e^{t} + 2e^{2t}$$

Notar que a medida que t aumenta, también lo hacen x e y. Si la condición inicial fuera dada genéricamente por $(x_0; y_0)$ la solución será:

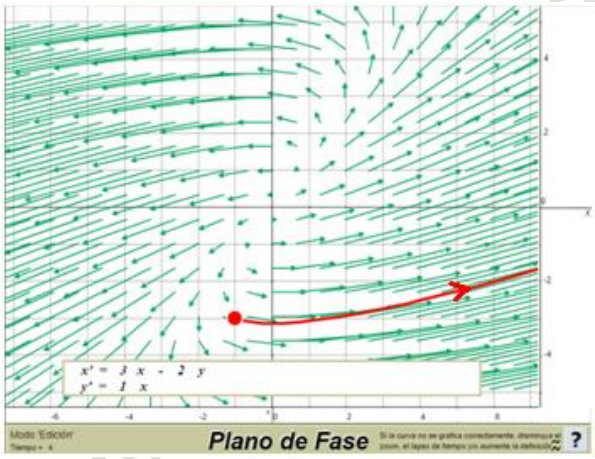
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_o \end{pmatrix}$$

Ésta es:

$$x(t) = (-e^{t} + 2e^{2t})\, x_o + (2\, e^{t} - 2e^{2t})\, y_o$$

$$y(t) = (-e^{t} + e^{2t})\, x_o + (2\, e^{t} - e^{2t})\, y_o$$

Cualquiera sea $(x_0; y_0)$, si $t \to \infty$ entonces $|x| \to \infty$ y $|y| \to \infty$. La partícula se alejará del origen.



EJEMPLO 3: ***Matriz del sistema lineal con autovalores reales distintos y negativos.***

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(1; -2)$ sometida al campo de velocidad estacionario o autónomo $\vec{v} = (-3x + 2y; -x)$.

RESOLUCIÓN:

$\vec{v} = (x'; y') = (-3x + 2y; -x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -x \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1;\ y(0) = -2.$

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$A_s = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} -3t & 2t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\begin{pmatrix} -3t & 2t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{pmatrix}$$

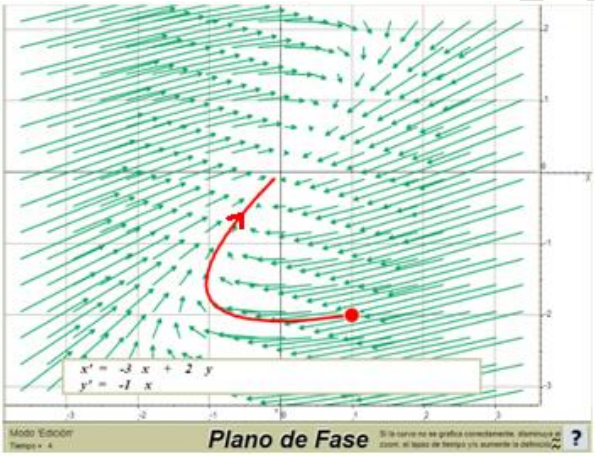
Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -3t & 2t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^{-t} + 6e^{-2t} \\ -5e^{-t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$x = -5e^{-t} + 6e^{-2t}; \quad y = -5e^{-t} + 3e^{-2t}$$

Notar que a medida que t aumenta, tanto x como y tienden a cero.

El lector puede verificar que a idéntica solución se puede llegar para la condición inicial genéricamente $(x_0; y_0)$.



EJEMPLO 4: ***Matriz del sistema lineal con autovalores reales de distinto signo.***

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(1,9\,;\,1)$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v} = (-3x + 4y; -2x + 3y\,)$.

RESOLUCIÓN:

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}, \; x(0) = 1,9 \text{ e } y(0) = 1$$

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$A_s = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

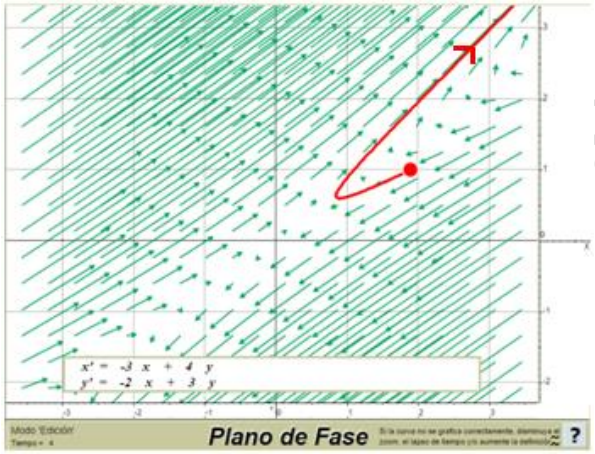
Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{t} & -2e^{-t} + 2e^{t} \\ e^{-t} - e^{t} & -e^{-t} + 2e^{t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1,9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,8\, e^{-t} + 0,1\, e^{t} \\ 0,9\, e^{-t} + 0,1\, e^{t} \end{pmatrix}$$

$$x = 1,8\, e^{-t} + 0,1\, e^{t}; \quad y = 0,9\, e^{-t} + 0,1\, e^{t}$$



Notar que a medida que t aumenta, tanto x e y aumentan en valor absoluto, esto significa que la partícula se aleja del origen.

El lector puede verificar que dependiendo de (x_0, y_0) será el signo de x y de y cuanto $t \to \infty$. Probar con el simulador DaVinci los distintos resultados al mover el punto que representa las condiciones iniciales, los que pueden intuirse viendo el campo.

EJEMPLO 5: ***Matriz del sistema lineal no diagonalizable, autovalores iguales.***

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(0\,;-2)$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v} = (3x - 2y; 8x - 5y)$; y luego a $\vec{v} = (-3x + 2y\,; -8x + 5y)$.

RESOLUCIÓN:

Se debe resolver $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con las condiciones iniciales $x(0) = 0$; $y(0) = -2$.

El lector puede mostrar que la matriz tiene dos autovalores iguales, y que la misma no es diagonalizable. Usando forma de Jordan:

$$A_s = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

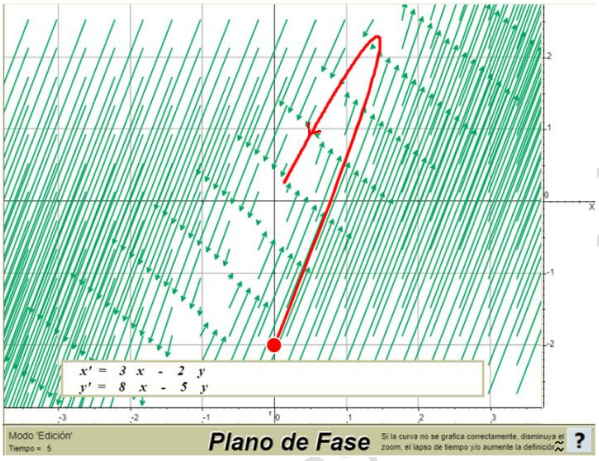
Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 4te^{-t} & -2te^{-t} \\ 8\,te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$x = x_0(e^{-t} + 4te^{-t}) - 2y_0 te^{-t}; \quad y = 8\,x_0 te^{-t} + y_0(e^{-t} - 4te^{-t})$$



Notar que si $t \to \infty$, $(x; y) \to (0; 0)$, situación que se deba a que $\lambda_{1,2}$ es negativo.

Para la condición inicial dada, la línea de fluyo será $x = 4t\,e^{-t}$; $y = -2e^{-t} + 8te^{-t}$, situación que se esquematiza en el gráfico anterior.

Si, por el contrario, el único autovalor de la matriz del sistema es positivo, si $t \to \infty$, se dará que $|x| \to \infty$ e $|y| \to \infty$.

El lector puede verificar esto usando $\vec{v} = (-3x + 2y\,; -8x + 5y\,)$.

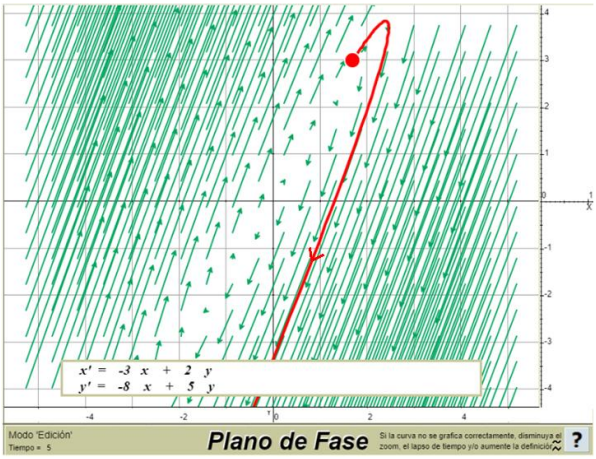
La solución que obtendrá será:

$$x = x_0(e^t - 4te^t) + 2y_0\,t\,e^t$$

$$y = -8\,x_0\,t\,e^t + y_0(e^t + 4t\,e^t)$$

En el siguiente gráfico se particulariza para $x_0 = 1,7$ e $y_0 = 3$.

Bertossi, Pascasco



EJEMPLO 6: ***Matriz del sistema lineal con autovalores complejos conjugados.***

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{0};-\mathbf{2})$ sometida al campo de velocidad $\vec{v}=(9x-5y;25x-11y)$ y luego a $\vec{v}=(11x-5y;25x-9y)$.

RESOLUCIÓN:

Se debe resolver $\begin{cases} x' = 9x-5y \\ y' = 25x-11y \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x_0=0;\ y_0=-2$.

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A_s son $\lambda_{1,2}=-1\pm 5i$.

Diagonalizando:

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+5i & 0 \\ 0 & -1-5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}t} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(-1+5i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-5i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t}\big(cos(5t)+sen(5t)\big) & 0 \\ 0 & e^{-t}\big(cos(5t)-sen(5t)\big) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Simplificando:

$$e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}t} = e^{-t}\begin{pmatrix} cos(5t)+2\,sen(5t) & -sen(5t) \\ 5\,sen(5t) & cos(5t)-2\,sen(5t) \end{pmatrix}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

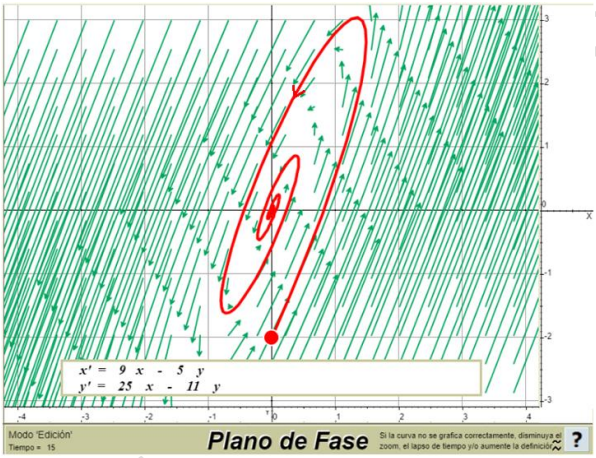
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} cos(5t) + 2\, sen(5t) & -sen(5t) \\ 5\, sen(5t) & cos(5t) - 2\, sen(5t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Luego, la línea de flujo vendrá dada por la forma paramétrica:

$$x = e^{-t}\left(x_0\left(cos(5t) + 2\, sen(5t)\right) - y_0\, sen(5t)\right)$$

$$y = e^{-t}\left(5\, x_0\, sen(5t) + y_0\left(cos(5t) - 2\, sen\,(5t)\right)\right)$$

Advertir que a medida que t aumenta $e^{-t} \to 0$, por lo que $(x; y) \to (0; 0)$, aunque lo hacen siguiendo un camino espiralado, como lo muestra el gráfico, en el que se particulariza con $x_0 = 0,\ y_0 = -2$. Usando DaVinci, cambiar el punto inicial y observar la trayectoria.



