Relaciones y Cambio

Un Viaje por las Matemáticas

Montserrat Gelis Bosch

RED educativa digital Descartes

Relaciones y Cambio

Un Viaje por las matemáticas

Montserrat Gelis Bosch

Fondo Editorial RED Descartes

2025

Título de la obra:
Relaciones y Cambio: Un Viaje por las matemáticas

Autora:
Montserrat Gelis Bosch

Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS, WebSim, Phet Colorado, GeoGebra, ...
Fuentes: Fuentes: Lato y UbuntuMono
Imagen de portada: Ilustración diseñada por pollination.ai, usando el modelo Flux

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm

ISBN: 978-84-10368-16-3

Tabla de contenido

Prefacio

La palabra *álgebra* proviene del árabe "al-jabr", que significa "recomposición" o "completar". Esta palabra apareció en el título del libro *Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala*, escrito en el siglo IX por el matemático persa Al-Juarismi. Su obra fue fundamental para el desarrollo del álgebra, ya que introdujo métodos para resolver ecuaciones, estableciendo las bases de la manipulación simbólica en matemáticas.

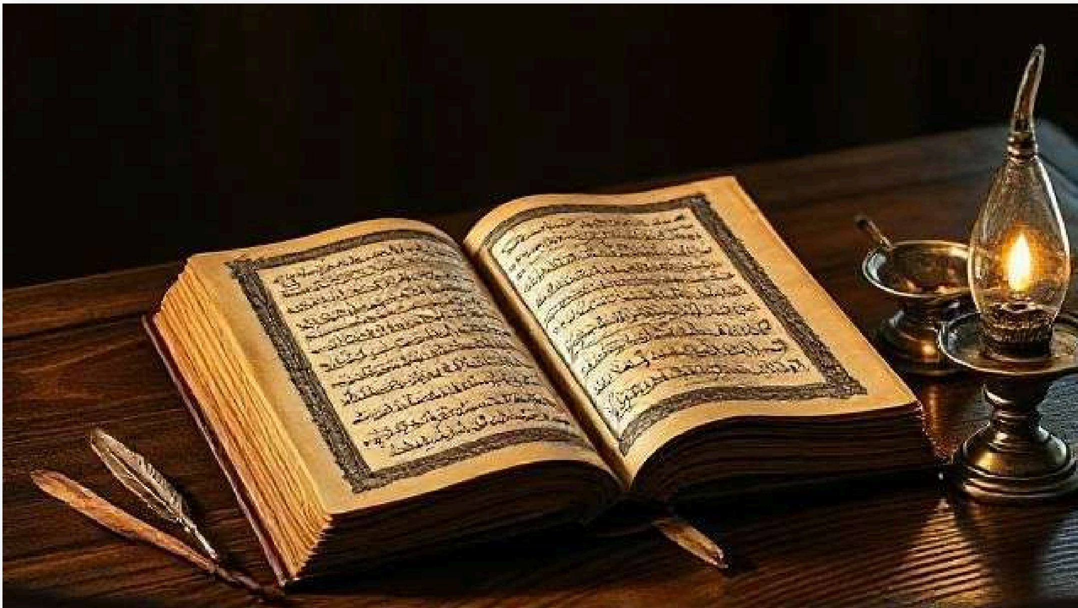


Figura 1. Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala

En muchas situaciones y fenómenos de la vida cotidiana aparece una relación entre dos variables. Las matemáticas están presentes en casi todo lo que hacemos, desde que nos despertamos por la mañana y calculamos cuánto tiempo nos queda para llegar al instituto, hasta cuando decidimos cuánto dinero ahorrar para un objetivo futuro, las matemáticas nos acompañan silenciosamente en cada decisión que tomamos.

Aunque a veces pasan desapercibidas, las usamos para medir, comparar, organizar y planificar nuestra vida. En particular, el álgebra, esa rama de las matemáticas que se vale de los símbolos para representar números y cantidades y las relaciones entre ellas, es una herramienta poderosa que nos ayuda a resolver problemas del mundo real de manera eficiente.

Las matemáticas nos ayudan a manejar el dinero, a entender los descuentos, el interés bancario, o a repartir un presupuesto de manera eficiente. Muchas veces deberemos resolver situaciones en las que intervienen valores desconocidos, como cuántos productos puedo comprar con una cierta cantidad de dinero.

Figura 2. Ofertas y descuentos

Cuando planeamos un viaje o una actividad, hacemos cálculos implícitos. Por ejemplo, al estimar cuánto tiempo llevará llegar a un destino o cuánto tiempo tenemos disponible en el día para diferentes tareas.

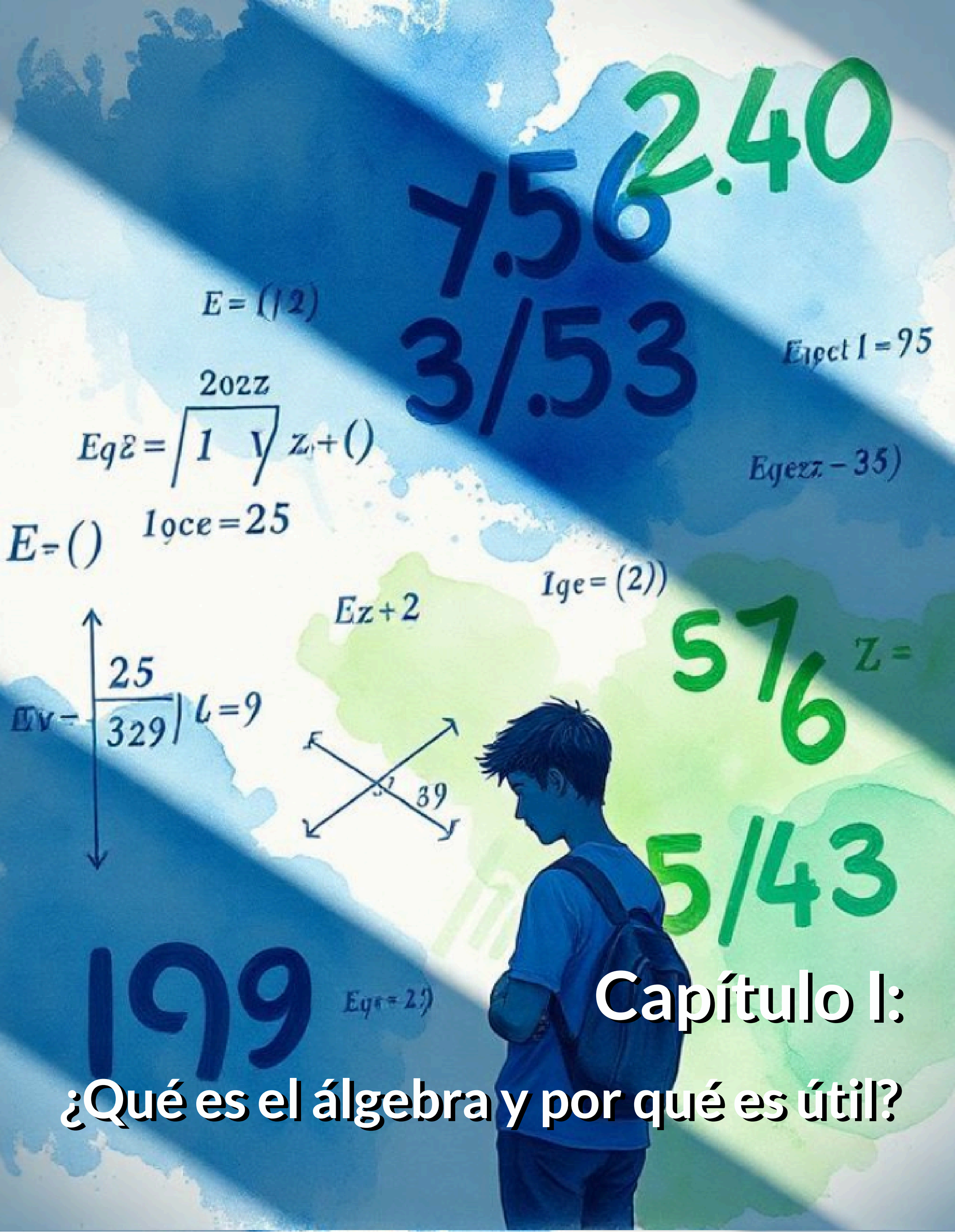
Desde la arquitectura hasta la decoración, las matemáticas nos ayudan a medir, organizar y distribuir espacios de manera eficiente.

Figura 3. Modelos matemáticos en arquitectura

El álgebra no solo sirve para resolver problemas inmediatos, sino que es la base para otras áreas del conocimiento. Ya sea para estudios más avanzados como la física o la economía, o para situaciones prácticas en la vida, dominar el álgebra abre puertas a una mayor comprensión del mundo.

Este viaje por las matemáticas no se trata solo de aprender a hacer cálculos; se trata de descubrir cómo las matemáticas, y en especial el álgebra, nos permiten entender mejor el cambio y las relaciones que existen en el mundo que nos rodea. Así, a lo largo de este libro, exploraremos cómo podemos usar el álgebra para representar situaciones cotidianas y predecir resultados de manera clara y precisa, se descubrirán conceptos que parecen abstractos al principio (como el uso de letras en lugar de números), pero que tienen aplicaciones claras en el día a día.

Introducción al Álgebra



Capítulo I:

¿Qué es el álgebra y por qué es útil?

1. ¿Qué es el álgebra y por qué es útil?

El álgebra es una herramienta fundamental para resolver problemas cotidianos, especialmente cuando necesitamos encontrar valores desconocidos en situaciones prácticas.

A continuación te presentamos algunos ejemplos de situaciones en nuestra vida diaria donde las matemáticas están presentes (incluso sin darse cuenta)

1.1 Situaciones cotidianas donde las matemáticas están presentes

1.1.1 Comprar refrescos para una fiesta

Figura 1.1. Comprar refrescos para una fiesta

Supón que estás organizando una fiesta y tienes un presupuesto específico para comprar refrescos. Cada refresco cuesta $\mathbf{2,05}$€, y necesitas comprar varios para que alcance para todos los invitados.

Tienes $\mathbf{75}$€ destinados a esta compra, y quieres saber cuántos refrescos puedes comprar sin exceder el presupuesto.

Para resolver este problema divides el presupuesto total por el precio de cada refresco:

$$\mathbf{75 : 2,05 \approx 36,59}$$

Esto significa que podrás comprar $\mathbf{36}$ refrescos, ya que solo puedes adquirir una cantidad entera.

De lo particular a lo general:

Cómo calcular el número de refrescos para cualquier presupuesto y precio.

Ahora, imagina que el presupuesto es variable. Si llamamos $\boldsymbol{P}$ al presupuesto y $\boldsymbol{x}$ al número de refrescos, la relación sería:

$$\boldsymbol{2,05x \leq P}$$

Esta desigualdad te permite calcular $\boldsymbol{x}$, el número de refrescos, para cualquier presupuesto:

$$\boldsymbol{x = Ent(P : 2,05)}$$

donde $\boldsymbol{Ent()}$ representa la parte entera del cociente.

Además, si también el precio de cada refresco es variable, representado como $\boldsymbol{p}$, la relación general sería:

$$\boldsymbol{x \cdot p \leq P}$$

o equivalente a

$$x = Ent(P : p)$$

Estas fórmulas nos permiten calcular el número de refrescos que puedes comprar para cualquier presupuesto y cualquier precio.

Actividad interactiva

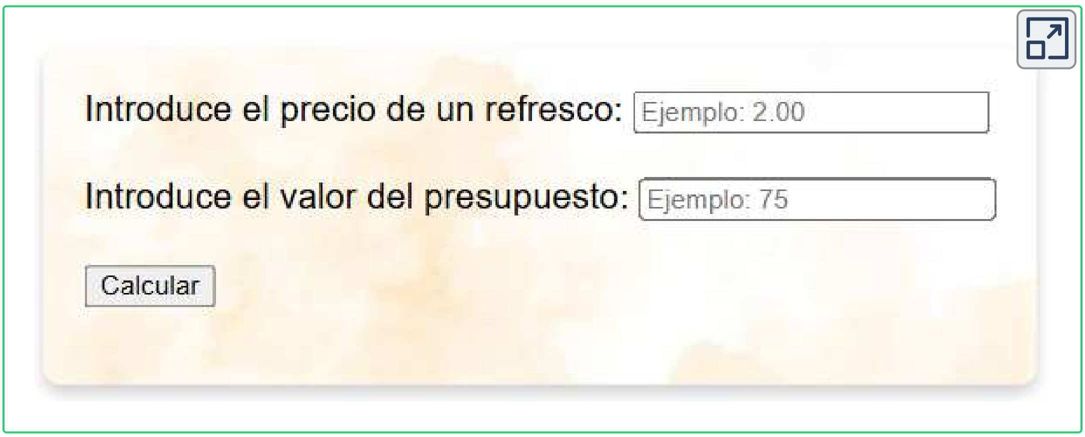
En la escena siguiente, aplica estas fórmulas:

1 Elige un valor para el precio de cada refresco p.

2 Indica un presupuesto P.

3 Calcula el número de refrescos que puedes comprar usando $x = Ent(P : p)$.

4 Comprueba tus resultados en la escena interactiva.



Generalizando el cálculo del número de refrescos que pueden comprarse, nos lleva a fórmulas que funcionan con presupuestos y precios variables.

1.1.2 Compartir los gastos de un viaje

Figura 1.2. Compartir los gastos de un viaje

Supón que organizas un viaje en autocar con algunos amigos. Los gastos incluyen el precio del autocar, gasolina y peajes, y decides dividirlos equitativamente entre todos.

El costo total del viaje es de $\mathbf{1840}$€, y viajan tú y quince amigos (es decir, $\boldsymbol{dieciséis}$ personas en total).

El costo por persona se calcula dividiendo:

$$\boldsymbol{p = 1840 : 16 = 115}$$

Cada persona debe pagar $\mathbf{115}$€

De lo particular a lo general:

Cómo calcular el costo por persona para cualquier costo total del viaje y número de amigos.

Ahora, imagina que el número de personas en el viaje puede variar. Si representamos:

- $\boldsymbol{P}$: el costo total del viaje,

- n: el número total de personas (incluyéndote),
- C: el costo por persona,

La relación general sería: $C = P : n$

Esto nos permite calcular cuánto debe pagar cada persona para cualquier cantidad de participantes y cualquier costo total del viaje.

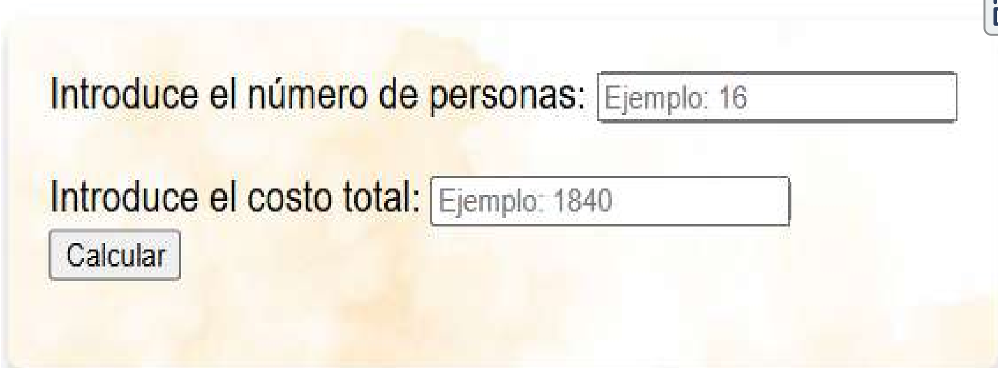
Actividad interactiva 🚌

1 En la siguiente actividad, escribe el número total de personas n.

2 Introduce el costo total del viaje P.

3 Calcula cuánto debe pagar cada persona utilizando la fórmula $C = P : n$.

4 Comprueba tus resultados en la escena.



1.1.3 Ajustar ingredientes para una receta

Figura 1.3. Ajustar ingredientes para una receta

Imagina que te dispones a hacer galletas usando una receta que dice que se necesitan $\mathbf{180}$ gramos de harina para hacer $\mathbf{20}$ galletas. Pero, en esta ocasión, quieres hacer $\mathbf{50}$ galletas. ¿Cuántos gramos de harina necesitas?

Llamemos $\boldsymbol{h}$ a la cantidad de harina necesaria para hacer $\mathbf{50}$ galletas.

Sabemos que $\mathbf{180}$ gramos de harina son suficientes para $\mathbf{20}$ galletas, así que planteamos una proporción:

$$\frac{\mathbf{180}}{\mathbf{20}} = \frac{\boldsymbol{h}}{\mathbf{50}}$$

Ahora resolvemos la proporción:

$$\boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{50} \cdot \mathbf{180}}{\mathbf{20}} = \mathbf{450}$$

Necesitarás $\mathbf{450}$ gramos de harina para hacer $\mathbf{50}$ galletas.

Al introducir una letra en lugar de un valor desconocido dentro de una proporción, y exigir que se cumpla la igualdad, pudimos ajustar las cantidades de la receta proporcionalmente para obtener exactamente la cantidad de galletas deseada.

Para encontrar una fórmula que determine la cantidad necesaria de harina para hacer un número cualquiera de galletas, procedemos de la siguiente manera:

Primero, calculamos la cantidad de harina necesaria para hacer una sola galleta:

$$\boldsymbol{h = \frac{180}{20} = 9 \quad gramos}$$

Si llamamos $\boldsymbol{g}$ al número de galletas que queremos hacer, la cantidad total de harina será:

$$\boldsymbol{9 \cdot g \quad gramos}$$

En estos ejemplos, has podido ver cómo encontrar una expresión con letras y números para cada problema nos permite generalizar y hallar soluciones de manera sencilla. Esto se logra simplemente sustituyendo el valor desconocido (variable) por el número que se indique.

En los siguientes capítulos de este libro, aprenderás a trabajar con el lenguaje del álgebra: operaciones que incluyen letras y números, relaciones entre variables a través de ecuaciones, y cómo aplicar estos conceptos para resolver problemas reales.

Puntos Clave:

Generalización de Problemas

En este capítulo, hemos explorado cómo problemas cotidianos, inicialmente planteados con valores específicos, pueden generalizarse mediante el uso del álgebra.

A través de tres ejemplos —la compra de refrescos, la división de gastos de un viaje y la preparación de galletas— hemos aprendido a construir fórmulas generales que nos permiten resolver problemas similares en situaciones más diversas.

- Compra de refrescos:

  Generalizamos el cálculo del número de refrescos que pueden comprarse al relacionar el presupuesto, el precio por unidad y la cantidad máxima posible. Esto nos llevó a fórmulas que funcionan con presupuestos y precios variables.

- División de gastos de un viaje:

  Partimos de dividir un costo fijo entre un número específico de personas y lo generalizamos, permitiendo calcular la cuota individual para cualquier cantidad de participantes y cualquier costo total del viaje.

- Preparación de galletas:

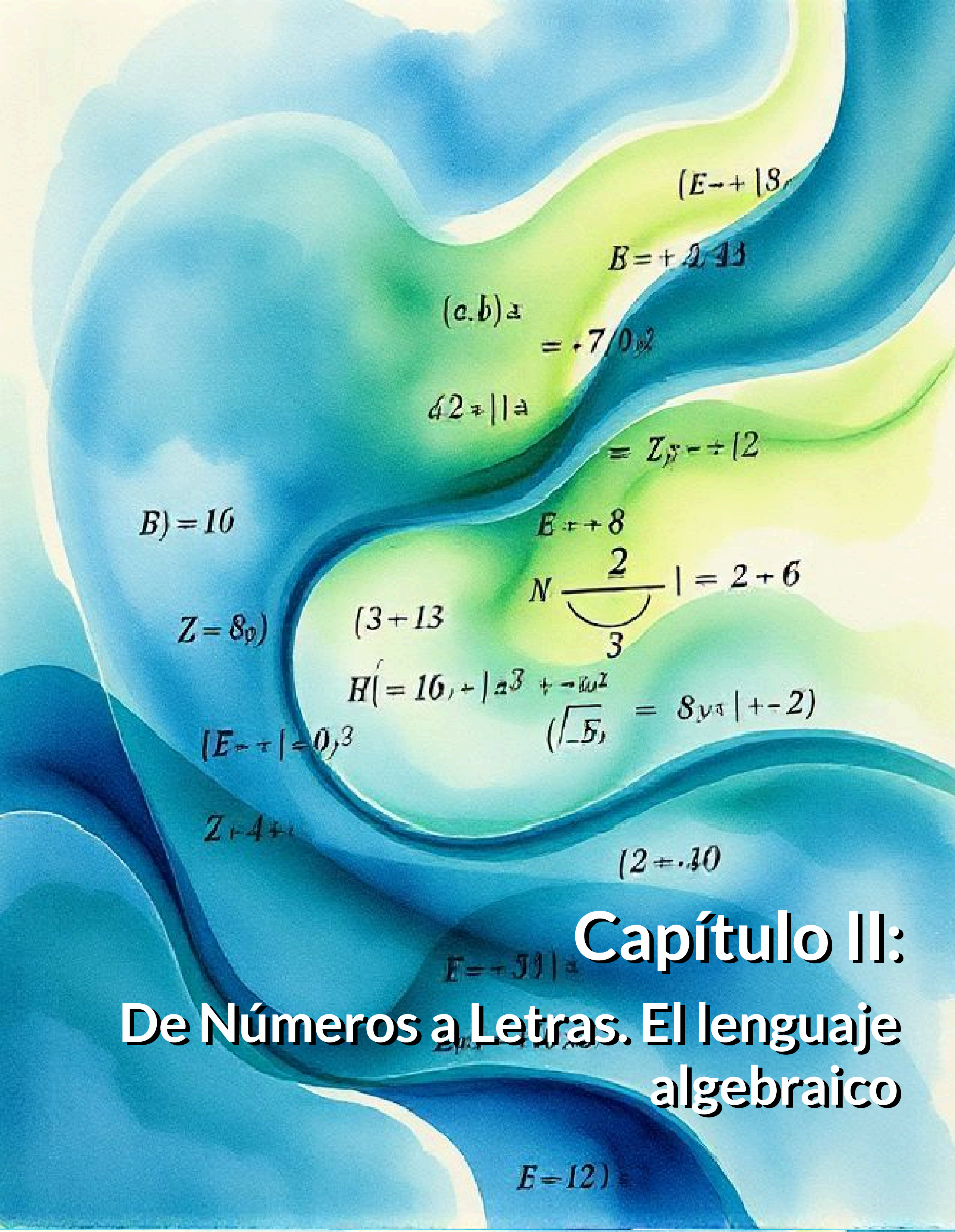
  Convertimos una receta fija en una fórmula que relaciona la cantidad necesaria de harina con el número de galletas deseado. Esto nos permite escalar la receta para cualquier cantidad de galletas.

La importancia del álgebra

El álgebra nos da herramientas para transformar problemas específicos en relaciones generales y universales. A través del uso de incógnitas, ecuaciones y desigualdades:

- Podemos representar situaciones variables y resolver problemas en diferentes contextos.
- Desarrollamos fórmulas que no solo simplifican cálculos, sino que también permiten realizar predicciones y tomar decisiones informadas.

Esta capacidad de generalización es una de las claves del pensamiento matemático: convierte problemas concretos en modelos abstractos que se aplican a múltiples escenarios, destacando la utilidad del álgebra en la vida diaria y en la resolución de problemas.



Capítulo II:

De Números a Letras. El lenguaje algebraico

2. De Números a Letras. El lenguaje algebraico

2.1 Analizando regularidades

Existen situaciones cotidianas que presentan ciertas regularidades. Estas regularidades permiten generalizar casos particulares y prever qué podría suceder. Para describir estas situaciones se utilizan letras que generalizan el uso de los números.

Este capítulo está formado por una serie de actividades interactivas que te permitan analizar las regularidades de una sucesión de figuras que inducen a deducir las fórmulas. Deberás analizar cada situación y buscar patrones hasta llegar a una expresión general utilizando letras para representar dichas relaciones.

El objetivo principal es que visualices los procesos y busques de forma muy intuitiva las relaciones existentes, investigues las reglas de formación e intentes transformar estas regularidades en notación algebraica.

2.1.1 Cartulinas de colores

Para una actividad de Educación Visual y Plástica, hemos comprado un número indeterminado de cartulinas de diferentes colores y tamaños.

Figura 2.1. Cartulinas de colores

Queremos usar las cartulinas para recortar distintas figuras geométricas.

A continuación se proponen una serie de actividades que te permitan averiguar la relación entre el número de cartulinas y el número de figuras geométricas obtenidas.

Actividad 1: Círculos

Figura 2.2. Recortar círculos verdes

Queremos usar las cartulinas verdes para recortar círculos 🟢

En siguiente escena, sigue estos pasos para explorar la relación entre el número de cartulinas utilizadas y el número de círculos obtenidos:

1️⃣ Introduce en la casilla un número de cartulinas verdes menor o igual que 10 y pulsa ***"Generar Círculos"***..

2️⃣ Observa cuántos círculos aparecen en pantalla.

3️⃣ Repite el proceso con diferentes valores y analiza la relación entre la cantidad de cartulinas introducida y el número de círculos obtenidos.

Ten en cuenta que en este ejemplo solo puedes introducir valores del 1 al 10.

A partir de los resultados de la escena anterior, al comparar el número de cartulinas utilizadas con la cantidad de círculos obtenidos, podrás notar una relación directa entre estas dos variables: el número de cartulinas y el número de círculos.

Teniendo en cuenta esta relación, responde las siguientes preguntas (pulsando el botón verificar podrás comprobar si tu respuesta es correcta):

Actividad 2: Triángulos

Figura 2.3. Recortar triángulos rojos

Ahora queremos recortar triángulos ▲ , para ello usaremos cartulinas rojas.

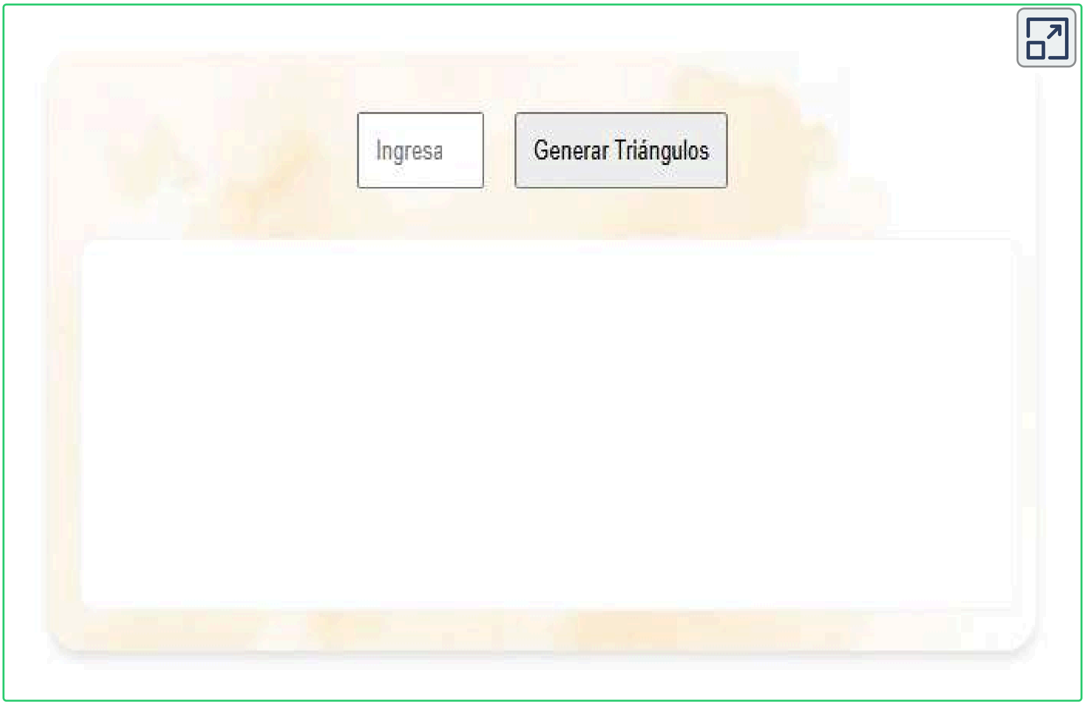
Como en la actividad anterior, en este caso buscamos una relación entre el número de cartulinas rojas y el número de triángulos obtenidos.

Sigue los mismos pasos que en la actividad anterior para explorar la relación entre el número de cartulinas utilizadas y el número de triángulos obtenidos:

1 Introduce en la casilla un número de cartulinas rojas menor o igual que 10 y pulsa el botón ***"Generar Triángulos".***

2 Observa cuántos triángulos aparecen en pantalla.

3 Repite el proceso con diferentes valores y analiza la relación entre la cantidad de cartulinas introducida y el número de triángulos obtenidos.



Al comparar el número de cartulinas rojas utilizadas con la cantidad de triángulos obtenidos, podrás notar que también hay una relación directa entre estas dos variables: el número de cartulinas y el número de triángulos. Teniendo en cuenta esta relación, responde las siguientes preguntas:

Observa:

- Para indicar el doble de un número $\boldsymbol{n}$, escribimos $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$; para el triple, $\mathbf{3}\boldsymbol{n}$. De manera similar, podemos escribir $\mathbf{4}\boldsymbol{n}$, $\mathbf{5}\boldsymbol{n}$, y así sucesivamente, cuando multiplicamos una variable por un número.

- La mitad de un número $\boldsymbol{c}$ se expresa como $\boldsymbol{c}/\mathbf{2}$, y un tercio de una variable $\boldsymbol{t}$ como $\boldsymbol{t}/\mathbf{3}$.

> Nota: En las actividades realizadas, el número de cartulinas debe ser un número entero. Por lo tanto, si el resultado de $\boldsymbol{c}/\mathbf{2}$ o $\boldsymbol{t}/\mathbf{3}$ no es un número entero (es decir, es decimal), se debe tomar el entero superior más próximo.

2.2 Observa el patrón y encuentra la relación entre las variables

En las siguientes actividades, al introducir diferentes valores iniciales, se generará un número determinado de figuras geométricas en pantalla. Analiza cómo cambia el número de figuras en función del valor ingresado y busca una relación matemática entre el valor inicial y el número de figuras obtenidas.

Con esta relación, trata de deducir una fórmula general que permita predecir el número de figuras geométricas para cualquier valor dado.

Actividad 1: Generador de cuadrados

Figura 2.4. Generador de cuadrados

1 Introduce en la casilla un número entero positivo menor o igual que 10 y pulsa el botón ***Generar Cuadrados.***

2 Observa cuántos cuadrados aparecen en pantalla.

3 Repite el proceso con diferentes valores y analiza la relación entre el número introducido y el número de cuadrados obtenidos.

A partir de los datos obtenidos en la escena anterior, completa la tabla siguiente:

Valor	Escribe el número de Cuadrados
1	Escribe aquí
2	Escribe aquí
3	Escribe aquí
4	Escribe aquí
5	Escribe aquí
10	Escribe aquí
16	Escribe aquí
100	Escribe aquí
x	Escribe aquí
n	Escribe aquí

Actividad 2: Generador de Círculos

Figura 2.5. Generador de Círculos

1 Introduce en la casilla un número entero positivo menor o igual que 10 y pulsa el botón ***Generar Círculos***.

2 Observa cuántos círculos aparecen en pantalla.

3 Repite el proceso con diferentes valores y analiza la relación entre el número introducido y el número de círculos obtenidos.

A partir de los datos obtenidos en la escena anterior, completa la tabla siguiente:

Valor	Escribe el número de Círculos
1	Escribe aquí
2	Escribe aquí
3	Escribe aquí
4	Escribe aquí
5	Escribe aquí
9	Escribe aquí
12	Escribe aquí
90	Escribe aquí
m	Escribe aquí
x	Escribe aquí

Actividad 3: Generador de Triángulos

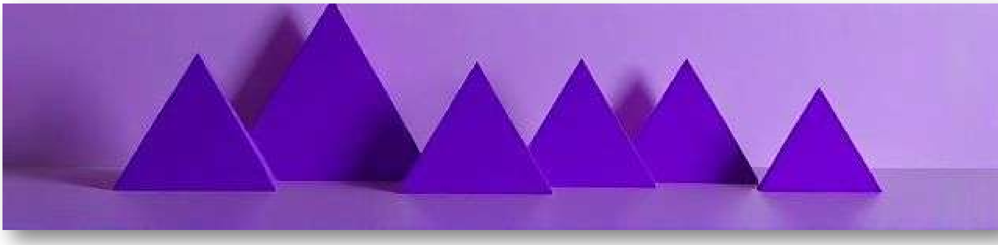


Figura 2.6. Generador de Triángulos

En esta última actividad, te presentamos un generador de triángulos. Ingresa un valor del 1 al 10 en la escena y observa cuántos triángulos aparecen. Intenta identificar la relación entre el número ingresado y la cantidad de triángulos generados. ¿Puedes descubrir una fórmula que relacione ambos?

1 Introduce en la casilla un número entero positivo menor o igual que 10 y pulsa el botón ***Generar Triángulos.***

A partir de los datos obtenidos en la escena anterior, completa la tabla siguiente:

Valor	Escribe el número de Triángulos
1	Escribe aquí
2	Escribe aquí
3	Escribe aquí
4	Escribe aquí
5	Escribe aquí
8	Escribe aquí
11	Escribe aquí
25	Escribe aquí

Puntos Clave:

Para representar operaciones con números y variables:

- ***Multiplicación:***
  El doble de un número $\boldsymbol{n}$ se expresa como $\mathbf{2}\boldsymbol{n}$, el triple como $\mathbf{3}\boldsymbol{n}$, y así sucesivamente: $\mathbf{4}\boldsymbol{n}$, $\mathbf{5}\boldsymbol{n}$, etc.

- ***Fracciones:***
  La mitad de un número $\boldsymbol{c}$ se escribe como $\boldsymbol{c}/\mathbf{2}$, y un tercio de una variable $\boldsymbol{t}$ como $\boldsymbol{t}/\mathbf{3}$.

- ***Suma:***
  La suma de una variable $\boldsymbol{x}$ y un número se representa con expresiones como $\boldsymbol{x}+\mathbf{5}$, $\boldsymbol{x}+\mathbf{2}$, $\boldsymbol{x}+\mathbf{6}$, etc. Por ejemplo, el doble de un número $\boldsymbol{x}$ más $\mathbf{3}$ se escribe como $\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}$.

- ***Potencias:***
  El cuadrado de un número $\boldsymbol{p}$ se denota como $\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}$, y su cubo como $\boldsymbol{p}^{\mathbf{3}}$.

A través de estas actividades, vemos cómo las expresiones algebraicas nos permiten representar y calcular fácilmente la cantidad de figuras generadas a partir de diferentes variables.

Estas fórmulas reflejan patrones y relaciones fundamentales, que resultan útiles para predecir resultados y comprender mejor los procesos matemáticos subyacentes en cada situación.

