1er examen de la 2ª evaluación

1. **Sea A =** $\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & m & 2m & 1 \end{pmatrix}$

   a) Estudiar el rango de A según los distintos valores de m.
   b) Hallar, si es posible |A| cuando m = 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & m & 2m & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a - 2\cdot 1^a} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -m & 2m & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4^a + \frac{m}{2}2^a]{3^a - \frac{3}{2}2^a} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 1 - \frac{3}{2}m \\ 0 & 0 & \frac{5m}{2} & -1 + \frac{m^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & m \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 1 - \frac{3}{2}m \\ 0 & 0 & \frac{5m}{2} & -1 + \frac{m^2}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 0 & -\frac{11}{2} & 1 - \frac{3m}{2} \\ 0 & \frac{5m}{2} & -1 + \frac{m^2}{2} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -\frac{11}{2} & 1 - \frac{3m}{2} \\ \frac{5m}{2} & -1 + \frac{m^2}{2} \end{vmatrix}$$

$|A| = 2\,m^2 - 5\,m + 11$. Teniendo en cuenta que esta expresión nunca se anula podemos afirmar que el rango de la matriz es 4 para cualquier valor de m.
$|A| = 14$ cuando m = 3.

2. **En una empresa de alimentación se dispone de 24 Kg. de harina de trigo y 15 Kg. de harina de maíz, que se utilizan para obtener dos tipos de preparados: A y B. La ración de preparado A contiene 200 gramos de harina de trigo y 300 gramos de harina de maíz, con 600 cal de valor energético. La ración B contiene 200 gramos de harina de trigo y 100 gramos de harina de maíz, con 400 cal de valor energético. ¿Cuántas raciones de cada tipo hay que preparar para obtener el máximo rendimiento energético total? Obtener el rendimiento máximo..**

La **tabla** asociada a la situación descrita es**:**

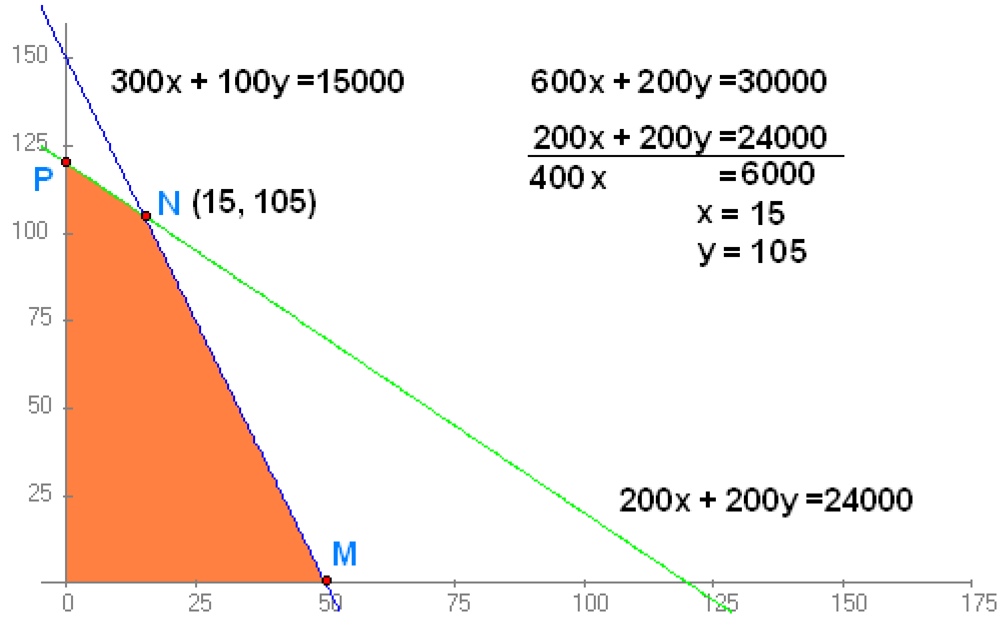
Tipo	Raciones	Harina de trigo	Harina de maíz	Calorías
A	x	200 x	300 x	600 x
B	Y	200 y	100 y	400 y