Una situación algo distinta se obtendrá si se resuelve el sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 25 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Los autovalores son $\lambda_{1,2} = 1 \pm 5i$.

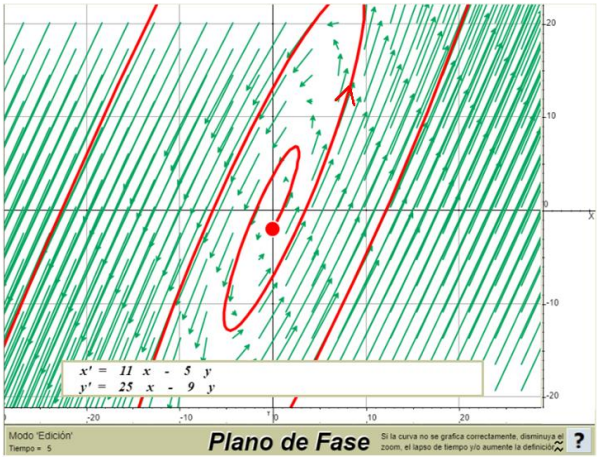
Procediendo de igual manera se tendrá:

$$x = e^{t}\left(x_0\left(cos(5t) + 2\, sen\,(5t)\right) - y_0\, sen\,(5t)\right)$$

$$y = e^{t}\left(5x_0\, sen\,(5t) + y_0\left(cos(5t) - 2\, sen(5t)\right)\right)$$

Notar que si $t \to \infty$ entonces $e^{t} \to \infty$, por lo que ambas coordenadas aumentan indefinidamente, aunque lo hacen siguiendo un camino espiralado, como lo muestra el gráfico:

Bertossi,



EJEMPLO 7: ***Campo no autónomo. Matriz del sistema no homogéneo con autovalores imaginarios puros.***

Determinar la trayectoria que seguirá una partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{1};-\mathbf{1})$ quedando sujeta al campo de velocidad $\vec{v}=\left(y-1.5\,sen(4t);\ -x-1.5\,cos(4t)\right)$. Notar que el campo ya no es estacionario, dado que depende de t.

RESOLUCIÓN:

La solución se encontrará resolviendo el sistema no homogéneo:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1.5\,sen(4t) \\ -1.5\,cos(4t) \end{pmatrix}$, con las condiciones iniciales $x(0)=1;\ y(0)=-1$.

Este sistema ya fue resuelto usando $\vec{X}(t)=e^{A_s(t-t_o)}\,\vec{x_0}+\int_{t_0}^{t} e^{A_s(t-s)}\,\vec{f}(s)ds$.

Aquí, $t_o=0;\ \vec{x_0}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ A_s=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ y\ \vec{f}(s)=\begin{pmatrix} -1.5\,sen(4t) \\ -1.5\,cos(4t) \end{pmatrix}$.

La solución es:

$$\vec{X}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-3\,cos(t)+cos(t)\,cos(3t)+2\,sen(t)-sen(t)\,sen(3t)\right) \\ \frac{1}{2}\left(2\,cos(t)+3\ sen(t)-\ cos(3t)\,sen(t)-cos(t)\,sen(3t)\right) \end{pmatrix}$$

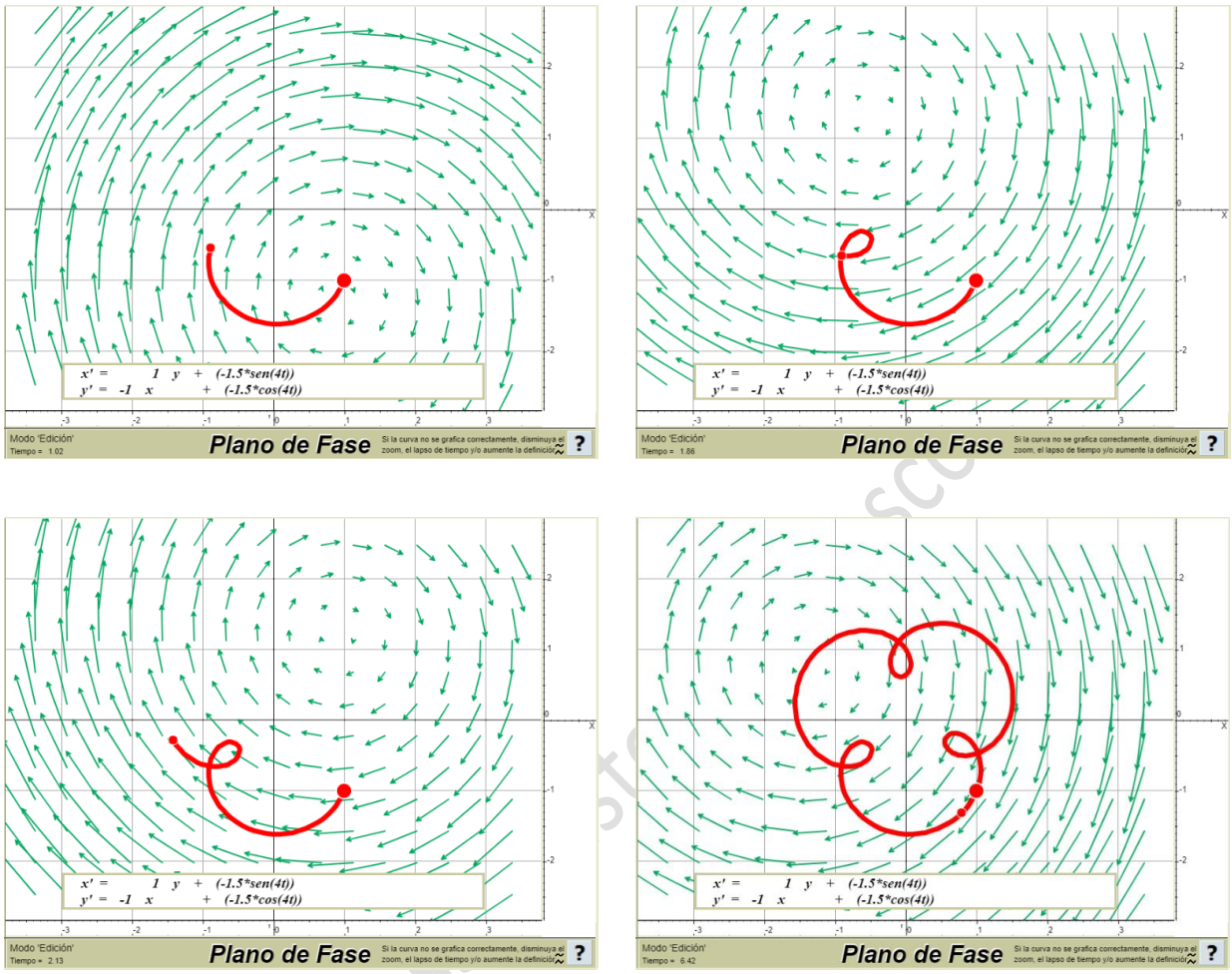
Luego, la trayectoria es:

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(-3\,cos(t)+cos(t)\,cos(3t)+2\,sen(t)-sen(t)\,sen(3t)\right)$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\left(2\,cos(t)+3\ sen(t)-\ cos(3t)\,sen(t)-cos(t)\,sen(3t)\right)$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

En los gráficos siguientes se visualiza la trayectoria en distintos instantes debido a que el campo es variable con el tiempo. Para apreciarlo puede ejecutar este ejemplo en el simulador DaVinci.



4.2. Punto de equilibrio de un sistema lineal. Estabilidad.

Sistemas autónomos y no autónomos.

Dado el sistema bidimensional $\begin{cases} x'(t) = f(x,y) + h_1(t) \\ y'(t) = g(x,y) + h_2(t) \end{cases}$, se dice que es autónomo si x' e y' no dependen explícitamente de t (tiempo). Por ejemplo, $\begin{cases} x'_1(t) = x_1 - x_2 \\ x'_2(t) = x_1 + x_2 \end{cases}$ es autónomo mientras que $\begin{cases} x'_1(t) = x_1 - x_2 + t^2 \\ x'_2(t) = x_1 + x_2 \end{cases}$ no lo es. Note que los sistemas lineales homogéneos son autónomos, mientras que los no homogéneos no, excepto que la función vectorial $\vec{h}(t) = h_1(t)\vec{\imath} + h_1(t)\vec{\jmath} = \vec{K} \neq \vec{0}$.

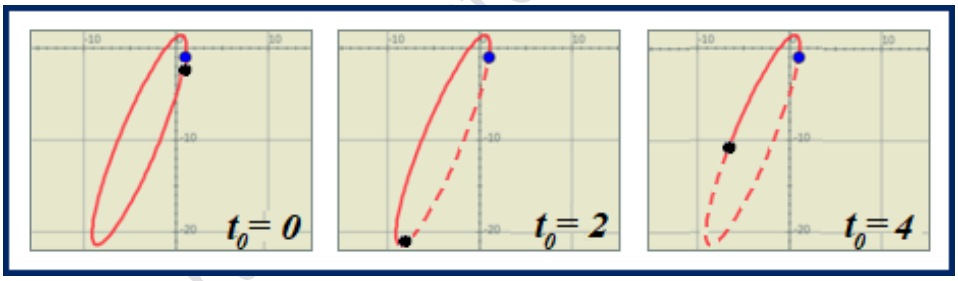
Plano de Fase y Órbita.

La solución de un SED de dos ecuaciones con dos funciones incógnita con condiciones iniciales dadas es una pareja de funciones $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}); \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}))$. Para representar gráficamente la solución del sistema frecuentemente se utiliza la curva paramétrica. A la curva se la denomina **órbita** o **trayectoria** , mientras que al plano $\boldsymbol{xy}$, **plano de fase**.