Casos particulares a tener en cuenta:

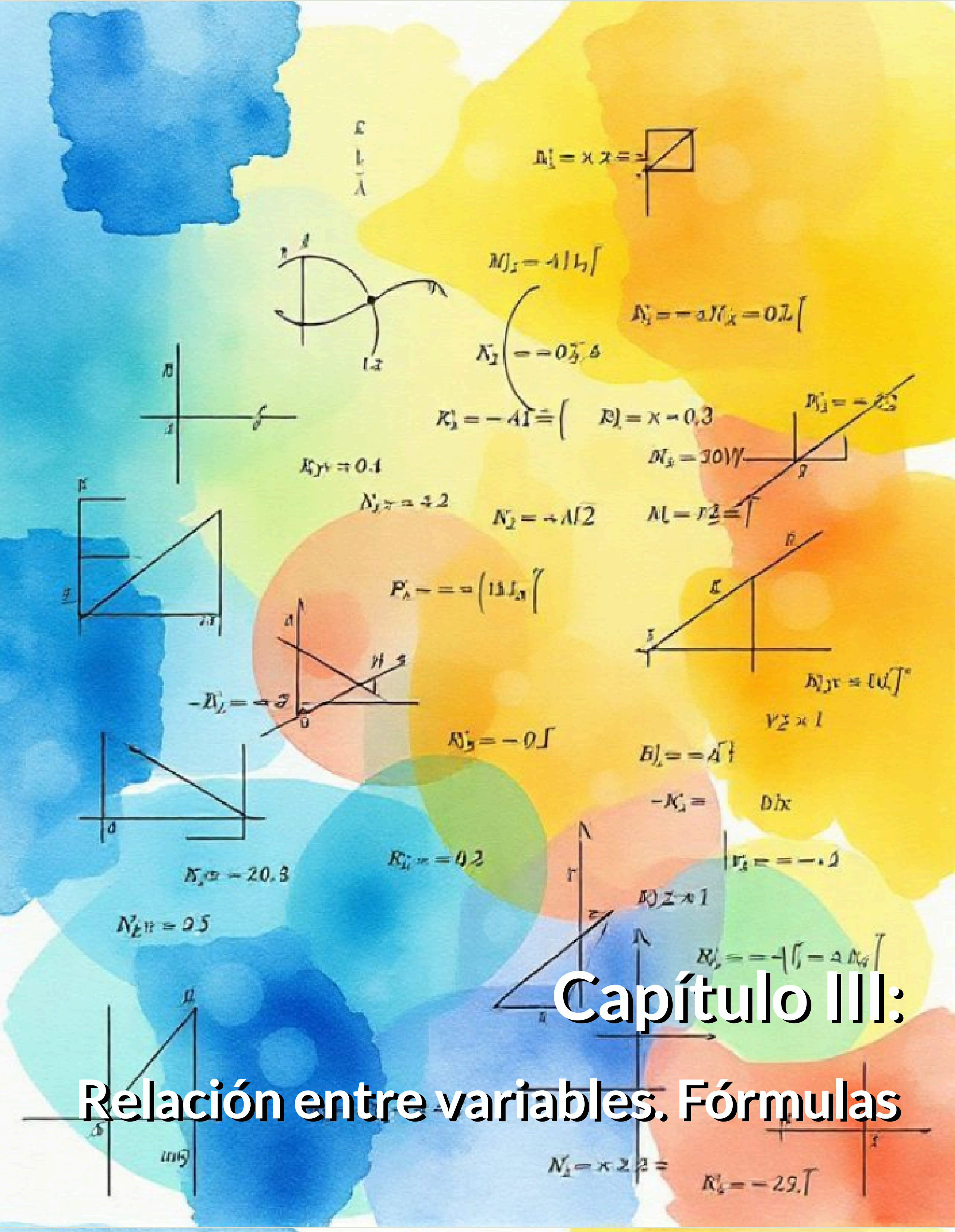
- El ***opuesto*** de un número $\boldsymbol{x}$ se representa como $-\boldsymbol{x}$. El ***inverso*** de un número se representa como $\mathbf{1}/\boldsymbol{x}$.

- El ***consecutivo*** de un número $\boldsymbol{x}$ se representa como $\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$.

- Un número ***par*** se escribe como $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$. Su consecutivo, como $\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$.

- Un número ***impar*** se escribe como $\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$.

- Un ***múltiplo*** de $\mathbf{3}$ se representa como $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$, un ***múltiplo de 4*** se escribe como $\mathbf{4}\boldsymbol{x}$...



Capítulo III:

Relación entre variables. Fórmulas

3. Relación entre variables. Fórmulas

3.1 Expresión matemática de una relación

Las relaciones entre variables son herramientas matemáticas que desempeñan un papel crucial, ya que permiten describir cómo cambian unas cantidades en función de otras.

Una relación entre variables se expresa a menudo mediante fórmulas, donde las letras representan cantidades que pueden variar. Estas fórmulas nos permiten realizar predicciones, resolver problemas y analizar patrones en diversas áreas, desde la física y la economía hasta situaciones cotidianas.

En este capítulo exploraremos cómo se construyen y utilizan estas fórmulas. Veremos cómo una relación matemática no solo nos ayuda a hallar el valor de una variable para cualquier número, sino que también nos brinda una forma poderosa de comprender y modelar situaciones complejas con precisión y claridad.

Figura 3.1. Manzanas en caída libre

Por ejemplo, en **física**, cuando un objeto cae libremente (sin resistencia del aire), la distancia que recorre $\boldsymbol{d}$ puede calcularse usando la siguiente fórmula: $\boldsymbol{d = \frac{1}{2}gt^2}$, donde:

- $\boldsymbol{d}$ es la distancia recorrida, medida en metros
- $\boldsymbol{g}$ es la aceleración debida a la gravedad, aproximadamente $\boldsymbol{9.8m/s^2}$ en la Tierra
- $\boldsymbol{t}$ es el tiempo de caída, medido en segundos

En la vida cotidiana, también usamos estas relaciones, como al calcular el costo de un producto según su cantidad, determinar la velocidad en función de la distancia y el tiempo, o analizar el crecimiento de una población a lo largo del tiempo.

En ***geometría***, las fórmulas son herramientas fundamentales para describir las relaciones entre diferentes elementos de las figuras.

Por ejemplo, las fórmulas para el ***perímetro*** nos permiten calcular la longitud total del borde de una figura plana, mientras que las fórmulas para el ***área*** nos ayudan a determinar la cantidad de superficie que cubre.

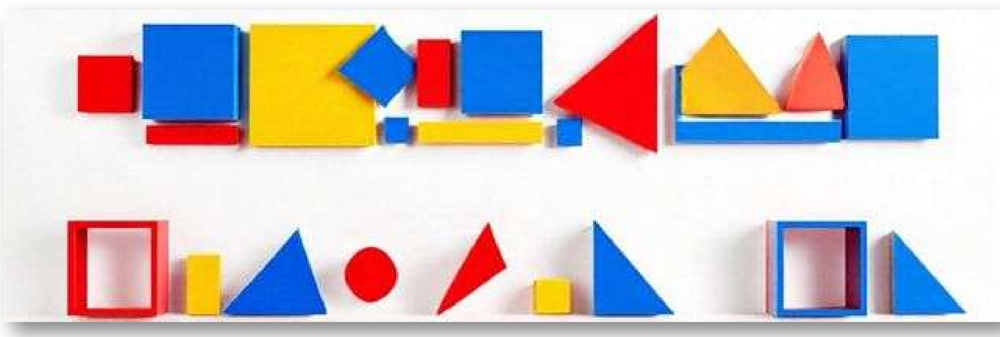


Figura 3.2. Figuras geométricas

Para los cuerpos geométricos tridimensionales, las fórmulas amplían su utilidad al calcular el ***área total*** o el ***volumen***, describiendo cómo se comporta el espacio ocupado por estos cuerpos.

Por ejemplo, al sustituir las letras de la fórmula del volumen de un cilindro ($\boldsymbol{A = \pi \cdot r^2}$) por números, podemos hallar el volumen de cualquier cilindro específico, sin importar su tamaño.

Estas relaciones se basan en variables que representan características específicas de las figuras, como longitudes, bases, alturas y radios. Estas fórmulas permiten que, a partir de relaciones generales, podamos resolver casos particulares. Sustituyendo las variables por valores numéricos conocidos, obtenemos resultados que nos ayudan a entender y resolver problemas concretos en diversas situaciones del mundo real. Así, las fórmulas geométricas son un puente esencial entre las ideas abstractas y las aplicaciones prácticas.

3.2 Fórmulas geométricas

Para reforzar este concepto, te proponemos una serie de actividades interactivas basadas en fórmulas geométricas. En estas actividades, podrás observar cómo se modifican el área y el perímetro de diferentes figuras geométricas al cambiar sus dimensiones. Utilizar las fórmulas te permitirá calcular estos valores fácilmente al sustituir los datos correspondientes.

1 Primera actividad: Introduce el valor del lado de un cuadrado. Calcula su perímetro y área, luego verifica si tus cálculos son correctos.

2 Segunda actividad: Introduce la base y la altura de un rectángulo. Calcula su perímetro y área y comprueba tus resultados en la escena.

3 Tercera actividad: Introduce la base y la altura de un triángulo. Calcula su área y verifica tu respuesta.

Primera actividad: Cuadrado

Introduce la medida de un lado para calcular el perímetro y el área del cuadrado:

Medida del lado:

Ingresa la medida del lado

Dibujar Cuadrado

Perímetro: Área:

Perímetro

Área

Verificar Respuestas Limpiar

Segunda actividad: Rectángulo

Introduce las medidas para calcular el perímetro y el área.

Base: Base

Altura: Altura

Dibujar Rectángulo

Limpiar

Perímetro: Perímetro

Área: Área

Verificar Respuesta

Tercera actividad: Triángulo

Introduce las medidas de la base y la altura para calcular el área del triángulo.

Base:

Base

Altura:

Altura

Dibujar Triángulo

Limpiar

Área:

Área

Verificar Respuesta

3.3 Calculando Descuentos: ¿Cuánto Ahorras?

Supongamos que un producto tiene un precio original de $\mathbf{250}$ euros, y queremos aplicar un $\mathbf{20}$% de rebaja.

Para calcular el descuento aplicado, usamos la proporción:

$$\frac{100}{20} = \frac{250}{x}$$

Resolviendo la proporción:

$$x = \frac{20 \cdot 250}{100} = \frac{20}{100} \cdot 250 = 0,20 \cdot 250 = 50$$

Por lo tanto, el descuento aplicado es $\mathbf{50}$ euros.

Descuento aplicado:

Podemos usar la siguiente fórmula para calcular el descuento aplicado en función del precio original P y d el porcentaje de descuento:

$$Descuento\ aplicado = \frac{d}{100} \cdot P$$

Por ejemplo, para un descuento del $\mathbf{20}$% y un precio original de $P = 250$ euros:

$$Descuento = 0,20 \cdot 250 = 50$$

Precio rebajado:

El precio final con descuento se calcula restando el descuento aplicado al precio original:

$$\boldsymbol{Precio\ rebajado = P\ -\ Descuento\ aplicado}$$

O directamente:

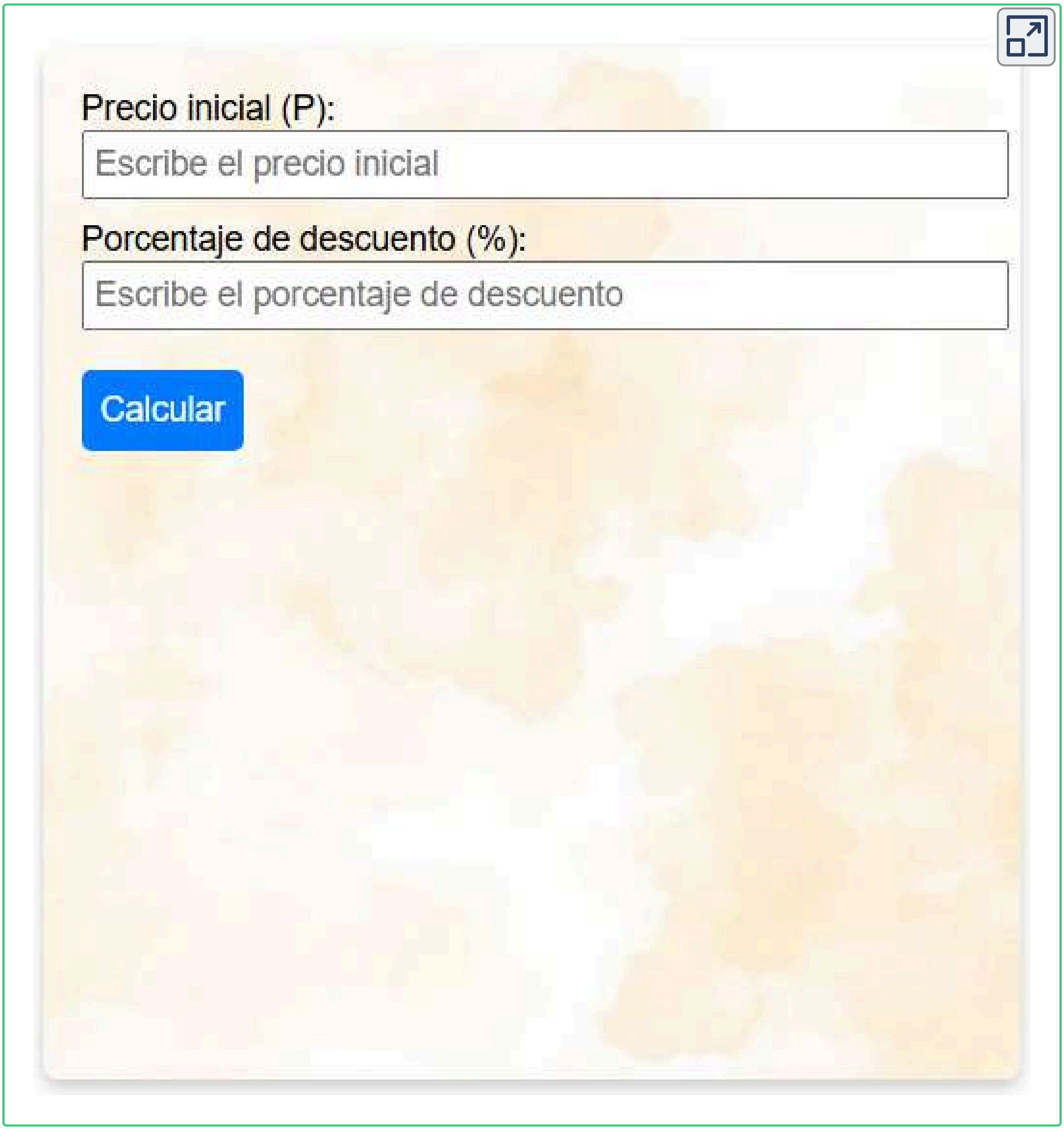
$$\boldsymbol{Precio\ rebajado = \frac{100 - d}{100} \cdot P}$$

Para el ejemplo del $\mathbf{20}$% de descuento:

$$\boldsymbol{Precio\ rebajado = \frac{80}{100} \cdot 250 = 0,8 \cdot 250 = 200}$$

Figura 3.3. Calculando Descuentos

Estas fórmulas permiten calcular tanto el descuento aplicado como el precio final de un producto, dados su precio original $\boldsymbol{P}$ y el porcentaje de descuento $\boldsymbol{d}$. En la siguiente escena, introduce diferentes valores en los campos correspondientes y aplica las fórmulas para calcular el descuento aplicado y el precio final para cada caso:



3.4 Cálculo de la velocidad de un automóvil

Figura 3.4. Velocidad de un automóvil

La velocidad media v de un automóvil se calcula utilizando la fórmula: $v = d/t$

Donde:

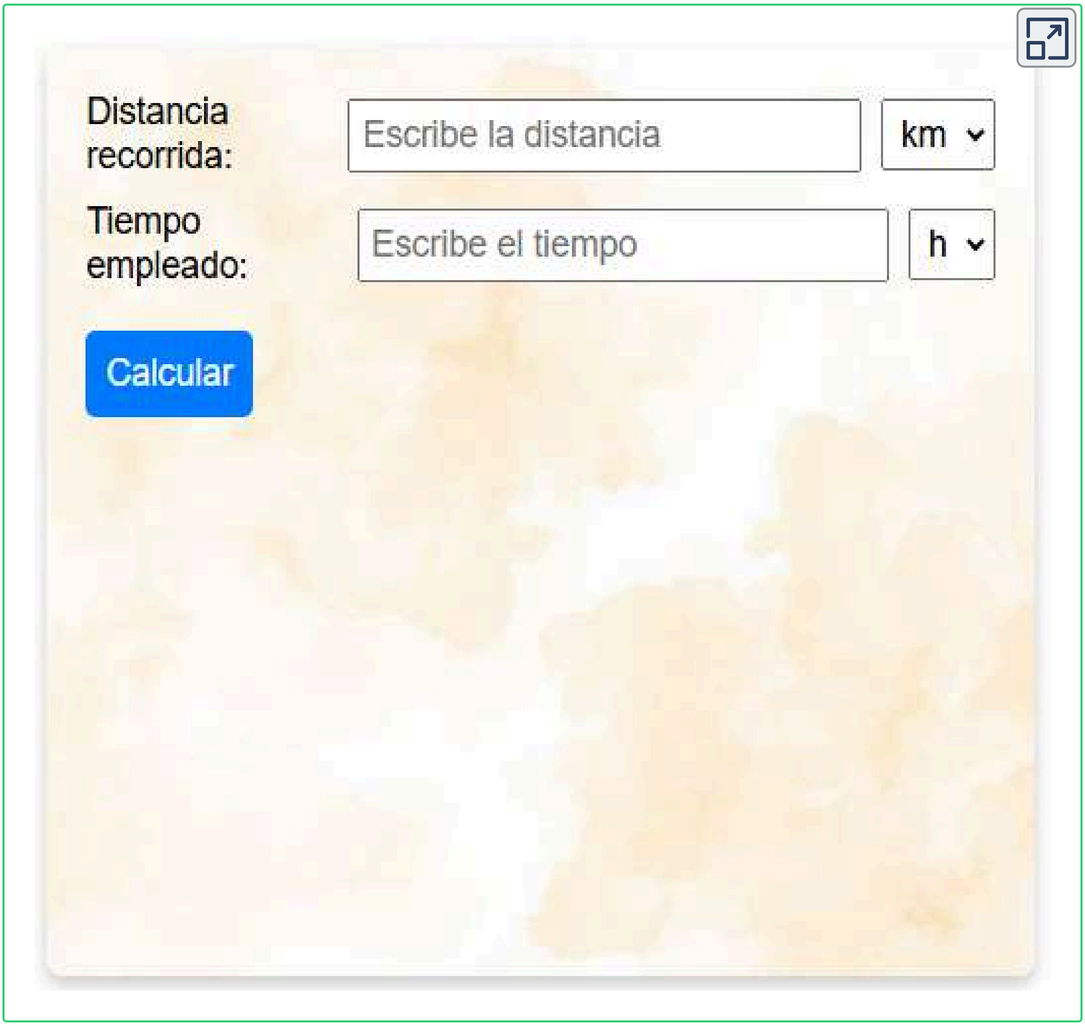
- v es la velocidad media, generalmente medida en metros por segundo (m/s) o kilómetros por hora (km/h)
- d es la distancia recorrida, medida en metros (m) o kilómetros (km)
- t es el tiempo empleado, medido en segundos (s) o horas (h)

Por ejemplo, un automóvil recorre una distancia de $120km$ en un tiempo de $2h$. ¿Cuál es su velocidad media? Para resolver este problema, usamos la fórmula: $v = d/t$ Sustituyendo los valores: $v = d/t = 120/2 = 60$ La velocidad media del automóvil es $60km/h$, lo que significa que, en promedio, recorre $60km$ cada hora.

Actividad interactiva

1 Introduce la distancia recorrida y el tiempo empleado para calcular la velocidad media.

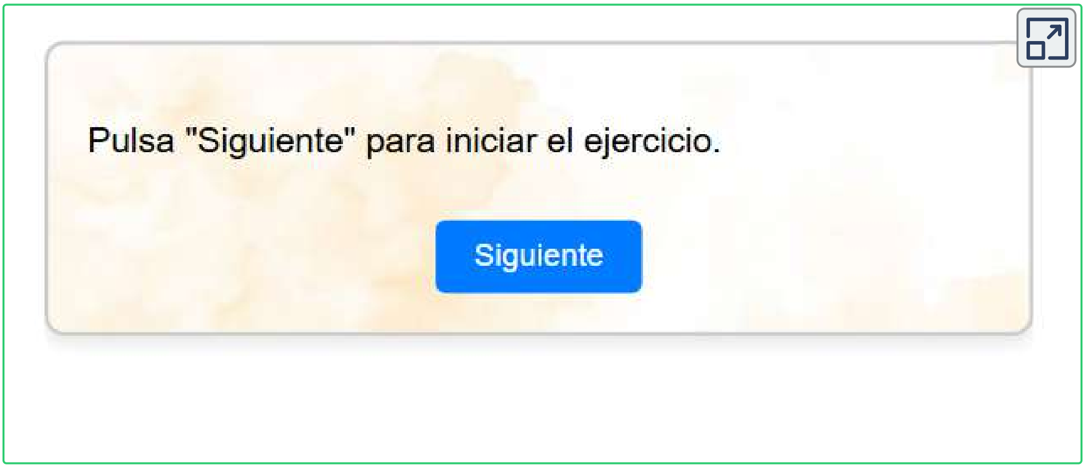
2 Introduce los valores de ***distancia*** y ***tiempo*** en las unidades que prefieras (km o m, h o s). Luego, selecciona si deseas que la velocidad se exprese en ***km/h*** o ***m/s***. El cálculo se ajustará automáticamente.



3.5 Valor numérico de una expresión algebraica

Después de aplicar fórmulas y resolver ejercicios prácticos, es importante entender un concepto fundamental en álgebra: calcular el ***valor numérico*** de una expresión algebraica. Este proceso consiste en asignar valores específicos a las variables de una expresión y realizar las operaciones indicadas para obtener un resultado numérico.

En la siguiente escena, se presentan algunos ejemplos que ilustran, paso a paso, cómo realizar los cálculos necesarios para obtener el valor numérico (amplía la escena para ver todo el procedimiento).



En la actividad interactiva de la página siguiente, se presentan diferentes expresiones algebraicas. Usando los valores asignados a las variables, calcula el ***valor numérico*** correspondiente.

Las respuestas correctas e incorrectas se indican mediante colores en el borde de los campos de entrada. Al pulsar el botón ***Otro Ejercicio***, se generarán nuevas expresiones algebraicas. Repite el ejercicio tantas veces como sea necesario para consolidar el concepto.

Calcula el valor numérico

.

Expresión 1: 8a + 1b

a = 2, b = 10

Introduce tu resultado

Expresión 2: 9x - 7y

x = -6, y = 9

Introduce tu resultado

Expresión 3: $3m^2$ -10n

m = -8, n = 3

Introduce tu resultado

Expresión 4: 10p / -10 + q

p = 7, q = 6

Introduce tu resultado

Verificar Respuestas

Otro Ejercicio

3.6 Traducción al Lenguaje Algebraico

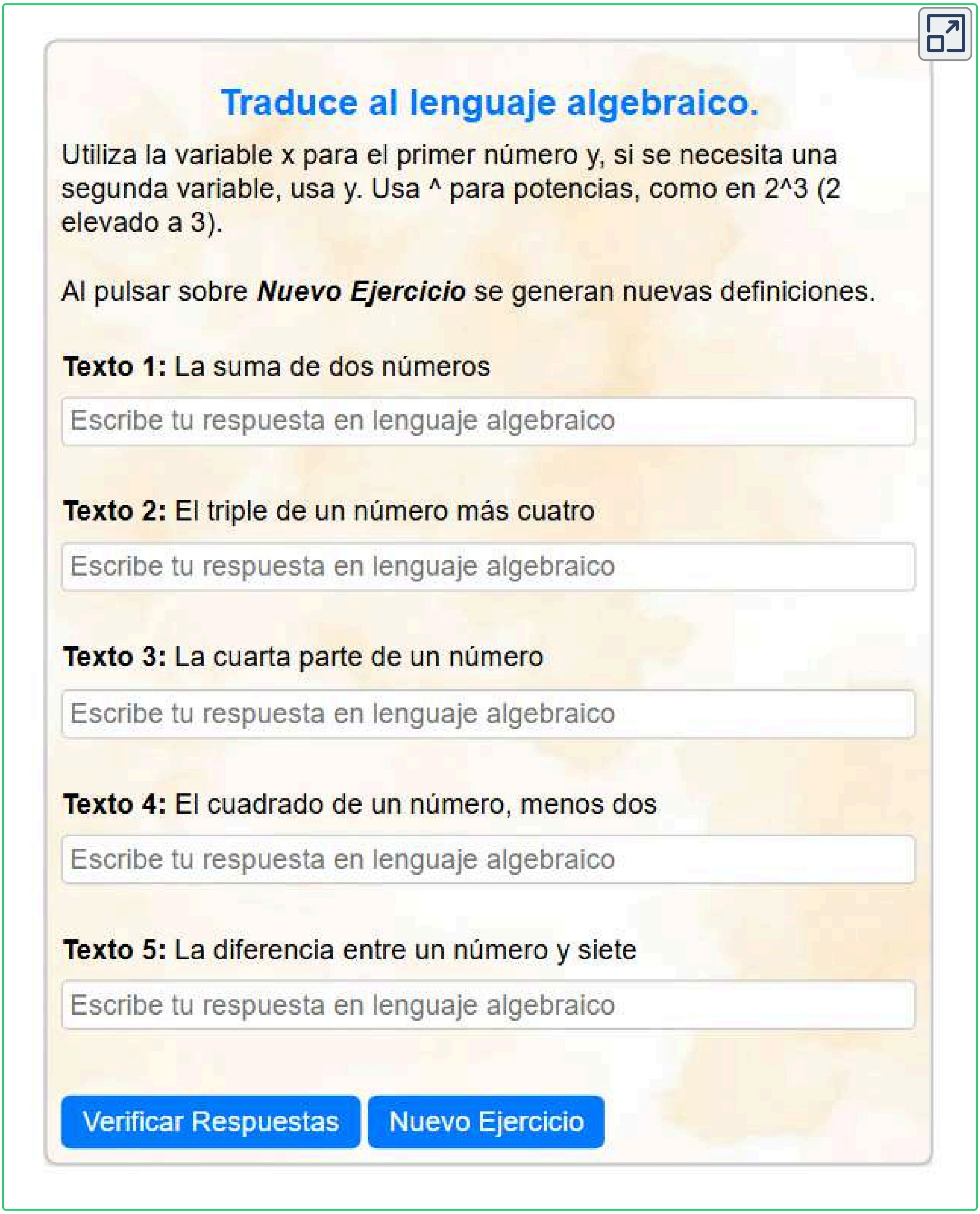
El lenguaje algebraico permite expresar relaciones y situaciones de forma general y compacta utilizando letras y números.

Pautas básicas para traducir expresiones verbales al lenguaje algebraico:

- El producto de un número por una letra: Cuando se multiplica un número por una letra, se omite el signo de multiplicación. Por ejemplo, el producto de $\boldsymbol{5}$ por $\boldsymbol{a}$ se escribe como $\boldsymbol{5a}$; El doble de un número $\boldsymbol{x}$, se escribe como $\boldsymbol{2x}$
- La mitad o el tercio de un número: Para representar la división de un número, se utiliza una fracción. Por ejemplo, la mitad de $\boldsymbol{x}$ es $\boldsymbol{x/2}$, y el tercio de $\boldsymbol{y}$ es $\boldsymbol{y/3}$

- La suma de dos números: La suma se representa utilizando el signo $+$. Por ejemplo, si los números son $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, su suma se escribe como $\boldsymbol{x+y}$.
- La diferencia de dos números: Para expresar la resta entre dos números, se utiliza el signo $-$. Por ejemplo, la diferencia entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se representa como $\boldsymbol{a-b}$.
- El cuadrado de un número: El cuadrado de un número se indica elevándolo a la potencia de $\boldsymbol{2}$. Si el número es $\boldsymbol{m}$, su cuadrado es $\boldsymbol{m^2}$.

A continuación, te proponemos una serie de actividades diseñadas para practicar y reforzar la traducción al lenguaje algebraico.



Traduce al lenguaje algebraico.

Utiliza la variable x para el primer número y, si se necesita una segunda variable, usa y. Usa ^ para potencias, como en 2^3 (2 elevado a 3).

Al pulsar sobre ***Nuevo Ejercicio*** se generan nuevas definiciones.

Texto 1: El cociente entre dos números

Escribe tu respuesta en lenguaje algebraico

Texto 2: El triple de un número más cuatro

Escribe tu respuesta en lenguaje algebraico

Texto 3: La diferencia de los cuadrados de dos números

Escribe tu respuesta en lenguaje algebraico

Texto 4: El doble de un número más el triple de otro número

Escribe tu respuesta en lenguaje algebraico

Texto 5: La décima parte de un número

Escribe tu respuesta en lenguaje algebraico

Verificar Respuestas | Nuevo Ejercicio

Empareja las definiciones con las expresiones algebraicas

1. El triple de un número, reducido en dos unidades:

--Selecciona una respuesta--

2. El consecutivo de un número:

--Selecciona una respuesta--

3. El doble de la quinta parte de un número:

--Selecciona una respuesta--

4. El 10% de un número:

--Selecciona una respuesta--

5. El opuesto de un número:

--Selecciona una respuesta--

6. El inverso de un número:

--Selecciona una respuesta--

Verificar respuestas Limpiar

Empareja las definiciones con las expresiones algebraicas

1. La mitad de la suma de dos números:

--Selecciona una respuesta--

2. El cuadrado de la suma de dos números:

--Selecciona una respuesta--

3. El cociente entre dos números:

--Selecciona una respuesta--

4. La suma de los cuadrados de dos números:

--Selecciona una respuesta--

5. La quinta parte de la diferencia de dos números:

--Selecciona una respuesta--

6. El producto de dos números:

--Selecciona una respuesta--

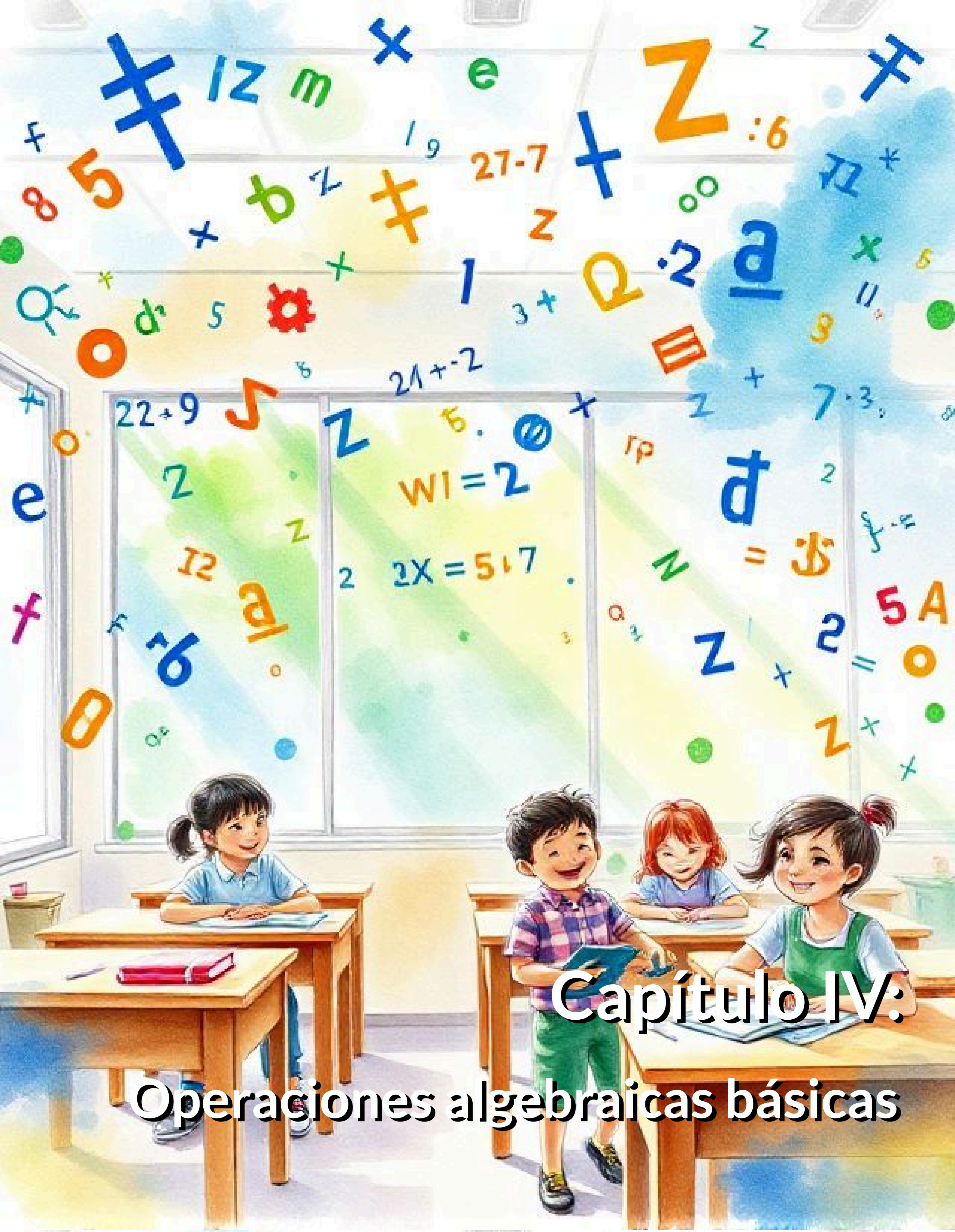
Verificar respuestas | Limpiar

Puntos Clave:

- En los primeros ejercicios de este capítulo has podido comprobar cómo, a partir de fórmulas concretas relacionadas con la geometría, porcentajes o velocidad, es posible resolver diversas situaciones particulares.

- Calcular el ***valor numérico*** de una expresión algebraica implica sustituir las variables por valores específicos y realizar los cálculos correspondientes hasta obtener un resultado numérico.

- Traducir expresiones del lenguaje cotidiano al ***lenguaje algebraico*** permite aplicar las normas matemáticas de manera sistemática, facilitando la obtención de los resultados necesarios.



Capítulo IV:

Operaciones algebraicas básicas

4. Operaciones algebraicas básicas

4.1 Transformaciones algebraicas

Las ***expresiones algebraicas*** son combinaciones de letras y números unidas por los signos de las operaciones matemáticas.

En una expressión algebraica encontramos números que multiplican letras, las letras forman la ***parte literal*** y los números son los ***coeficientes***. Por ejemplo en la expresión $\boldsymbol{12x}$, el coeficiente es $\mathbf{12}$ y la parte literal es $\boldsymbol{x}$.

