MATEMÁTICAS

SOLUCIONES al 1er examen de la 3ª evaluación

Ejercicio nº 1.-

Estudia, según los valores del parámetro *a*, el siguiente sistema homogéneo. Resuélvelo en los casos en los que sea posible:

$$\begin{cases} \mathbf{4x - 4z = 0} \\ \mathbf{x - y + az = 0} \\ \mathbf{x + ay + z = 0} \end{cases}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

(Hemos simplificado la 1ª ecuación, dividiéndola entre 4).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A| = -a^2 - a - 2 = -\left(a^2 + a + 2\right)$$

$|A| = 0 \rightarrow \quad a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución $\rightarrow \quad |A| \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, como el sistema es homogéneo, tiene como solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, cualquiera que sea el valor de a.

Ejercicio nº 2.-

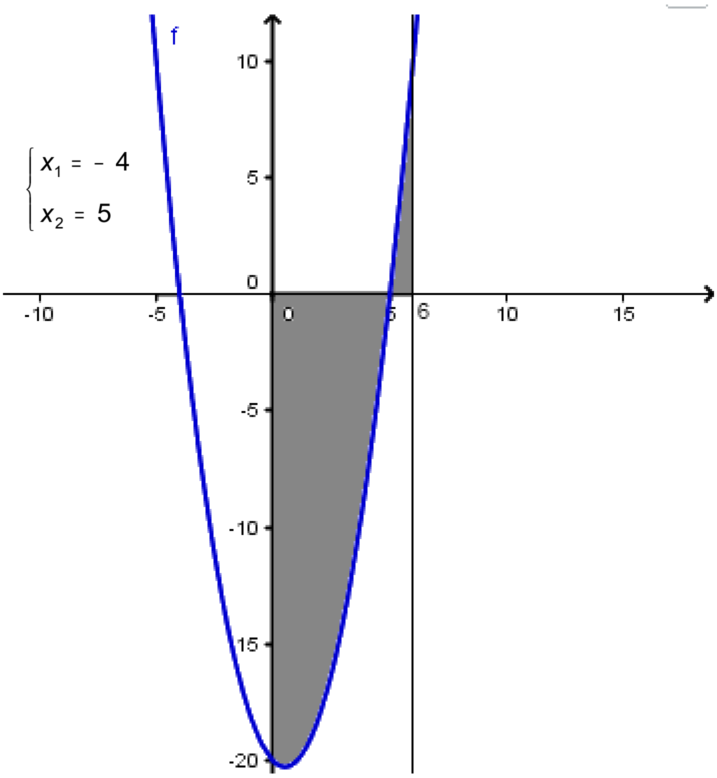
Halla el área del recinto limitado por la curva $y = x^2 - x - 20$ y el eje *X*, en el intervalo [0, 6].

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 - x - 20 = 0 \rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

(Solo nos sirve $x = 5$)



- Hay dos recintos: I $[0, 5]$, II $[5, 6]$

- $G(x) = \int \left(x^2 - x - 20\right) dx = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 20x + k$

- $G(0) = 0; \quad G(5) = \dfrac{-425}{6}; \quad G(6) = -66$

- Área del recinto I $= \left|G(5) - G(0)\right| = \dfrac{425}{6}$

Área del recinto II $= |G(6) - G(5)| = \dfrac{29}{6}$

- Área total $= \dfrac{425}{6} + \dfrac{29}{6} = \dfrac{454}{6} = \dfrac{227}{3}$ u^2

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

A partir de las siguientes probabilidades:

$$\boldsymbol{P[A] = 0{,}75; \quad P[B'] = 0{,}50; \quad P[A' \cap B'] = 0{,}05.}$$

Calcula $P[A \cup B]$, $P[A \cap B]$ y $P[A/B]$.

Solución:

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad P[A \cup B] = 0{,}95$

- $P[B'] = 0{,}50 \quad \Rightarrow \quad P[B] = 1 - 0{,}50 = 0{,}50$

  $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

  $0{,}95 = 0{,}75 + 0{,}50 - P[A \cap B] \Rightarrow P[A \cap B] = 0{,}3$

- $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

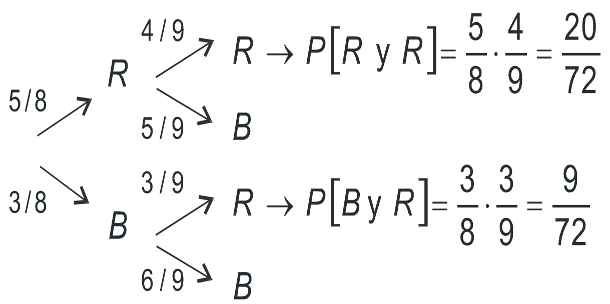
Una urna, I, contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Otra urna, II, tiene 3 bolas rojas y 5 blancas. Se extrae una bola de la urna I y se introduce en la urna II. Finalmente, se extrae una bola de la urna II. Calcula la probabilidad de que:

a) La segunda bola sea roja.

b) La primera sea roja si la segunda lo es.