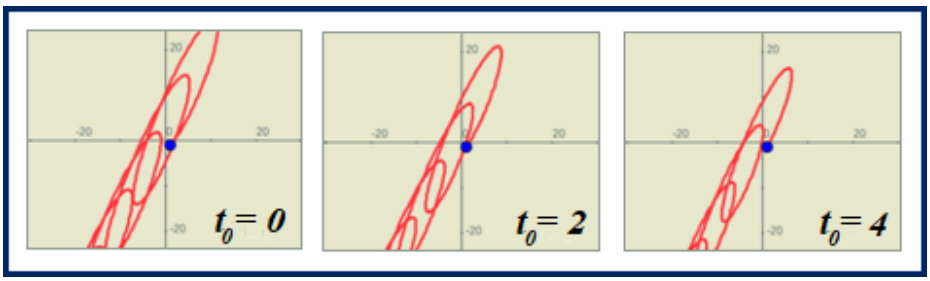
Las órbitas suelen brindar, codificada, mucha información del sistema. El estudiante puede apreciar que en los ejemplos de la subsección 4.1. se graficaron órbitas de sistemas lineales bajo la interpretación de líneas de flujo.

Puede observarse que es una características de los sitemas autónomos que la órbita no depende del valor inicial $\boldsymbol{t_0}$, pero sí del valor $(\boldsymbol{x_0};\ \boldsymbol{y_0})$.

A modo de ejemplo, en el gráfico siguiente se representan las órbitas del sistema $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ con condiciones iniciales $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x(t_o)} \\ \boldsymbol{y(t_o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$; particularizando con $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{2}$ y $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{4}$. Note que en todos los casos la representación gráfica es la misma, sea ésta $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t})$ o $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t_0})$. Si se consideraran trayectorias de tres móviles, éstos recorrerían el mismo camino, pero encontrándose cada uno en distintos puntos del plano en un instante dado. Se puede apreciar este hecho ejecutando la simulación desde el libro interactivo.



Por el contrario, en el siguiente gráfico se muestran las órbitas del sistema no autónomo $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$ con las condiciones $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x(t_o)} \\ \boldsymbol{y(t_o)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$; particularizando con $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{2}$ y $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{4}$. La simulación del libro interactivo muestra la situación.



Note que las órbitas son distintas (más allá que conserven alguna similitud en su forma).

Dado el sistema autónomo $\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \end{cases}$, problema con valor inicial $\begin{cases} x(t_o) = x_o \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$, si f y g son continuas y con derivadas parciales continuas entonces la existencia y unicidad de la solución está garantizada.

Dado que las órbitas de cualquier sistema general autónomo son independientes de t_o se supondrá, por simplicidad, $t_o = 0$.

Punto crítico.

Se denomina **punto crítico** (x_0, y_0) del sistema autónomo de primer orden $\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \end{cases}$, si $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$.

Note que $\begin{cases} x\,(t) = x_o \\ y\,(t) = y_o \end{cases}$ es una solución, estable o de equilibrio, del problema con valor inicial ya que la verifica: $\begin{cases} x' = 0 = f(x_0, y_0) \\ y' = 0 = g(x_0, y_0) \end{cases}$. Esto significa que si se suelta una partícula en (x_0, y_0) en un campo de velocidades $\vec{v} = \big(f(x,y), g(x,y)\big)$, ésta permanecerá en reposo ya que la velocidad $\vec{v}(x_0, y_0) = \vec{0}$. Pero interesan las demás soluciones de $\begin{cases} x'(t) = f(x,y) \\ y'(t) = g(x,y) \end{cases}$ (cuando las condiciones iniciales no son (x_0, y_0).

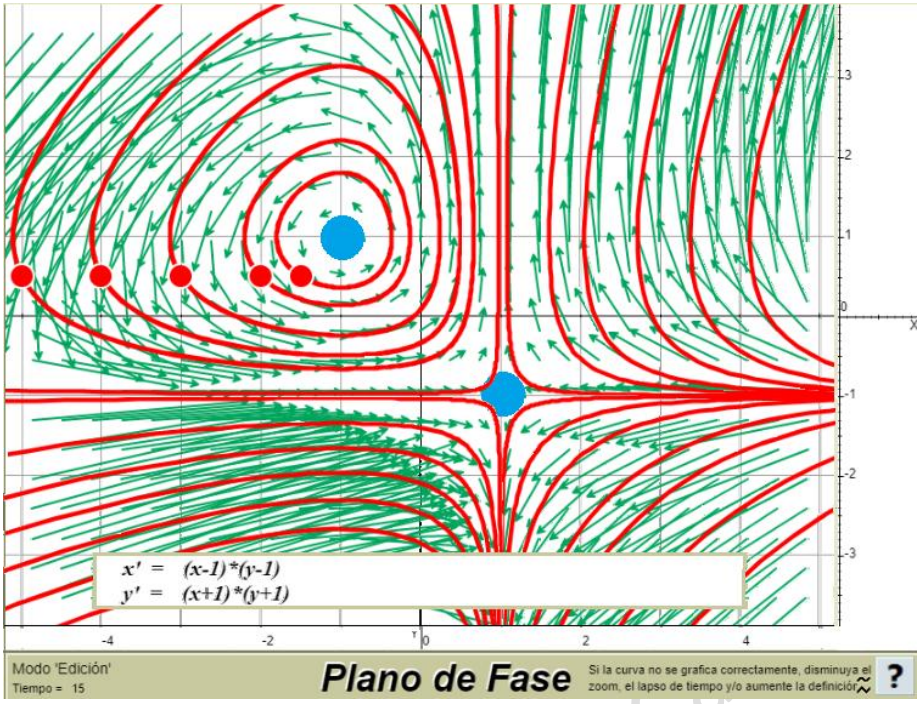
Es por ello que a un **punto crítico** se lo denomina **punto de equilibrio del sistema**.

EJEMPLO 8:

El sistema homogéneo no lineal $\begin{cases} x'(t) = (x-1)(y-1) \\ y'(t) = (x+1)(y+1) \end{cases}$ tiene por puntos críticos $(1; -1)$ y $(-1; 1)$.

Algunas órbitas y los puntos críticos (en azul) se observan en el siguiente gráfico. También se pueden apreciar ejecutando el ejemplo en el simulador DaVinci.

Bertossi, Pastorelli, Casco

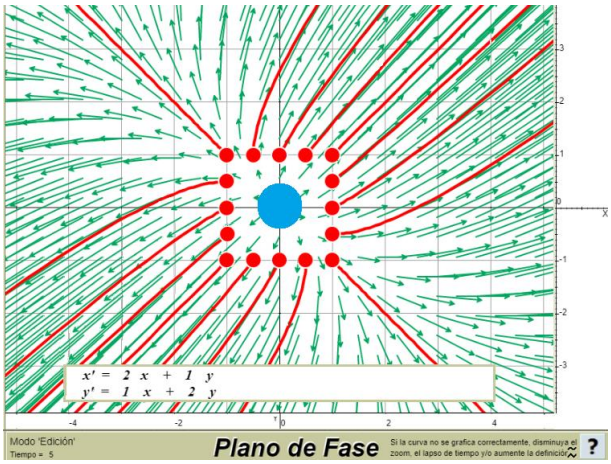


Notar que las órbitas varían mucho de forma pero se pueden intuir del gráfico del campo de velocidades.

EJEMPLO 9:

El sistema lineal homogéneo $\begin{cases} x'(t) = 2x + y \\ y'(t) = x + 2y \end{cases}$ tiene como único punto crítico el $(0;0)$.

Las órbitas y el punto crítico se observan en el gráfico siguiente y puede experimentarse con el simulador DaVinci:

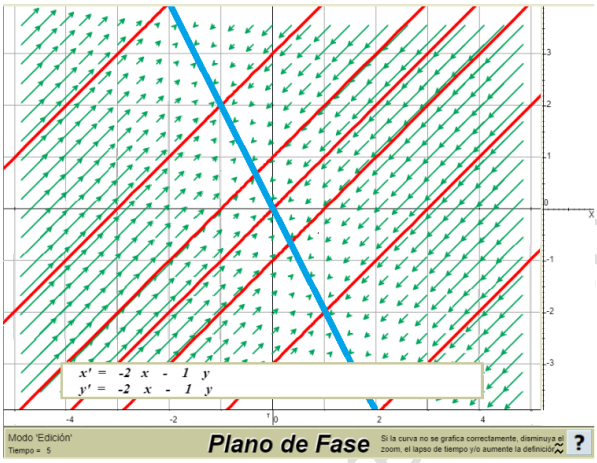


Bertossi, Pastorelli, Ca

EJEMPLO 10:

El sistema lineal homogéneo $\begin{cases} x'(t) = -2x - y \\ y'(t) = -2x - y \end{cases}$ tiene infinitos puntos críticos $(x; -2x)$.

Las órbitas y los puntos críticos (la recta azul) se observan en el siguiente gráfico. Esto también puede observarse con el simulador DaVinci. Experimentando notará que cualquiera sea el punto P_0 elegido, la partícula seguirá una trayectoria rectilínea acercándose asintóticamente a uno de los infinitos puntos críticos.



Bertossi, Pastorello

Estabilidad del punto crítico.

Se dará una definición no formal, pero intuitiva, de estabilidad del punto crítico en la que se hará referencia a “cercanía” entendiendo como tal "dentro de un círculo de radio finito".

- Se dice que el **punto crítico** $(\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{y_o})$ del sistema es **estable** si una trayectoria que está “cerca” de mismo en el instante $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_0}$ permanecerá cerca de él para todo $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{t_0}$.
- Se dice que el **punto crítico** $(\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{y_o})$ del sistema es **asintóticamente estable**, cuando es estable y las trayectorias se aproximan al punto conforme aumenta $\boldsymbol{t}$. Esto es, si $\boldsymbol{t} \to +\infty$, entonces $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \to \boldsymbol{x_o}$ e $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \to \boldsymbol{y_o}$. Éste es un caso particular de estabilidad.
- Se dice que el **punto crítico** $(\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{y_o})$ del sistema es **inestable** cuando no es estable. Esto significa que las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de él a medida que transcurre el tiempo, es decir, cuando la variable independiente $\boldsymbol{t} \to +\infty$.

El punto crítico $(-\mathbf{1}; \mathbf{1})$ del *Ejemplo 8* es estable, mientras que el punto crítico $(\mathbf{1}; -\mathbf{1})$ es inestable. Use DaVinci y advierta que si la partícula se deposita en $(-\mathbf{1}; \mathbf{1})$ (use condiciones iniciales $\boldsymbol{x_o} = -\mathbf{1}$; $\boldsymbol{y_o} = \mathbf{1}$), la misma permanecerá en reposo dado que este punto es un punto de equilibrio. Sin embargo, si se realiza un pequeño cambio en las condiciones iniciales, la misma seguirá una trayectoria cerrada, que estará dentro de una circunferencia de radio finito. Ello se debe a que este punto es de equilibrio inestable. Si en el mismo campo se deposita la partícula en el otro punto crítico $(\mathbf{1}; -\mathbf{1})$ no se moverá, pero si se la desplaza (muy poquito), la misma seguirá una trayectoria que se alejará indefinidamente del punto. Note que las gráficas de series de tiempo muestran que tanto $\boldsymbol{x}$ como $\boldsymbol{y}$ son funciones acotadas en el primer caso, mientras que al menos una de ellas no lo es en el segundo caso. En el *Ejemplo 9* el único punto crítico es inestable, mientras que en el *Ejemplo 10* los infinitos puntos críticos son asintóticamente estables.