Expresión	Coeficiente	Parte literal
5x/3	Escribe aquí	Escribe aquí
-m/2	Escribe aquí	Escribe aquí
$4x^2$	Escribe aquí	Escribe aquí
$7y^3$	Escribe aquí	Escribe aquí
-5z	Escribe aquí	Escribe aquí
$12a^2b$	Escribe aquí	Escribe aquí

Expresión	Coeficiente	Parte literal
$5x/3$	Escribe aquí	Escribe aquí
$-m/2$	Escribe aquí	Escribe aquí
$4x^2$	Escribe aquí	Escribe aquí
$7y^3$	Escribe aquí	Escribe aquí
$-5z$	Escribe aquí	Escribe aquí
$12a^2b$	Escribe aquí	Escribe aquí

Las ***operaciones algebraicas*** son las operaciones matemáticas que se realizan con expresiones algebraicas, es decir, aquellas que contienen letras (como x , y , z , etc.) que representan números desconocidos o variables.

Estas operaciones son herramientas esenciales para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, trabajar con variables, analizar funciones y resolver problemas que involucren cantidades variables, entre otros.

Una expresión algebraica está formada por uno o mas ***términos***. Decimos que dos o más términos son ***semejantes*** cuando tienen la misma parte literal.

4.2 Suma y Resta

La suma de expresiones algebraicas se realiza sumando términos semejantes, es decir, aquellos que tienen la misma variable y el mismo exponente. Para sumar o restar expresiones algebraicas sumaremos y restaremos los coeficientes de los términos que son semejantes.

Ejemplos:

$\boldsymbol{2x+7x-5x}$. Los términos $\boldsymbol{2x}$, $\boldsymbol{7x}$ y $\boldsymbol{-5x}$ son semejantes y se pueden sumar:

$$\boldsymbol{2x+7x-5x=(2+7-5)x=4x}$$

$\boldsymbol{6ab-ab}$. Aquí los términos $\boldsymbol{6ab}$ y $\boldsymbol{ab}$ son semejantes, sumamos los coeficientes:

$$\boldsymbol{6ab-ab=(6-1)ab=5ab}$$

$\boldsymbol{11m^2+3m}$. En este caso, los términos $\boldsymbol{11m^2}$ y $\boldsymbol{m}$ tienen distintas partes literales y no se pueden sumar.

En las expresiones algebraicas, es común encontrar términos que combinan diferentes partes literales (variables) y también términos que son constantes (es decir, sin parte literal). Estas expresiones pueden ser más complejas o variadas dependiendo de las combinaciones de coeficientes, variables y operaciones.

Ejemplos:

$\boldsymbol{2m+5-m}$. En este caso son semejantes los términos $\boldsymbol{2m}$ y $\boldsymbol{-m}$:

$$\boldsymbol{2m+5-m=(2-1)m+5=m+5}$$

En la expresión $\boldsymbol{pq+2q-10+4pq-5q+2}$, se identifican distintas partes literales. Por un lado, están los términos $\boldsymbol{pq}$ y $\boldsymbol{4pq}$, por otro lado, los términos $\boldsymbol{2q}$ y $\boldsymbol{-5q}$. Además, incluye las constantes $\boldsymbol{-10}$ y $\boldsymbol{2}$:

$$\boldsymbol{pq+2q-10+4pq-5q+2=}$$

$$\boldsymbol{=(1+4)pq+(2-5)q-10+2=5pq-3q-8}$$

En la expresión $\mathbf{3}a+\mathbf{5}b-\mathbf{7}c$ los términos $\boldsymbol{3a}$, $\boldsymbol{5b}$ y $\boldsymbol{-7c}$ tienen distintas partes literales (variables) y no se pueden sumar.

Reducir a términos semejantes:

Es un procedimiento algebraico que consiste en simplificar una expresión combinando los términos que tienen la misma parte literal, es decir, los mismos símbolos de variables elevados a los mismos exponentes.

Proceso a seguir para ***reducir a términos semejantes***:

- Identificar los términos semejantes: Son aquellos que tienen exactamente las mismas variables y exponentes, aunque sus coeficientes puedan ser diferentes.
- Sumar o restar los coeficientes de los términos semejantes, manteniendo la misma parte literal.
- Escribir la expresión simplificada, agrupando los términos semejantes combinados y dejando los demás sin cambios.

Ejemplo:

Simplificar: $\boldsymbol{4x + 3y - 2x + 5y - 3}$

Identificar términos semejantes: $\boldsymbol{4x}$ y $\boldsymbol{-2x}$, así como $\boldsymbol{3y}$ y $\boldsymbol{5y}$

Operar: $\boldsymbol{(4x - 2x) + (3y + 5y) - 3 = 2x + 8y - 3}$

La expresión reducida es: $\boldsymbol{2x + 8y - 3}$

4.3 Multiplicación y División

Multiplicar/Dividir un término algebraico por un número

- Multiplica o divide el coeficiente del término algebraico por el número.
- Aplica las normas del producto o cociente de números reales.

Ejemplos:

$$2 \cdot (3x) = (2 \cdot 3)x = 6x$$

$$-5 \cdot (4pq) = (-5 \cdot 4)pq = -20pq$$

$$(5m) : 3 = \frac{5}{3}m$$

$$\frac{1}{7} \cdot (4n^2) = \frac{4}{7}n^2$$

Multiplicar/Dividir varios términos algebraicos por un número

- Multiplica o divide el número por los coeficientes de cada término.
- Usa la propiedad distributiva para realizar la operación:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ejemplos:

$$2\cdot(5x-3)=(2\cdot 5x)-2.3=10x-6$$

$$-4\cdot(7-3e)=(-4\cdot 7)+(-4)\cdot(-3e)=-28+12e$$

$$(2+12m):3=\frac{2}{3}+\frac{12}{3}m=\frac{2}{3}+4m$$

$$\frac{2}{5}\cdot(7x+5)=\frac{2}{5}\cdot 7x+\frac{2}{5}\cdot 5=\frac{14}{5}x+2$$

Multiplicar/Dividir dos términos algebraicos

- Multiplica o divide los coeficientes de los dos términos algebraicos aplicando las normas del producto o cociente de números reales.
- Multiplica o divide las variables de los dos términos algebraicos aplicando las reglas de los exponentes en caso de tratarse de la misma variable:

$$x^a\cdot x^b=x^{a+b} \qquad \frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$$

Ejemplos:

$$(2x)\cdot(5x)=(2\cdot 5)(x\cdot x)=10x^2$$

$$(-8a^3):(2a)=(-8:2)(a^3:a)=-4a^2$$

Reduce a términos semejantes.

Al pulsar sobre ***Nuevo Ejercicio*** se generan nuevas definiciones.

Texto 1: 3m-m+4m-m

Escribe esta expresión simplificada

Texto 2: p+2q-10+4p-5q+2

Escribe esta expresión simplificada

Texto 3: 2x+7x-5x

Escribe esta expresión simplificada

Texto 4: 2x+5-x

Escribe esta expresión simplificada

Texto 5: 6x-2-8x+15

Escribe esta expresión simplificada

Verificar Respuestas | Nuevo Ejercicio

Calcula y reduce a términos semejantes.

Al pulsar sobre ***Nuevo Ejercicio*** se generan nuevas definiciones.

Texto 1: 6(2+5x)

Escribe esta expresión simplificada

Texto 2: -(-a)+(2-a)

Escribe esta expresión simplificada

Texto 3: 3(-2a)

Escribe esta expresión simplificada

Texto 4: (3a+b)-(2a-3b)

Escribe esta expresión simplificada

Texto 5: -2(v+1)+3(2-v)

Escribe esta expresión simplificada

Verificar Respuestas | Nuevo Ejercicio

En el siguiente ejercicio, selecciona la respuesta correcta para cada pregunta. Repite la actividad tantas veces como lo necesites.

Reducce a términos semejantes: $\frac{x}{3} - \frac{4x}{5} + \frac{x}{15}$

- ○ $\frac{-2x}{5}$
- ○ $\frac{2x}{5}$
- ○ $\frac{-2x}{15}$
- ○ $\frac{-2x}{3}$
- ○ $\frac{-2x}{3}$

Haz clic en el círculo de la respuesta correcta

4.4 Producto de Binomios

Propiedad Distributiva

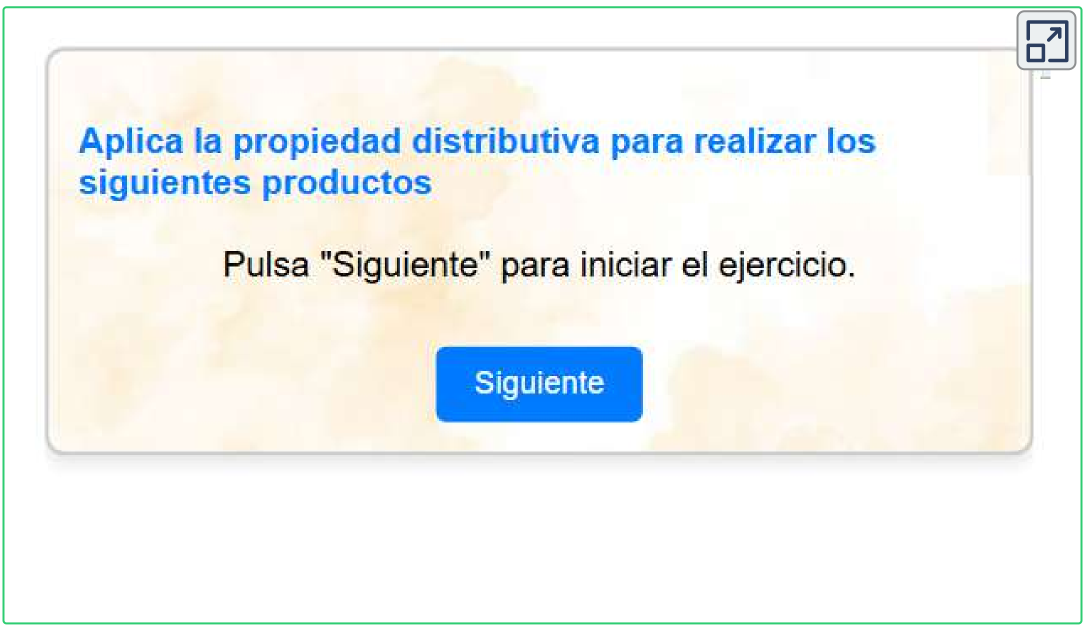
En este capítulo ya has aplicado la propiedad distributiva para multiplicar la suma de varios términos algebraicos por un número:

$$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$

Puedes aplicar tambien la propiedad distributiva para multiplicar dos binomios:

$$\boldsymbol{(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d)}$$

En la siguiente escena, se presentan algunos ejemplos que ilustran, paso a paso, cómo realizar el producto de dos binomios (amplía la escena para ver todo el procedimiento).



Extraer Factor Común

En ciertas situaciones puede ser necesario aplicar la propiedad distributiva de forma inversa:

$$\boldsymbol{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)}$$

A esta operación se la llama ***extraer factor común*** y consiste en identificar y separar un factor que se repite en todos los términos de una expresión, colocándolo fuera de un paréntesis. Este proceso simplifica la expresión original y puede facilitar cálculos o manipulaciones posteriores.

Ejemplos:

En la expresión , $\boldsymbol{4x + 8}$, el factor común es $\boldsymbol{4}$, ya que ambos términos son múltiplos de $\boldsymbol{4}$:

$$\boldsymbol{4x - 8 = 4 \cdot 1x - 4 \cdot 2 = 4 \cdot (1x - 2)}$$

Este proceso también puede aplicarse a variables o combinaciones de números y variables, como en $\boldsymbol{2x^2 + 6x}$, donde el factor común es $\boldsymbol{2x}$:

$$\boldsymbol{2x^2 + 6x = 2x \cdot x + 2x \cdot 3 = 2x \cdot (x + 3)}$$

4.5 Identidades Notables

Las ***identidades notables*** son fórmulas algebraicas que simplifican el desarrollo y resolución de expresiones matemáticas. Estas identidades describen patrones generales que se repiten en el álgebra, y al aplicarlas, se evita realizar cálculos largos o repetitivos.

Cuadrado de una suma

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) =$$

$$= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de una diferencia

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a\cdot(a-b) - b\cdot(a-b) =$$

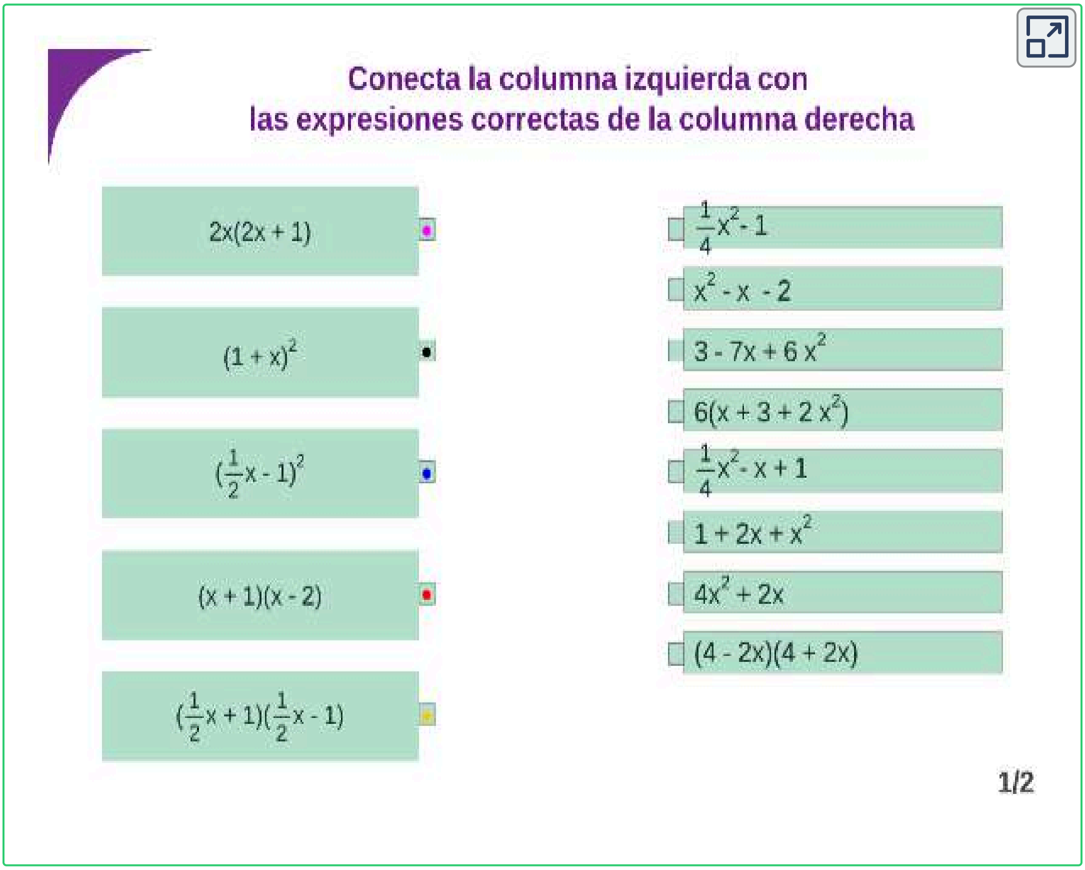
$$= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

$$(a+b)(a-b) = a\cdot(a-b) + b\cdot(a-b) =$$

$$= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

A continuación, te proponemos una serie de ejercicios para practicar, reforzar y consolidar los últimos conceptos y definiciones estudiados. Repite las actividades tantas veces como lo necesites.




Comprueba tus conocimientos en 5 preguntas
Responde con la mejor opción.
Comenzar

Puntos Clave:

- Las ***expresiones algebraicas*** son combinaciones de letras y números unidas por los signos de las operaciones matemáticas

- Para sumar o restar expresiones algebraicas sumaremos y restaremos los coeficientes de los términos que son semejantes.

- ***Reducir a términos semejantes*** consiste en simplificar una expresión combinando los términos que tienen la misma parte literal.

- Para multiplicar varios términos algebraicos por un factor aplicaremos la propiedad distributiva:

$$\boldsymbol{a\cdot (b+c) = a\cdot b + a\cdot c}$$

- ***Extraer factor común*** consiste en identificar y separar un factor que se repite en todos los términos de una expresión, colocándolo fuera de un paréntesis.

- Las ***identidades notables*** son fórmulas algebraicas que simplifican el desarrollo y resolución de expresiones matemáticas.

  Cuadrado de una suma:

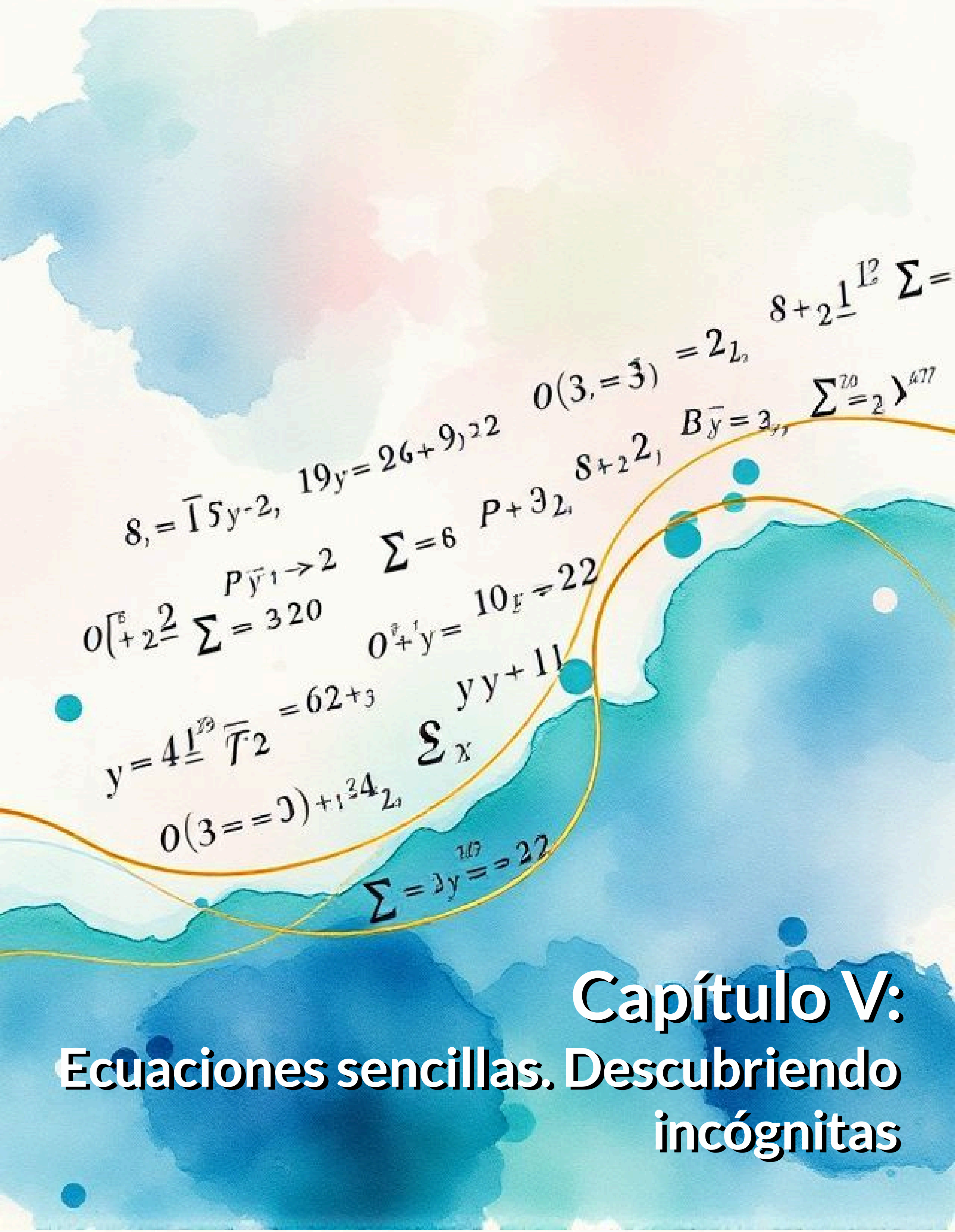
  $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

  Cuadrado de una diferencia:

  $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

  Producto de una suma por una diferencia (diferencia de cuadrados):

  $$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$



Capítulo V:
Ecuaciones sencillas. Descubriendo incógnitas

5. Ecuaciones. Descubriendo incógnitas

5.1 Solución de una ecuación

Las ecuaciones son expresiones matemáticas que contienen una igualdad entre dos términos separados por un signo de igual (=).

En una ecuación, los términos contienen una o más variables, que son cantidades desconocidas que debemos encontrar.

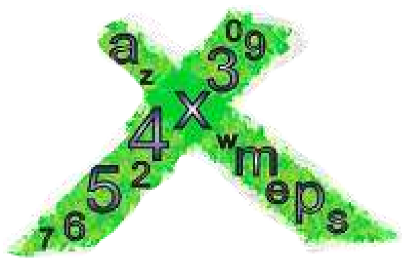


Figura 5.1. X, la incógnita Matemática

Resolver una ecuación consiste en determinar el valor o los valores de las variables que hacen que la igualdad sea verdadera. Es decir, son los valores que satisfacen la igualdad planteada en la ecuación.

Las variables a determinar en una ecuación se llaman **incógnitas**, y los valores que hacen que la ecuación sea cierta se llaman **soluciones**.

Ejemplo:

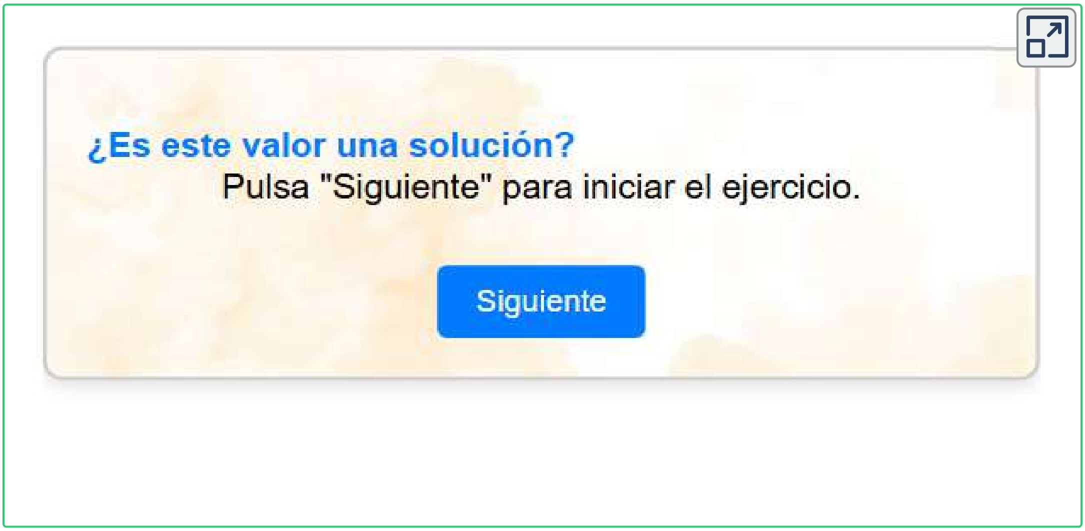
$\mathbf{2x + 3 = 7}$

En esta ecuación, $\boldsymbol{x}$ es la variable que debemos encontrar. Resolver la ecuación es encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ que haga que la igualdad sea cierta.

En este caso la solución es $\boldsymbol{x = 2}$, ya que al sustituir $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{2}$ la igualdad se cumple:

$$\mathbf{2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7}$$

En la siguiente escena, se muestran ejemplos donde se comprueba si las posibles soluciones de una ecuación verifican la igualdad (amplía la escena para ver todo el procedimiento).



Explorando las ecuaciones lineales

Existen muchos tipos de ecuaciones: con varias incógnitas, de diferentes grados, con raíces, fracciones, entre otros.

En este caso, nos centraremos en las **ecuaciones lineales con una incógnita**. Estas tienen la forma general: $\boldsymbol{ax+b=0}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números y $\boldsymbol{x}$ es la incógnita. Resolvemos estas ecuaciones para encontrar el valor de $\boldsymbol{x}$ que las hace verdaderas.

A continuación, encontrarás seis ecuaciones diferentes. Para cada una, verifica si el valor propuesto es una solución. Selecciona ***Sí*** o ***No*** en el cuadro correspondiente y haz clic en ***Verificar*** para comprobar tu respuesta.

Comprueba si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

$x = 1$ es solución de la ecuación $2x + 3 = 5x$

--Selecciona una respuesta--

$m = 3$ es solución de la ecuación $5 - 3m = 2m + 1$

--Selecciona una respuesta--

$x = 5$ no es solución de la ecuación $x/2 = 7 - 3x$

--Selecciona una respuesta--

$p = -1$ no es solución de la ecuación $p^2 + 2p + 1 = 0$

--Selecciona una respuesta--

$z = 4$ es solución de la ecuación $(z - 1)^2 = 9$

--Selecciona una respuesta--

$a = 1$ y $b = 0$ son solución de la ecuación $ab + a + b = 1$

--Selecciona una respuesta--

Verificar respuestas Limpiar

5.2 Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Resolver una ecuación consiste en realizar transformaciones algebraicas que permitan llegar a una ecuación equivalente, en la que la incógnita quede aislada y se pueda determinar su valor específico.

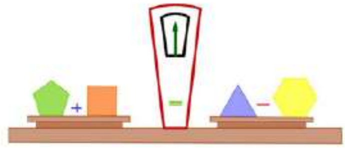


Figura 5.2. Ecuaciones equivalentes

Para obtener ecuaciones equivalentes podemos utilizar las siguientes propiedades:

5.2.1 Suma y resta

Puedes sumar o restar el mismo valor a ambos lados de la ecuación sin cambiar la igualdad.

En la ecuación $\boldsymbol{2x+3=7}$, restamos $\boldsymbol{3}$ en ambos lados:

$$\boldsymbol{2x+3-3=7-3}$$

$$\boldsymbol{2x=4}$$

5.2.2 Multiplicación y división

Puedes multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por el mismo número (distinto de cero) sin cambiar la igualdad.

En la ecuación $\mathbf{2x = 4}$, dividimos ambos lados entre $\mathbf{2}$:

$$\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

5.2.3 Transposición de términos

La transposición de términos consiste en mover términos de un lado de la ecuación al otro. Esto se hace para reorganizar los términos y lograr que la incógnita quede aislada en uno de los lados de la ecuación.

a. Si un término está sumando en un lado, puede pasar al otro lado restando. Si está restando, puede pasar sumando.

En la ecuación $\mathbf{3x + 5 = 11}$, movemos el $\mathbf{5}$ al otro lado:

$$\mathbf{3x = 11 - 5}$$

$$\mathbf{3x = 6}$$

Dividimos ambos lados por $\mathbf{3}$:

$$\frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{x = 2}$$

b. En una ecuación, si un término (distinto de cero) está multiplicando todo un lado de la ecuación, se puede pasar al otro lado dividiendo. Sin embargo, esto no es posible si el término solo multiplica a una parte del lado de la ecuación. Asegúrate de que el término afecte a todos los miembros antes de aplicarlo.

Ejemplo válido:

En la ecuación $\mathbf{3(x+2)=12}$, el $\mathbf{3}$ está multiplicando a todo el lado izquierdo, por lo que puede pasar al otro lado dividiendo:

$$\mathbf{x+2=\frac{12}{3}}$$

$$\mathbf{x+2=4}$$

El $\mathbf{2}$ puede pasar al otro lado restando:

$$\mathbf{x=4-2=2}$$

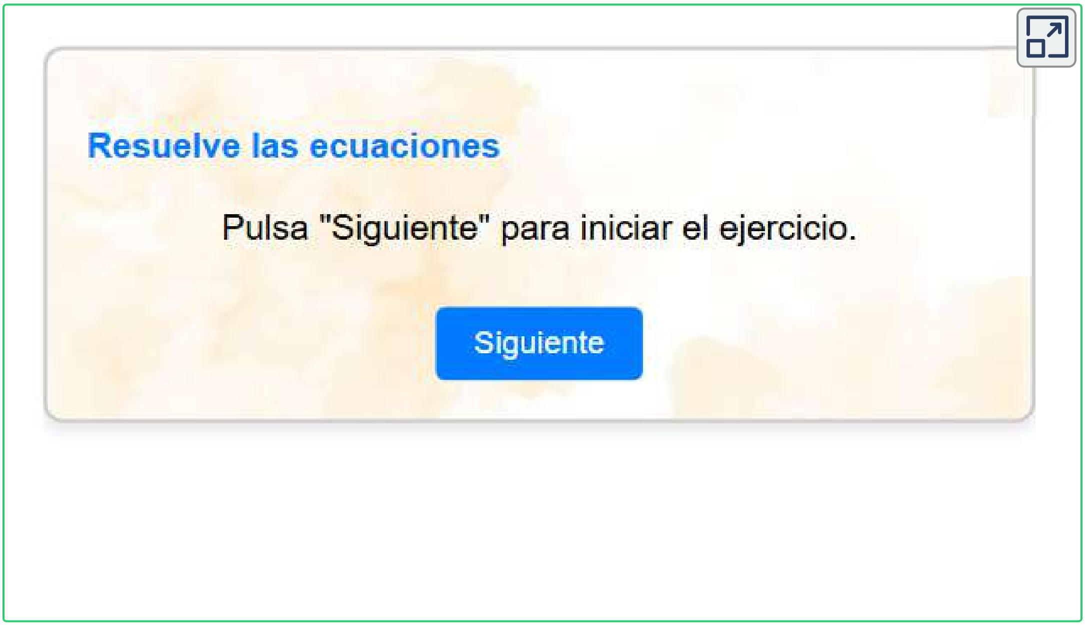
Ejemplo que no es válido:

En la ecuación $\mathbf{3(x+2)+5=17}$, el $\mathbf{3}$ multiplica al paréntesis, pero no al $\mathbf{5}$.

No podemos pasar el $\mathbf{3}$ al otro lado dividiendo.

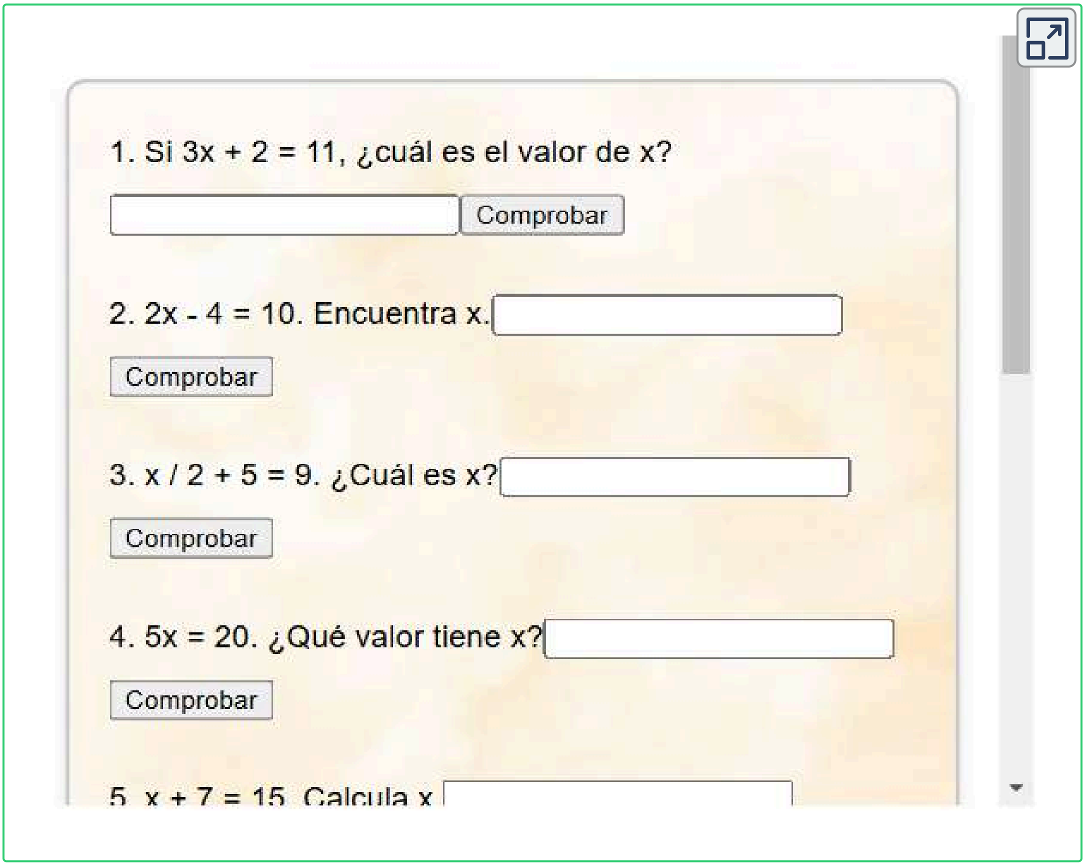
5.3 Cómo resolver ecuaciones paso a paso

En la siguiente actividad se proponen cuatro ejercicios resueltos, observa con atención los pasos que deberás seguir para resolver una ecuación (amplía la escena para ver todo el procedimiento).



> Nota: Como has observado, si un término está sumando o restando a un lado de la ecuación y deseas moverlo al otro lado, debes cambiarle el signo.
>
> Por otro lado, al despejar la incógnita, si un número la está multiplicando, pasa al otro lado dividiendo, pero su signo permanece igual.

A continuación te proponemos una actividad interactiva con 10 ecuaciones sencillas, resuélvelas en tu cuaderno de trabajo y luego verifica tus soluciones utilizando la actividad interactiva. Amplía la escena para ver todas las ecuaciones.



5.3.1 Tipos de soluciones.

Una ecuación lineal con una incógnita puede tener una única solución, infinitas o ninguna.

Única solución: La ecuación tiene un solo valor que satisface la igualdad.

Infinitas soluciones: Cuando tiene infinitos valores que satisfacen la igualdad.

Sin solución: Ocurre cuando no hay ningún valor que cumpla la ecuación.

Ejemplos:

Resolver la ecuación: $\boldsymbol{2x+1=1-x+3x}$

Pasamos las incógnitas a la izquierda y los números al otro lado y calculamos:

$$\boldsymbol{2x+x-3x=1-1}$$

$$\boldsymbol{0x=0}$$

$$\boldsymbol{0=0}$$

El resultado es una igualdad numérica que se cumple para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones, se trata de una **identidad**.

Resolver la ecuación: $x+\boldsymbol{2}=x+\boldsymbol{3}$

Pasamos las incógnitas a la izquierda y los números al otro lado y calculamos:

$$\boldsymbol{x-x=3-2}$$

$$\boldsymbol{0\neq 1}$$

El resultado es una igualdad numérica que no es cierta independientemente del valor de $\boldsymbol{x}$.