Solución:

- Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[2^{a} R] = \dfrac{20}{72} + \dfrac{9}{72} = \dfrac{29}{72}$

b) $P[1^{a} R / 2^{a} R] = \dfrac{P[R \text{ y } R]}{P[2^{a} R]} = \dfrac{20/72}{29/72} = \dfrac{20}{29}$

Ejercicio nº 1.-

Un ganadero utiliza un pienso que tiene una composición mínima de 12 unidades de una sustancia A y otras 21 de una sustancia B. En el mercado solo encuentra dos tipos: uno con 2 unidades de A y 7 de B, cuyo precio es de 15 euros; y otro con 6 unidades de A y 3 de B, cuyo precio es de 25 euros.

¿Que cantidad ha de comprar de cada uno de modo que el coste sea mínimo?

Solución:

Llamamos x a la cantidad que compra del primer tipo e y a la cantidad que compra del segundo tipo.

Resumimos los datos en una tabla:

	CANTIDAD	A	B	PRECIO
1ER TIPO	x	$2x$	$7x$	$15x$
2º TIPO	y	$6y$	$3y$	$25y$
TOTAL		$2x+6y$	$7x+3y$	$15x+25y$

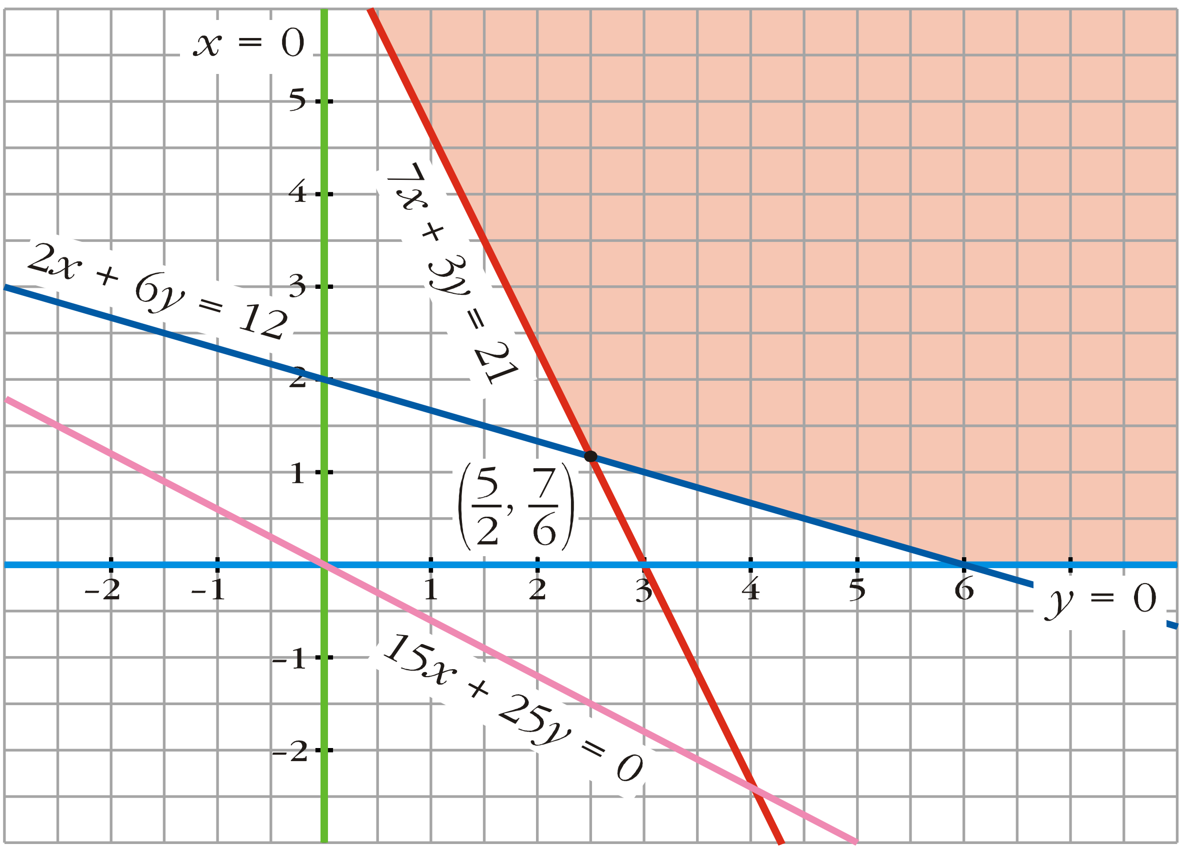
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\quad y \geq 0 \\ 2x+6y \geq 12 \quad \rightarrow \quad x+3y \geq 6 \\ 7x+3y \geq 21 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es $z = 15x + 25y$.