Las **restricciones** están determinadas por la cantidad disponible de harina de trigo 24000 gr. y de harina de maíz 15000 gr. y son:

$$200\,x + 200\,y \leq 24000$$
$$300\,x + 100\,y \leq 15000$$
$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

La **función objetivo** es $Z(x, y) = 600\,x + 400\,y$

La región factible asociada a la situación es:



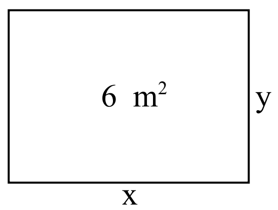
El rendimiento calórico es:

En el vértice M $\quad z(50, 0) = 30000$ calorías
En el **vértice N** $\quad$ **z(15, 105) = 51000 calorías → decisión óptima**
En el vértice P $\quad z(0, 120) = 48000$ calorías

3. Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,5 € y el de tramo vertical 3 €.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



a) Área $= x \cdot y = 6 \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$

Coste $= 2{,}5 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 5x + 6y$

$$\boldsymbol{C = 5x + \frac{36}{x}}$$

$$C' = 5 - \frac{36}{x^2} = 0 \rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2{,}68 \text{ m} \rightarrow y = \sqrt{5} \approx 2{,}24 \text{ m}$$

$$\left(C'' = \frac{72}{x^3};\ C''\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right) > 0 \rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ es mínimo}\right)$$

b) $C = 5 \cdot \dfrac{6\sqrt{5}}{5} + 6\sqrt{5} = 12\sqrt{5} \approx$ **26,83 €**

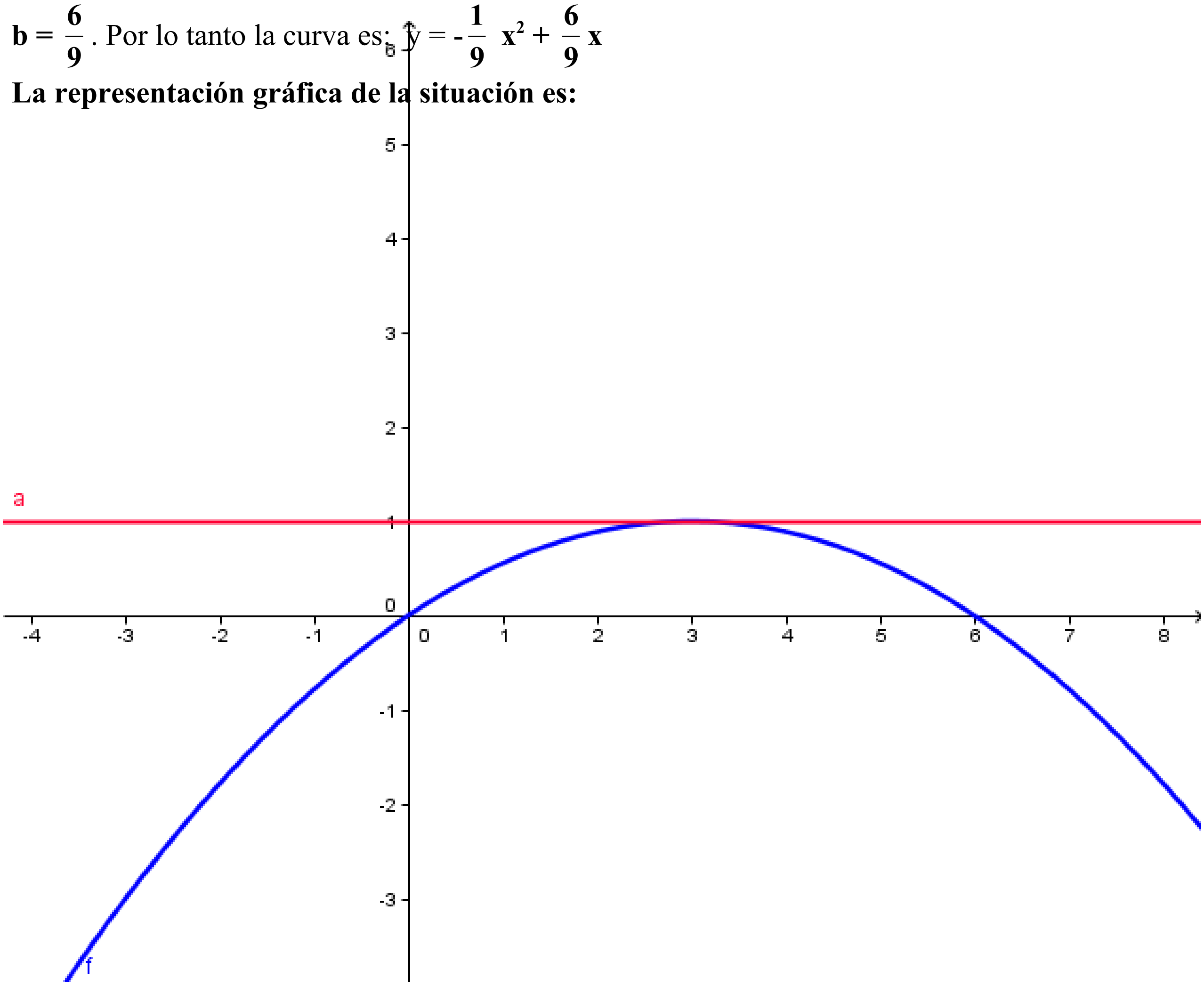
4. **De la curva $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ se sabe que es tangente a la recta $y = 1$ en el punto (3, 1) y que $f(6) = 0$ y $f(0) = 0$.**
Calcular a, b y c.