Esta ecuación **no tiene solución**.

A continuación te proponemos una serie de ejercicios diseñados para resolver ecuaciones. Para ello, será necesario aplicar las transformaciones explicadas previamente.

1 Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno de trabajo.

2 Asegúrate de hacerlo con cuidado y anota tus respuestas en la escena.

3 Comprueba el resultado con el botón ***Verificar***.

4 Cada vez que haces clic al botón ***Nueva ecuación***, aparece un nuevo ejercicio.

5.3.2 Ecuaciones con paréntesis

En las ecuaciones con paréntesis, se utilizan las propiedades de los productos y sumas para simplificar expresiones antes de resolver la ecuación.

Aplicamos la ***propiedad distributiva*** para eliminar paréntesis:

$$a(b+c)=ab+ac$$

Ejemplo 1:

En la ecuación: $3(x+2)-5=16$

- Aplicamos la propiedad distributiva: $3x+6-5=16$

- Resolvemos la ecuación:

$$3x=16-6+5$$

$$3x=15$$

$$x=15/3=5$$

- Verificamos la solución:

$$3(5+2)-5=16$$

$$3(7)-5=16$$

$$21-5=16$$

Ejemplo 2:

Ecuación: $\mathbf{5x-(1+3x)=2(x-1)}$

- Aplicamos la propiedad distributiva:

$$\mathbf{5x-1-3x=2x-2}$$

- Resolvemos la ecuación:

$$\mathbf{5x-3x-2x=-2+1}$$

$$\mathbf{0x=-1}$$

$$\mathbf{0\neq-1}$$

La ecuación **no tiene solución.**

5.3.3 Ecuaciones con denominadores

Para quitar los denominadores de una ecuación se multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y se simplifica.

Ejemplo 1:

Resolver la ecuación:

$$\mathbf{\frac{x}{5}-2=\frac{4}{3}+x}$$

- $mcm(3,4) = 15$

- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 15 y quitamos denominadores:

$$15\cdot \frac{x}{5} - 15\cdot 2 = 15\cdot \frac{4}{3} + 15\cdot x$$

$$3x - 30 = 20 + 15x$$

- Pasamos las incógnitas a un lado y los números al otro y calculamos:

$$3x - 15x = 20 + 30$$

$$-12x = 50$$

- Despejamos la incógnita x y simplificamos:

$$x = \frac{50}{-12} = -\frac{25}{6}$$

- Comprobamos la solución:

$$\frac{-25/6}{5} - 2 = \frac{4}{3} + (-\frac{25}{6})$$

$$-17/6 = -17/6$$

Cuando hay más de un término en el numerador de una fracción, es importante tener cuidado al quitar los denominadores. Para evitar errores, es recomendable poner todo el numerador entre paréntesis antes de realizar las operaciones.

Ahora veremos un nuevo ejemplo en el que las fracciones tienen más de un término en el numerador. Debes prestar especial atención al eliminar los denominadores y asegurarte de poner paréntesis alrededor del numerador antes de hacer los productos.

Ejemplo 2:

Resolver la ecuación:

$$\frac{x+2}{3}-5x=\frac{5(x-1)}{6}+1$$

- $mcm(3,6)=6$

- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6 y quitamos denominadores:

$$\frac{6\cdot(x+2)}{3}-6\cdot 5x=\frac{6\cdot 5(x-1)}{6}+6\cdot 1$$

$$2\cdot(x+2)-30x=5(x-1)+6$$

- Quitamos paréntesis aplicando al propiedad distributiva:

$$\mathbf{2x + 4 - 30x = 5x - 5 + 6}$$

- Pasamos las incógnitas a un lado y los números al otro:

$$\mathbf{2x - 30x - 5x = -5 + 6 - 4}$$

Calculamos:

$$\mathbf{-33x = -3}$$

- Despejamos $\boldsymbol{x}$ y simplificamos:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{\frac{-3}{-33} = \frac{1}{11}}$$

- Verificamos la solución:

$$\mathbf{\frac{\frac{1}{11} + 2}{3} - 5\frac{1}{11} = \frac{5(\frac{1}{11} - 1)}{6} + 1}$$

$$\mathbf{\frac{16}{66} = \frac{16}{66}}$$

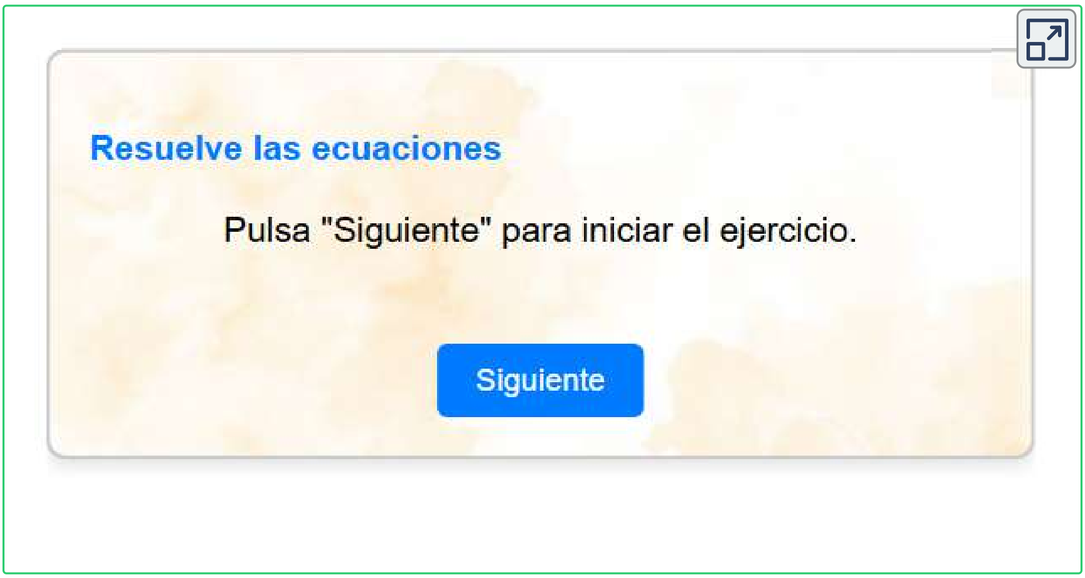
En la siguiente actividad se te presentarán más ejemplos para resolver ecuaciones con paréntesis y denominadores.

1 Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno y luego comprueba si has hecho bien los cálculos en la escena.

2 Pulsa sobre ***Siguiente*** para ver el orden correcto para resolver la ecuación.

3 Si deseas resolver otra ecuación, haz clic en ***Otro ejemplo***.

Puedes ampliar la escena para ver todo el contenido.



Para resolver una ecuación, debemos realizar una serie de operaciones algebraicas siguiendo un orden determinado, que nos permitan aislar la incógnita en un lado de la ecuación, dejándola con un valor específico.

La clave para resolver ecuaciones de manera efectiva es seguir un proceso sistemático y utilizar las propiedades algebraicas adecuadas para manipular las expresiones hasta obtener la solución correcta.

Pasos Generales para Resolver una Ecuación

- ***Simplifica*** ambos lados de la ecuación:
    - Elimina ***paréntesis*** aplicando la propiedad distributiva.
    - Quita ***denominadores*** multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- ***Aísla*** la variable:
    - Si la variable aparece en ambos lados, agrúpala en un solo lado (usualmente el izquierdo).
    - Mueve los términos constantes al lado opuesto.
- ***Despeja*** la variable:
    - Divide o multiplica ambos lados de la ecuación para que la variable quede sola.
- ***Verifica*** tu solución:
    - Sustituye el valor obtenido en la ecuación original para asegurarte de que satisface la igualdad.

Consejos Adicionales

- Siempre verifica tu solución sustituyendo el valor encontrado en la ecuación original.
- Simplifica los pasos tanto como sea posible para evitar errores.
- Mantén organizados los términos para facilitar el seguimiento de las operaciones.

A continuación te proponemos una serie de ejercicios de ecuaciones con paréntesis.

1 Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno y comprueba el resultado con el botón ***Verificar***.

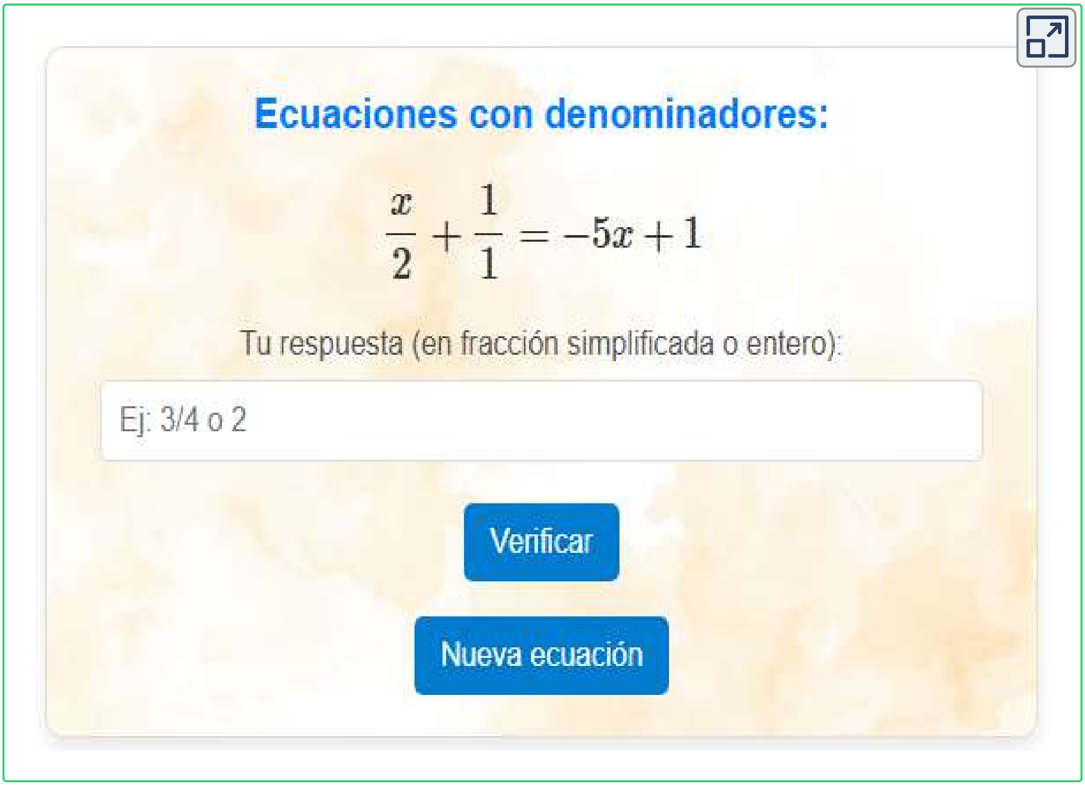
2 Cada vez que haces clic al botón ***Nueva ecuación***, aparece un nuevo ejercicio.

En la siguiente actividad te proponemos una serie de ejercicios de ecuaciones con denominadores.

1 Multiplican ambos lados de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplifica.

2 Comprueba el resultado con el botón ***Verificar***.

3 Cada vez que haces clic al botón ***Nueva ecuación***, aparece un nuevo ejercicio.



En la actividad de la página siguiente encontrarás un total de 10 ecuaciones diferentes, pero solo se presentarán 5 ecuaciones al mismo tiempo.

1 Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno de trabajo.

2 Una vez que tengas tus respuestas, escríbelas en los espacios correspondientes de la escena y haz clic en el botón ***Verificar Respuestas***. Asegúrate de hacerlo con cuidado y anota tus respuestas, sin espacios, en formato de fracción simplificada o como números enteros.

3 Si deseas practicar con otro conjunto de ecuaciones, pulsa el botón ***Nuevo Ejercicio***. Esto generará una nueva selección aleatoria de 5 ecuaciones (amplía la escena para visualizar todo el contenido).

Resuelve las ecuaciones:

Al pulsar sobre ***Nuevo Ejercicio*** se generan nuevas ecuaciones.

$$\frac{x-11}{3}=\frac{4+x}{2}$$

Escribe tu respuesta sin espacios (en fracción simplificada

$$\frac{x}{5}-2=\frac{4}{3}+x$$

Escribe tu respuesta sin espacios (en fracción simplificada

$$5a-\frac{1}{2}\cdot(a-3)=5$$

Escribe tu respuesta sin espacios (en fracción simplificada

$$2\cdot(m-3)+m=\frac{1}{5}$$

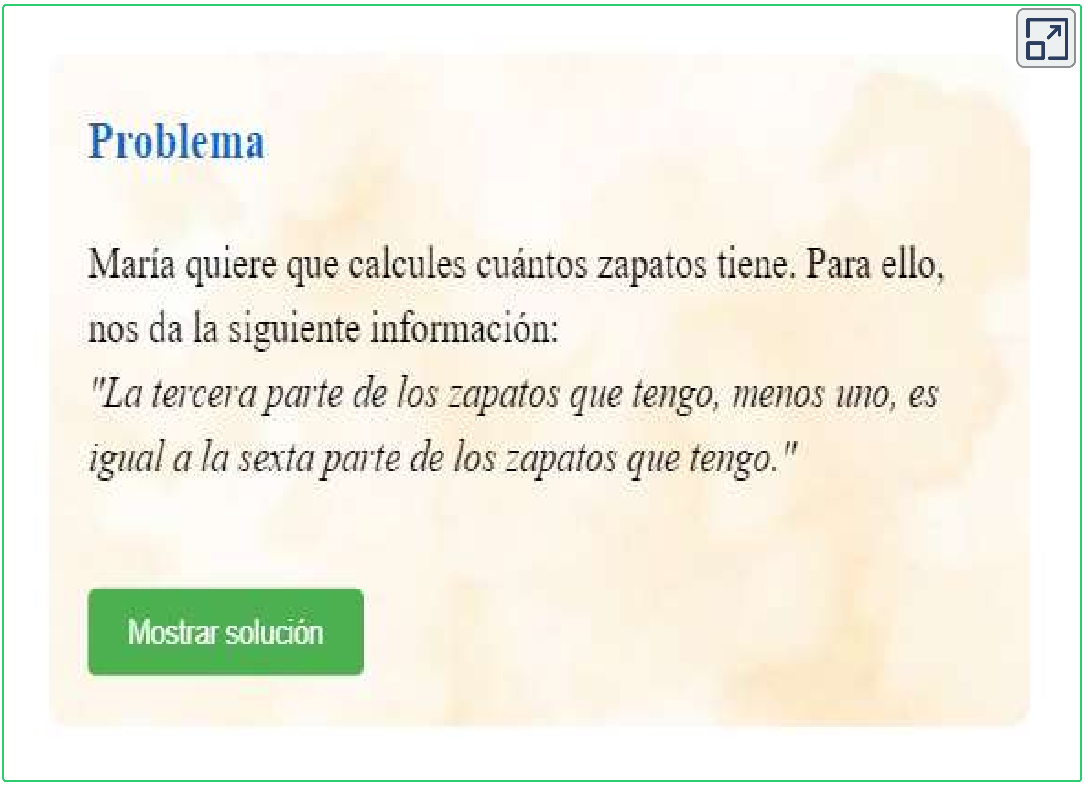
Escribe tu respuesta sin espacios (en fracción simplificada

5.4 Problemas de ecuaciones

Muchas situaciones de la vida cotidiana pueden resolverse mediante una ecuación, especialmente cuando necesitamos encontrar un valor desconocido. Por ejemplo, si quieres saber cuántos litros de pintura necesitas para cubrir una pared, o cuánto tiempo tardas en llegar a un destino, podríamos plantear la situación con una ecuación. En estos casos, la incógnita, que es el valor que buscamos, se representa con una letra, como ***x***.

Ejemplo:

Lee el enunciado del problema y utiliza el botón ***Solución*** para ver el desarrollo paso a paso. Amplía la escena para visualizar todo el contenido.



Para resolver un problema, es fundamental leer cuidadosamente el enunciado para identificar la incógnita y plantear la ecuación correspondiente. A continuación, te indicamos el orden de los pasos que debes seguir:

- ***Lee el problema cuidadosamente:*** Es importante entender bien la situación antes de empezar. Identifica qué es lo que te están pidiendo encontrar y cuál es la información que tienes.

- ***Plantea la ecuación:*** Una vez que entiendas el problema, representa el valor desconocido con una letra (por ejemplo, "x"). Luego, traduce las palabras del problema en una ecuación matemática, utilizando las operaciones correspondientes (suma, resta, multiplicación, división, etc.).

- ***Resuelve la ecuación:*** Aplica las reglas matemáticas para simplificar la ecuación y despejar la incógnita (la letra que representa el valor desconocido). Esto puede implicar sumar, restar, multiplicar, dividir o usar otros métodos según el tipo de ecuación.

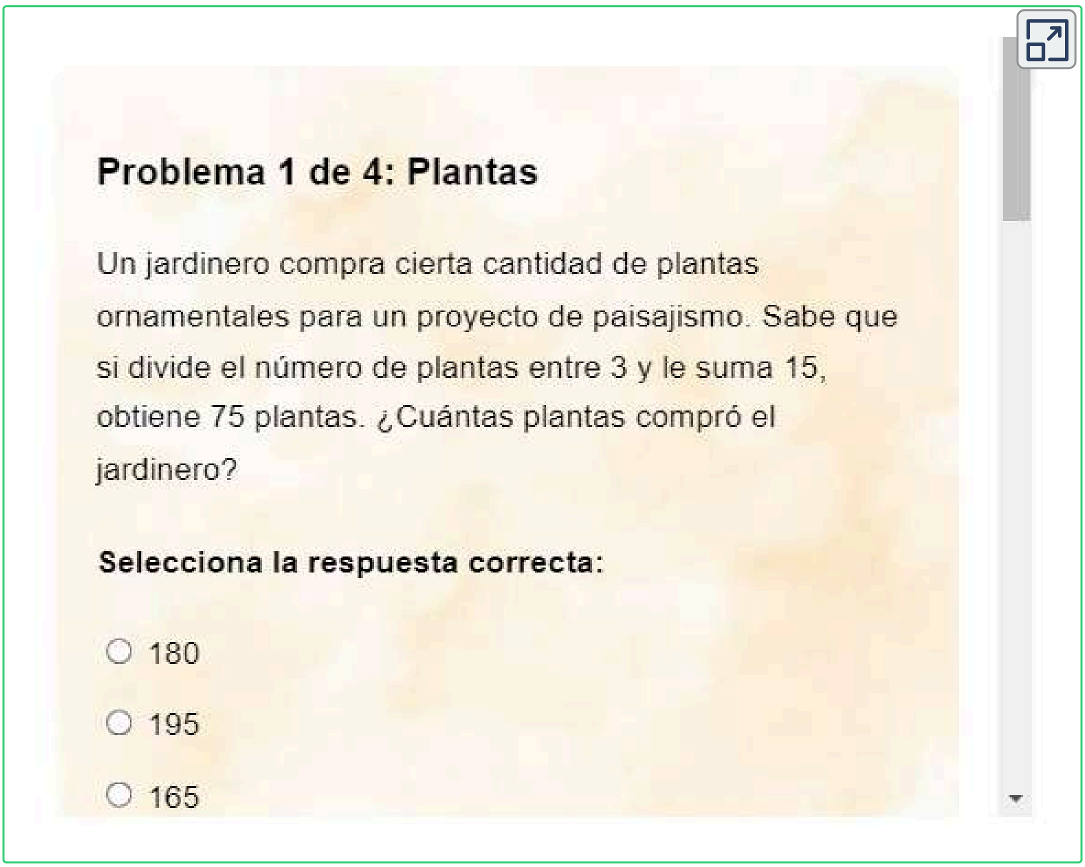
- ***Comprueba la solución:*** Una vez que hayas encontrado el valor de la incógnita, sustitúyelo de nuevo en la ecuación original para asegurarte de que la solución es correcta y satisface el problema planteado.

- ***Responde al problema:*** Finalmente, escribe la solución en el contexto del problema, es decir, explica lo que significa el valor encontrado en términos del enunciado.

A través de una ecuación, relacionamos las diferentes cantidades y, aplicando reglas matemáticas, podemos encontrar la solución al problema. Así, las ecuaciones nos permiten organizar la información de manera clara y obtener respuestas precisas para resolver situaciones cotidianas.

A continuación se proponen una serie de actividades con problemas para resolver. Resuelve cada ejercicio en tu cuaderno y selecciona la solución correcta en la escena. Amplía las escenas para visualizar todo el contenido.

Si tienes dudas, pulsa el botón ***Ver solución*** para consultar el desarrollo paso a paso.



Problema 1 de 4:

Un número más el triple de su consecutivo es igual a 27. ¿Cuál es el número?

Selecciona la respuesta correcta:

- 6
- no tiene solución
- 7

Problema 1 de 4:

La edad de Ana es el triple de la edad de su hermano Carlos. Si la suma de sus edades es 32 años, ¿qué edad tiene cada uno?

Selecciona la respuesta correcta:

- 11
- 12

Problema 1 de 4:

Un automóvil recorre una distancia de 240 kilómetros a una velocidad constante. Si tarda 4 horas en completar el recorrido, ¿a qué velocidad viaja el automóvil?

Selecciona la respuesta correcta:

- ○ 60 km/h
- ○ 40 km/h

Problema 1 de 4:

El perímetro de un rectangulo mide 54 cm. Calcula la base y la altura sabiendo que la altura mide 3 cm menos que la base.

Selecciona la respuesta correcta:

- ○ 12 cm de altura y 15 cm de base
- ○ 15 cm de altura y 12 cm de base

1. Juan tiene el doble de la edad de Ana. Si la suma de sus edades es 36 años, ¿qué edad tiene Ana? Comprobar

2. El precio de un artículo aumentó en $10 para ser $35. ¿Cuál era el precio original? Comprobar

3. La suma de tres veces un número y 5 es 26. ¿Cuál es el número?

Comprobar

4. Un coche recorre 60 km en una hora. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en x horas?

Comprobar

5. Si Pedro tiene 3 menos que el triple de la cantidad de lápices que tiene María y él tiene 21 lápices, ¿cuántos tiene María? Comprobar

6. La diferencia entre un número y el doble de otro número es 5. Si el segundo número es 3, ¿cuál es el primer número? Comprobar

7. Si el perimetro de un cuadrado es 20, ¿cuál es la longitud de un lado?

Comprobar

8. La suma de un número y su mitad es 24. ¿Cuál es el número?

Comprobar

9. El producto de un número y 4 es 32. ¿Cuál es el número?

Comprobar

10. Un tren viaja a una velocidad de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 400 km? Comprobar

[1]

---

[1] Imágenes de frutas generadas por pollination.ai, usando el modelo Flux

Puntos Clave:

- Una ***ecuación*** es una igualdad matemática que contiene una o más variables (incógnitas).

- La ***solución*** es el valor o los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad.

- ***Pasos a seguir en la resolución de ecuaciones:***

  Desarrollar ***paréntesis*** aplicando la propiedad distributiva.

  Quitar ***denominadores*** multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

  Aislar la incógnita en uno de los lados de la ecuación, moviendo todos los términos que no contienen la variable al otro lado.

  Despejar la incógnita, es decir, dejarla sola en un lado de la igualdad.

  Verificar la igualdad.

- Un ***problema*** que se resuelve con una ecuación es aquel donde se busca encontrar el valor de una o más cantidades desconocidas basándose en información dada.

- ***Pasos a seguir en la resolución de problemas:***

  Comprender el problema: Lee cuidadosamente y asegúrate de entender qué se te está pidiendo.

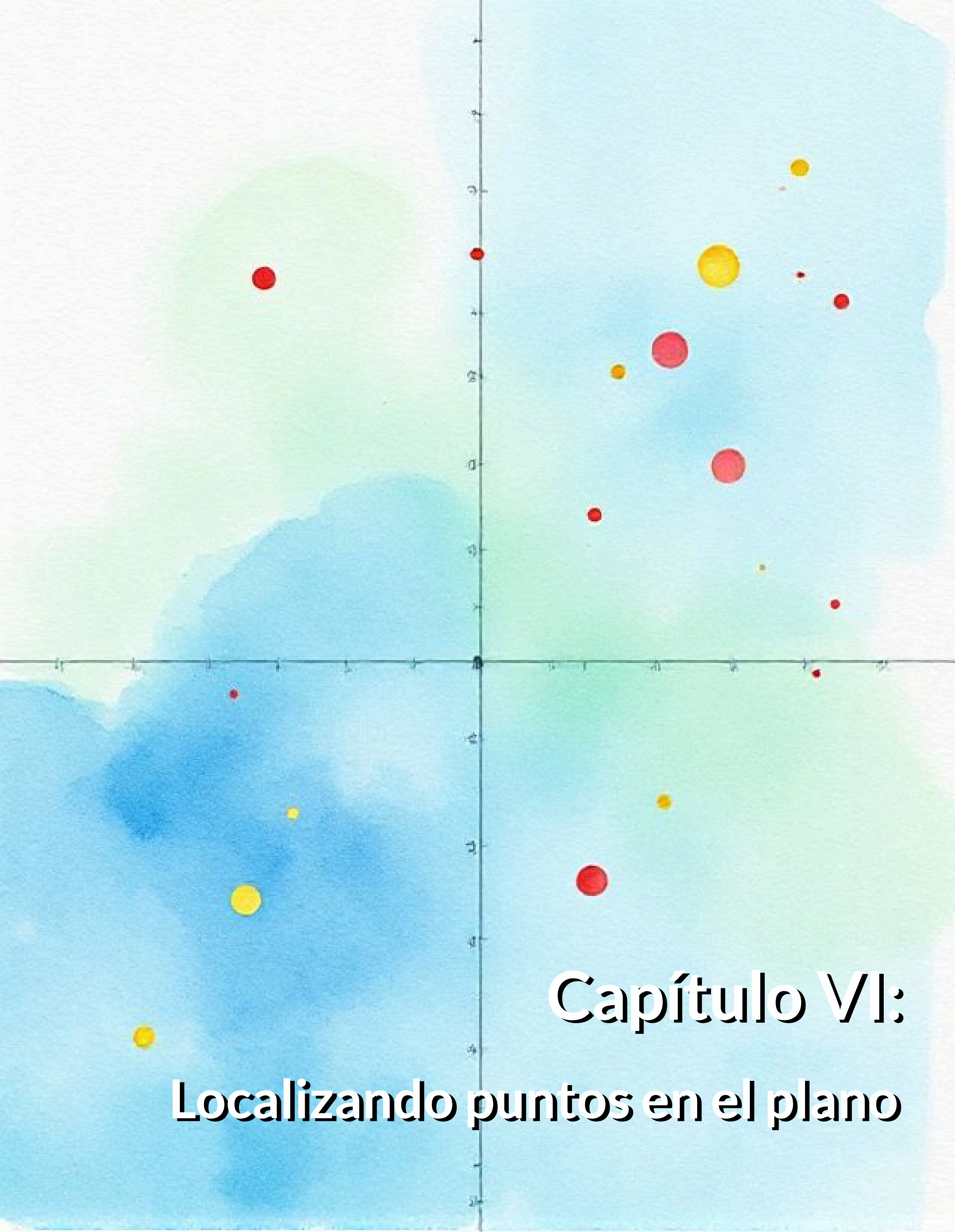
  Identificar las variables: Determina qué cantidades son desconocidas y asígnales variables, usualmente letras como x, y, etc.

  Formular la ecuación: Usa la información dada en el problema para escribir una ecuación matemática que relacione las variables con los datos desconocidos.

  Resolver la ecuación: Usa operaciones algebraicas para despejar la variable y encontrar su valor.

  Verificar la solución: Asegúrate de que la solución tiene sentido en el contexto del problema.

Introducción a las Funciones



Capítulo VI:

Localizando puntos en el plano

6. Localizando puntos en el plano

Este capítulo abre las puertas al plano cartesiano, un sistema que revolucionó la forma en que representamos relaciones matemáticas. Aquí aprenderás cómo identificar ubicaciones exactas mediante pares ordenados y cómo estas coordenadas nos permiten representar conceptos clave en matemáticas.

6.1 Cómo representar un punto en el plano cartesiano

Para determinar la posición de un punto en el plano cartesiano necesitas dibujar, en primer lugar, los ***ejes de coordenadas***. Se trata de dos rectas numéricas perpendiculares. Una recta horizontal llamada ***eje de abscisas*** y una recta vertical que es el ***eje de ordenadas***

Los ejes de coordenadas dividen el plano cartesiano en cuatro partes llamados ***cuadrantes***. El punto donde se cortan los dos ejes es el ***origen de coordenadas*** y se representa por ***(0,0)***.

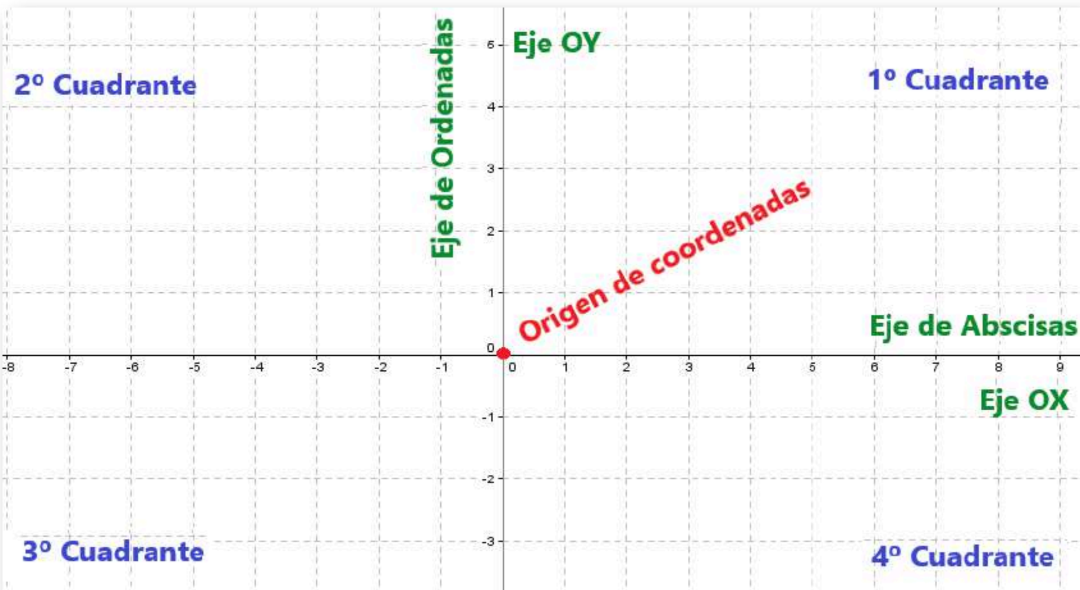


Figura 6.1. Plano cartesiano

El plano cartesiano es como un mapa que conecta números con puntos. La situación de cualquier punto del plano queda perfectamente determinada por sus coordenadas ***(a,b)*** donde ***a*** es la ***abscisa*** y ***b*** es la ***ordenada.***

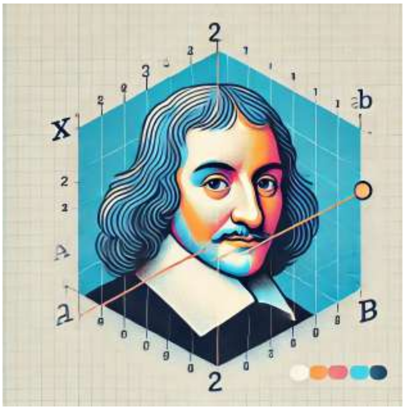


Figura 6.2. René Descartes

Se llaman coordenadas cartesianas en honor a ***René Descartes***,[2] filósofo y matemático francés (1596-1650), quien fundamentó su pensamiento filosófico en la necesidad de tomar un punto de partida sobre el cual construir todo el conocimiento.

Observa en el siguiente vídeo, cómo representar puntos en el plano cartesiano:

[2] Puedes encontrar más información detallada sobre René Descartes en las siguientes webs: [Wikipedia - René Descartes](); [Biography - René Descartes (En inglés)]()

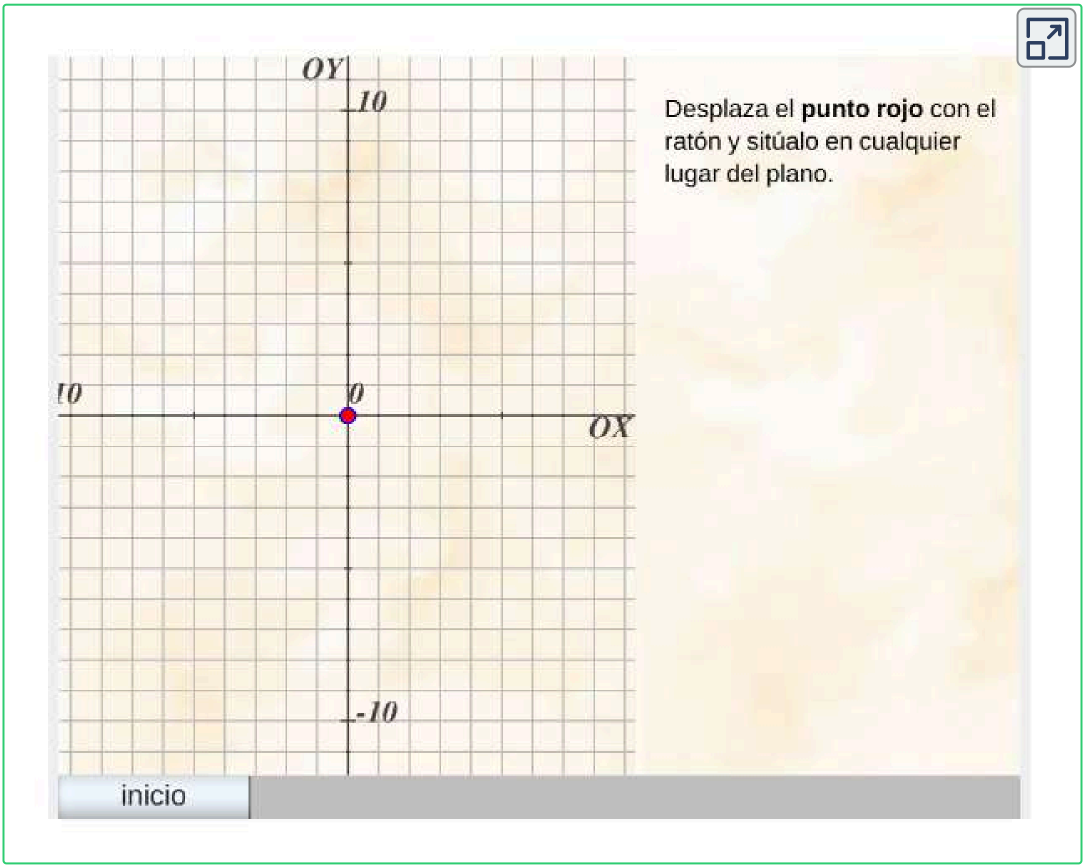
Actividad 6.1.1

En la siguiente escena puedes practicar la representación de puntos en el plano cartesiano.