En lo que sigue, el estudio se centrará en dos cuestiones que constituyen una parte esencial del plano de fase de los sistemas lineales autónomos:

— La disposición de las trayectorias cerca del punto crítico $(\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{y_o})$.

— La estabilidad o inestabilidad del punto crítico $(\boldsymbol{x_o}; \boldsymbol{y_o})$.

Clasificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales homogéneos.

Se verá que la naturaleza y estabilidad del punto crítico queda caracterizada por los autovalores de la matriz $\boldsymbol{A_s}$ del sistema.

Si $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$ es su único punto crítico, equivale a decir que $|\boldsymbol{A_s}| \neq \mathbf{0}$ y, por ello, que los autovalores $\boldsymbol{\lambda_1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2}$ son no nulos simultáneamente. En función del comportamiento de las

Bertossi, Pastorelli, Casco

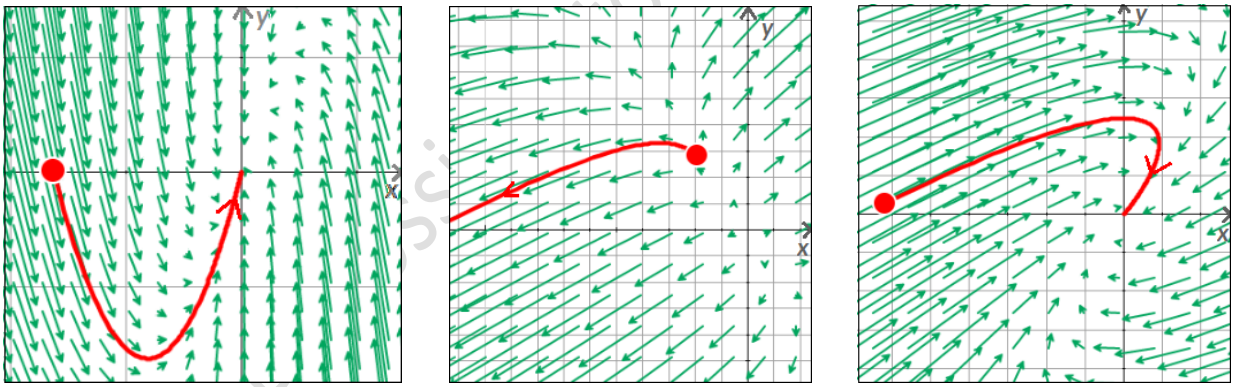
trayectorias en relación con el **punto crítico aislado** $(\mathbf{0};\mathbf{0})$ éste se denominará:

$$\begin{cases} \boldsymbol{nodo} \\ \boldsymbol{punto\ de\ silla} \\ \boldsymbol{centro} \\ \boldsymbol{foco} \end{cases}$$

Nodo.

El punto crítico es un **nodo** si los autovalores $\boldsymbol{\lambda_1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2}$ son reales y del mismo signo. Las órbitas son similares a **semirrectas** o **parábolas**.

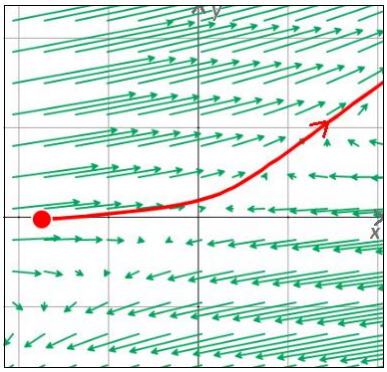
- $\boldsymbol{\lambda_1} \neq \boldsymbol{\lambda_2}$ negativos: "el móvil" se acerca al origen, el equilibrio es **asintóticamente estable**. (Gráfico de la izquierda) Se puede apreciar este hecho ejecutando el ejemplo N° 4 de la galería de *"Sistemas Autónomos"* del simulador DaVinci.
- $\boldsymbol{\lambda_1} \neq \boldsymbol{\lambda_2}$ positivos: "el móvil" se alejan al origen, el equilibrio es **inestable**. (Gráfico central). Se puede apreciar este hecho ejecutando el ejemplo N° 5 de la galería de *"Sistemas Autónomos"* del simulador DaVinci.
- $\boldsymbol{\lambda_1} = \boldsymbol{\lambda_2}$: suele mencionárselo como **nodo impropio**. El ejemplo N° 10 de la galería de *"Sistemas Autónomos"* del simulador DaVinci muestra el caso de autovalores iguales negativos (gráfico de la derecha); en tanto que el ejemplo N° 11, autovalores iguales positivos.



Note que para los dos primeros casos $\boldsymbol{x(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t}}$ (en forma similar $\boldsymbol{y(t)}$), mientras que para el tercero $\boldsymbol{x(t) = e^{\lambda t}(A + Bt)}$ (en forma similar $\boldsymbol{y(t)}$).

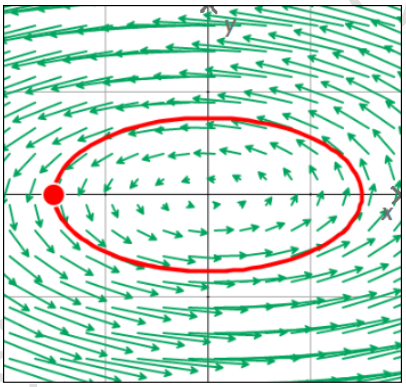
Punto de silla.

El punto crítico es un **punto de silla** si los autovalores $\boldsymbol{\lambda_1}$ y $\boldsymbol{\lambda_2}$ son reales y de distinto signo. Las órbitas, cuando $\boldsymbol{t} \to +\infty$, se presentan como trayectorias que se acercan al origen al principio y luego se separan de él. Esto permite concluir que todo **punto de silla** es **inestable**. Las trayectorias son similares a **hipérbolas** o **semirrectas**, como lo muestra el ejemplo N° 6 de la galería de *"Sistemas Autónomos"* del simulador DaVinci. Note que $\boldsymbol{x(t)}$ (o $\boldsymbol{y(t)}$) responde también a la expresión $\boldsymbol{x(t) = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t}}$ pero a diferencia del caso anterior los dos sumandos de $\boldsymbol{x(t)}$ tienen comportamientos distintos para $\boldsymbol{t} \to +\infty$. Sin embargo, cuando el punto crítico es un **punto de silla** siempre $\boldsymbol{x(t)} \to \infty$ e $\boldsymbol{y(t)} \to \infty$.



Centro.

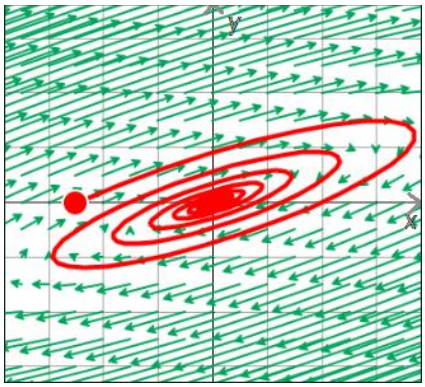
El punto crítico es un **centro** cuando los autovalores son imaginarios puros. Las trayectorias son curvas cerradas que rodean al origen que, en general, tienen forma de elipses, de modo que ninguna trayectoria tiende a él cuando $\boldsymbol{t} \to +\infty$ ó $\boldsymbol{t} \to -\infty$. Por ello, el punto crítico es **estable**, pero no asintóticamente estable.



Foco.

El punto crítico es un **foco** cuando los autovalores son complejos conjugados y tienen parte real no nula. Las órbitas son curvas en forma de **espiral** y, conforme $\boldsymbol{t} \to +\infty$, se pueden presentar dos situaciones:

- $\boldsymbol{Re(\lambda_1)} < 0$: las trayectorias se acercan al origen; el equilibrio es **asintóticamente estable**. (Gráfico de la izquierda). Ejecutar el ejemplo N° 1 de la galería de "*Sistemas Autónomos*" del simulador DaVinci para apreciar este hecho.
- $\boldsymbol{Re(\lambda_1)} > 0$: las trayectorias se separan del origen; el equilibrio es **inestable**. (Gráfico de la derecha). Ejecutar el ejemplo N° 2 de la galería de "*Sistemas Autónomos*" del simulador DaVinci para apreciar este hecho.



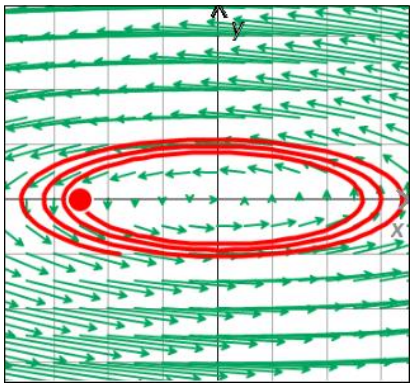


Tabla Resumen para punto crítico aislado del sistema $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

A modo de síntesis, se propone completar la siguiente tabla. En el libro interactivo se puede obtener la respuesta correcta.

Autovalores		$x(t); y(t)$	$t \to \infty$		Equilibrio	Órbita similar	Punto crítico
			$x(t) \to$	$y(t) \to$			
Reales	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	$Ae^{\lvert\lambda_1\rvert t} + Be^{\lvert\lambda_2\rvert t}$	infinito				
	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	$Ae^{-\lvert\lambda_1\rvert t} + Be^{-\lvert\lambda_2\rvert t}$				semirr./ paráb.	
	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$Ae^{-\lvert\lambda_1\rvert t} + Bte^{-\lvert\lambda_1\rvert t}$					
	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$Ae^{\lvert\lambda_1\rvert t} + Bte^{\lvert\lambda_1\rvert t}$					nodo impropio
	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$Ae^{-\lvert\lambda_1\rvert t} + Be^{\lvert\lambda_2\rvert t}$			inestable		
Complejos $\lambda_{1.2} = \alpha \pm \beta i$	$\lambda_{1.2} = \pm\beta i$	$ACos(\beta t) + Bsen(\beta t)$					
	$\alpha < 0$	$e^{\alpha t}(Acos(\beta t) + Bsen(\beta t))$		0 oscilando			
	$\alpha > 0$	$e^{\alpha t}(Acos(\beta t) + Bsen(\beta t))$					

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 11:

Caracterizar el equilibrio del punto crítico del sistema $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 + 2x_2 \\ x_2'(t) = 3x_1 - 4\,x_2 \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 2$, luego el equilibrio es inestable.

EJEMPLO 12:

Caracterizar el equilibrio del sistema $\begin{cases} x_1'(t) = 11\,x_1 - 3x_2 + 13x_3 \\ x_2'(t) = 72\,x_1 - 19x_2 + 72x_3 \\ x_3'(t) = 4\,x_1 - 1x_2 + 2\,x_3 \end{cases}$.