$f(0) = 0 \Rightarrow$ **$c = 0$**
$f(6) = 0 \Rightarrow 36a + 6b = 0$

f(x) tangente a y = 1 en (3,1) $\Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 1 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow -9a = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{9}$

$b = \dfrac{6}{9}$. Por lo tanto la curva es: **$y = -\dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{6}{9}x$**

La representación gráfica de la situación es:



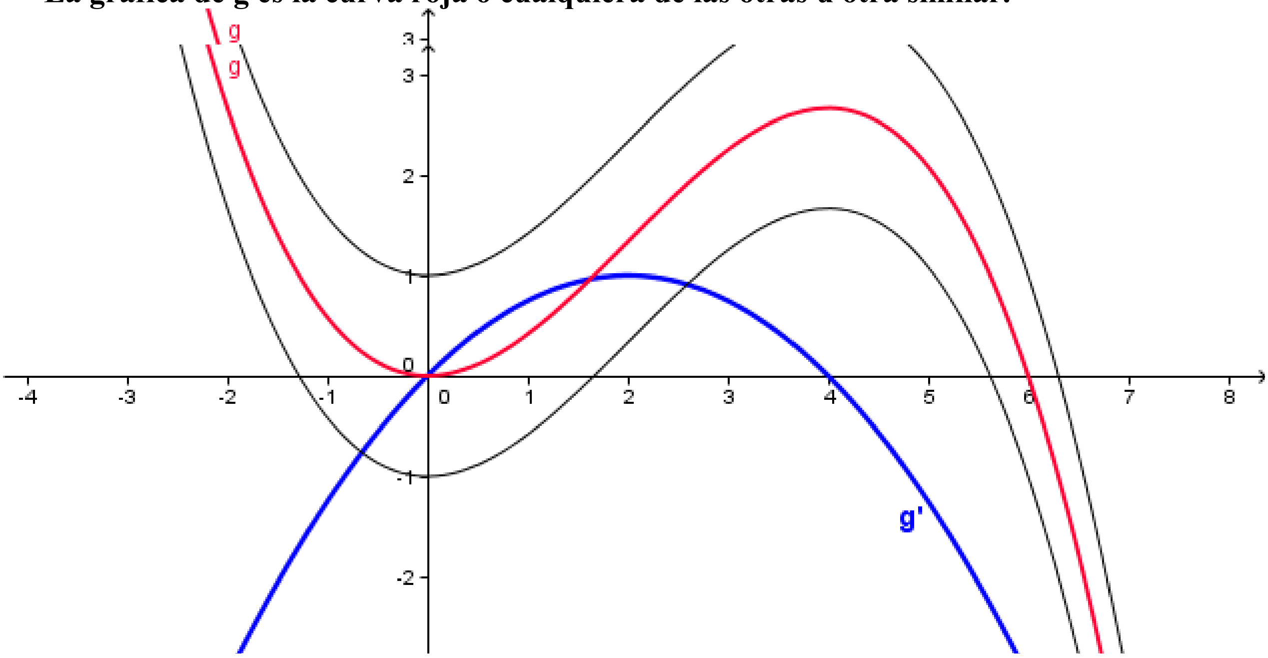
5. **Si la gráfica de la derivada de *g* es una parábola que corta al eje *OX* en (0,0) y (4, 0) y tiene por vértice (2, 1), ¿qué puedes decir del crecimiento y decrecimiento de *g*?**
Determina si la función *g* presenta máximos o mínimos.
¿Cuál es la ecuación de g'?

