Detalles matemáticos en el análisis de la escena interactiva “La espiral de Arquímedes”

La escena interactiva “La espiral de Arquímedes” introduce ésta mediante la composición de dos movimientos: uno rectilíneo uniforme y otro circular uniforme.

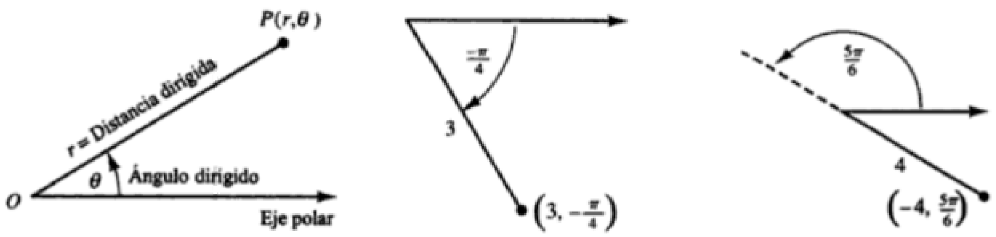
El movimiento rectilíneo uniforme sigue la ecuación $r = r_0 + v\,t$ donde r_0 es la posición inicial, v es la velocidad, t el tiempo y r la posición en el instante considerado.

> En la escena, la velocidad, una vez elegida, se mantiene constante en la simulación y está restringida a valores mayores o iguales que 0,5 (sólo por cuestiones estéticas en la animación). El tiempo se considera mayor o igual que cero. La posición inicial es seleccionable por el usuario y por defecto toma un valor negativo --queda a la izquierda de lo que será el centro de giro de coordenadas (0, 0), ubicado en el centro de la escena, y por tanto en la línea recta considerada se ubica en el semieje negativo--, así pues, r también toma valores negativos.
>
> En general, r_0, v y t puede considerarse que tomen cualquier valor real y consecuentemente r también podrá tomarlo. Los valores negativos en r_0 y r indican una posición relativa respecto al origen considerado, en t un instante anterior al considerado como inicial y en v un sentido coincidente con el del semieje negativo.

El movimiento circular uniforme sigue la ecuación $\theta = \alpha\,t$, donde α es la velocidad angular, t el tiempo y θ la posición angular.

> En la escena la velocidad angular α puede seleccionarse tanto positiva como negativa. El tiempo se ha considerado mayor o igual que cero.
>
> En general θ, α pueden tomar cualquier valor real y la interpretación de los signos es la usual de giro en sentido horario o anti-horario, y para t, igualmente al caso anterior, que sea un instante anterior o posterior al considerado como inicial.

La notación anterior se ha elegido con objeto de abordar la composición de esos dos movimientos y denotar ésta en coordenadas polares, reseñando que r se está considerando



una como distancia dirigida (puede tomar valores negativos y positivos) e igualmente θ es un ángulo dirigido (valores positivos y negativos)[1] --así pues, (-2, π) representa el mismo punto que (2, 0)--.

Consecuentemente,

$$\begin{cases} r = r_0 + v\,t \\ \theta = \alpha\,t \end{cases}$$

Eliminando t obtenemos la ecuación $r = r_0 + \frac{v}{\alpha}\theta$.

Y denotando $a = r_0$ y $b = \frac{v}{\alpha}$, obtenemos la ecuación en coordenadas polares de la espiral de Arquímedes, la cual depende de dos parámetros a, b:

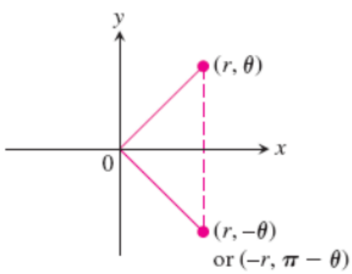
$$r = a + b\,\theta, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R} \text{ y } \theta, r \in \mathbb{R}.$$

En coordenadas cartesianas, los puntos $P(x, y)$ de esta curva vienen dados por:

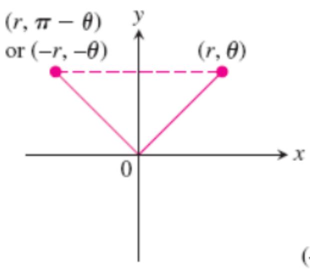
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

El análisis de esta función, o familia de funciones, nos conduce a las siguientes propiedades:

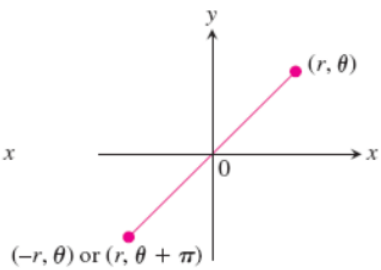
1. Pasa por el origen de coordenadas cartesiano (0, 0). Este punto se corresponde con el ángulo polar $\theta = -\frac{a}{b}$ y $r = 0$.
2. Si $b = 0$, entonces $r = a$, y se corresponde con una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $|a|$.
3. Si $b \neq 0$, puede observarse que la variación del parámetro a lo que genera es un giro de ángulo $\theta = -\frac{a}{b}$, para ello basta observar que $r = a + b\,\theta = b\left(\theta + \frac{a}{b}\right)$. Consecuentemente basta continuar el análisis considerando únicamente la dependencia del parámetro b, es decir, basta considerar el caso en que $a = 0$ y, por tanto, analizar la ecuación $r = b\,\theta$.
4. Apoyándose en las relaciones en coordenadas polares que permiten determinar las simetrías básicas, reflejadas en la siguiente imagen:



Simetría respecto eje abscisas



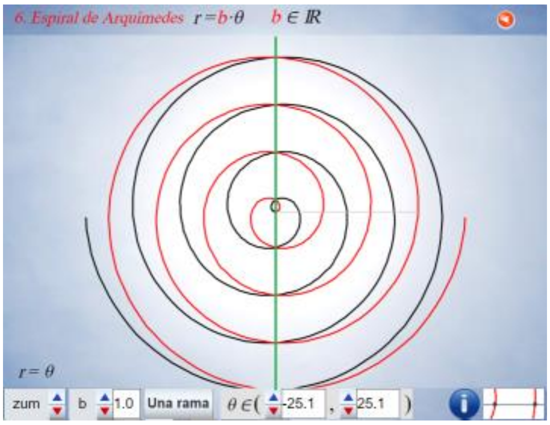
Simetria respecto eje de ordenadas



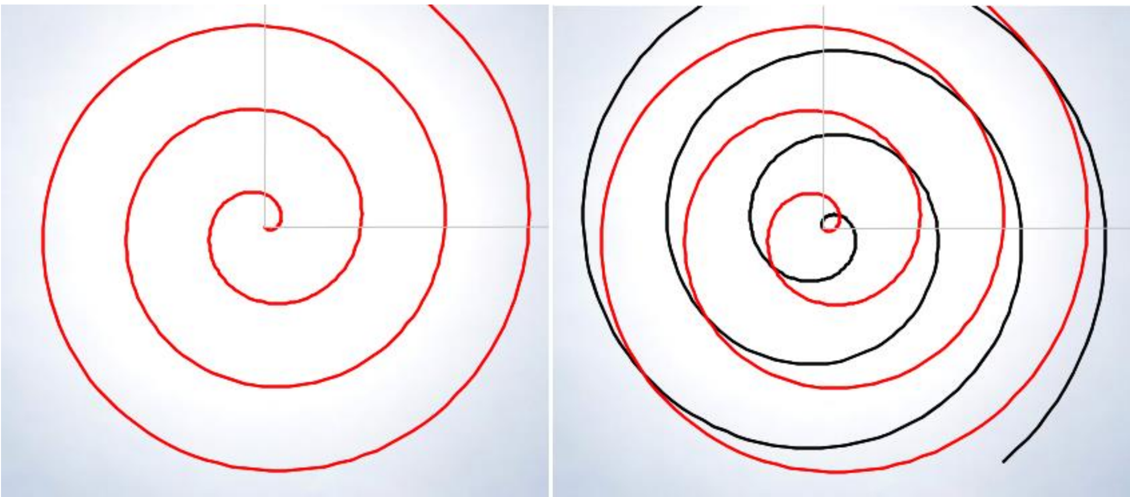
Simetría respecto origen de coordenadas

[1] Goodman, A. y Hirsch, L. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México 1996. p. 533 y ss. https://books.google.es/books?id=84mjXNXuZKEC
Thomas, G.B. Cálculo: Varias variables. Pearson Educación, 2006. p. 714. https://books.google.es/books?id=fcvPeAOIV-MC

Se comprueba que $r = b\,\theta$ es simétrica respecto a la recta polar $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$ en cartesianas) ya que tanto (r, θ) como $(-r, -\theta)$ verifican la misma ecuación. Y, por tanto, se pueden distinguir dos ramas: una para $\theta < 0$ y su simétrica que se corresponde con $\theta > 0$.



5. En base a lo indicado en los dos apartados anteriores, $r = a + b\,\theta$ es simétrica respecto a la recta polar $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{b}$ y se distinguen dos ramas: una para $\theta < -\frac{a}{b}$ y la simétrica para $\theta > -\frac{a}{b}$.



6. El ángulo que forma el radio vector con la recta tangente es:

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\theta + \frac{a}{b})^2}}$$

Basta tener en cuenta que:

- Radio vector $\vec{u} = \big((a + b\theta)\cos\theta,\ (a + b\theta)\ sen\ \theta\big)$
- Vector tangente $\vec{v} = (b\cos\theta - (a + b\theta)\ sen\ \theta, b\ sen\ \theta + (a + b\theta)\cos\theta)$
- $\cos\psi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

7. Las dos ramas se intersecan en los puntos que están en el eje de simetría, es decir, aquellos en los que $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{b} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.