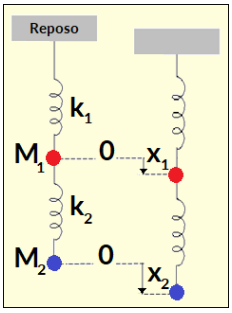
RESOLUCIÓN:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 13 \\ 72 & -19 & 72 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 11 & -3 & 13 \\ 72 & -19 & 72 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -3$; $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = -1$; luego, el equilibrio es asintóticamente estable.

EJEMPLO 13:



Considere el sistema de masa resorte del gráfico. Imagine que se estira el resorte superior una distancia $x_{1_{inicial}}$ desde el reposo y al inferior $x_{2_{inicial}}$ se lo suelta luego. El desplazamiento vertical a partir del punto de equilibrio (reposo) de las dos masas se denotan con $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Se desea analizar el tipo de equilibrio que alcanzará el sistema para el caso particular:

$k_1 = 0,03\ \frac{kg}{m}$; $k_2 = 0,01\frac{kg}{m}$; $m_1 = 27\ kg$; $m_2 = 18\ kg$

RESOLUCIÓN:

Usando la ley de Hooke se sabe que las fuerzas netas sobre las masas están dadas por:

$$\begin{cases} F_1(t) = -k_1\,x_1(t) + k_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) = m_1\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ F_2(t) = -k_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) = m_2\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{cases}$$

Las condiciones iniciales estarán dadas por los estiramientos iniciales $x_{1_{inicial}}$ y $x_{2_{inicial}}$ y la velocidad inicial de las masas $v_{1_{inicial}}$ y $v_{2_{inicial}}$. Se omitirá indicar que tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ dependen de t.

Luego, el sistema resultante será:

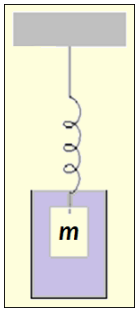
Bertossi, Pastorelli, Casco

$$\begin{cases} x_1'' = -\frac{k_1+k_2}{m_1}\, x_1 + \frac{k_2}{m_1}\, x_2 \\ x_2'' = \frac{k_2}{m_2}\, x_1 - \frac{k_2}{m_2}\, x_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} x_1(0) = x_{1_{inicial}} \\ x_2(0) = x_{2_{inicial}} \\ x_1{}'(0) = v_{1_{inicial}} \\ x_2{}'(0) = v_{2_{inicial}} \end{array}$$

Notar que este sistema puede ser rescrito como un sistema de primer orden introduciendo el cambio de variable $x_3 = x_1'$ y $x_4 = x_2'$. De este modo, $x_3' = x_1''$ y $x'_4 = x_2''$.

Notar que con este cambio de variable x_3 y x_4 son las velocidades en x_1 y x_2, respectivamente.

Entonces $\begin{cases} x_1'' = -\frac{k_1+k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \\ x_2'' = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_2 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -\frac{k_1+k_2}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \\ x_4' = \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2}{m_2} x_2 \end{cases}$.



Para analizar cualitativamente la estabilidad del sistema se deben buscar los autovalores de la matriz (obviamente utilizando un SAC). Con los datos dados, los autovalores son dos pares de complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{60}\, i$ y $\lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{270}\, i$. Más allá de la solución, de acuerdo a la Tabla Resumen, el tipo de equilibrio es estable, pero no asintóticamente estable (lo que significa que las masas oscilarán idefinidamente alrededor del punto de equilibrio). El tipo de equilibrio es válido para las 4 funciones incógnita (luego, la velocidad también tiene el mismo tipo de equilibrio).

Bertossi, Pastorelli, Casco

EJEMPLO 14: *Vibraciones Amortiguadas*

El resorte está sujeto a una fuerza de fricción, producto del medio viscoso. Experimentalmente se muestra que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la masa. La constante c de proporcionalidad depende, entre otras cosas, del fluído (cuanto más denso, mayor es la constante) y de la forma de la masa. Caracterizar el tipo de equilibrio.

RESOLUCIÓN:

Usando la ley de Newton y la de Hooke se tiene que la fuerza actuante en el resorte $F = m\,a = m\,x''$ es la suma de la reposición del resorte $F_{res} = -k\,x$ y la de rozamiento $F_{roz} = -c\,v = -c\,x'$ (la constante $c > 0$, el signo negativo se debe a que la fuerza se opone al movimiento, luego a v).

Luego:

$$m\,x'' = -c\,x' - k\,x \;\rightarrow\; x'' = -\frac{c}{m}\,x' - \frac{k}{m}\,x$$

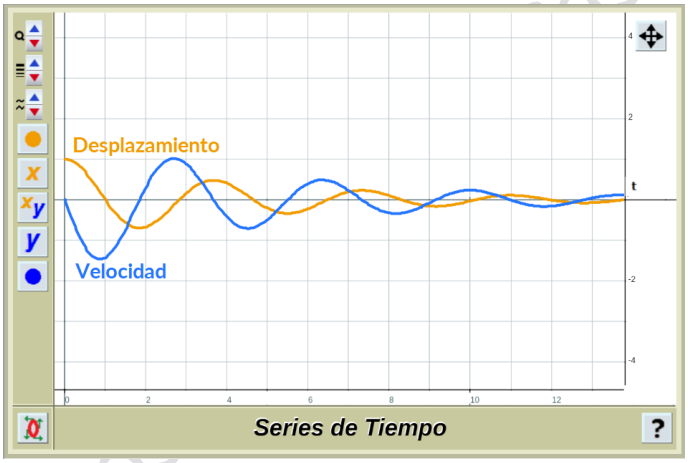
Transformado la EDO en un SL usando $x' = y$; $x'' = y'$, resulta el sistema $S: \begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{k}{m}\, x - \frac{c}{m}\, y \end{cases}$

Matricialmente:

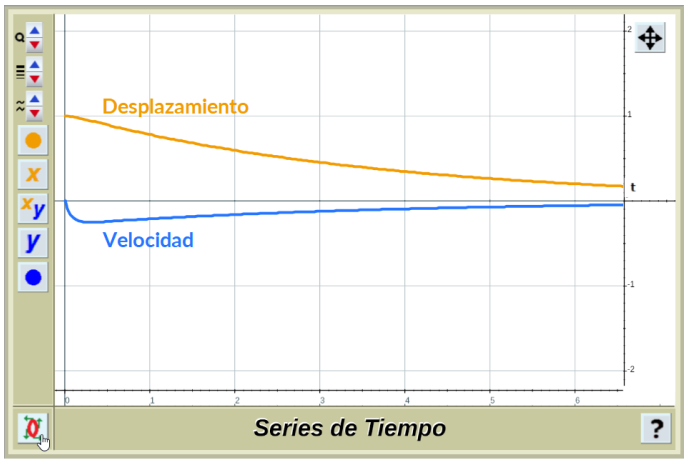
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4k\,m}}{2m}$. De acuerdo a los valores de $\sqrt{c^2 - 4k\,m}$, los mismos pueden ser reales (iguales o distintos), imaginarios o complejos.

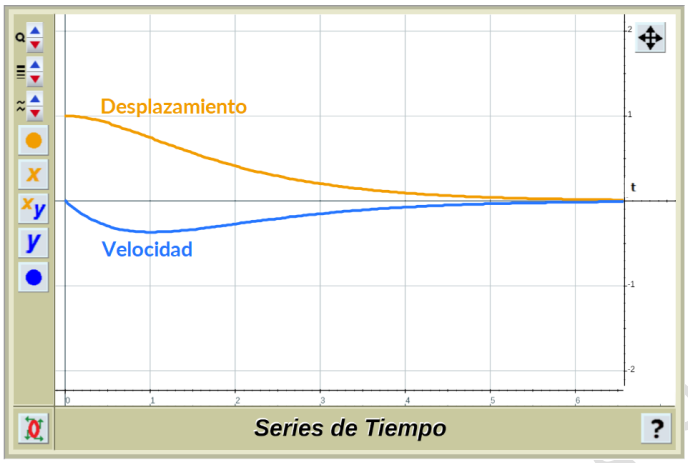
a) $c^2 - 4k\,m < 0$: Amortiguamiento escaso, se tiene dos raíces complejas, con parte real negativa $\frac{-c}{2m}$. El equilibrio es asintóticamente estable, tanto x (desplazamiento) como y (velocidad) tienden a cero oscilando.



b) $c^2 - 4k\,m > 0$: Amortiguamiento excesivo, se tiene dos autovalores reales negativos distintos (notar que $\sqrt{c^2 - 4k\,m} < \sqrt{c^2} = c$). El equilibrio también es estable, tanto x (desplazamiento) como y (velocidad) tienden a cero, pero sin oscilaciones.



c) $\boldsymbol{c^2 - 4k\,m = 0}$: Amortiguamiento crítico, se tienen dos autovalores reales negativos iguales (notar que $\sqrt{\mathbf{c^2 - 4k\,m}} < \sqrt{\mathbf{c^2}} = \mathbf{c}$). El equilibrio también es estable, tanto $\boldsymbol{x}$ (desplazamiento) como $\boldsymbol{y}$ (velocidad) tienden a cero sin oscilaciones, aunque notar que la rapidez máxima es mayor que en el caso anterior.



Se pueden comprobar estos resultados con el simulador DaVinci.

El **punto crítico aislado** del sistema lineal autónomo

es **estable** si y sólo si todos los autovalores tienen parte real no positiva;

es **asintóticamente estable** si y sólo si todos los autovalores tienen parte real negativa;

es **inestable** si existe al menos un autovalor con parte real positiva.

Importante: la estabilidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria homogénea de orden $\boldsymbol{n}$ puede ser caracterizada por las $\boldsymbol{n}$ raíces de su **ecuación característica**.

Bertossi, Pastorelli, Casso

Ejercitación propuesta.

1. *Sea el campo de velocidades* $\vec{v}(x;y) = (x-y)\vec{\imath} + (6x-4y)\vec{\jmath}$.