1 Sitúa el punto rojo en algún lugar del plano cartesiano y sigue las indicaciones.

2 Realiza un nuevo ejercicio pulsando el botón ***inicio***.

3 Practica con varios puntos, situando el punto rojo en diferentes cuadrantes. Observa el signo de las coordenadas en cada uno de los cuadrantes.



Signos de la abscisa y la ordenada en los cuadrantes

Cuadrante	Signo de la abscisa (x)	Signo de la ordenada (y)
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

Actividad 6.1.2

Abscisa	1	2	1	-3	-2	-1	5	-2	3	0	-4	2
Ordenada	2	-3	-1	2	5	0	0	-2	3	3	-1	1

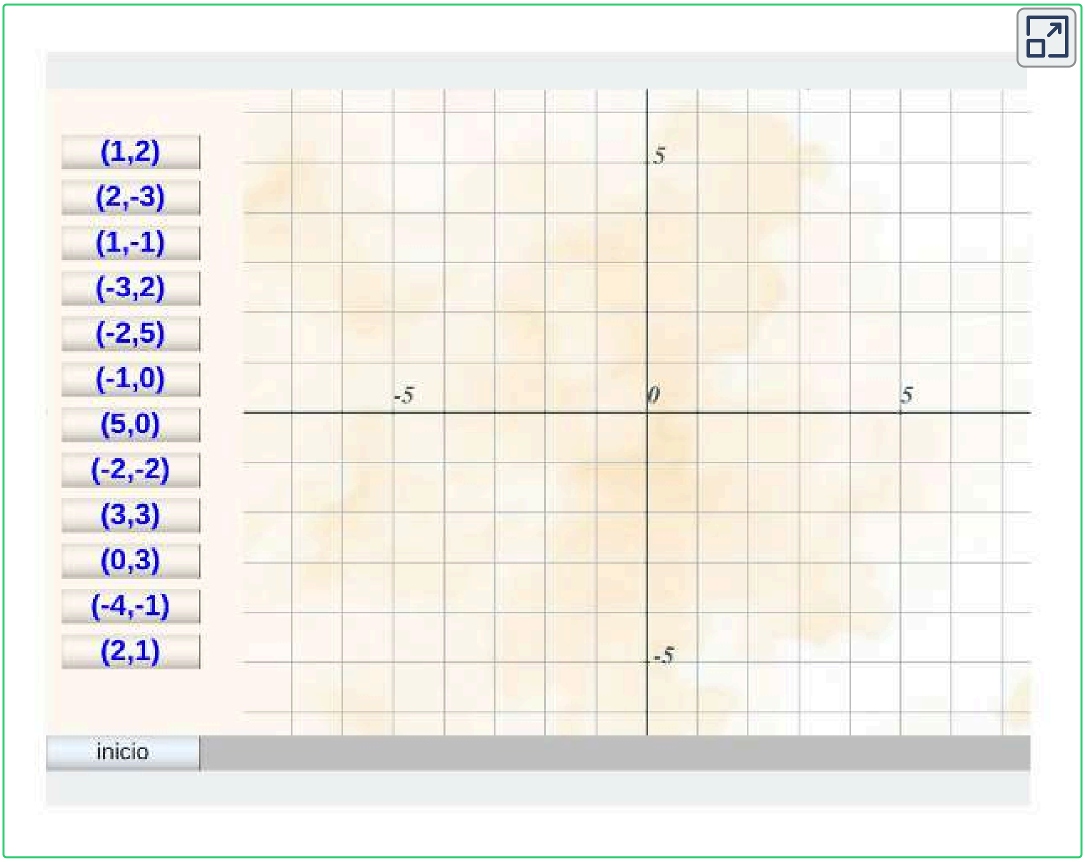
1 Observa la tabla que contiene las coordenadas de varios puntos.

2 Representa estos puntos en tu libreta utilizando un sistema de coordenadas cartesianas.

Asegúrate de trazar los ejes con precisión y etiquetar correctamente cada punto con sus coordenadas.

3 Cuando hayas terminado, utiliza la siguiente escena interactiva para verificar si tus puntos están correctamente ubicados.

4 En el lateral izquierdo de la escena, pulsa sobre las coordenadas de cada punto para confirmar tus respuestas.



Actividad 6.1.3

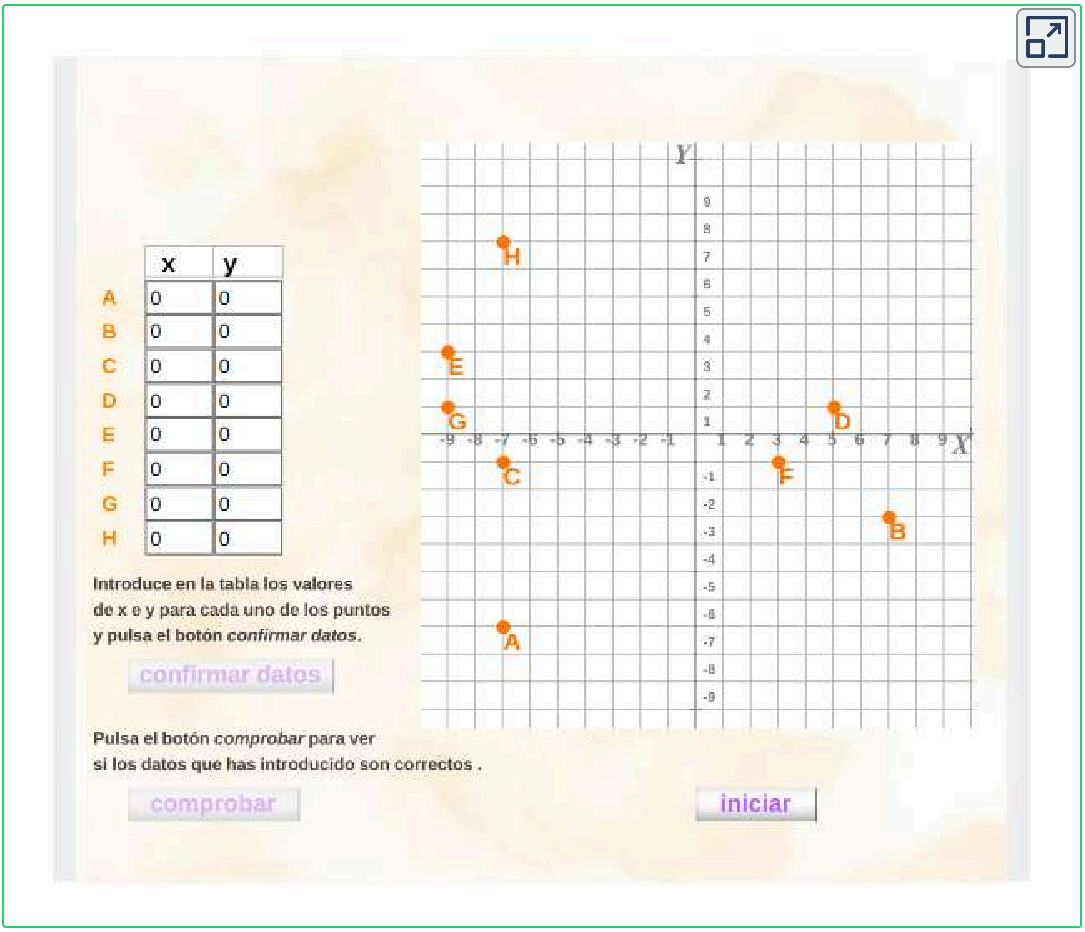
En la escena de la página siguiente puedes ver representados una serie de puntos en el plano cartesiano.

1 Escribe las coordenadas de estos puntos en la tabla de la izquierda

2 Una vez introducidos todos los datos, confirma los valores pulsando el botón ***confirmar datos***.

3 Comprueba el resultado con el pulsador ***comprobar***.

Amplía la escena para ver todo el contenido. Para realizar otro ejercicio, actualiza pulsando el botón ***iniciar***.



[3]

[3] Escena modificada de la quincena [Tablas y gráficas de 1º de la ESO]() de los materiales [ED@D]()de la [RED Descartes]()

6.2 Localización de puntos en un mapa

Actividad: Crear una cuadrícula sobre el plano de Barcelona.

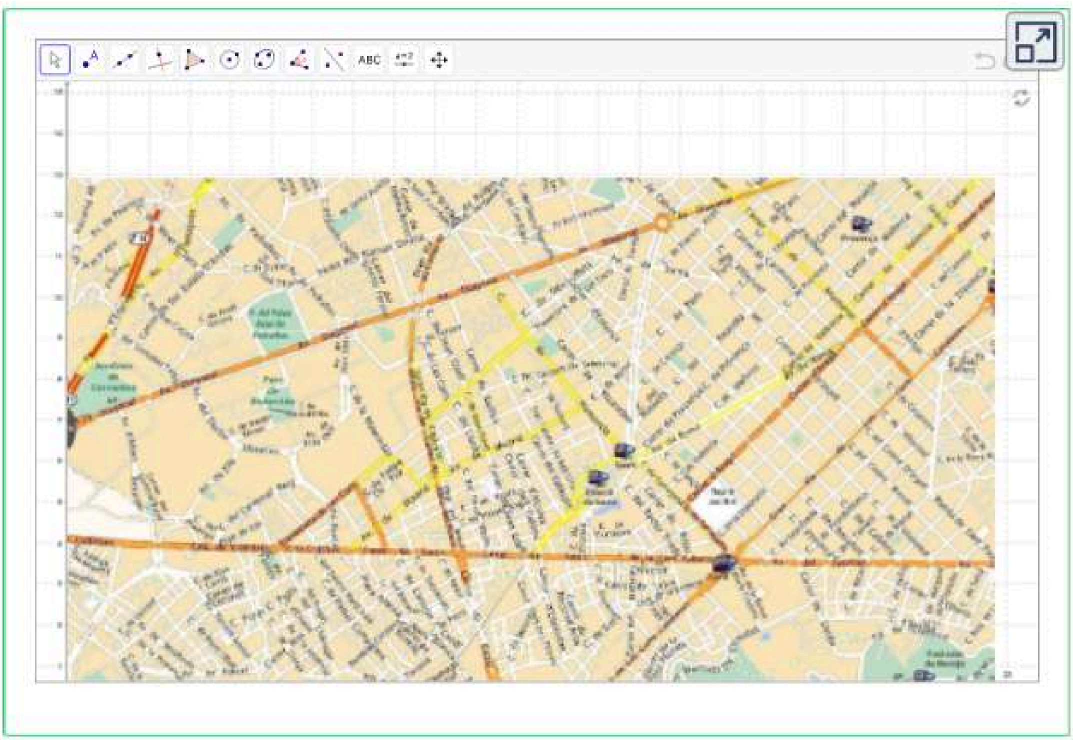
Objetivo: Utilizar GeoGebra para trazar una cuadrícula que permita identificar cualquier punto del plano mediante sus coordenadas.

Explora el plano

En la imagen, se presenta una parte del plano de Barcelona proyectado sobre unos ejes cartesianos.

Amplía la vista para observar todo el plano.

Usa la herramienta de movimiento para desplazar la imagen y visualizar mejor los ejes de coordenadas.



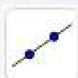
Traza líneas de la cuadrícula:

Identifica los números enteros en los ejes x e y.

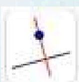
Con la herramienta Punto:

Selecciona algún punto de los ejes para trazar las rectas.

Con la herramienta de Línea que pasa por dos puntos:


Traza una línea sobre el eje de abscisas y una línea perpendicular a ella sobre el eje de ordenadas.

Con la herramienta de Línea paralela, traza líneas:


Paralelas al eje x (horizontales) que pasen por cada número entero en el eje y.

Paralelas al eje y (verticales) que pasen por cada número entero en el eje x.

Asegúrate de que las líneas forman una cuadrícula perfectamente alineada con los ejes.

Observa cómo la cuadrícula te permite localizar cualquier punto del plano mediante sus coordenadas.

Practica identificando puntos específicos en la cuadrícula y escribiendo sus coordenadas.

Responde las preguntas:

Ubicación de lugares específicos:

1 ¿Cuáles son las coordenadas de la Plaza de España? (En el cruce entre Gran Via de les Corts Catalanes y Av. del Paral·lel)

2 ¿Cuáles son las coordenadas del cruce entre la calle de Aragó y la calle de Tarragona?

Identificación de lugares en coordenadas dadas:

3 ¿Qué se encuentra en el lugar con coordenadas (14,6)?

4 ¿Qué se encuentra en el lugar con coordenadas (5,4)?

Atravesando la Diagonal:

5 Si deseas atravesar la Avenida Diagonal, escribe todas las coordenadas enteras de los puntos por los que deberás pasar.

Comprobar respuestas

6.3 Aplicaciones del Plano Cartesiano en la Vida Real

El plano cartesiano es una herramienta matemática que se utiliza para representar gráficamente relaciones entre variables. Aunque es más comúnmente utilizado en matemáticas y física, también se puede aplicar en la vida laboral y cotidiana como la ubicación de lugares en un mapa o la interpretación de datos en gráficas.

Diseño y Arquitectura

Los arquitectos y diseñadores emplean el plano cartesiano para crear planos precisos de edificios y espacios. Cada punto en el plano representa una ubicación específica, lo que permite planificar la distribución de elementos y garantizar la coherencia en las dimensiones y proporciones.

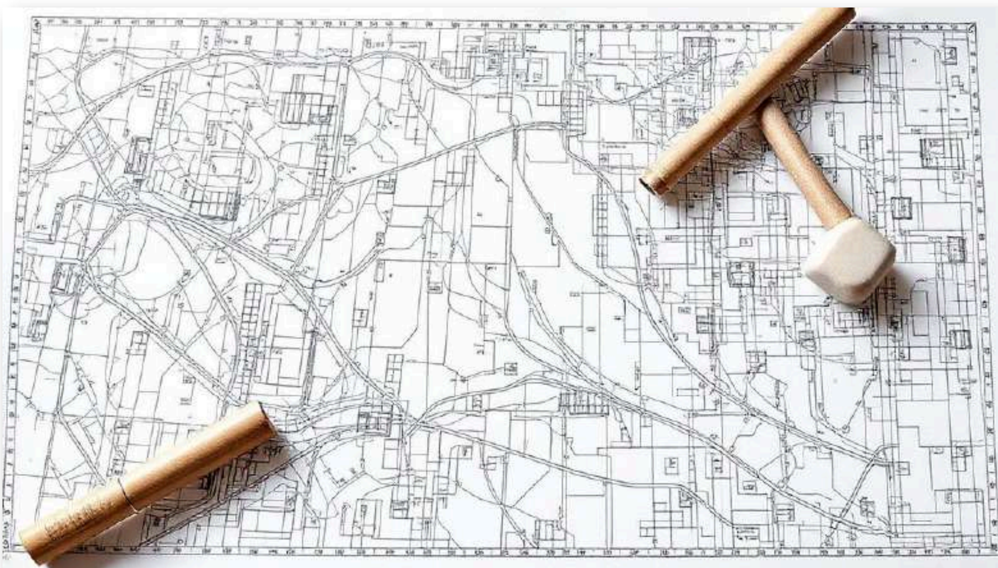


Figura 6.3. Plano de una ciudad

Videojuegos y Animaciones

En el desarrollo de videojuegos y animaciones, el plano cartesiano es fundamental para posicionar personajes y objetos en la pantalla. Las coordenadas determinan la ubicación y el movimiento de los elementos, creando una experiencia visual coherente para el usuario.

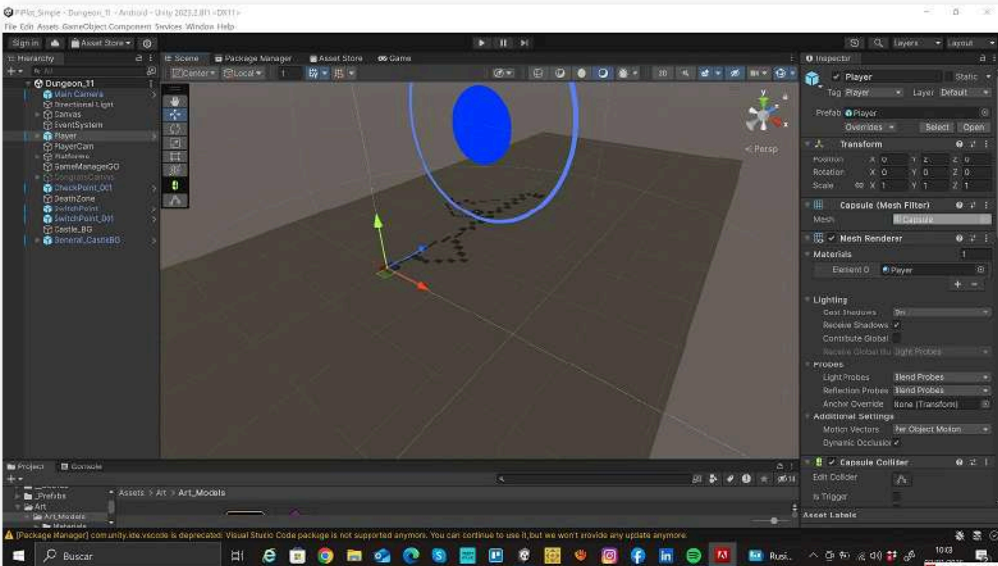


Figura 6.4. Diseño de un videojuego creado con unity

Economía

Los planos cartesianos se utilizan para modelar relaciones como la oferta y la demanda. Por ejemplo, la cantidad de un producto (eje X) puede relacionarse con su precio (eje Y) para visualizar cómo varían ambos. Las gráficas ayudan a identificar puntos de equilibrio, donde la oferta iguala a la demanda.

Estas representaciones gráficas permiten observar patrones, tendencias o anomalías en conjuntos de datos. Por ejemplo, la evolución de las ventas a lo largo del tiempo o la relación entre el gasto en publicidad y las ganancias.

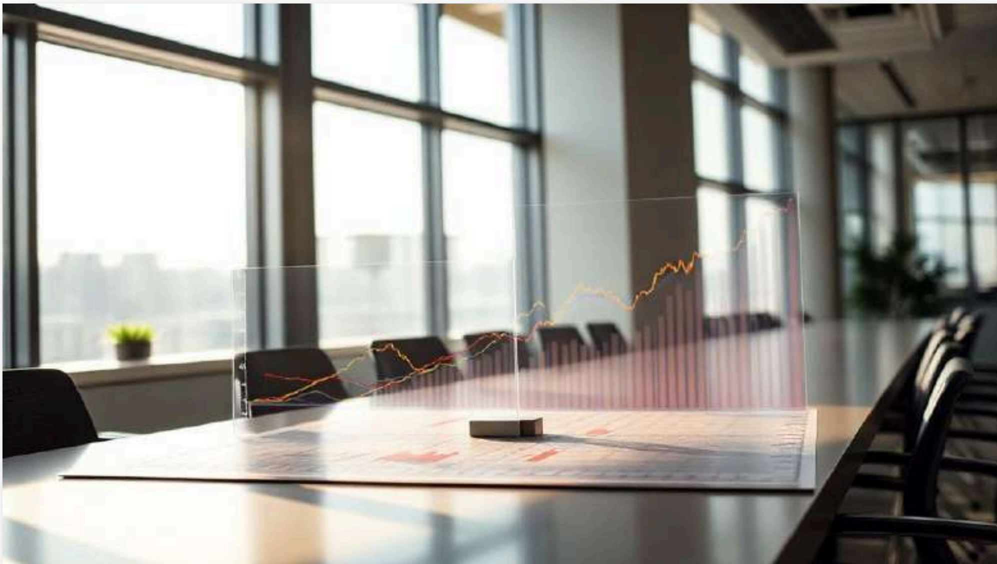


Figura 6.5. Zona de reunión empresarial

Herramientas como la maximización de beneficios o la minimización de costos se modelan y resuelven mediante representaciones en planos cartesianos. Las gráficas en el plano cartesiano se usan para ajustar modelos matemáticos que predicen el comportamiento futuro de variables clave.

Estadística

Una aplicación importante de las coordenadas cartesianas en estadística es la representación gráfica de datos en un plano cartesiano para analizar relaciones entre variables. Se utiliza un plano cartesiano para graficar pares de datos ***(x,y)***, donde ***x*** y ***y*** representan dos variables cuantitativas.

Esto permite observar patrones, tendencias o correlaciones entre las variables.

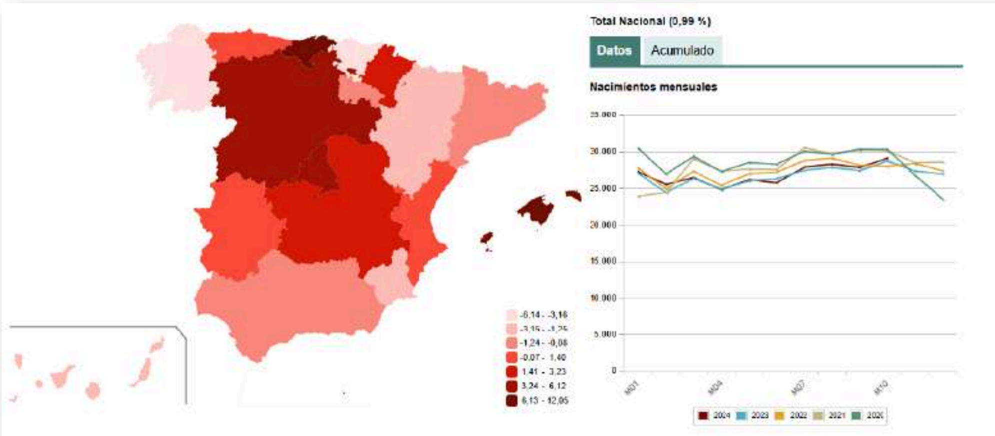


Figura 6.6. Estimación mensual de nacimientos en España (2020-2024)
[Instituto Nacional de Estadística]

Estos son solo algunos ejemplos de cómo se puede aplicar el plano cartesiano en la vida laboral y cotidiana. En resumen, el plano cartesiano es esencial para interpretar, comparar y comunicar información visualmente en estos campos, siendo una conexión entre conceptos abstractos y situaciones del mundo real.

6.4 Navegación y Geolocalización

Las coordenadas geográficas son un sistema de referencia utilizado para determinar la ubicación de cualquier punto en la superficie de la Tierra mediante dos valores: ***latitud*** y ***longitud***.

Este sistema se basa en la división de la Tierra en líneas imaginarias que forman una red global, conocida como grilla geográfica.

Figura 6.7. Red geográfica

Latitud: Mide la distancia al norte o al sur del ***Ecuador***, que es la línea imaginaria que divide la Tierra en dos hemisferios: norte y sur. Se expresa en grados (°), desde 0° en el Ecuador hasta 90° en los polos (norte y sur).[4]

[4] Ejemplo: 45° norte o 30° sur.

Las líneas de latitud, llamadas ***paralelos***, son líneas imaginarias sobre la superfície terrestre. Son horizontales y van de este a oeste.

El ***Ecuador*** es el paralelo más importante y extenso del sistema de coordenadas geográficas, ya que divide la Tierra en dos hemisferios iguales: el hemisferio norte y el hemisferio sur. Además, es el único paralelo que tiene una longitud máxima, mide aproximadamente 40.075 kilómetros, lo que lo convierte en el paralelo mayor.

Longitud: Mide la distancia al este o al oeste del ***Meridiano de Greenwich***, una línea imaginaria que pasa por Greenwich, Inglaterra. Se expresa en grados (°), desde 0° en Greenwich hasta 180° hacia el este o el oeste.[5]

Las líneas de longitud, llamadas ***meridianos***, son verticales y convergen en los polos.

Sistema de referencia: Las coordenadas se expresan en formato (latitud, longitud) [6]

Actividad: Usa un atlas o Google Earth para encontrar las coordenadas de tu pueblo o ciudad.

Localiza las zonas correspondientes a las siguientes coordenadas y comprueba el resultado en la escena de la página siguiente.

- 27°59'16''N, 86°56'40'' E
- 38°53'42''N, 77°02'12'' O
- 48°52'19'' N, 2°46'49'' E
- 35°18'27'' S, 149°07'27'' E

[5] Ejemplo: 60° este o 120° oeste.

[6] Ejemplo: (37.7749°N, 122.4194°O), corresponde a San Francisco, EE.UU.

Localiza las zonas correspondientes a las siguientes coordenadas:

A continuación, se presentan diferentes coordenadas geográficas. Selecciona la ubicación que corresponde a cada una de ellas:

1. 27º59'16" N, 86º56'40" E:

Selecciona una opción

2. 38º53'42" N, 77º02'12" O:

Selecciona una opción

3. 48º52'19" N, 2º46'49" E:

Selecciona una opción

4. 35º18'27" S, 149º07'27" E:

Selecciona una opción

Verificar Respuestas

Proyecciones Cartográficas

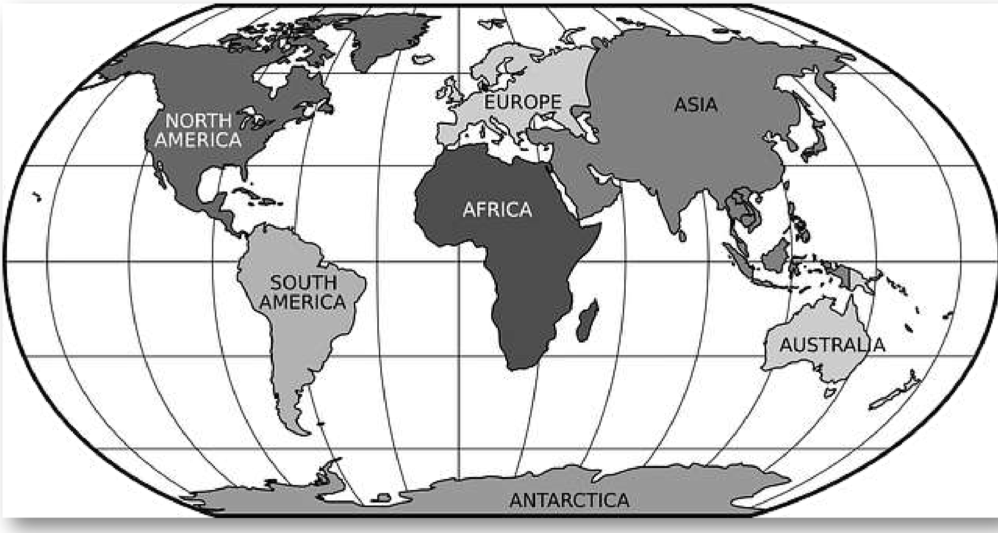


Figura 6.8. Proyecciones cartográficas

El mapa que estás viendo es una proyección cartográfica de la Tierra. Una proyección es el método utilizado para representar el globo terráqueo en un plano. Investiga sobre las proyecciones cartográficas y las características de los diferentes tipos que existen.

Puedes consultar más información en los siguientes enlaces:

- La representación del territorio en mapas y planos. Instituto Geográfico Nacional. Gobierno de España
- Proyecciones cartográficas. Instituto Geográfico Nacional. Gobierno de España
- Proyecciones cartográficas. Wikipedia

Aplicaciones de las coordenadas geográficas

Climatología:

Ayudan a determinar zonas climáticas y patrones meteorológicos.

Geografía y geología:

Facilitan la descripción de características físicas de la Tierra, como montañas, ríos o fronteras.

Ciencias sociales:

Se usan para analizar distribuciones poblacionales y estudios territoriales.

Navegación y cartografía:

Permiten ubicar con precisión lugares en un mapa, esencial para GPS y navegación marítima o aérea.

Los sistemas de navegación, como los GPS, utilizan coordenadas cartesianas para determinar ubicaciones precisas en mapas digitales. Al introducir una dirección, el sistema la convierte en coordenadas (latitud y longitud) que corresponden a puntos específicos en el plano cartesiano, facilitando la orientación y el trazado de rutas.

Puntos Clave:

- ***Ejes de coordenadas***

  Son dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto común llamado origen. Estas rectas se utilizan para dividir el plano en cuatro regiones (llamadas cuadrantes) y para localizar puntos en el espacio mediante pares ordenados de números.

  Eje de abscisas: Es el eje horizontal del sistema de coordenadas. Los valores en este eje representan la posición de un punto hacia la izquierda o la derecha del origen. Se suele denominar también ***"eje OX"***.

  Eje de ordenadas: Es el eje vertical del sistema de coordenadas. Los valores en este eje indican la posición de un punto hacia arriba o hacia abajo respecto al origen. También se conoce como ***"eje OY"***.

- ***Origen de coordenadas***

  Es el punto donde se intersectan los ejes de coordenadas. Su posición en el sistema está definida por las coordenadas ***(0,0)***. Es el punto de referencia a partir del cual se mide cualquier otra posición en el plano.

- ***Coordenadas de un punto***

  Son un par de valores ordenados ***(x,y)*** que indican la posición exacta de un punto en el plano. El primer valor (***x***) corresponde a la abscisa y el segundo (***y***) a la ordenada.

- ***Cuadrante***

  Es cada una de las cuatro regiones en las que los ejes dividen el plano.

  Primer cuadrante: Abscisas y ordenadas positivas ***(+,+)***.

  Segundo cuadrante: Abscisas negativas y ordenadas positivas ***(−,+)***.

  Tercer cuadrante: Abscisas y ordenadas negativas ***(−,−)***.

  Cuarto cuadrante: Abscisas positivas y ordenadas negativas ***(+,−)***.

- ***Coordenadas geográficas***

  Las coordenadas geográficas son esenciales para la representación y localización precisa de lugares en mapas y planos. Estas se basan en un sistema de ***latitud*** y ***longitud*** que divide la superficie terrestre en una red de líneas imaginarias, facilitando su uso en diversas aplicaciones.

  Se trata de un lenguaje universal para describir ubicaciones en mapas y planos. Desde actividades cotidianas como el uso del GPS hasta proyectos científicos avanzados, son una herramienta esencial para entender y explorar el mundo que nos rodea.

Capítulo VII:

Tablas y gráficas. Relacionando variables

7. Tablas y gráficas. Relacionando variables

7.1 Representar los datos de una tabla en una gráfica

Las tablas y gráficas son herramientas esenciales para comprender cómo cambian y se relacionan las variables.

En este capítulo, aprenderemos a convertir la información presentada en tablas a gráficas y a interpretar los datos de manera efectiva a partir de ellas. Las tablas son una forma ordenada de organizar datos, pero a veces es difícil observar tendencias o relaciones rápidamente. Aquí es donde las gráficas se convierten en nuestras aliadas.

Al transformar los datos en una gráfica, logramos:

- Visualizar patrones y tendencias que no son evidentes en una tabla.
- Comparar valores rápidamente, sin tener que leer fila por fila.
- Comunicar información de forma clara y universal, incluso a personas con diferentes niveles de conocimiento matemático.

Además, aprenderemos a interpretar gráficas para responder preguntas como:

- ¿Qué relación existe entre las variables representadas?
- ¿Cómo cambia un valor en función del otro?
- ¿Qué conclusiones podemos sacar de la gráfica?

Ya sea en la vida diaria, en la ciencia o en las empresas, las tablas y las gráficas son herramientas imprescindibles para tomar decisiones informadas. ¡Vamos a explorarlas juntos!

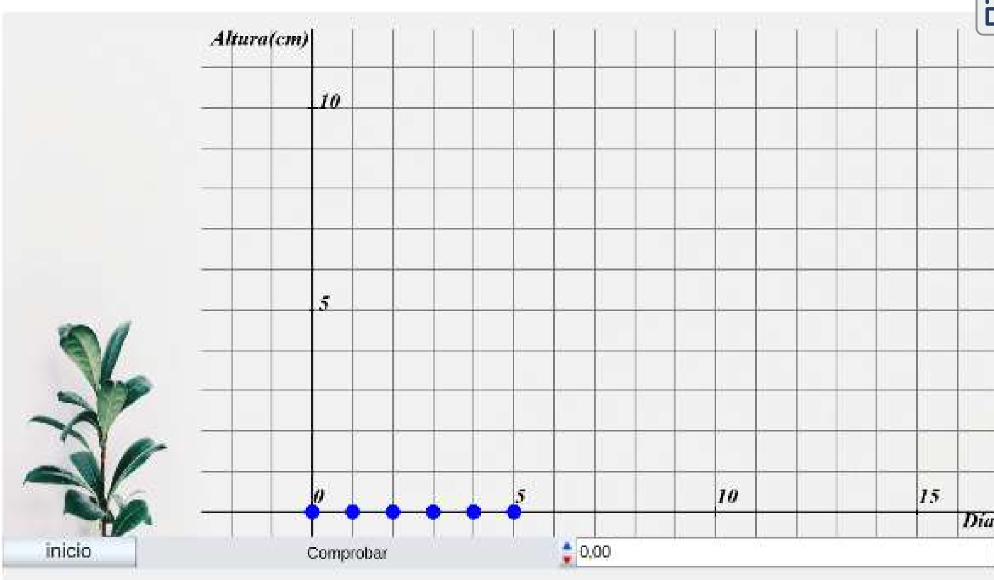
7.1.1 Crecimiento de una Planta (Gráfica Lineal)

Un estudiante está midiendo el crecimiento de una planta día a día y anota los resultados en la siguiente tabla.

Día	Altura (cm)
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

En tu cuaderno de trabajo dibuja unos ejes de coordenadas y representa gráficamente la altura de la planta en función del tiempo.

En la escena inferior, representa también dicha altura moviendo los puntos azules. Comprueba el resultado manteniendo pulsado el control ***Comprobar***.



Identificamos cada par de números de la tabla (día, altura) como coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

1. ¿Qué unidad se representa en el eje de abscisas?

2. ¿Qué unidad se representa en el eje de ordenadas?

3. ¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica? Justifica tu respuesta.

4. ¿Qué altura aproximada tenía la planta al cabo de dos días y medio?

5. ¿Podemos afirmar que la planta seguirá creciendo al mismo ritmo? Justifica tu respuesta.