Toda parábola es de la forma: $y = a\,x^2 + b\,x + c$ puesto que g' lo es y pasa por (0, 0), (4, 0) y (2, 1)

podemos formar el sistema: $\left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ 16a + 4b = 0 \\ 4a + 2b = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$ **por lo que la ecuación de g' es:**

$$g'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x \quad \textbf{(parábola azul)}$$

La gráfica de g es la curva roja o cualquiera de las otras u otra similar.



Ya que hasta 0 la derivada es negativa por lo tanto la función g tiene que ser decreciente, en 0 g' pasa a ser positiva por lo que g pasa a ser creciente, teniendo un mínimo en x = 0, desde 0 a 4, g' es positiva por lo que g es creciente pero a partir de 4, g' es negativa por lo que g pasa a ser decreciente teniendo un máximo en dicho punto (x = 4, y = f(4)). La curvatura de g es la que se expresa en la gráfica.

6. Dado el sistema: $\left.\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 2 \\ ax+ & y+ & (a-1)z= & 1 \\ x+ & ay+ & z= & 2 \end{array}\right\}$

a) Discútelo en función del valor de a.

b) Resuélvelo en el caso $a = 1$ y representa gráficamente la situación.

Respuesta usando determinantes:

Si A es la matriz de los coeficientes observamos que | A | = a -1, por lo que:

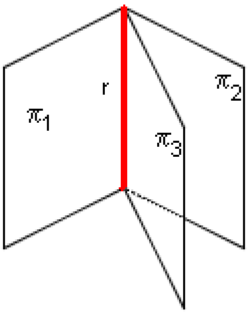
- Si a = 1→ rg(A) = 2 porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (1ª fila = 3ª fila)→ rg(A*) = 2

Por lo que si a = 1 resulta que el sistema es **Compatible Indeterminado.**

- Si $a \neq 1 \rightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*)$ por lo que el sistema será **Compatible Determinado**.

Cuando a =1, podemos prescindir de la tercera ecuación porque es igual que la primera y como la segunda ecuación quedaría de la forma: $x + y = 1$, si parametrizamos la incógnita y, esto es hacemos $y = \lambda$, obtenemos que: $x = 1 - \lambda$. El valor de z lo obtenemos sustituyendo los valores de x e y anteriores en la primera ecuación, obteniéndose que $z = 1$. La recta solución es la formada por el conjunto de puntos $S = \{(1-\lambda, \lambda, 1) / \lambda \in \Re\}$

La representación gráfica de la situación es:



Una solución particular, p. e. si $\lambda = 3$ es P(-2, 3 1)

Respuesta usando Gauss:

La matriz del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & a-1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[3^a-1^a]{2^a-a\cdot 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & -1 & 1-2a \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si **a = 1** nos quedan dos ecuaciones con tres incógnitas $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ -z = -1 \end{array}\right\}$

Donde: $\begin{cases} z = 1 \\ y = \lambda \\ x = 1 - \lambda \end{cases}$ por lo tanto la solución es: $S = \{(1-\lambda, \lambda, 1) / \lambda \in P\}$ Una solución particular, p. e. si $\lambda = 3$ es P(-2, 3 1)