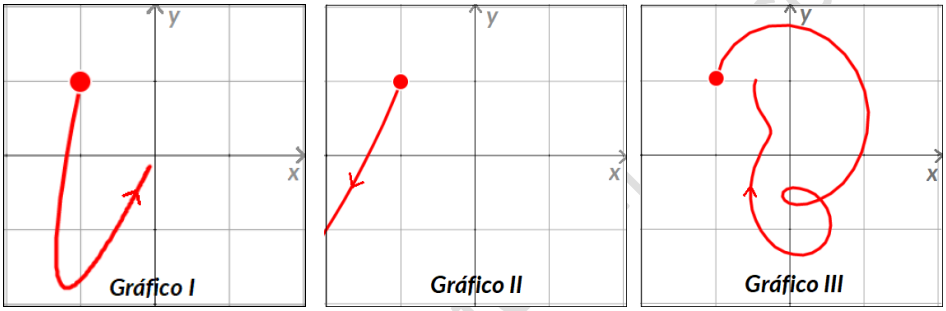
   a) *Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que permiten determinar las trayectorias de flujo* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$.

   b) *Probar que dicho sistema puede reducirse a* $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$; $y(t) = x(t) - x'(t)$.

   c) *Resolver la primera ecuación del inciso anterior.*

   d) *Encontrar la trayectoria de una partícula que parte del punto* $(-1;1)$.

   e) *En el gráfico se muestran tres trayectorias de flujo, una de ellas es la buscada. Determinar la misma, justificando la respuesta.*



Rta: a) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 6x - 4y \end{cases}$

Rta: b) $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$

Rta: c) $\begin{cases} x = 3e^{-2t} - 4e^{-t} \\ y = 9e^{-2t} - 8e^{-t} \end{cases}$

Rta: e) $Gráfico\ I.\ Los\ autovalores\ son\ negativos,\ la\ órbita\ es\ similar\ una\ parábola.\ Cuando\ t \to \infty, x \to 0\ e\ y \to 0.$

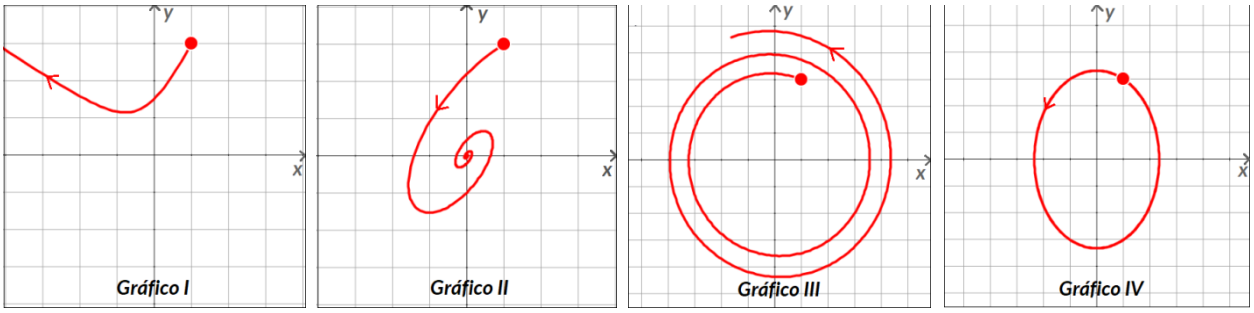
2. *Un móvil se mueve siguiendo una trayectoria* $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, *de tal manera que en todo* $(x;y)$ *su velocidad está dada por* $\vec{v}\big(x(t);y(t)\big) = (x-2y)\vec{\imath} + (3x-2y)\vec{\jmath}$. *Si el móvil parte del punto* $(1;3)$:

   a) *Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que permiten determinar la trayectoria.*

   b) *Probar que dicho sistema puede reducirse a las ecuaciones* $x''(t) + 3x'(t) + 4x(t) = 0$, $2y(t) = x(t) - x'(t)$, $\big(x(0);y(0)\big) = (1;3)$.

   c) *Encontrar la trayectoria.*

   d) *En el gráfico se muestran distintas trayectorias, una de ella es la buscada. Determinar la misma, justificando la respuesta.*



Rta: a) $\begin{cases} x' = x - 2y & ; \ x(0) = 1 \\ y' = 3x - 2y & ; \ y(0) = 3 \end{cases}$

Rta: c) $\begin{cases} x = e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \frac{3}{5}\sqrt{15}\, e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \\ y = 3\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{15}}{5}\, e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \end{cases}$

Rta: d) $Gráfico\ II.\ Los\ autovalores\ son\ complejos\ con\ parte\ real\ negativa,\ luego,$
$la\ órbita\ es\ una\ espiral.\ Cuando\ t \to \infty, x \to 0\ e\ y \to 0.$

3. *Si los autovalores de la matriz del sistema lineal de ecuaciones diferenciales son todos positivos ¿es estable el punto crítico del sistema y la órbita una espiral? Justificar.*

Rta: $No.\ El\ sistema\ es\ inestable\ y\ la\ órbita\ es\ similar\ a\ una\ parábola\ o\ semirrecta.$

4. *Resolver el sistema* $\begin{cases} x'_1 = -2x_1 + x_2 \\ x'_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$ *. Caracterizar el equilibrio de su punto crítico.*

Rta: $\begin{cases} x_1 = c_1\, e^{3t} + c_2\, e^{-3t} \\ x_2 = 5c_1\, e^{3t} - c_2\, e^{-3t} \end{cases}$ $Equilibrio\ inestable.$

5. *Una partícula se mueve en el plano xy con velocidad* $\vec{v}(x, y) = (x + k\, y\, ; 2x - y)$. *¿Cuáles serán los valores de k para que la trayectoria de la partícula sea elíptica?*

Rta: $k < -\frac{1}{2}$

6. *Dado el sistema S:* $\begin{cases} x' = -3x + ky \\ y' = -x + 2y \end{cases}$, *¿existen valores de k para los cuales $lim_{t\to\infty}\, y(t) = \infty$? Justificar.*

Rta: $Sí.\ Para\ k \leq 6\ un\ autovalor\ es\ positivo.$

7. *Caracterizar el equilibrio del punto crítico y la órbita del sistema* S: $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x \end{cases}$.

Rta: $Equilibrio\ \ asintóticamente\ estable\ en\ el\ punto\ crítico\ (0; 0).$
$Órbita:\ similar\ a\ parábola\ o\ semirrecta.$

Bertossi, Pastorelli, Casco

8. *Caracterizar el equilibrio del punto crítico y la órbita del sistema* $S: \begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x + 3y \end{cases}$.

Rta: $Equilibrio\ inestable.\ Órbita: similar\ a\ hipérbola\ o\ semirrecta.$

9. *Hallar la solución general de los siguientes sistemas homogéneos, caracterizar el equilibrio del/los punto/s críticos e indicar la forma de la trayectoria solución (órbita):*

a) $S: \begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = c_1\, e^{4t} + c_2\, e^{-t} \\ y = \frac{2}{3} c_1\, e^{4t} - c_2\, e^{-t} \end{cases}$ $Equilibrio\ inestable.$ $Órbita: similar\ a\ semirrecta\ o\ hipérbola.$

b) $S: \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = 2c_1\, e^{t} + c_2\, e^{t} + 2c_2\, t\, e^{t} \\ y = c_1\, e^{t} + c_2 t\, e^{t} \end{cases}$ $Equilibrio\ inestable.$ $Órbita: similar\ a\ semirrecta\ o\ parábola.$

c) $S: \begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = 2x - 10y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = c_1 + c_2\, e^{-9t} \\ y = \frac{1}{5} c_1 + 2c_2\, e^{-9t} \end{cases}$ $Equilibrio\ asintóticamente\ estable.$ $Órbita: similar\ a\ semirrecta\ o\ parábola.$

d) $S: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = c_1 cos(t) + c_2 sen(t) \\ y = (c_1 - c_2)\, cos(\mathrm{t}) + (c_1 + c_2) sen(t) \end{cases}$ $Equilibrio\ estable.$ $Órbita: elipse.$

e) $S: \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 4x - 4y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = e^{-\frac{3}{2}t} \left(c_1\, cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} t\right) + c_2\, sen\left(\frac{\sqrt{23}}{2} t\right) \right) \\ y = \frac{1}{6}\, e^{-\frac{3}{2}t} \left(\left(5c_1 - \sqrt{23} c_2\right) cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} t\right) + \left(\sqrt{23} c_1 + 5c_2\right) sen\left(\frac{\sqrt{23}}{2} t\right) \right) \end{cases}$

$Equilibrio\ asintóticamente\ estable.\ Órbita: espiral.$

f) $S: \begin{cases} x' = -2\, x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = c_1\, e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} t} + c_2\, e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} t} \\ y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1\, e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} t} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2\, e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} t} \end{cases}$

$Equilibrio\ asintóticamente\ estable.\ Órbita: similar\ a\ semirrecta\ o\ parábola$

.

10. *Escribir la forma general de* $(x(t); y(t))$ *y caracterizar el equilibrio del punto críticde:*

a) $S: \begin{cases} x' = -4y + t \\ y' = x \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = -2c_1 sen(2t) + 2c_2 cos(2t) + \frac{1}{4} \\ y = c_1 cos(2t) + c_2 sen(2t) + \frac{1}{4} t \end{cases}$ $Equilibrio\ inestable.$

b) $S: \begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ Rta: $\begin{cases} x = -\left(\frac{\sqrt{10}}{2} + 1\right) c_1\, e^{-\sqrt{10}t} + \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - 1\right) c_2\, e^{\sqrt{10}t} \\ y = c_1\, e^{-\sqrt{10}t} + c_2\, e^{\sqrt{10}t} \end{cases}$ $Equilibrio\ inestable.$

11. *Una partícula se soltará en el punto* $(3; 0)$ *en un campo estable de velocidad* $\vec{v}(x, y) = (x + ky)\vec{\imath} + (2x + ky)\vec{\jmath}$. *¿Existe/n valor/es de* k *para el/los cual/es la trayectoria de la solución es una elipse? Justificar.*

Rta: $k = -1$

Bertossi, Pastorelli, Casco

12. Sea el campo de velocidades $\vec{v}(x,y) = (x - 10y)\vec{\imath} + (3x - 10y)\vec{\jmath}$. *Si una partícula se libera en el punto* $(0;1)$ *en el instante* $t = 0$, *¿seguirá la trayectoria* $x = 10\,e^{-5t} - 10\,e^{-4t}$; $y = 6\,e^{-5t} - 5\,e^{-4t}$? *¿Es elíptica esta trayectoria? Justificar.*

Rta: $La\ trayectoria\ es\ correcta\ pero\ no\ es\ elíptica\ porque\ x\ e\ y\ no\ son\ periódicas.$

13. Dado el sistema $S: \begin{cases} x' = -2x + (k+1)y \\ y' = kx + 2y \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$. *¿Existe algún valor de* k *para el cual la trayectoria de la solución es una elipse? Justificar.*

Rta: $No.\ Para\ que\ las\ órbitas\ solución\ sean\ elípticas\ debería\ cumplirse$
$k^2 + k + 4 < 0$ $,pero\ no\ existe\ k \in \mathbb{R}\ que\ lo\ verifique.$

14- ¿Es posible que una partícula sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v}(x,y) = (-x + 8y)\vec{\imath} + (-3x + 22y)\vec{\jmath}$ *que se libera en el punto* $(-5;0)$ *siga la trayectoria* $\vec{r}(t) = (e^{-2t} - 6e^{t})\vec{\imath} + (-1{,}5e^{-2t} + 1{,}5e^{t}y)\vec{\jmath}$ *? Justificar.*

Rta: $No.\ Los\ autovalores\ no\ son - 2\ y\ 1.$

15- Dado el sistema $S: \begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$, *¿puede ser* $y = e^{-t} + e^{\sqrt{2}t}$ *una de sus soluciones? Justificar.*

Rta: $No.\ Los\ autovalores\ son\ complejos\ conjugados.$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Ejercitación complementaria.