Comprobar respuestas

7.1.2 Compra de libretas (Gráfica Discreta)📒

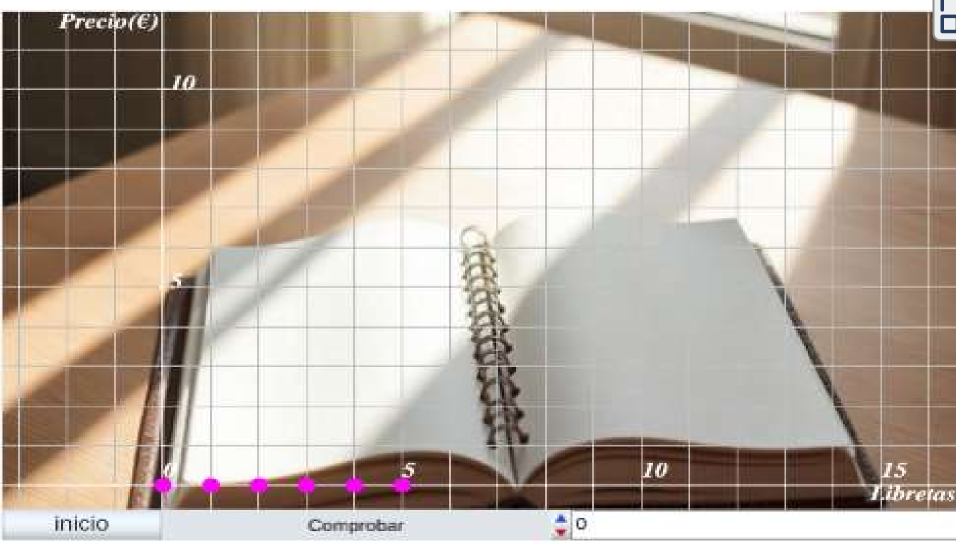
El precio de una libreta en una librería de mi barrio es de 2 €.

Figura 7.1. Compra de llibretas

Este ejemplo es muy similar al anterior. Podemos construir una tabla y un gráfico colocando el número de libretas en el eje de abscisas (eje X) y el precio en el eje de ordenadas (eje Y). Completa la tabla siguiente con los datos indicados y representa gráficamente los puntos en la escena.

Libreta	Precio (€)
1	
2	
3	
4	
5	

Verificar respuestas



En este caso, como habrás notado, hay una diferencia importante entre los dos ejemplos: no es posible comprar fracciones de libretas (por ejemplo, 1,5 o 1,7 libretas), mientras que sí podemos calcular el crecimiento de una planta después de 1,5 días, 2,3 días, etc.

7.1.3 Costo de un Viaje (Gráfica Escalonada) 🚕

Figura 7.2. Viaje en taxi

El costo de un viaje en taxi depende de la distancia recorrida.

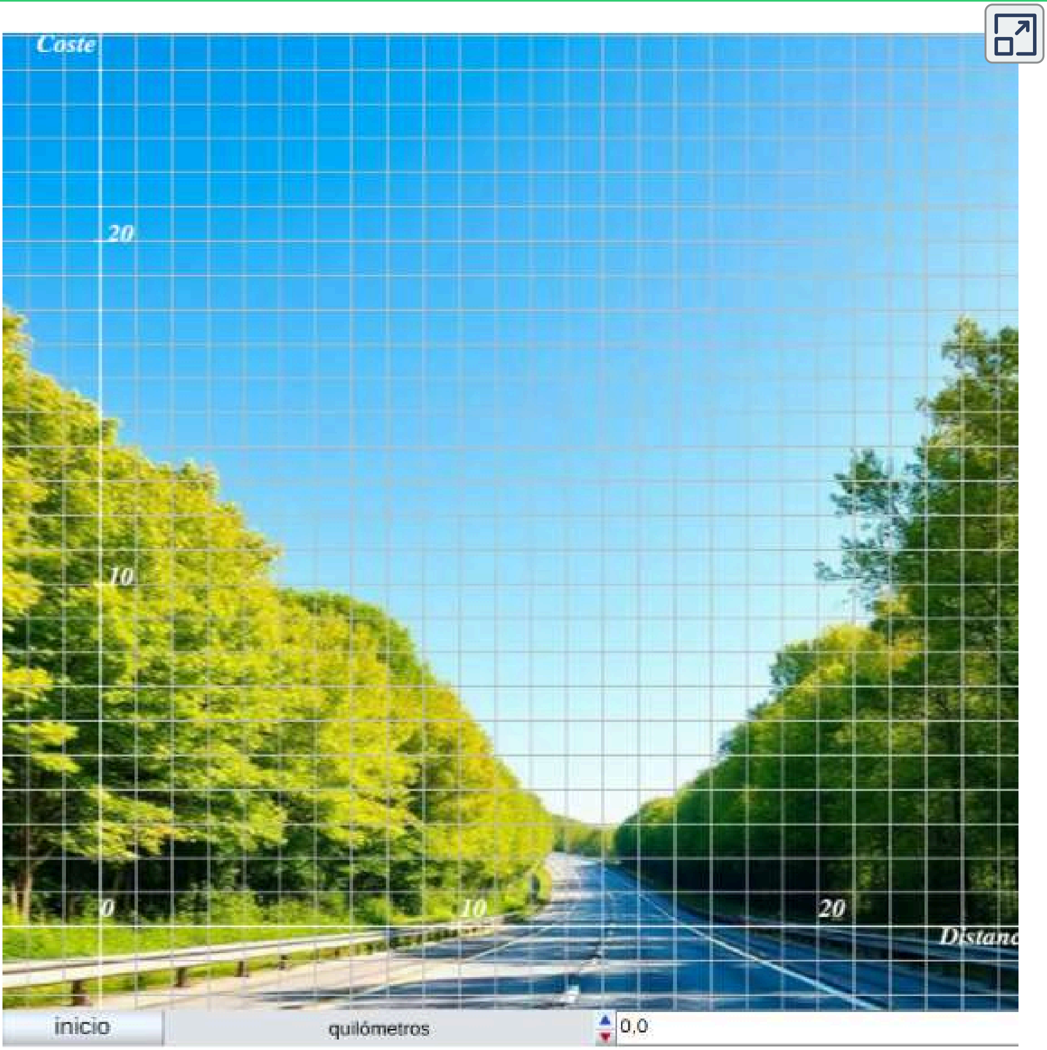
Distancia (km)	Costo (€)
(0,5]	10
(5,10]	15
(10,15]	20
(15,20]	25

Notación de intervalos: La notación (5,10] indica que el precio cambia según la distancia recorrida. Por ejemplo:

- Si el recorrido es exactamente de 5 kilómetros, el precio es de 10€
- Si la distancia está entre más de 5 y hasta 10 kilómetros (incluyendo 10 km), el precio es de 15€.

En tu cuaderno de trabajo dibuja unos ejes de coordenadas y representa gráficamente el precio del viaje según los quilómetros recorridos. Observación.

En la escena interactiva, observa la gráfica dinámica que se forma manteniendo pulsado el control de ***quilómetros***. Usa esta herramienta como apoyo para confirmar que tu representación en el cuaderno es correcta.

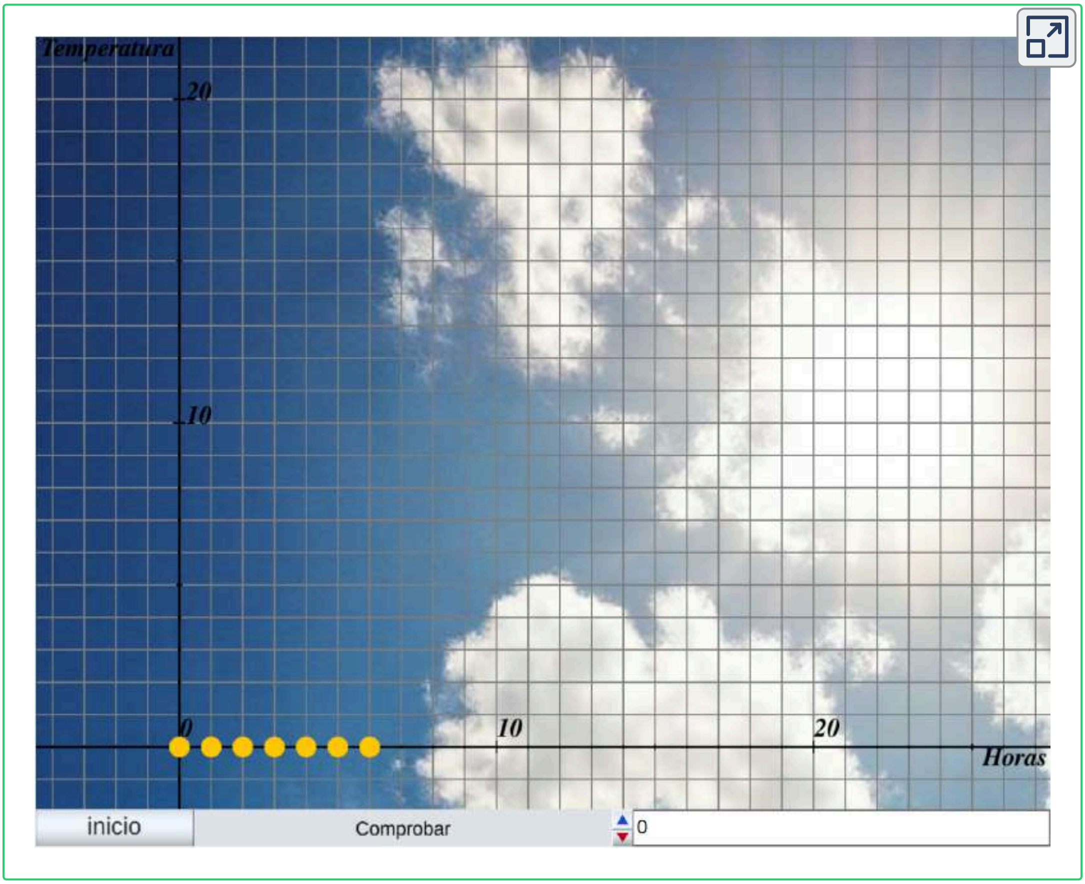


7.1.4 Temperatura a lo Largo del Día (Gráfica Lineal por tramos) 🌡️

La siguiente tabla representa los cambios de temperatura a diferentes horas del día en una determinada ciudad.

Hora	6AM	9AM	12AM	3PM	6PM	9PM	12PM
Temperatura (°C)	12	16	20	18	15	10	7

Representa estos datos en la siguiente escena y comprueba el resultado asignando el valor 1 al control ***Comprobar***



¿Tiene sentido unir los puntos de la gráfica?

En la vida real, no siempre podemos medir cada pequeño cambio que ocurre, pero podemos hacer una aproximación para entender lo que pasa en general.

Cuando conectamos los puntos de la tabla con líneas rectas, estamos haciendo una gráfica que llamamos lineal a tramos, podemos imaginar que entre cada hora la temperatura sube o baja de forma más o menos recta.

Esto significa que en cada intervalo de tiempo (de una medida a la siguiente) asumimos que la temperatura cambia de forma lineal, aunque no sea exacto.

Es como dibujar una versión simplificada de lo que realmente ocurre. Así podemos ver cómo sube o baja la temperatura de forma aproximada, aunque sabemos que en realidad puede haber pequeñas curvas en el cambio.

7.1.5 Trayectoria de una Pelota (Gráfica Cuadrática) 🏀

La siguiente tabla indica las mediciones de la altura que alcanza una pelota que es lanzada hacia arriba y luego cae.

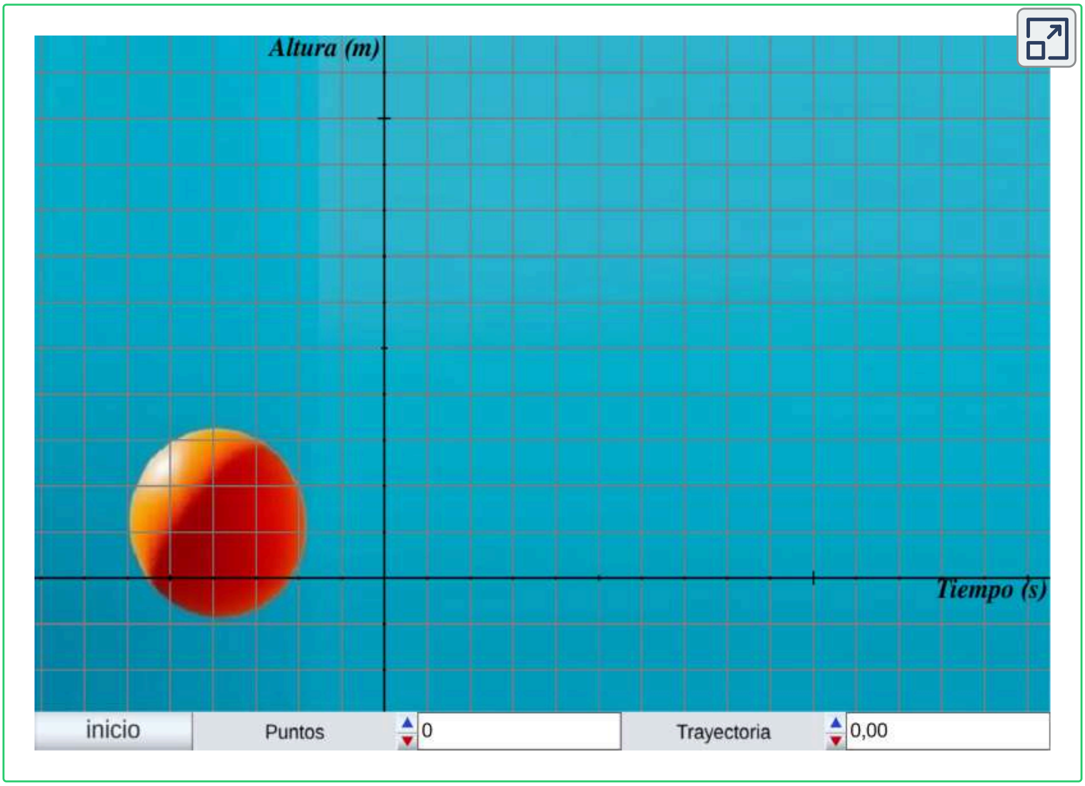
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5
Altura (m)	0	5	8	9	8	5

En tu cuaderno de trabajo dibuja unos ejes de coordenadas y representa gráficamente los puntos que indican la altura que alcanza la pelota en función del tiempo.

La siguiente escena muestra la trayectoria de la pelota.

1 Asigna el valor 1 al control ***Puntos*** para ver representados los puntos de la tabla.

2 Observa la gráfica dinámica que se forma manteniendo pulsado el control ***Trayectoria.***



7.1.6 El dron explorador 🛸

Figura 7.3. Imagen de un dron

Un dron está realizando una misión para recolectar datos sobre el terreno en diferentes puntos. Durante 5 segundos, se registra su posición en el plano cartesiano, donde el eje x representa la distancia horizontal (en metros) y el eje y la altura sobre el suelo (en metros).

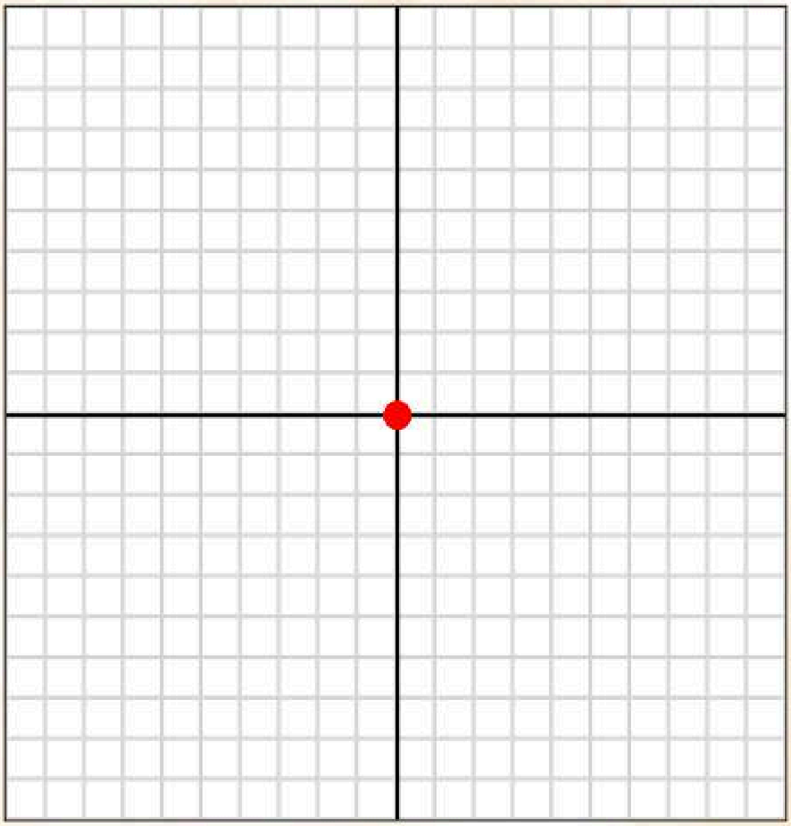
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5
Posición en x (m)	0	-2	-4	1	-3	2
Posición en y (m)	0	3	-1	-3	-2	4

1 En la escena de la página siguiente, ubica cada punto del recorrido del dron según los datos de la tabla.

2 Utiliza el botón para comparar tus respuestas con las posiciones correctas y analiza cualquier discrepancia.

Ubica los puntos en el plano cartesiano

Según la tabla, arrastra los puntos al lugar correcto en el plano cartesiano.



Mostrar Posiciones Correctas

Traza la Trayectoria

7.1.7 Temperaturas máximas y mínimas 🌡️

Durante una semana de invierno, se registraron temperaturas mínimas y máximas diarias en una ciudad.

Día	Temperatura Mínima (°C)	Temperatura Máxima (°C)
Lunes	-5	2
Martes	3	8
Miércoles	-2	5
Jueves	0	6
Viernes	4	9
Sábado	-7	1
Domingo	1	7

En un gráfico cartesiano, el eje horizontal (eje de abscisas) normalmente representa una variable numérica, como el tiempo en segundos o la distancia en metros.

Sin embargo, en este caso, utilizamos días de la semana como etiquetas. Esto se debe a que los días de la semana no son valores numéricos, sino categorías que representan momentos específicos.

Por lo tanto no ponemos numeración en el eje de abscisas, en su lugar, usamos etiquetas textuales (Lunes, Martes, Miércoles, etc.) para identificar cada día de la semana. En el eje vertical (eje de ordenadas), sí utilizamos números porque representa las temperaturas, una variable numérica.

En tu cuaderno de trabajo:

1 Representa las temperaturas mínimas en un gráfico cartesiano usando puntos azules.

2 Representa las temperaturas máximas en el mismo gráfico usando puntos rojos.

3 Une los puntos de cada conjunto para formar dos líneas: una para las temperaturas mínimas y otra para las máximas.

4 Comprueba el resultado en la escena de la página siguiente.

En la escena:

En el eje de abscisas, encontrarás un punto rojo para las temperaturas máximas y un punto azul para las mínimas correspondientes a cada día de la semana. Sitúa estos puntos en el plano para representar las temperaturas máximas y mínimas de la semana.

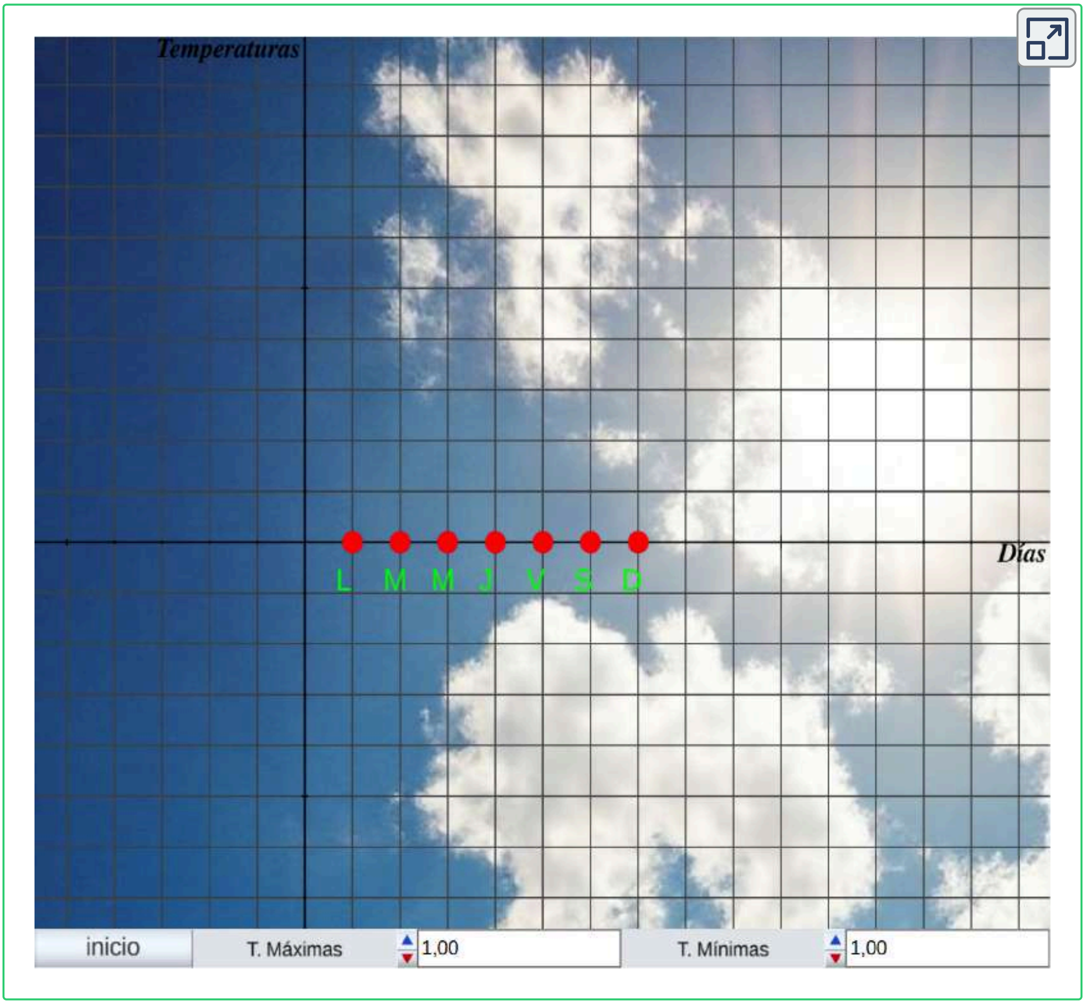
1 Desplaza los ***puntos rojos*** para representar las temperaturas máximas.

2 Desplaza los ***puntos azules*** para representar las temperaturas mínimas.

Una vez terminada la representación, comprueba el resultado uniendo los puntos:

3 Mantén pulsado el control ***T Máximas*** para unir los puntos rojos.

4 Mantén pulsado el control ***T Mínimas*** para unir los puntos azules.



Analiza y responde:

- ¿Cuál fue la mayor variación entre la temperatura mínima y máxima en un día?
- ¿Hubo algún día en el que la temperatura mínima fuera mayor o igual a 0 °C?

Comprobar respuestas

7.2 Interpretando el lenguaje de las gráficas

Las gráficas son una de las herramientas más poderosas en matemáticas y ciencias. Nos permiten visualizar relaciones, descubrir patrones y entender cómo cambian las cosas en diferentes contextos.

A través de ejemplos cotidianos y ejercicios interactivos, descubrirás cómo extraer información valiosa de gráficos, y cómo esta habilidad es esencial para comprender fenómenos en áreas tan diversas como la economía, la salud, la física y, por supuesto, las matemáticas.

7.2.1 Crecimiento de una planta

La siguiente gráfica muestra el crecimiento de una planta a lo largo de 10 días, con el tiempo en el eje horizontal (días) y la altura en el eje vertical (centímetros).

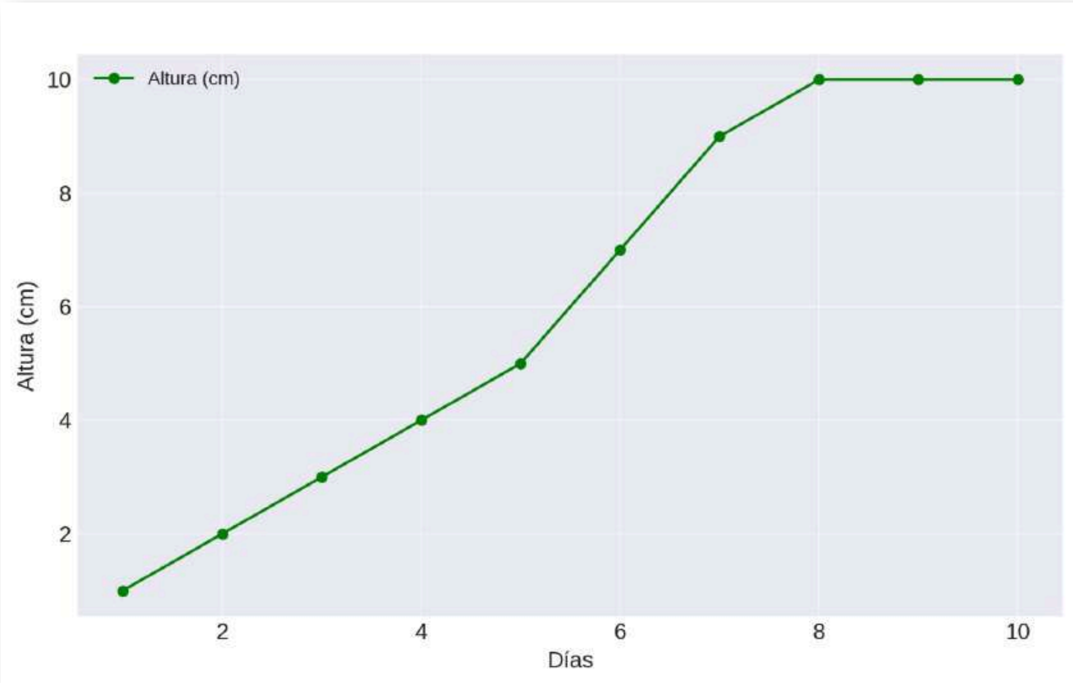


Figura 7.4. Crecimiento de una planta

Observa detenidamente la gráfica y presta atención a la relación entre la altura de la planta y los días transcurridos.

En la página siguiente encontrarás una actividad con 7 preguntas, cada una con varias opciones de respuesta. Tu tarea será seleccionar la opción correcta. Al final, podrás utilizar el botón ***Verificar respuestas*** para comprobar tus resultados.

1. ¿Qué sucede con la altura de la planta durante los primeros 5 días?

--Selecciona una respuesta--

2. ¿Cómo describirías el cambio en la pendiente entre los días 6 y 8?

--Selecciona una respuesta--

3. ¿Qué sucede con la altura de la planta entre los días 8 y 10?

--Selecciona una respuesta--

4. ¿Qué podría explicar el cambio en la velocidad de crecimiento después del día 6?

--Selecciona una respuesta--

5. ¿Por qué es importante observar no solo cuánto crece una planta, sino cómo cambia su velocidad de crecimiento?

--Selecciona una respuesta--

6. ¿Qué altura tenía la planta al cabo de 6 días?

--Selecciona una respuesta--

7. ¿Cuántos centímetros creció desde el día 2 hasta el día 8?

--Selecciona una respuesta--

Verificar respuestas | Limpiar

Interpretación de la gráfica:

Al observar la gráfica, vemos que la altura de la planta aumenta de manera constante durante los primeros 5 días, lo que sugiere un crecimiento uniforme. A partir del día 6, la pendiente se vuelve más pronunciada, indicando que el crecimiento se acelera.

Entre los días 8 y 10, el crecimiento se detiene, posiblemente porque la planta alcanzó su altura máxima o porque faltaron recursos como agua o luz.

7.2.2 Ventas semanales de un producto 📈

Esta gráfica de barras muestra las ventas de un producto en cada día de la semana.

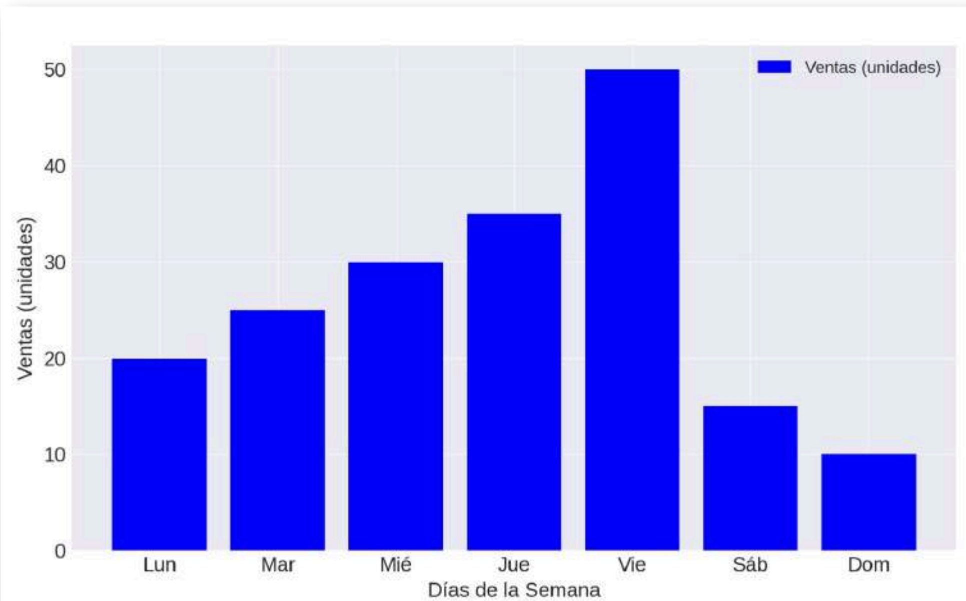
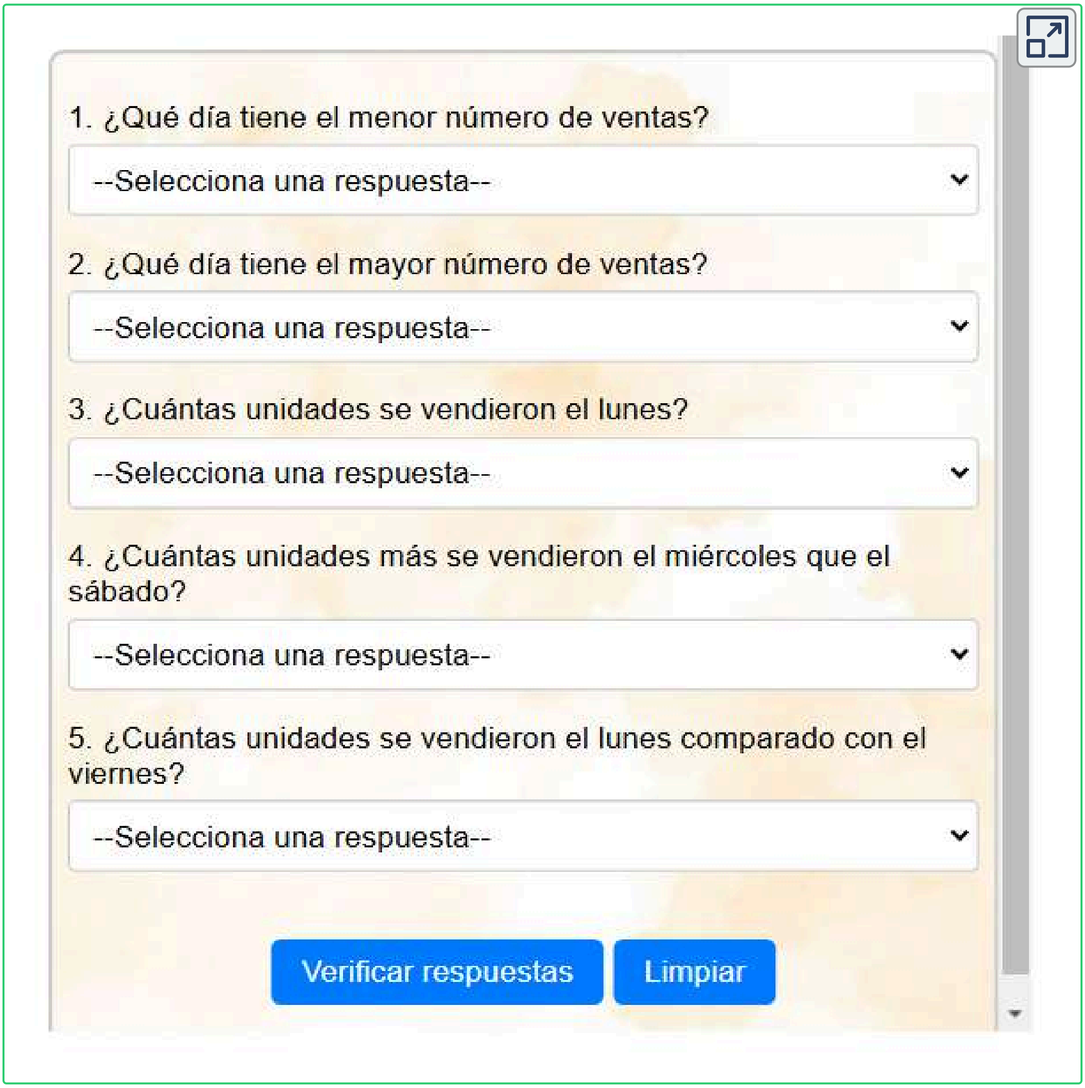


Figura 7.5. Ventas semanales

Observa detenidamente la gráfica y presta atención a la relación entre el día de la semana y el número de ventas.

A continuación te proponemos una actividad con 5 preguntas, cada una con varias opciones de respuesta. Tu tarea será seleccionar la opción correcta. Al final, podrás utilizar el botón ***Verificar respuestas*** para comprobar tus resultados. Amplía la escena para ver todo el contenido



Interpretación de la gráfica:

El lunes y el martes tienen las ventas más bajas, lo que podría indicar un inicio lento de la semana. Las ventas aumentan gradualmente hasta alcanzar su punto máximo el viernes, reflejando quizás una mayor demanda al final de la semana laboral.

El fin de semana (sábado y domingo) muestra una caída significativa en las ventas, posiblemente porque los clientes no compran durante esos días.

La gráfica ayuda a identificar los días más productivos y podría influir en estrategias como promociones o ajustes de inventario.