Debemos minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones, y la recta $15x + 25y = 0$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ $3x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 15x + 25y$:



- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas $\left.\begin{array}{l}7x+3y=21\\2x+6y=12\end{array}\right\}$, es decir, en $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{6}\right)$.

Por tanto, ha de comprar $\frac{5}{2}$ del primer tipo y $\frac{7}{6}$ del segundo tipo. En este caso el coste de:

$$z = 15 \cdot \frac{5}{2} + 25 \cdot \frac{7}{6} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67 \text{ euros.}$$

<u>Ejercicio nº 2.-</u>

Dibuja la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = (x^2 - x)\, e^x}$$

Solución:

- Dominio $= \mathbb{R}$
- Asíntotas:

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - x\right) e^x = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + x\right) e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ (y >0).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;;\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica.}$$

- Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = (2x - 1)\, e^x + (x^2 - x)\, e^x = (2x - 1 + x^2 - x)\, e^x = (x^2 + x - 1)\, e^x$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 + x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \to \quad \begin{cases} x \approx -1{,}62 \\ x \approx 0{,}62 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \nearrow & -1{,}62 & \searrow & 0{,}62 & \nearrow \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -1{,}62) \cup (0{,}62; +\infty)$; es decreciente en $(-1{,}62; 0{,}62)$. Tiene un máximo en $(-1{,}62; 0{,}84)$ y un mínimo en $(0{,}62; -0{,}44)$.

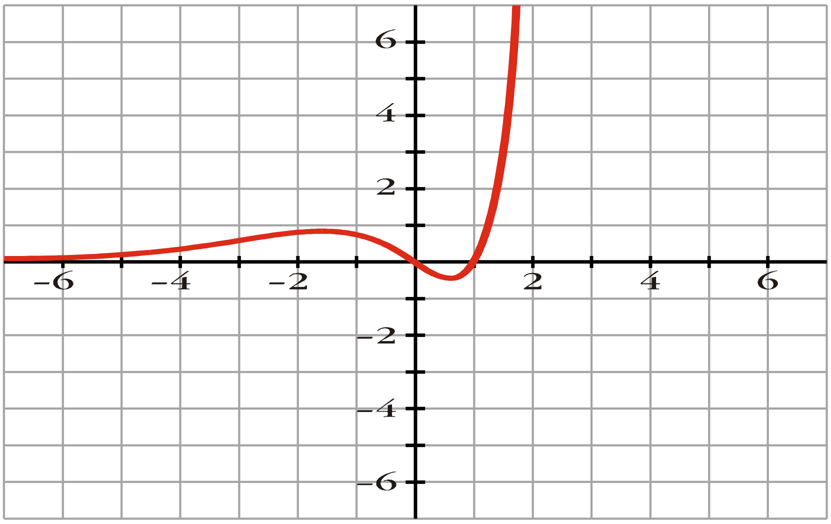
- Puntos de corte con los ejes:

– Con el eje Y $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = 0$ $\to$ Punto (0, 0)

- Con el eje X $\to$ $y = 0$ $\to$ $x^2 - x = 0$ $\to$ $x(x - 1) = 0$ $\to$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos (0, 0) y (1, 0).

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 3.-</u>

Sean *A* y *B* dos sucesos tales que:

$$P[A'] = 0{,}6; \quad P[B] = 0{,}3; \quad P[A \cap B] = 0{,}1.$$

Calcula $P[A \cup B]$, $P[A' \cup B']$ **y** $P[B/A]$.

Solución:

- $P[A'] = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad P[A] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

  $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

- $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

- $P[B/A] = \dfrac{P[B \cap A]}{P[A]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Una urna, I, contiene 3 bolas blancas, 2 rojas y una negra. Otra urna, II, contiene 2 bolas blancas, 3 rojas y 3 negras. Lanzamos una moneda al aire; si sale cara, extraemos una bola de la urna I, y si sale cruz, sacamos una bola de la urna II.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?
b) Si sabemos que la bola extraída ha sido roja, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la urna I?

Solución:

- Hacemos un diagrama en árbol:

$$
\begin{array}{lll}
 & & \xrightarrow{2/6} R \rightarrow P[\mathrm{I} \text{ y } R] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6} \\
\xrightarrow{1/2} & \mathrm{I} & \\
 & & \xrightarrow{4/6} \text{no } R \\
\xrightarrow{1/2} & \mathrm{II} & \xrightarrow{3/8} R \rightarrow P[\mathrm{II} \text{ y } R] = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{16} \\
 & & \xrightarrow{5/8} \text{no } R
\end{array}
$$

a) $P[R] = \frac{1}{6} + \frac{3}{16} = \frac{17}{48}$

b) $P[\mathrm{I}/R] = \frac{p[\mathrm{I} \text{ y } R]}{p[R]} = \frac{1/6}{17/48} = \frac{8}{17}$