1 - Para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = -\frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, *probar que la sustitución* $z = \sqrt{y}$ *la convierte en lineal de primer orden y hallar su solución.*

Rta: $y = \frac{1}{64}x^4 + \frac{C}{4} + \frac{C^2}{x^4}$

2. Probar que la sustitución $z = y^{-3}$ *transforma la ecuación* $y' + P(x)y = Q(x)y^4$ *en una ecuación lineal de primer orden.*

3. Hallar las curvas que verifiquen $y' = tg(x)y + cos(x)$.

Rta: $y = \frac{x}{2\,cos(x)} + \frac{sen(x)}{2} + \frac{C}{cos(x)}$

4. Dada la ecuación diferencial $xy' + y - x^2 = 0$.

a) Determinar la solución general.

b) Determinar la curva solución que contiene al punto $(1; 2)$.

Rta: a) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Rta: b) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{3x}$

5. - Hallar:

a) La familia de funciones que verifique la ecuación $(x+1)y - xy' = x^3 - x^2$.

b) La función de la familia del inciso a que cumple $y(1) = 1$.

Rta: a) $y = x^2 + Cxe^x$

Rta: b) $y = x^2$

6 - Determinar la solución para $x^2y' + yx = 1$ *cuando* $y(1) = 2$ *, con* $x > 0$.

Rta: $y = \frac{ln\,(x)}{x} + \frac{2}{x}$

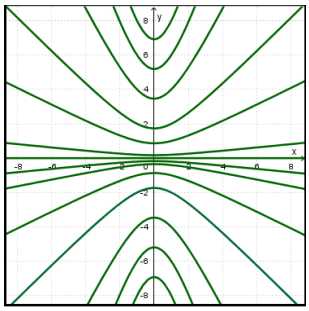
7. Para la familia de elipses $kx^2 + y^2 = 1, (k > 0)$, *¿son parábolas las trayectorias ortogonales? Justificar.*

Rta: No. $-\frac{y^2}{2} + ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$

8 - Determinar la familia de curvas solución de $y'(x^2 + 3) = xy$. *Graficar.*

Rta: $y = \sqrt{x^2 + 3}\,C$

Bertossi, Pastorelli, Casco



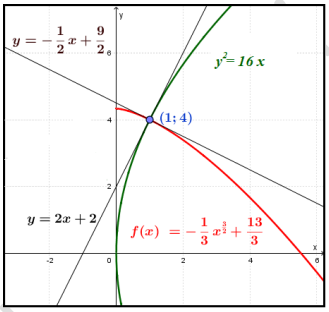
9. Dada la ecuación $2y'x^2 = xy$:

a) Determinar la familia de curvas solución y graficar.

b) Determinar y representar la curva de la familia que contiene al punto $(1;4)$ y la recta tangente en dicho punto.

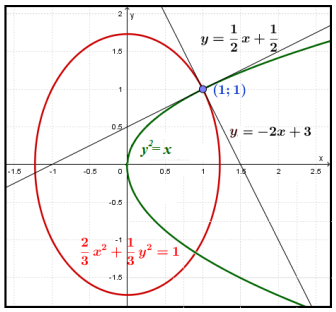
c) Obtener una ecuación para la curva ortogonal a la familia que contiene al punto $(1;4)$, la recta tangente en dicho punto y graficarlas en el mismo sistema de representación del inciso b.

Rta: a) $y^2 = x\,C$ b) $y^2 = 16x$; $y = 2x + 2$ c) $y = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{13}{3}$; $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$



10. La familia ortogonal a la familia $y^2 = kx$ es el conjunto de elipses $y^2 + 2x^2 = C$. Graficar dos integrantes (una de cada familia) que se correspondan y sus respectivas rectas tangentes en un punto de intersección.

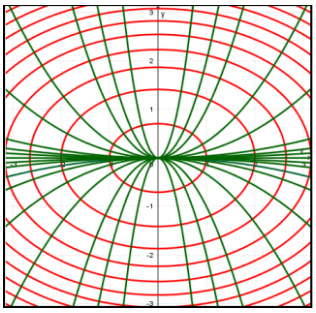
Rta:



11 - Calcular las trayectorias ortogonales a la familia de elipses $x^2 + 2y^2 = k^2$. Graficar.

Rta: $y = x^2C$

Bertossi, Casco



12. Sea $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ *soluciones de* $y'' + ay' + by = 0$, *donde* $a, b \in \mathbb{R}$. *Demostrar que* $y = f_1(x) - 2f_2(x)$ *también es solución.*

13. Si $b^2 - 4ac = 0$, *demostrar que* $y = x\, e^{-\frac{b}{2a}x}$ *es solución de* $ay'' + by' + cy = 0$.

14. Resolver el sistema S: $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$, *siendo* $x(0) = y(0) = 1$.

Rta: $x(t) = y(t) = e^t$

15. Resolver el sistema S: $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = -x \end{cases}$, *siendo* $x(0) = y(0) = 1$.

Rta: $x(t) = cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\, sen(\sqrt{2}t)$; $y(t) = \frac{1}{2}(cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}sen(\sqrt{2}t))$

16. Proponer las soluciones que permiten resolver la ecuación $y'' - 4y = f(x)$ *por el método coeficientes a determinar:*

a) $f(x) = x\, e^x + cos\,(2x)$

b) $f(x) = e^{2x}$

Rta: a) $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$; $y_{p_1} = Ax\, e^x + Be^x$; $y_{p_2} = C\, cos(2x) + D\, sen(2x)$

Rta: b) $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$; $y_p = Ax\, e^{2x}$

17 - Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = f(x)\, e^x$ *para:*

a) $f(x) = 2$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

b) $f(x) = e^{-x} + e^{-x} tg(x)$

Rta: a) $y = -2\, sen(x) + e^x$

Rta: b) $y = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + \frac{1}{2}e^{-x} - cos(x)\; ln\left(\frac{1+sen(x)}{cos(x)}\right)$

18. Dar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2x}$, $x > 0$

b) $y'' + 3y' = 1 + x\, e^{-3x}$

Bertossi, Pastorelli, Casco

c) $y'' + 4y = sen^2(x)$

Rta: a) $y = c_1 e^x + c_2 x\, e^x - \frac{1}{2} x\, e^x + \frac{1}{2}\, ln|x|\, x\, e^x$

Rta: b) $y = c_1 + c_2\, e^{-3x} + \frac{1}{3} x - \frac{1}{6} x^2\ e^{-3x} - \frac{1}{9} x\ e^{-3x}$

Rta: c) $y = c_1\, cos(2x) + c_2\, sen(2x) + \frac{1}{8} - \frac{x\, sen(2x)}{8}$

19. Para la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = cos(2x) + e^{-x}$, *indicar la forma de la solución propia propuesta. Expresar (sin resolver) la forma de la solución general.*

Rta: $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \underbrace{A\, cos(2x) + B\, sen(2x)}_{y_{p_1}} + \underbrace{C\, x^2 e^{-x}}_{y_{p_2}}$

$$y = y_c + y_p = \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2\, xe^{-x}}_{y_c} + \underbrace{A\, cos(2x) + B\, sen(2x) + C\, x^2 e^{-x}}_{y_p}$$

20. Resolver la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 5\, sen(px)$ *para:*

a) $p = 2$

b) $p \neq 2$

Rta: a) $y = c_1\, cos(2x) + c_2\, sen(2x) - \frac{5}{4} x\, cos(2x)$

Rta: b) $y = c_1\, cos(2x) + c_2\, sen(2x) + \frac{5}{(4-p^2)}\, sen(px)$ y $p \neq -2$

$y = c_1\, cos(2x) + c_2\, sen(2x) + \frac{5}{4} x\, cos(-2x)$ y $p = -2$

21- Dada $y'' + y' = e^x + x$ *hallar la curva solución que pasa por el punto* $(1; 0)$ *y donde* $y'(0) = 0$.

Rta: $y = \frac{e^{1+x} - e^{1-x} + e\, x^2 - 2ex + 1 - e^2 + e}{2e}$

22- Hallar la solución de la ecuación $y'' + 4y = sen^2(x)$, *siendo* $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Rta: $y = -\frac{1}{8} cos(2x) + \frac{1}{2} sen(2x) - \frac{x\, sen(2x)}{8} + \frac{1}{8} = sen(x) cos(x) - \frac{x\, sen(x) cos(x)}{4} + \frac{sen^2(x)}{4}$

23. Encontrar la familia de curvas solución de $y'' - 3y' + 2y = e^x$ *que pasan por el origen de coordenadas.*

Rta: $y = ce^{2x} - ce^x - x\, e^x$.

24. Hallar la solución de $y' = e^{-2x+5y}$ *que cumpla* $y(0) = 0$.

Rta: $y = -\frac{1}{5}\, ln\, \left(\frac{5}{2} e^{-2x} - \frac{3}{2}\right)$

Bertossi, Pastorelli, Casco

25. Encontrar la función $y(x)$ *que verifique* $y'' + y' = x\, e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Rta: $y = 4 - 2e^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} - xe^{-x}$

26. Encontrar todas las funciones $y(x)$ *que verifiquen* $y'' + 4y = sen(x)$ *e* $y(0) = 0$ *. Usar el interactivo para graficar.*

Rta: $y = c\, sen(2x) + \frac{1}{3}sen(x)$

27. Dada la ecuación $y'' + 2y' + y = f(x)e^{-x}$ *:*

a) Proponer una solución propia para el caso en que $f(x) = 2x - 1$ *.*

b) Hallar la solución general para el caso en que $f(x) = ln|x|$.

Rta: a) $y = Ax^3\, e^{-x} + Bx^2\, e^{-x}$

Rta: b) $y = c_1\, e^{-x} + c_2x\, e^{-x} - \frac{3}{4}x^2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\, ln|x|e^{-x}$

28. Dado el sistema S: $\begin{cases} x'(t) = 2x + ky \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$ *, dar el o los valores de* $k \in \mathbb{R}$ *, si existen, para los cuales las curvas* $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t)\big)$ *que lo solucionan son elípticas.*

Rta: $No\ existe\ k.\ Los\ autoalores\ tienen\ parte\ real\ distinta\ de\ 0.$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Apéndice

Fórmula exponencial de un complejo.