7.2.3 Velocidad de un ciclista 🚴

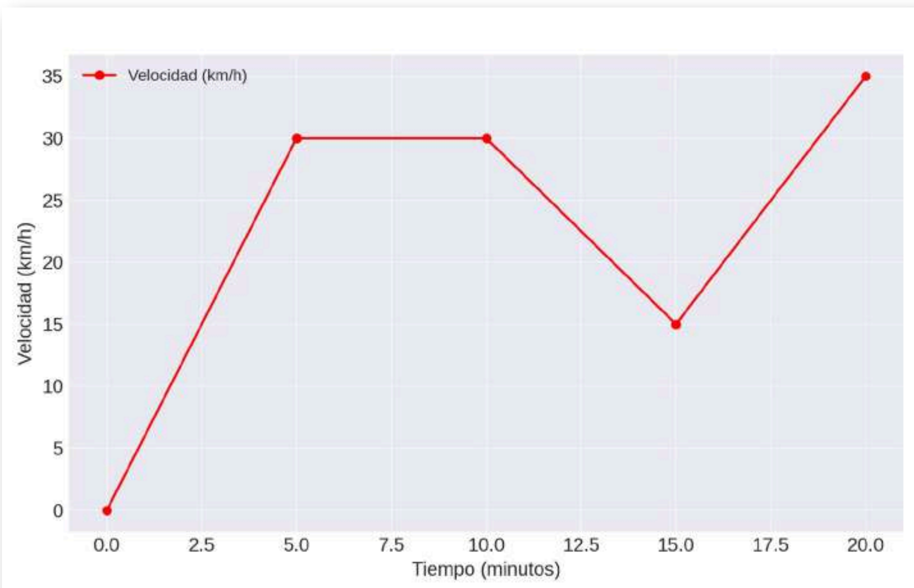
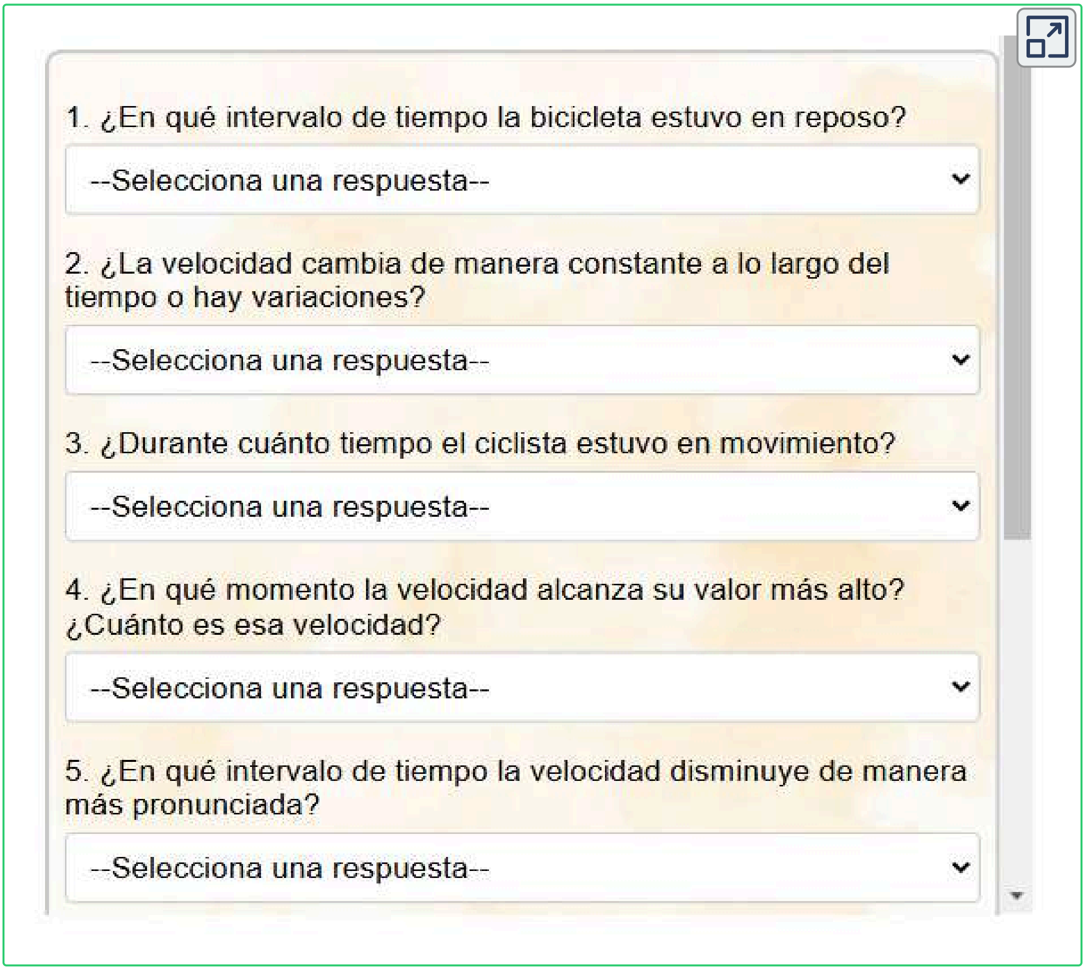


Figura 7.6. Velocidad de un ciclista

En la página anterior se presenta una gráfica que muestra la velocidad de un ciclista durante una carrera, con el tiempo en el eje horizontal (minutos) y la velocidad en el eje vertical (km/h).

Observa detenidamente la gráfica y presta atención a la relación entre el tiempo y la velocidad del ciclista.

A continuación se proponen 8 preguntas, cada una con varias opciones de respuesta. Tu tarea será seleccionar la opción correcta. Al final, podrás utilizar el botón ***Verificar respuestas*** para comprobar tus resultados. Amplía la escena para ver todo el contenido.



Interpretación de la gráfica:

En los primeros 5 minutos, la velocidad aumenta gradualmente, indicando que el ciclista está acelerando.

Entre los 5 y 10 minutos, la velocidad se mantiene constante en 30 km/h, lo que sugiere un tramo sin pendientes.

A partir de los 10 minutos, la velocidad disminuye bruscamente, lo que podría deberse a una pendiente ascendente o a fatiga.

En los últimos 5 minutos, la velocidad aumenta de nuevo, lo que podría indicar un descenso o un sprint final.

La gráfica no solo muestra cómo varió la velocidad, sino que también da pistas sobre las condiciones del recorrido y el desempeño del ciclista.

Puntos Clave:

Información de los datos en una tabla para su representación gráfica

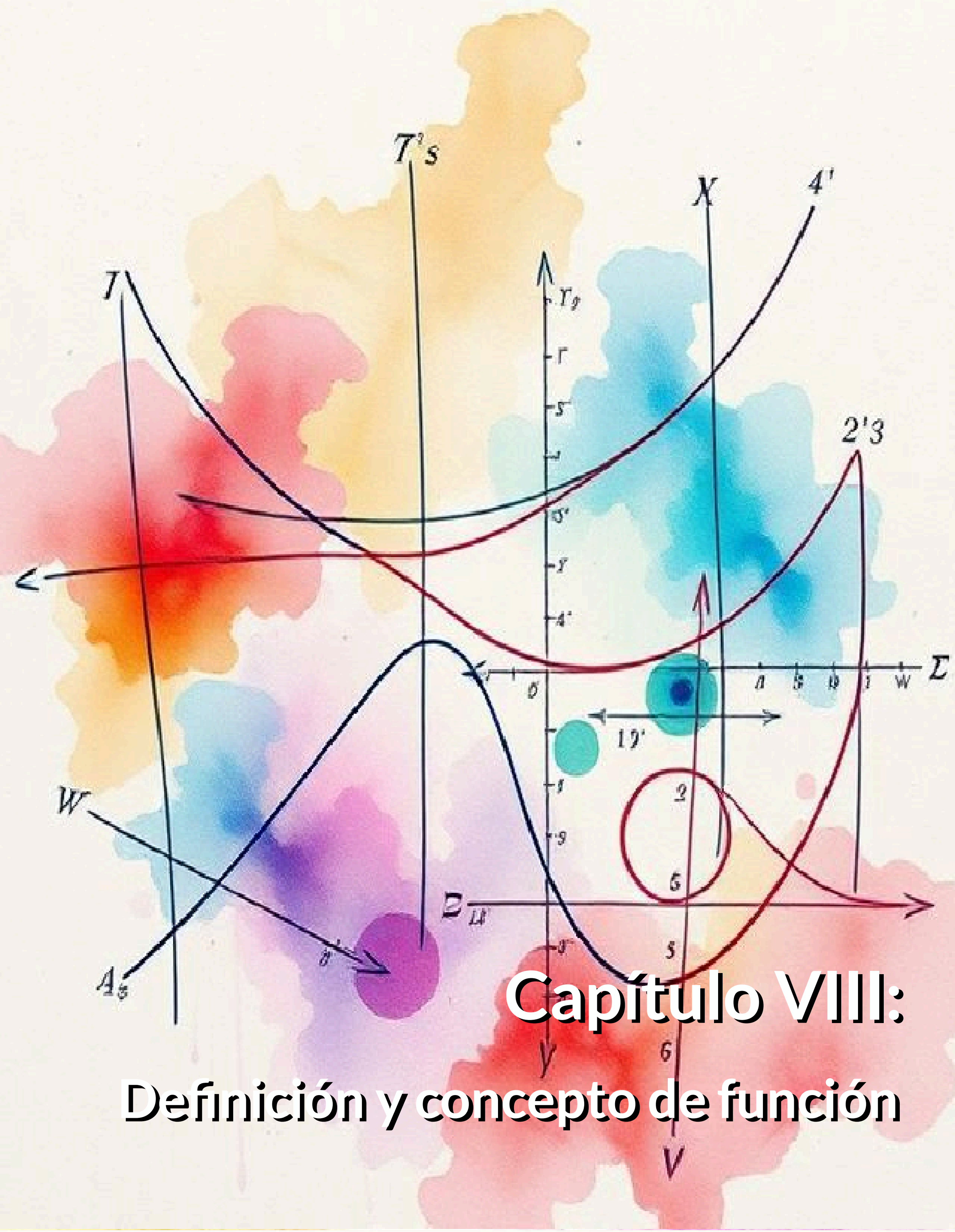
- Las tablas permiten organizar información en filas y columnas, facilitando la lectura, el análisis y la comparación de datos.
- Las tablas nos permiten observar las relaciones entre variables y seleccionar la mejor forma de representación gráfica para comunicar datos de manera visual.

Interpretación de gráficas

Elementos básicos de una gráfica:

- Ejes: Comprender qué representa cada eje (X e Y).
- Títulos y etiquetas: Identificar de qué trata la gráfica y qué variables están representadas.
- Leyenda: En gráficas con múltiples datos, ayuda a diferenciar las variables representadas.
- Identificar patrones, como aumentos, disminuciones, cambios bruscos o estabilidad en los datos.
- Relacionar lo que se observa en la gráfica con el contexto del problema para interpretar su significado.

Interpretar gráficas no solo implica leer valores, sino entender la información que los datos cuentan y cómo se relacionan con el contexto.



Capítulo VIII:

Definición y concepto de función

8. Definición y concepto de función

8.1 El lenguaje de las funciones: Definición y Notación

En muchos problemas relacionados con fenómenos naturales y situaciones de la vida cotidiana, es frecuente observar una dependencia entre dos magnitudes. Es importante saber interpretar esta dependencia para obtener toda la información posible y analizar la tendencia de la relación entre las dos magnitudes.

> Por ejemplo:
>
> - El consumo de gasolina de un coche a una determinada velocidad ***depende*** de los kilómetros recorridos.
>
> - La factura mensual del agua se calcula ***en relación*** con los metros cúbicos consumidos.
>
> - El precio de un billete de ferrocarril es ***en función*** de la distancia entre el origen y el destino.
>
> - La cantidad de harina necesaria para una tarta es ***proporcional*** al número de personas.

En todos estos casos, nos referimos a una dependencia entre ***magnitudes*** (una magnitud es cualquier elemento observable que se puede medir).

Esto significa que, al fijar previamente los valores de una de las magnitudes (como velocidad, metros cúbicos, distancia o número de personas), podemos determinar, siguiendo un criterio establecido, los valores correspondientes de la otra magnitud (como consumo de gasolina, factura del agua, precio del billete o cantidad de harina).

En una ***correspondencia*** entre dos conjuntos, cada elemento del primer conjunto (llamado ***Conjunto de Salida***) se relaciona con uno o más elementos del segundo conjunto (llamado ***Conjunto de Llegada***).

Una ***función*** es un tipo especial de correspondencia en la que a cada elemento del Conjunto de Salida le corresponde ***uno y solo uno*** del Conjunto de Llegada.

En una función, tanto el conjunto de salida como el de llegada están formados por números reales, es decir, magnitudes que pueden medirse y representarse en la recta numérica.

En general, a la magnitud (variable) del Conjunto de Salida se la llama ***variable independiente*** y el único valor que le corresponde, ***variable dependiente***.

Para que una correspondencia sea una función, cada elemento del conjunto de Salida (formado por números reales) debe tener una única imagen en el Conjunto de Llegada. Si un mismo valor de la variable independiente genera más de un resultado, no es una función. Matemáticamente, se expresa como $\boldsymbol{y = f(x)}$, donde $\boldsymbol{x}$ representa la variable independiente y $\boldsymbol{y}$ la variable dependiente.

Al subconjunto de números reales que efectivamente tienen imagen se le llama dominio de la función, y se denota como $\boldsymbol{D(f)}$

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{f:} \quad \boldsymbol{D(f)} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} & \longrightarrow & \boldsymbol{f(x)} \end{array}$$

Relaciones que SON funciones:

- Consumo de gasolina y distancia recorrida: A cada distancia recorrida (variable independiente) le corresponde un único valor de consumo de gasolina (variable dependiente

- Velocidad constante y tiempo de viaje: A cada tiempo de viaje (en horas) le corresponde una única distancia recorrida.

- Número de personas y costo total de entradas al cine: Si cada entrada cuesta lo mismo, a cada número de personas le corresponde un único costo total.

- Temperatura en grados Celsius y Fahrenheit: A cada temperatura en Celsius (x) le corresponde un único valor en Fahrenheit ($y=1.8x+32$).

Relaciones que NO son funciones:

- Temperatura y Momentos del día: A una misma temperatura pueden corresponder varios momentos del día en los que se registró esa temperatura.

- Ángulo de un reloj y Hora del día: La posición del ángulo formado por la agujas del minutero y del horario en un reloj analógico puede corresponder a varias horas diferentes.

- Divisores de un número: A cada número natural le corresponden varios divisores.

Ejercicio:

Si suponemos que un coche gasta un 6%, tenemos una relación entre dos magnitudes: kilómetros y litros:

Representación gráfica:

A menudo expresamos la relación entre dos variables mediante una gráfica en unos ejes de coordenadas. La variable independiente se representa en el eje horizontal OX, mientras que la variable dependiente se representa en el eje vertical OY.

Representamos las coordenadas de los puntos (x, y) que cumplen la condición $y = f(x)$.

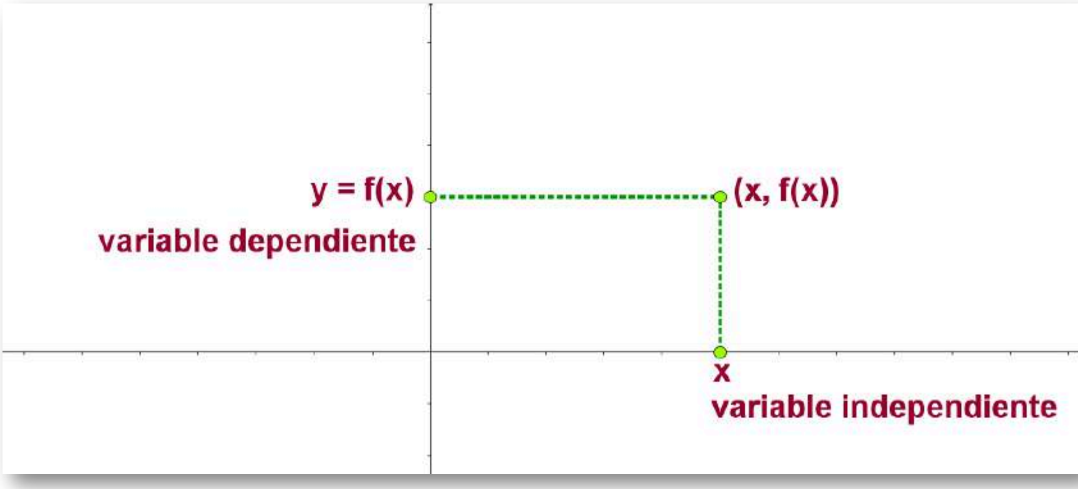


Figura 8.1. Representación gráfica

La representación gráfica de diferentes datos nos permite analizar e interpretar la información más fácilmente y nos muestra cómo una variable depende de la otra.

En la escena de la página siguiente, podrás visualizar cómo representar en el plano los puntos obtenidos en la actividad sobre el consumo de un coche.

Sigue las instrucciones en pantalla para ver cómo se trazan los puntos y cómo se construye la gráfica de la función.

Para una mejor representación de la gráfica, cada unidad en el eje de abscisas corresponde a 20 kilómetros recorridos, y cada unidad en el eje de ordenadas equivale a 1 litro de combustible consumido.

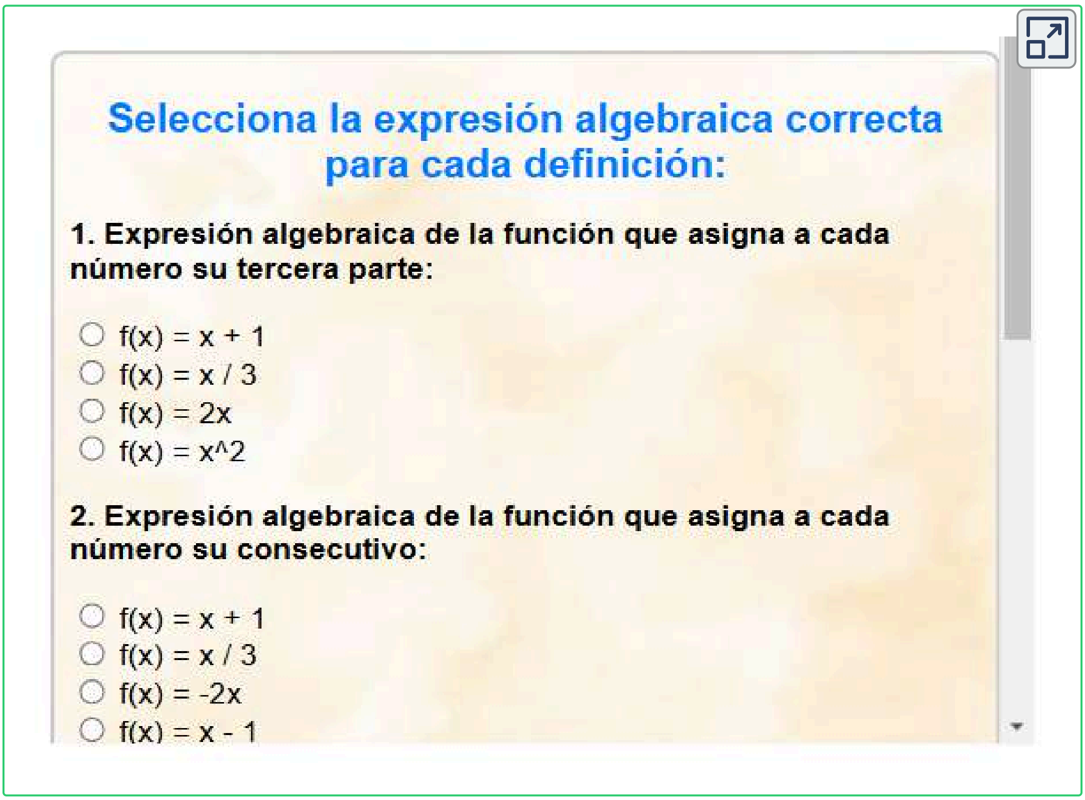
8.2 De números y letras: expresiones algebraicas en funciones

En el contexto de las funciones, una expresión algebraica define cómo se relacionan las variables.

- La expresión algebraica de la función que a cada número le asigna su cuadrado es: $f(x) = x^2$
- La función que a cada número le asigna su inverso es: $f(x) = 1/x$.
- $f(x) = 2x + 3$ indica cómo calcular el valor de la función para cada valor de x.

> Las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$ y $f(x) = 2x + 3$ también se pueden escribir como $y = x^2$, $y = 1/x$ y $y = 2x + 3$.
>
> Ambas notaciones son formas correctas de expresar una función. La notación $f(x)$ resalta que f es el nombre de la función, mientras que y simplemente representa la salida de la función en términos de x. Ambas describen la misma relación matemática entre las variables.

En la siguiente escena se presenta una actividad con definiciones de funciones. Tu tarea es seleccionar la expresión algebraica correcta para cada una. Al finalizar, pulsa el botón ***Verificar respuestas*** para comprobar tus resultados. Amplía la escena para visualizar todo el ejercicio.



8.3 El recorrido de las funciones: imágenes, antiimágenes y sus puntos clave

8.3.1 Imagen de un número:

La ***imagen*** de un número x_0 bajo una función f es el valor que obtiene la función cuando se evalúa en x_0. Si f es una función, la imagen de un número x_0 se denota como $f(x_0)$ y es el valor que corresponde cuando, en la fórmula algebraica, substituimos x por el valor x_0.

Ejemplo:

Si $f(x) = 5x - 1$, entonces la imagen de $x = 3$ es $f(3) = 5 \cdot 3 - 1 = 14$. Por lo tanto, la imagen de 3 bajo esta función es 14: $f(3) = 14$

8.3.2 Antiimagen de un número:

La ***antimagen*** de un número y_0 bajo una función f es el conjunto de todos los números x cuya imagen es y_0. Se denota como $f^{-1}(y_0)$, y representa el conjunto de valores x tales que $f(x) = y_0$.

Ejemplo:

Si $f(x) = x - 5$ y buscas la antimagen del número $y_0 = 7$, tienes que resolver la ecuación $x - 5 = 7$. La solución es $x = 12$, por lo que la antimagen de 7 bajo esta función es 12: $f^{-1}(7) = 12$.

Notación:

$$\begin{array}{cccc}
f: & D(f)\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x_0 & \longrightarrow & f(x_0) \\
 & & & \textit{imagen de } x_0 \\
 & f^{-1}(y_0) & \longleftarrow & y_0 \\
 & \textit{antiimagen de } y_0 & &
\end{array}$$

Cuando hablamos de una ***función***, estamos diciendo que para cada ***elemento del dominio*** $\boldsymbol{D(f)}$ (conjunto de valores que tienen imagen), existe ***una y solo una*** imagen.

Ahora, en cuanto a las ***antiimágenes***, se puede tener ***una*** , ***más de una*** o ***ninguna*** antiimagen para un valor dado del Conjunto de Llegada.

Por ejemplo, si $f(x)=x^2$, entonces la imagen de $x=3$ es $f(3)=3^2=9$. Por lo tanto, $f(3)=9$.

En cambio, si en $f(x)=x^2$ buscas la antimagen del número $y_0=9$, deberás resolver la ecuación $x^2=9$. Hay dos valores cuyo cuadrado es 9: $x=\pm 3$, por lo que $f^{-1}(9)$ = $\{-3,+3\}$.

Pero si en este mismo caso buscamos la antimagen del número $y_0=-25$, al resolver la ecuación $x^2=-25$, no encontramos ningún valor que elevado al cuadrado dé un número negativo, por lo que -25 bajo esta función no tiene antiimágenes.

Práctica de Imágenes y Antiimágenes

Indicaciones: Cuando el resultado sea una fracción, escribe el número en forma decimal, usando un punto (.) para separar la parte entera de la decimal.

Función 1: f(x) = 2 - 5x

Imágenes

f(0):

f(1):

f(-3):

f(1/2):

Antiimágenes

x para f(x)=7:

x para f(x)=-1:

x para f(x)=0:

x para f(x)=2/5:

8.3.3 Intersección con los ejes

La ***intersección de una función con los ejes*** hace referencia a los puntos donde la gráfica de la función corta los ejes de coordenadas (eje OX y eje OY).

Intersección con el eje del Abscisas (eje OX)

La intersección con el eje OX corresponde a los puntos donde la gráfica de la función corta dicho eje. Esto sucede cuando $y = 0$, es decir, cuando $f(x) = 0$. En estos casos, las coordenadas de los puntos de intersección tienen la forma $(x, 0)$.

Intersección con el eje de Ordenadas (eje OY)

Se refiere al punto donde la gráfica corta el eje OY, es decir, el valor de la función cuando $x = 0$. Este valor se obtiene calculando la imagen de 0. En este caso, las coordenadas del punto de intersección tiene la forma $(0, y)$.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 2x + 5$, para hallar la intersección de esta función con el eje de abscisas debemos resolver la ecuación: $2x + 5 = 0$. La intersección de esta función con el eje de abscisas es el punto $(-5/2, 0)$. Para hallar la intersección con el eje de ordenadas debemos calcular la imagen de 0: $f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$. La intersección de esta función con el eje de ordenadas es el punto $(0, 5)$.

8.4 El recorrido de las funciones: Interpretación gráfica

En este capítulo exploraremos una serie de gráficas de funciones que te ayudarán a descubrir cómo identificar las imágenes, las antiimágenes, las intersecciones con los ejes, así como los puntos de máximo y mínimo.

8.4.1 Lectura de Puntos en una Gráfica: Encuentra sus Coordenadas.

Ubicando la Imagen de un Número en una Gráfica.

Para encontrar gráficamente la imagen de $\boldsymbol{f(x)}$ para un valor $\boldsymbol{x = a}$, trazamos una recta vertical (paralela al eje de ordenadas) que pase por $\boldsymbol{x = a}$. Luego, identificamos el punto donde esta recta intersecta la gráfica de la función. A partir de ese punto de intersección, trazamos una recta horizontal (paralela al eje de abscisas). La intersección de esta horizontal con el eje de ordenadas nos da el valor de $\boldsymbol{f(a)}$, que es la imagen de $\boldsymbol{x = a}$.

Buscando la Antiimagen: ¿Qué Valores Llegan a un Punto?

Para encontrar gráficamente la antiimagen de $\boldsymbol{f(x)}$ para un valor $\boldsymbol{y = b)}$, trazamos una recta horizontal (paralela al eje de abscisas) que pase por $\boldsymbol{y = b}$. Luego, identificamos el punto donde esta recta intersecta la gráfica de la función. A partir de ese punto de intersección, trazamos una recta vertical (paralela al eje de ordenadas). La intersección de esta horizontal con el eje de abscisas nos da el valor de $\boldsymbol{f^{-1}(b)}$, que es la antiimagen de $\boldsymbol{y = b}$.

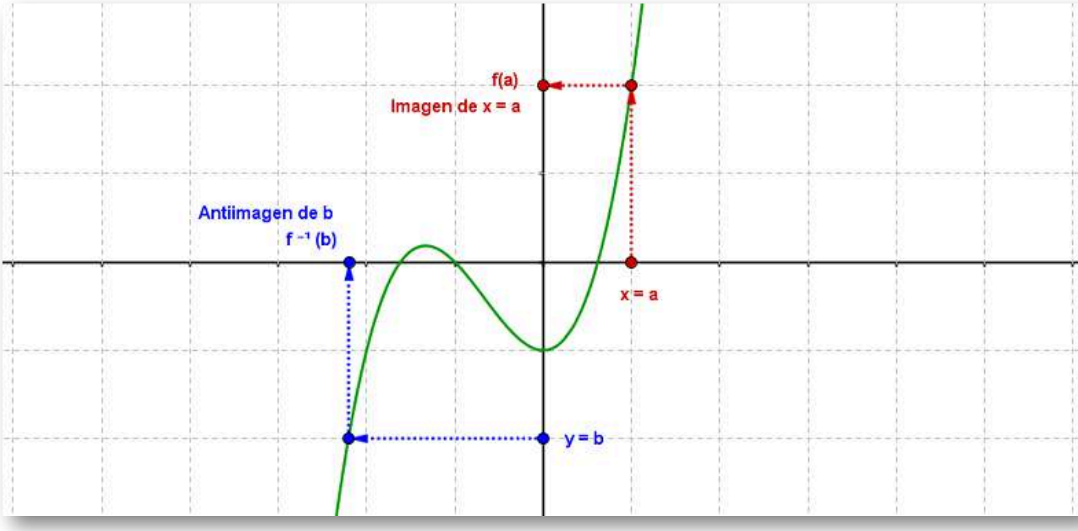


Figura 8.2. Lectura de puntos en una gráfica

Observa en el siguiente vídeo, cómo encontrar imágenes y antiimágenes de una función a partir de su gráfica:

Intersecciones con los ejes

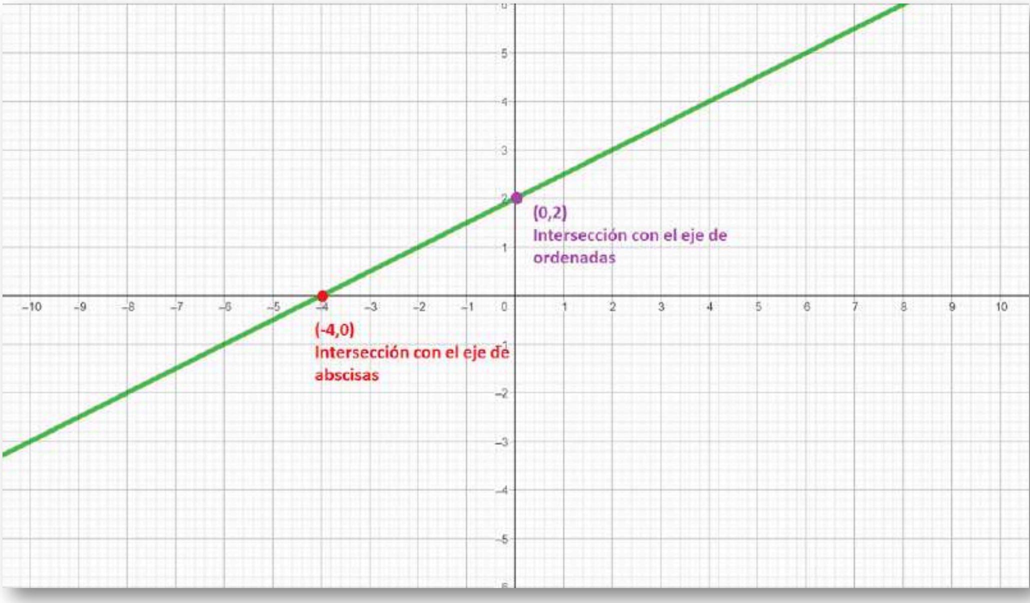


Figura 8.3. Intersecciones con los ejes. Función lineal.

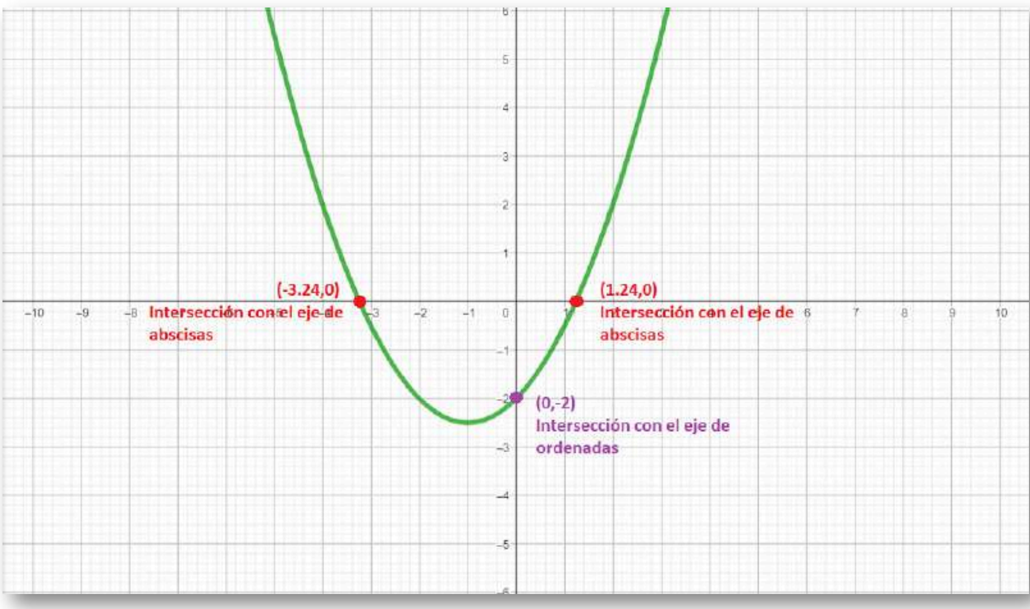


Figura 8.4. Intersecciones con los ejes. Función parabólica.

Práctica de Imágenes y Antiimágenes

Indicaciones: Cuando el resultado sea una fracción, escribe el número en forma decimal, usando un punto (.) para separar la parte entera de la decimal.

Función 1: f(x) = 2 - 5x

Imágenes

f(0):

f(1):

f(-3):

f(1/2):

Antiimágenes

x para f(x)=7:

x para f(x)=-1:

x para f(x)=0:

x para f(x)=2/5:

8.4.2 Monotonía y extremos de una función.

Monotonía: Crecimiento y Decrecimiento

Qué es crecer y decrecer:

A partir de una representación gráfica podemos ver que una función es ***creciente*** cuando, al aumentar los valores de $\boldsymbol{x}$, los correspondientes valores de $\boldsymbol{y}$ también aumentan (al movernos de izquierda a derecha sobre la gráfica, la curva ***sube)***.

De la misma forma, decimos que es ***decreciente*** cuando, al aumentar los valores de $\boldsymbol{x}$, los correspondientes valores de $\boldsymbol{y}$ disminuyen (al movernos de izquierda a derecha sobre la gráfica, la curva ***baja***).

El crecimiento y el decrecimiento se estudian en intervalos del eje $\boldsymbol{OX}$ (de izquierda a derecha). En los puntos donde la función pasa de crecer a decrecer o viceversa, ocurre un cambio significativo en su comportamiento (generalmente un extremo).

