SOLUCIONES 1^er^ examen 1º evaluación

Ejercicio nº 1.-

Estudia si son compatibles o no los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sea posible y da la interpretación geométrica del resultado obtenido en a).

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-2z=-4 \\ 2x+3y-z=-5 \\ x-5z=-7 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z-t=3 \\ -x+2y-z+t=2 \\ x+4y-z+t=-2 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |A|=0 \rightarrow ran(A)=2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ \hdashline 1 & 0 & -5 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A')=2$$

Como $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Podemos prescindir de la 3ª ecuación, que es combinación lineal de las dos primeras. Pasamos la z al 2º miembro y aplicamos la regla de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=-4+2z \\ 2x+3y=-5+z \end{array}\right\} \text{ Hacemos } z=\lambda.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -4+2\lambda \\ 2 & 3 & -5+\lambda \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -4+2\lambda & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -4+2\lambda \end{vmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-4+2\lambda & 1\\ -5+\lambda & 3\end{vmatrix}}{1}=-7+5\lambda;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -4+2\lambda\\ 2 & -5+\lambda\end{vmatrix}}{1}=\frac{3-3\lambda}{1}=3-3\lambda$$

Las soluciones son: $x=-7+5\lambda$; $y=3-3\lambda$; $z=\lambda$, con $\lambda\in\mathbb{R}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA $\rightarrow$ Se trata de tres planos que se cortan en una recta.

b) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0$

Además, $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 4 & -1\end{vmatrix}=0$ y la 4^{a} columna es $(-1)\cdot 3^{a}$. Por tanto, $ran\,(A$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 4 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=-22\neq 0\rightarrow ran\,(A')=3$$

Como $ran\,(A)\neq ran\,(A')$, el sistema es incompatible.

<u>*Ejercicio nº 2.-*</u>

Discute, y resuelve cuando sea posible, el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *a*:

$$\left.\begin{array}{l}x-y+az=1\\ x+ay+z=1\\ x\qquad -z=1\end{array}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2 \neq 0 \quad \text{para cualquier valor de } a.$$

Por tanto, *ran* (A) = *ran* (A') = *nº incógnitas* = 3. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de a, tenemos un sistema diferente, todos ellos tienen solución única. Lo resolveremos aplicando la regla de Cramer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & a & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right) \rightarrow |A| = -a^2 - a - 2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=1; \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=0; \quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{-a^2-a-2}=0$$

Cada uno de los sistemas que obtenemos, para cada valor distinto de a, tiene como solución única $(1, 0, 0)$.

<u>Ejercicio nº 3.-</u>

En una pastelería elaboran tres tipos de postres: *A*, *B* y *C*, utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican:

***A*: 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos.**

***B*: 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos.**

***C*: 1 litro de leche y 200 g de azúcar.**

El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0,8 euros el litro de leche, 1 euro el kg de azúcar, y 1,2 euros la docena de huevos.
Obtén matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

Solución:

El precio de cada litro de leche es de 0,8 euros; el precio de cada gramo de azúcar es de
0,001 euros; y el precio de cada huevo es de 0,1 euros.

Organizamos los datos que nos dan en dos matrices; su producto es la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & Az & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 100 & 4 \\ 3/4 & 112 & 7 \\ 1 & 200 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} L \\ Az \\ H \end{array}\!\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}001 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\!\begin{pmatrix} 1{,}1 \\ 1{,}412 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el postre A supone 1,10 euros, el B 1,41 euros; y el C, 1 euro.

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$**, calcula** A^2, A^4 **y** A^{33}**.**

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \left[-a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = a^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$A^{33} = A^{4\cdot 8+1} = \left(A^4\right)^8 \cdot A = \left[a^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^8 \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = a^{32} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^{33} \\ -a^{33} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Halla una matriz, X**, tal que** $AX = B$**, siendo:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Utilizando determinantes:

Despejamos X en la ecuación, multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Comprobamos que $|A| = -2 \neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a + 2^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & \end{array}\right.$$

$$\rightarrow\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones 1º de 1ª b