Recordando los desarrollos de $e^x; cos(x)$ y $sen(x)$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando estas tres fórmulas es posible obtener la forma exponencial de un complejo de la siguiente manera:

Usando el desarrollo de e^x se encontrará el de $e^{\beta i}$:

$$e^{\beta i} = 1 + \beta i + \frac{\beta^2 i^2}{2!} + \frac{\beta^3 i^3}{3!} + \frac{\beta^4 i^4}{4!} + \frac{\beta^5 i^5}{5!} + \frac{\beta^6 i^6}{6!} + \frac{\beta^7 i^7}{7!} + \cdots$$

Usando las propiedades de la potencia de la unidad imaginaria $\begin{cases} i^0 = i^4 = i^{4n} = 1 \\ i^1 = i^5 = i^{4n+1} = i \\ i^2 = i^6 = i^{4n+2} = -1 \\ i^3 = i^7 = i^{4n+3} = -i \end{cases}$:

$$e^{\beta i} = 1 + \beta i - \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} i + \frac{\beta^4}{4!} + \frac{\beta^5}{5!} i - \frac{\beta^6}{6!} - \frac{\beta^7}{7!} i + \cdots$$

Reordenando los términos de la serie es posible descomponerla en dos partes. La primera, agrupando los términos reales y la segunda, la que contiene imaginarios puros.

$$e^{\beta i} = 1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + -\frac{\beta^6}{6!} + \cdots + \beta i - \frac{\beta^3}{3!} i + \frac{\beta^5}{5!} i - \frac{\beta^7}{7!} i + \cdots$$

Sacando factor común de la segunda serie la unidad imaginaria, puede notarse que cada una de las series involucradas son el desarrollo de $sen(\beta)$ y $\cos(\beta)$:

$$e^{\beta i} = \underbrace{\left(1 - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^4}{4!} + -\frac{\beta^6}{6!} + \cdots\right)}_{cos(\beta)} + i \underbrace{\left(\beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} - \frac{\beta^7}{7!} + \cdots\right)}_{sen(\beta)}$$

$$e^{\beta i} = cos(\beta) + i\, sen(\beta) \quad \textbf{(fórmula de Euler)}$$

Finalmente, usando las propiedades de la potencia $e^{x+y} = e^x e^y$ se llega a la forma exponencial de un complejo $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha}(cos(\beta) + i\, sen(\beta))$

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(cos(\beta) + i\, sen(\beta))$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Matriz exponencial.

Usando similitud con $e^a = 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots$ se define:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

Usando dicha definición uede mostrarse que esta serie de matrices converge para toda A: $e^0 = I$ y $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Sea $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Longrightarrow e^D = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$

D: matriz Diagonal, luego: $A = CDC^{-1} \Longrightarrow e^A = Ce^DC^{-1}$.

J: matriz de Jordan, luego: $\forall\, A \in R^{n\times n}\ \exists\ J, C\ /\ A = CJC^{-1} \Longrightarrow e^A = Ce^JC^{-1}$

Si $A_s \in R^{2\times 2}$ no diagonalizable $(\lambda = \lambda_1 = \lambda_2)$; $\vec{v}_1 = (A_s - \lambda I)\,\vec{v}_2$ $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. A_s: matriz cuadrada.

1- $\vec{X}(t) = e^{At}\,\vec{K}$ es solución de $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t)$

2- $\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_i)}\vec{x_i}$ es solución de $\begin{cases} \vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) \\ \vec{x}(t_i) = \vec{x_i} \end{cases}$

3- $\vec{X}(t) = e^{A_s t}\left(\vec{K} + \int e^{-A_s t}\vec{f}(t)\,dt\right)$ es solución de $\vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$

4- $\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_o)}\,\vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A_s(t-s)}\,\vec{f}(s)ds$ es solución de $\begin{cases} \vec{x'}(t) = A_s\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{cases}$

Tabla Resumen.

Solución general de sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Bertossi, Pastorelli, Casco

		$\boldsymbol{x(t)}; \boldsymbol{y(t)}$ con forma
Autovalores	*Reales* $\boldsymbol{\lambda_1\ \lambda_2}$	$\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad A\, e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}}$
		$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 \qquad A\, e^{\lambda_1 t} + B\, t\, e^{\lambda_1 t}}$
	Complejos $\boldsymbol{\lambda_{1.2} = \alpha \pm \beta i}$	$\boldsymbol{e^{\alpha t}\big(A\, cos(\beta t) + B sen(\beta t)\big)}$

Bertossi, Pastorelli, Casco

Epílogo

Las EDO abordadas en este libro son modelos simplificados de problemas que habitualmente aparecen en ingeniería. No obstante, constituyen un pequeño conjunto del vasto universo de las ecuaciones diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos de sistemas reales se caracterizan por su no linealidad debido a que muchas cosas en la naturaleza se comportan de forma no lineal. Pero para estudiar su estabilidad se procede a su linealización, aunque se pierdan ciertas soluciones físicas. Es por ello que en la sección IV se desarrolló el concepto de estabilidad únicamente en relación a los sistemas dinámicos lineales.

Edward Lorenz, matemático y meteorólogo estadounidense, al estudiar el espacio de fases de sistemas dinámicos tridimensionales no lineales que modelan fenómenos de la atmósfera terrestre, descubrió en 1963 el llamado **"atractor de Lorenz"**. Con sus investigaciones sentó las bases de la **Teoría del caos**, rama de las matemáticas, la física y otras ciencias (biología, meteorología, economía, etc.) que trata ciertos tipos de sistemas dinámicos muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales: los **sistemas caóticos**. Dado que estos sistemas dependen de gran cantidad de variables, pequeñas variaciones en las mismas pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro.

Por ello Lorenz dijo que era tan difícil pronosticar las condiciones climatológicas a largo plazo. Este obstáculo de la predicción, denominado **efecto mariposa** (nombre devenido de la forma de mariposa del atractor descubierto), lo expuso en una conferencia bajo el título "*¿Puede el batir de las alas de una mariposa en Brasil dar lugar a un tornado en Texas?*".

Otros ejemplos de tales sistemas incluyen el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en régimen turbulento y los crecimientos de población.

En la versión digital de este libro puede observarse la animación que muestra uno de los sistemas caóticos más simples que existen: el péndulo doble. Puede apreciarse que, además de su trayectoria irregular, depende sensiblemente de las condiciones iniciales, ya que al darle cada vez una posición inicial ligeramente diferente, se obtiene una trayectoria completamente distinta pasado cierto tiempo.

Aquellos alumnos inquietos e interesados en asomarse al mundo de los sistemas no lineales caóticos pueden ver la película "El Efecto Mariposa", estrenada en 2004 y que, de la mano de los directores y guionistas Eric Bress y J. Mackye Gruber, muestra cómo un ínfimo cambio en la línea del tiempo del protagonista, por más trivial o insignificante que aparente, puede provocar un rumbo totalmente inesperado y un cambio radical en su vida.

También en "El ruido de un trueno" Ray Bradbury hace una exploración a través del género literario de ciencia ficción del **efecto mariposa**. Cuenta la historia de un hombre que contrata los servicios de una agencia de viajes en el tiempo para participar en un safari a la prehistoria. La expedición camina sobre una plataforma de metal que gravita sobre el suelo

Bortosi, Pastorelli, Casco

ya que cualquier leve pisotón a un ser vivo, por pequeño que fuese, acumularía consecuencias como una gran bola de nieve hasta llegar a modificar la realidad en el presente. Para conocer el final de la historia habrá que leer el cuento, aunque se puede adelantar un detalle: el protagonista se salió de la plataforma y trajo pegada a su bota una pequeña mariposa…

Lo sorprendente es que la historia precede al trabajo de Lorenz por casi diez años, mucho antes de que fuera acuñado el término **efecto mariposa** y los principios entendidos por la comunidad científica. El mismo efecto ocurre en la dinámica planetaria, estudiada por Henri Poincaré hacia fines del siglo XIX, varias décadas antes de la formulación de la **Teoría del caos**.

La genialidad de Isaac Asimov tampoco puede dejar de deslumbrar. En "El fin de la eternidad" presenta un mundo de viajes a través del espacio–tiempo en el que el futuro puede ser modificado; pero eso sí, bajo un meticuloso análisis que haga tender a cero la probabilidad de ocurrencia de hechos no deseados, previo a la efectiva ejecución del *cambio mínimo necesario* que refleje en la realidad modificada el *resultado máximo esperado*.

Retomando la idea de estos formidables autores del siglo XX, la serie de ciencia ficción estrenada en 2015, “El Ministerio del Tiempo”, de los directores Javier y Pablo Olivares, trata sobre una institución gubernamental secreta cuyos funcionarios vigilan las puertas de acceso hacia otras épocas para impedir que cualquier intruso viaje desde o hacia el pasado con la intención de modificar la Historia en beneficio propio. Pero los empleados de este ministerio no resisten la tentación de viajar a escondidas por asuntos personales. Por nimios que fuesen los hechos que viven cuando se transportan a todos les acarrean consecuencias… Serie digna de ver en Netflix!

Agradecimientos.

A José Román Galo Sánchez y Juan Guillermo Rivera Berrío, por su invaluable colaboración y guía en la resolución de algunos aspectos técnicos y de programación que hicieron posible este libro digital.

Bertossi, Pastorelli, Casco

Bibliografía y Sitios Web.

Abreu León, J.; Oliveró Serrat, Ma.; Escamilla Gonzálex, O.; Espinosa Longi, J. (2013). *Campos eléctricos en conductores.* Recuperado de Red Educativa Digital Descartes: http://proyectodescartes.org/Un_100/materiales_didacticos/_Un_092_ CamposElectricosConductores/index.html. Sin fecha de publicación.

Asimov, I. (1955). *El fin de la eternidad.* Nueva York: Doubleday.

Bradbury, R. (1952). El ruido de un trueno. *Collier's*.

Emmerich, T.; Goldberg, J.; Kutcher, A. (productores) y **Bress, E.; Gruber, J.** (directores). (2004). *El Efecto Mariposa*. [cinta cinematográfica]. EU: BenderSpink, FilmEngine, Katalyst Films.

Catslash. (s.f.). *Péndulo compuesto doble.* Recuperado de Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-compound-pendulum.gif. Fecha de publicación: 22/01/2008.

Escobar Acosta, J. (2004). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones en Maple*. Recuperado de Universidad de Antioquía - Departamento de Matemáticas: http://matematicas.udea.edu.co/~jescobar/. Fecha de publicación: año 2004.

Olivares, J.; Olivares, P. (2015). *El Ministerio del Tiempo*. Serie televisiva de Netflix.

Ripoll Mira, E.; García Cebrian, M. (s.f.). *Calculadora Descartes.* Recuperado de Red Educativa Digital Descartes: http://proyectodescartes.org/calculadora/index.htm. Sin **fecha de publicación.**

Stewart, J. (1999). *Cálculo multivariable*. Garmendia Guerrero, D. (Traductor). México: Thomson. Tercera Edición.

Wikipedia. *Teoría de la estabilidad*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_la_estabilidad. Fecha de publicación: 25/01/2015.

Wikipedia. *Edward Lorenz*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Edward_Lorenz. Fecha de publicación: 24/12/2017.

Wikipedia. *Teoría del caos*. Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_del_caos. Fecha de publicación: 25/07/2018.

Zill, D. G. (1988), *Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones.* Ojeda Peña, E. *et al.* (Traductores). México: Iberoamérica. Segunda Edición.

Bertossi, Pastorelli, Casco