Ejercicio nº 1.-

Estudia la compatibilidad de los siguientes sistemas y resuélvelos si tienen solución. Interpreta geométricamente los resultados obtenidos:

a) $\left.\begin{aligned} 2x+3y&=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}$ **b)** $\left.\begin{aligned} x+y-3z&=0 \\ 2x-y+z&=4 \\ x+4y-10z&=-4\end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Multiplicando por 6 los dos miembros de la 2ª ecuación, obtenemos:

$2x+3y=10.$

Por tanto, las dos ecuaciones son iguales. El sistema es compatible indeterminado.

$$2x+3y=10 \quad \rightarrow \quad y=\frac{10-2x}{3}=\frac{10}{3}-\frac{2}{3}x$$

Las soluciónes son: $x=\lambda,\ \ y=\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\lambda,\ \ \text{con } \lambda\in\mathbb{R}.$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA $\rightarrow$ Las dos ecuaciones representan la misma recta en el plano.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema. Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \quad \text{y} \quad |A|=0 \rightarrow ran(A)=2$$

Hallamos el rango de la matriz ampliada:

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -10 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow ran(A')=2$$

Como *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *nº incógnitas,* el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3ª ecuación (que es combinación lineal de las dos primeras) y pasar la z al 2º miembro:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=3z \\ 2x-y&=4-z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &3x=4+2z \rightarrow x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}z \\ &y=3z-x=3z-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}z=\frac{-4}{3}+\frac{7}{3}z \end{aligned}$$

Hacemos $z = \lambda$.

Las soluciones son: $x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda;\ y = \frac{-4}{3} + \frac{7}{3}\lambda;\ z = \lambda,$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA $\rightarrow$ Los tres planos se cortan en una recta.

Ejercicio nº 2.-

Discute el siguiente sistema de ecuaciones, según los valores del parámetro *a*. Resolverlo en el caso $a = 3$:

$$\left.\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ ax + y + az &= 3 \\ x + ay + (a+2)z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a^3 - 2a^2 - a + 2 = (a-1)(a+1)(a-2)$$

$$|A| = 0 \rightarrow a = 1,\ a = -1,\ a = 2$$

- Si $a \neq 1,\ a \neq -1$ y $a \neq 2$ $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Las dos primeras ecuaciones son contradictorias. El sistema sería incompatible.

- Si $a = -1$, quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Las dos últimas ecuaciones son contradictorias. El sistema sería incompatible.

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 2 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Como $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$, el sistema será incompatible.

- Si $a = 3$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Ejercicio nº 3.-

Un hipermercado quiere ofertar tres clases de bandejas: *A*, *B* y *C*. La bandeja *A* contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja *B* contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja *C*, contiene 150 g de queso manchego, 80 g de roquefort y 80 g de camembert.
Si se quiere sacar a la venta 50 bandejas del tipo *A*, 80 de *B* y 100 de *C*, obtén matricialmente la cantidad que necesitarán, en kilogramos de cada una de las tres clases de quesos.

Solución:

Organizamos los datos que tenemos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos, con las cantidades en gramos.

$$\begin{array}{c} \\ M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 120 & 150 \\ 160 & 120 & 80 \\ 80 & 120 & 80 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{pmatrix} 26\,600 \\ 25\,600 \\ 21\,600 \end{pmatrix}$$

Si queremos las cantidades expresadas en kilogramos, haremos:

$$\frac{1}{1000} \cdot \begin{pmatrix} 26\,600 \\ 25\,600 \\ 21\,600 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{pmatrix} 26{,}6 \\ 25{,}6 \\ 21{,}6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 4.-

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^2, A^4 y A^{33}.

Solución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \left[-a^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^2 = a^4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^4 & 0\\ 0 & a^4\end{pmatrix}$$

$$A^{33} = A^{4\cdot 8+1} = \left(A^4\right)^8 \cdot A = \left[a^4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]^8 \cdot \begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} = a^{32}\cdot I \cdot \begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & a^{33}\\ -a^{33} & 0\end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

Halla una matriz, *X*, tal que $AX = B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

Solución:

- Utilizando determinantes:

Despejamos X en la ecuación, multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Comprobamos que $|A| = -2 \neq 0$ y hallamos A^{-1}:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

- Por método de Gauss:

Calculamos A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c}1^{a}\\ 2^{a}-3^{a}\\ 3^{a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a + 2^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$