Extremos: Máximos y Mínimos

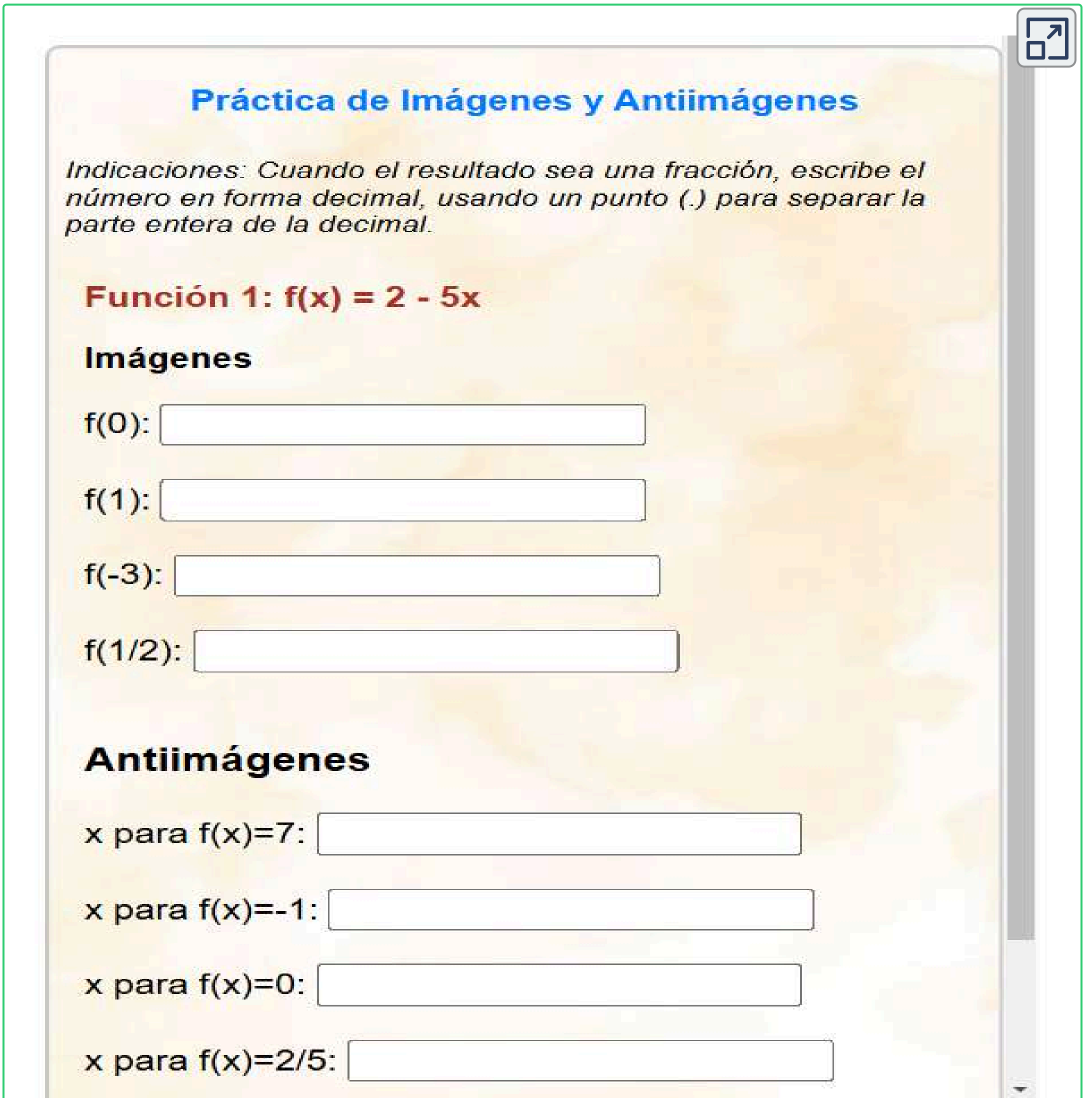
Qué son los extremos:

En un ***Máximo***, la función pasa de ***crecer*** a ***decrecer***.

En un ***Mínimo***, la función pasa de ***decrecer*** a ***crecer***.

Explorando la Ruta Ciclista 🚴

Imagina que un ciclista recorre una ruta con subidas y bajadas. La gráfica representa la altitud de la ruta en función del tiempo. A medida que avanza, puede encontrarse con tramos en los que sube (la gráfica es creciente), baja (la gráfica es decreciente) o alcanza puntos altos y bajos que corresponden a máximos y mínimos. ¡Explora el recorrido y analiza cómo cambia la función!


Práctica de Imágenes y Antiimágenes

Indicaciones: Cuando el resultado sea una fracción, escribe el número en forma decimal, usando un punto (.) para separar la parte entera de la decimal.

Función 1: f(x) = 2 - 5x

Imágenes

f(0):

f(1):

f(-3):

f(1/2):

Antiimágenes

x para f(x)=7:

x para f(x)=-1:

x para f(x)=0:

x para f(x)=2/5:

Puntos Clave:

- ***Función***: Es una relación entre dos conjuntos de números en la que a cada elemento del primer conjunto (dominio) le corresponde ***exactamente*** uno del segundo conjunto.

- ***Variable independiente***: Es la variable que se elige o modifica libremente en una función y pertenece al conjunto de salida (dominio). Se representa comúnmente con la letra $\boldsymbol{x}$.

- ***Variable dependiente***: Es la variable cuyo valor depende de la variable independiente y pertenece al conjunto de llegada. Se representa comúnmente con la letra $\boldsymbol{y}$.

- ***Imagen***: Es el valor que toma la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ para un determinado valor de $\boldsymbol{x}$. Es decir, si $\boldsymbol{x = a}$, entonces $\boldsymbol{f(a)}$ es la imagen de $\boldsymbol{a}$.

- ***Antiimagen***: Es el valor de la variable independiente $\boldsymbol{x}$ que produce un determinado valor de $\boldsymbol{y}$. Si $\boldsymbol{f(a) = b}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es la antiimagen de $\boldsymbol{b}$ y se expresa como $\boldsymbol{f^{-1}(b)}$.

- ***Dominio de una función D(f)***: Es el conjunto de todos los valores de ($\boldsymbol{x}$) para los cuales la función está definida, es decir, aquellos que tienen una imagen.

$$
\begin{array}{llcc}
\boldsymbol{f:} & \boldsymbol{D(f)} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \boldsymbol{x_0} & \longrightarrow & \boldsymbol{f(x_0)} \\
& & & \textbf{\textit{imagen de }} \boldsymbol{x_0} \\
& \boldsymbol{f^{-1}(\{y_0\}} & \longleftarrow & \boldsymbol{y_0} \\
& \textbf{\textit{antiimagen de }} \boldsymbol{y_0} & &
\end{array}
$$

- ***Intersecciones con los ejes***: Son los puntos donde la gráfica de la función corta los ejes de coordenadas.

  Intersección con el eje OX: Ocurre cuando $y = 0$, es decir, cuando $f(x) = 0$.

  Intersección con el eje OY: Ocurre cuando $x = 0$, es decir, cuando se evalúa la función en $f(0)$.

- ***Monotonía: crecimiento y decrecimiento***: Una función ***crece*** cuando, al movernos de izquierda a derecha sobre la gráfica, la curva ***sube***. Una función ***decrece*** cuando, al movernos de izquierda a derecha sobre la gráfica, la curva ***baja***.

- ***Extremos de una función***: En un ***Máximo***, la función pasa de ***crecer*** a ***decrecer***. En un ***Mínimo***, la función pasa de ***decrecer*** a ***crecer***.

Capítulo IX:
Diferentes formas de expresar una función

9. Diferentes formas de expresar una función

Una función puede representarse de diversas maneras, y cada forma ofrece una perspectiva única para analizarla. Este capítulo explora cómo las funciones pueden expresarse mediante gráficas, tablas, ecuaciones y palabras.

9.1 Descubriendo funciones desde una definición

Cuando partimos de la definición de una función, damos un primer paso hacia la comprensión de cómo se relacionan las variables. A partir de esta definición, podemos deducir la fórmula que representa la función y, con esta información, construir su gráfica. Este enfoque nos permite explorar las conexiones entre las palabras, las matemáticas y las representaciones visuales.

Ejercicio:

La función que a cada número le asigna el $\boldsymbol{triple}$ de ese número $\boldsymbol{menos\ 2}$.

Esto significa que para cada valor $\boldsymbol{x}$, multiplicas ese valor por $\boldsymbol{3}$ y luego le restas $\boldsymbol{2}$.

A partir de la definición podemos escribir su expresión matemática:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x - 2}$$

Esta es la fórmula de la función, y puede ser utilizada para calcular el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ para cualquier $\boldsymbol{x}$.

Ahora podemos crear una tabla de valores para ver cómo se comporta la función con diferentes entradas (valores de x).

x	f(x)
-2	f(-2) = 3(-2) - 2 = -6 - 2 = -8
-1	f(-1) = 3(-1) - 2 = -3 - 2 = -5
0	f(0) = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2
1	f(1) = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1
2	f(2) = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4

$\boldsymbol{Representación\ gráfica}$. Si marcas estos puntos de la tabla en un plano cartesiano y los conectas, obtendrás una recta. Por ejemplo: El punto $\mathbf{(-2, -8)}$ es un punto de la gráfica. El punto $\mathbf{(-1, -5)}$ también lo es. El punto $\mathbf{(0, -2)}$, y así sucesivamente.

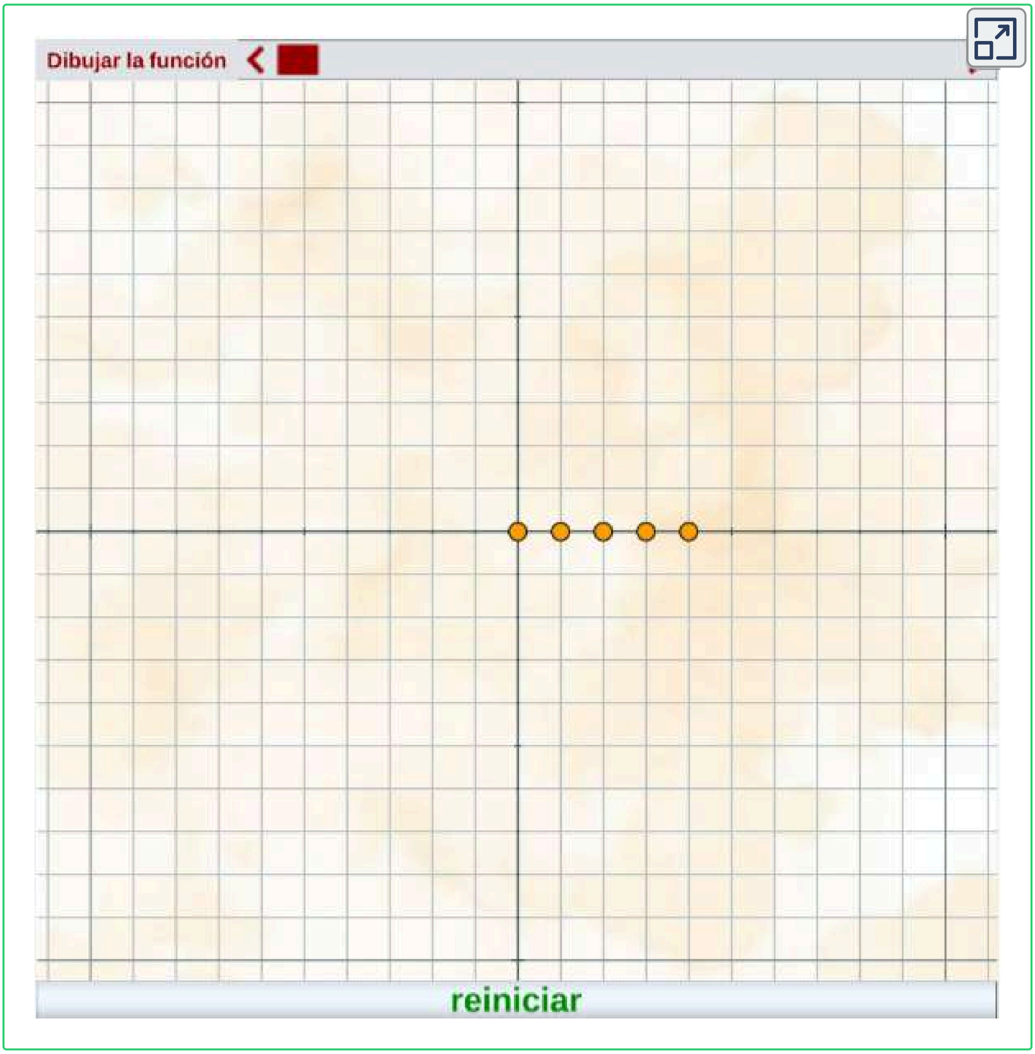
En resumen, a partir de la definición obtienes:

- La ***función matemática***: $\boldsymbol{f(x) = 3x - 2}$
- Una ***tabla de valores*** que muestra el comportamiento de la función para ciertos valores de $\boldsymbol{x}$.
- Y la ***gráfica*** que en este caso es una recta.

Ahora te invitamos a representar gráficamente la función que hemos definido. Sigue estos pasos:

1 Coloca los puntos en el plano en su posición correcta, guiándote por los valores de la tabla.

2 Desliza el control "Dibujar la función" con el ratón para visualizar la gráfica y verificar la ubicación de los puntos.



9.2 Explorando funciones desde una fórmula

La fórmula de una función es una herramienta poderosa. No solo nos permite calcular imágenes y antiimágenes, sino que también nos brinda la capacidad de analizar el comportamiento de la función: ¿es creciente o decreciente?, ¿qué ocurre en los extremos del dominio?, ¿hay simetrías o puntos clave? Además, con la fórmula, podemos representar gráficamente la función, observando sus características con mayor claridad.

En la siguiente actividad calcula imágenes, antiimágenes e intersecciones con los ejes a partir de la expresión matemática de la función. Amplía la escena para ver todo el contenido.

Análisis de la función:

$$f(x) = \frac{5-x}{2}$$

Responde los siguientes ejercicios y luego haz clic en "Verificar respuestas". Si el resultado es un número decimal, escribe un punto para separar la parte entera de la decimal.

1. Calcula las siguientes imágenes:

1.1 $f(2) =$

1.2 $f(-3) =$

2. Encuentra las antiimágenes:

2.1 $f(x) = 1 \Rightarrow x =$

9.3 Analizando funciones desde una tabla

Las tablas son un recurso práctico para trabajar con funciones. Nos permiten registrar valores específicos de las variables y observar patrones o tendencias. Al graficar los puntos de una tabla, podemos construir la gráfica de la función y, a partir de esta, deducir información adicional sobre su comportamiento. Este método es especialmente útil cuando queremos entender funciones de manera numérica y visual al mismo tiempo.

¿Cómo crece el bosque? 🌲

Un grupo de investigadores está estudiando el crecimiento de un bosque a lo largo de varios años. Han registrado la cantidad de árboles en un área determinada y han notado que sigue un patrón matemático.

Tu tarea es analizar los datos de la siguiente tabla y encontrar una relación entre el número de árboles $\boldsymbol{A}$ con los años transcurridos $\boldsymbol{t}$.

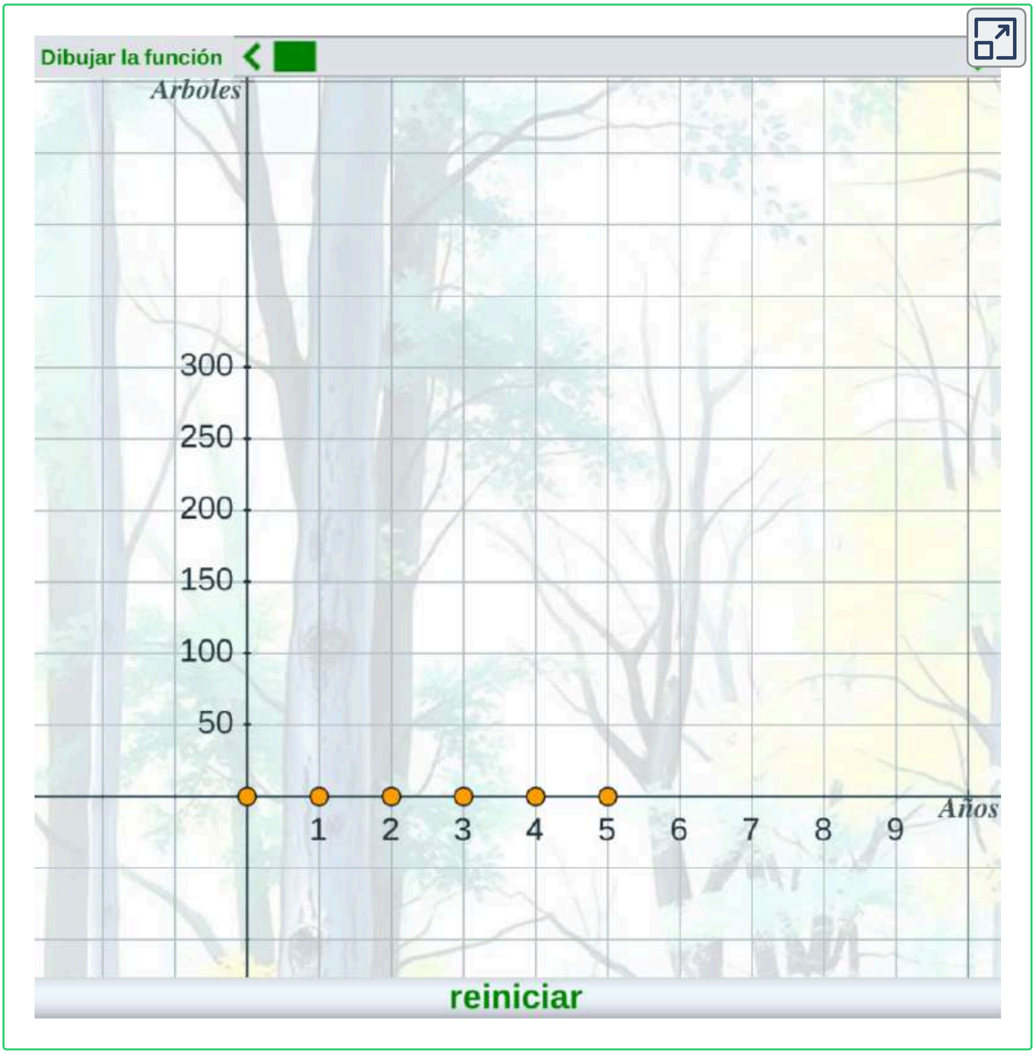
Años	0	1	2	3	4	5
Árboles	50	65	82	101	122	145

Observa cómo varía la cantidad de árboles y busca un patrón. ¿Aumenta de manera constante o cambia con el tiempo?

Para analizar el crecimiento del bosque, te invitamos a representar gráficamente los puntos de la tabla en la escena interactiva de la página siguiente.

1 *Ubica los puntos en el plano:*

En la escena interactiva, arrastra los puntos para situarlos correctamente según la tabla de datos.



Observación:

- El ***eje X*** representa los años transcurridos desde la reforestación. Como los datos se toman año a año, la escala en este eje es de ***1 en 1***.

- El ***eje Y*** representa la cantidad de árboles. Para que la gráfica sea clara y comprensible, se ha usado una escala de ***50 en 50*** en este eje.

2 *Explora la gráfica:*

Una vez colocados los puntos, mueve el ***deslizador*** para ver la curva que representa la evolución del número de árboles en el tiempo.

Analiza y responde:

1.- ¿Cuántos árboles habrá aproximadamente en el año 7 según la gráfica?

2.- ¿Cuántos años deberán pasar para que el bosque tenga más de 250 árboles?

Comprobar respuestas

💡 *Recuerda:*

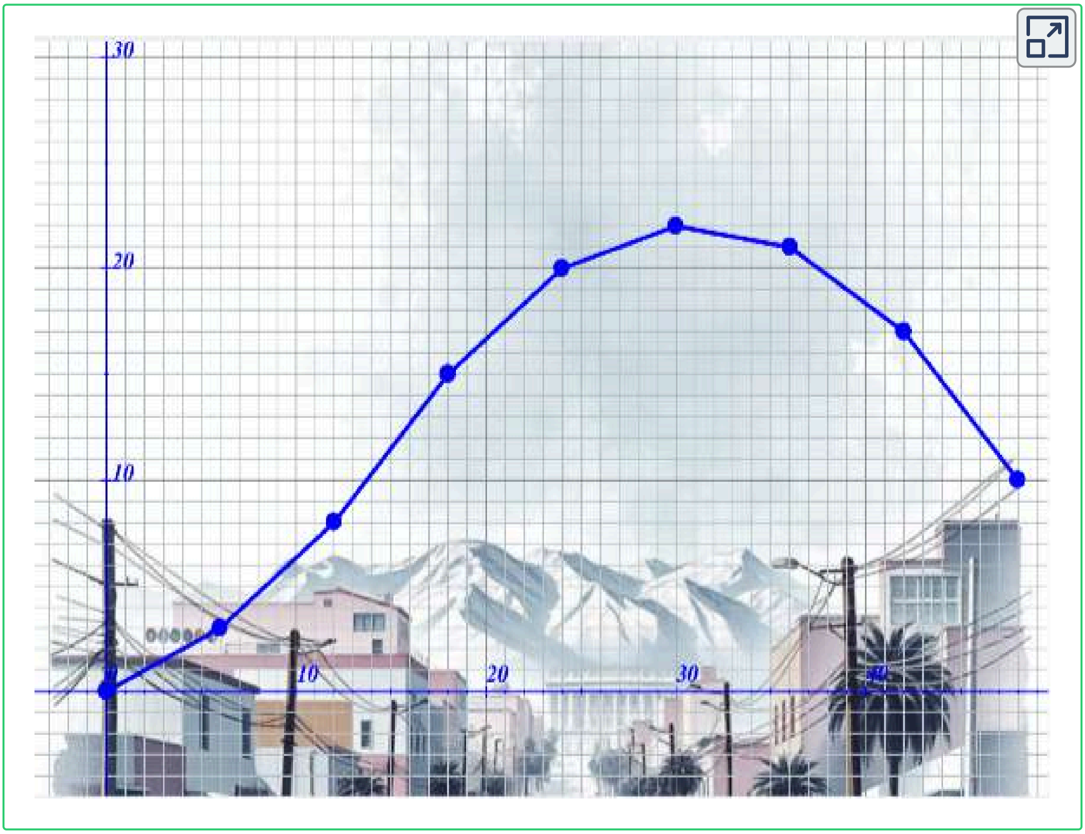
Los modelos matemáticos nos ayudan a predecir tendencias, pero en la realidad, pueden intervenir otros factores que alteren el crecimiento del bosque. Factores como enfermedades, incendios, cambios en el clima o intervención humana pueden alterar la cantidad de árboles en cualquier año.

9.4 Comprendiendo funciones desde una gráfica

La gráfica de una función es una representación visual que nos dice mucho con solo mirarla. Desde tendencias generales hasta detalles específicos, como las imágenes, antiimágenes, puntos de intersección con los ejes y el comportamiento global. Una gráfica también nos ayuda a intuir información como el crecimiento, la periodicidad o la existencia de máximos y mínimos.

Análisis del grosor de la nieve durante una tormenta ❄️

Durante una tormenta invernal, se midió el grosor de la nieve acumulada en una ciudad cada 6 horas durante dos días. La siguiente gráfica muestra los datos recogidos:



Analiza y responde:

1.-En esta gráfica, ¿qué fenómeno representa la variable x? ¿Cómo se mide?

2.- ¿Qué representa la variable y? ¿En qué unidades está expresada?

3.- ¿Cuánto tiempo duró la acumulación de nieve antes de comenzar a disminuir?

4.-¿En qué momento la nieve alcanzó su grosor máximo?

5.-¿En qué intervalo de tiempo se acumuló la nieve más rápidamente?

6.-¿Hubo algún momento en el que la acumulación se desaceleró antes de llegar al máximo?

7.-¿En qué momento comienza a disminuir el grosor de la nieve?

8.-¿Cual era el grosor de la nieve a las 48 horas?

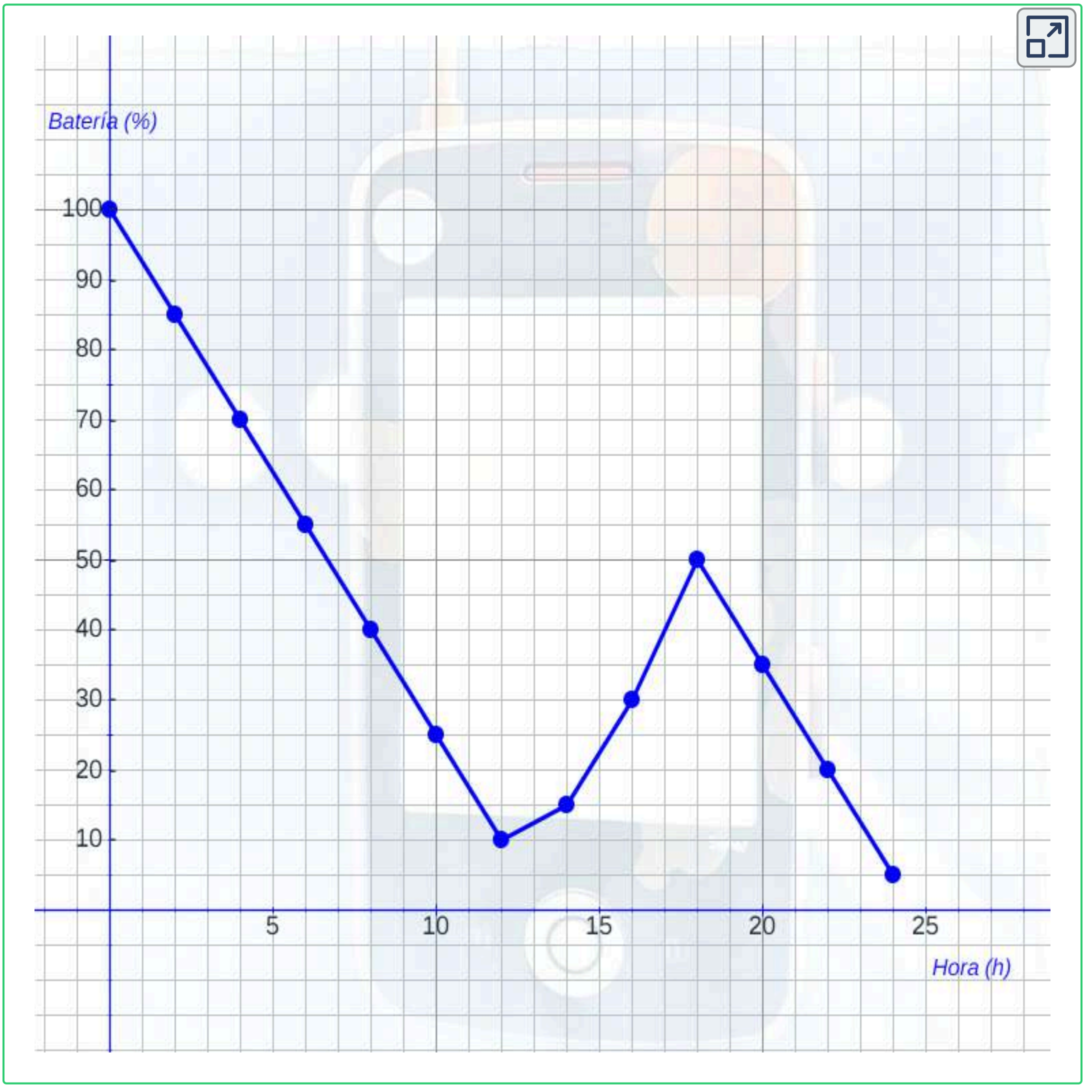
9.-¿En qué momento la nieve llegó a los 20 cm?

Comprobar respuestas

Energía de la batería de un celular 📱🔋

Un usuario ha registrado el nivel de batería de su teléfono cada hora durante un día.

En la siguiente gráfica se muestran los datos obtenidos:



Con los datos de la gráfica, completa la tabla siguiente.

Hora	Batería (%)
0	
4	
8	
12	
16	
20	
24	

Verificar respuestas

La siguiente escena presenta un cuestionario con cinco preguntas. Escoge la opción correcta para cada una y pulsa ***Verificar respuestas*** para comprobar tus aciertos.

Energía de la batería de un celular

1. ¿Qué magnitud representa la variable x? ¿En qué unidad se mide?

--Selecciona una respuesta--

2. ¿Qué magnitud representa la variable y? ¿En qué unidad se mide?

--Selecciona una respuesta--

3. ¿En qué momentos del día la batería se encontraba al 50%?

--Selecciona una respuesta--

4. ¿A qué hora se registró el nivel de batería más bajo?

--Selecciona una respuesta--

5. ¿Hubo algún momento en el que la batería aumentó en lugar de disminuir? ¿A qué se debe esto?

--Selecciona una respuesta--

Verificar respuestas Limpiar

Puntos Clave:

Una función es una relación matemática que asocia a cada valor de una variable de entrada un único valor de salida. Existen diversas maneras de representar una función, y cada una ofrece ventajas según el contexto y la información disponible.

A partir de una definición:

Se describe con palabras cómo se relacionan las variables. Esta forma es útil cuando se quiere expresar una regla general sin necesidad de números o gráficos.

A partir de una fórmula:

Se expresa la función mediante una ecuación matemática, lo que permite calcular valores de manera rápida y precisa. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x + 3$ indica que al número de entrada x se le multiplica por 2 y se le suma 3.

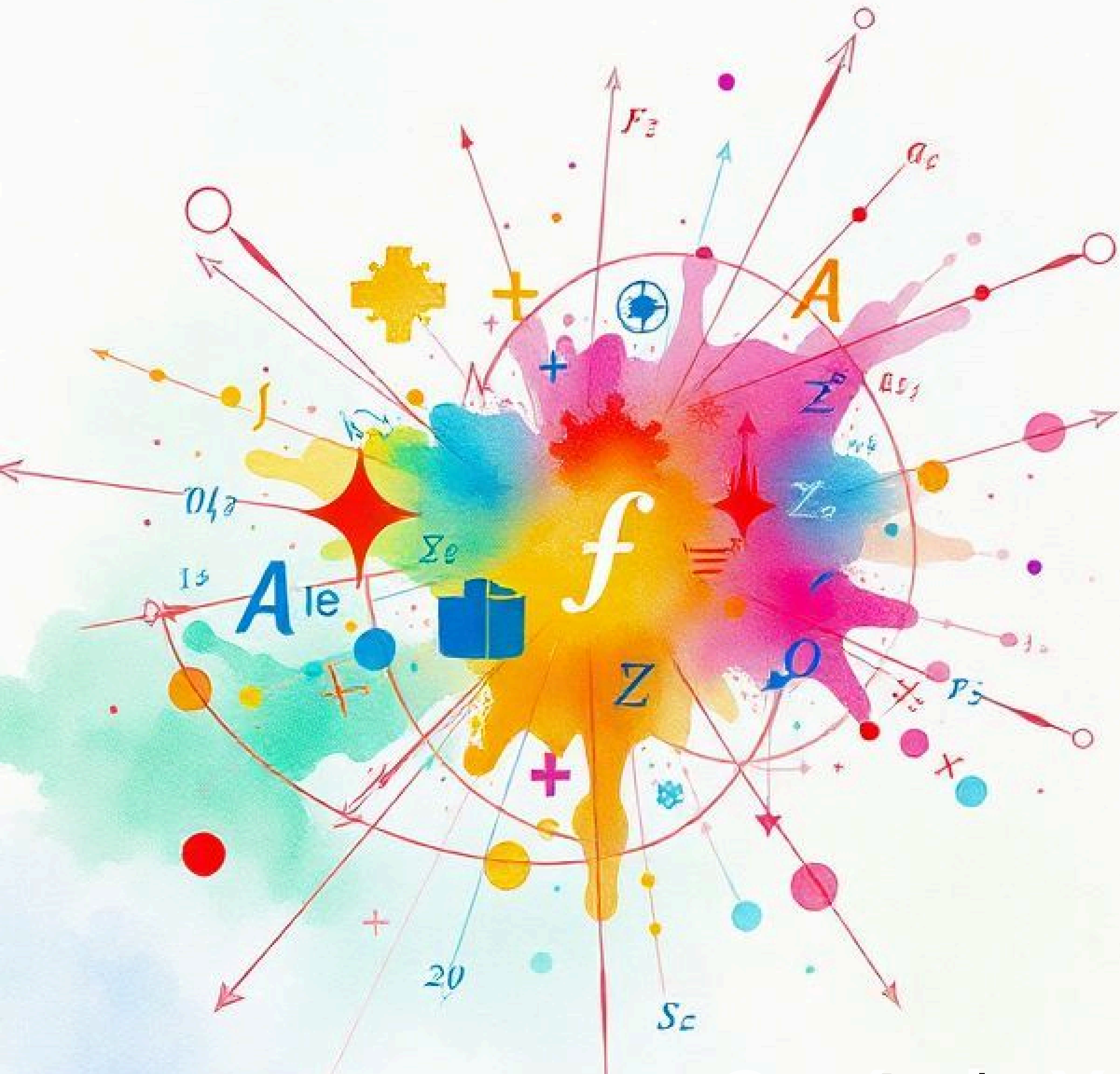
A partir de una tabla:

Se presentan pares ordenados de valores de entrada y salida en una tabla, facilitando la identificación de patrones o regularidades. Es especialmente útil cuando los datos provienen de mediciones o experimentos.

A partir de una gráfica:

Se representa la función en el plano cartesiano, lo que permite visualizar su comportamiento, identificar tendencias y analizar características como crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos.

Cada una de estas representaciones es útil en distintos contextos y todas están conectadas entre sí. Comprender cómo interpretar y transformar una función de una forma a otra es fundamental para el estudio y aplicación de las matemáticas.



Capítulo X:

Desafíos y problemas para practicar

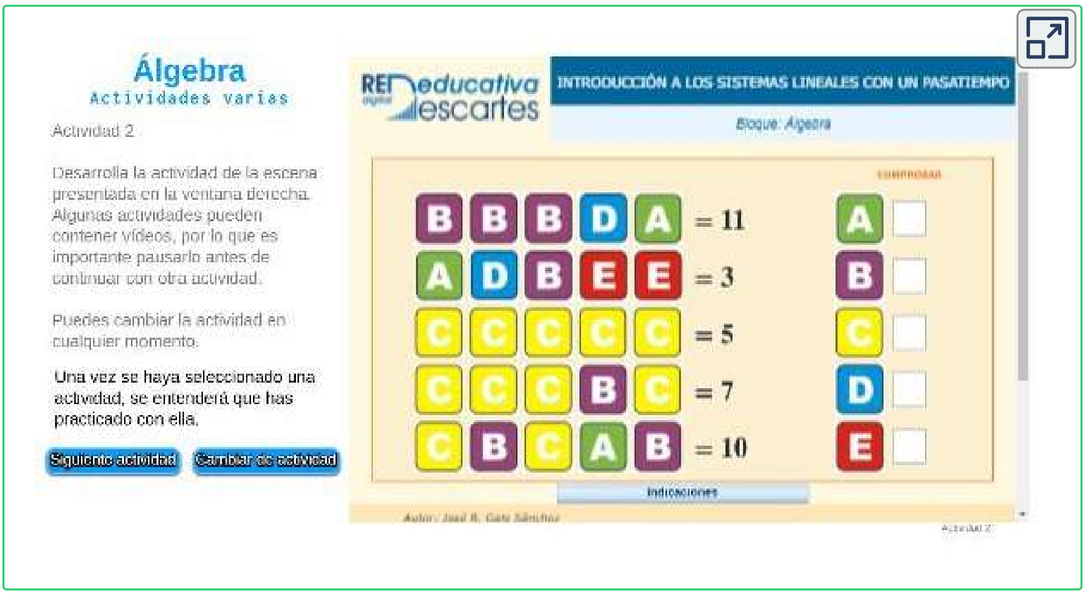
10. Desafíos y problemas para practicar

En esta sección final, encontrarás una serie de actividades diseñadas para reforzar los conceptos clave de álgebra y funciones que has aprendido a lo largo del libro. A través de ejercicios variados, tendrás la oportunidad de repasar desde la manipulación de expresiones algebraicas hasta la interpretación de gráficas y tablas.

Las actividades te ayudarán a conectar los diferentes enfoques para representar una función (definiciones, fórmulas, tablas y gráficas) y a comprender cómo se relacionan en la resolución de problemas.

Este es el momento ideal para consolidar lo aprendido y asegurarte de que dominas los conceptos esenciales antes de avanzar. ¡Atrévete a resolver cada reto y prepárate para aplicar las matemáticas en nuevas situaciones!

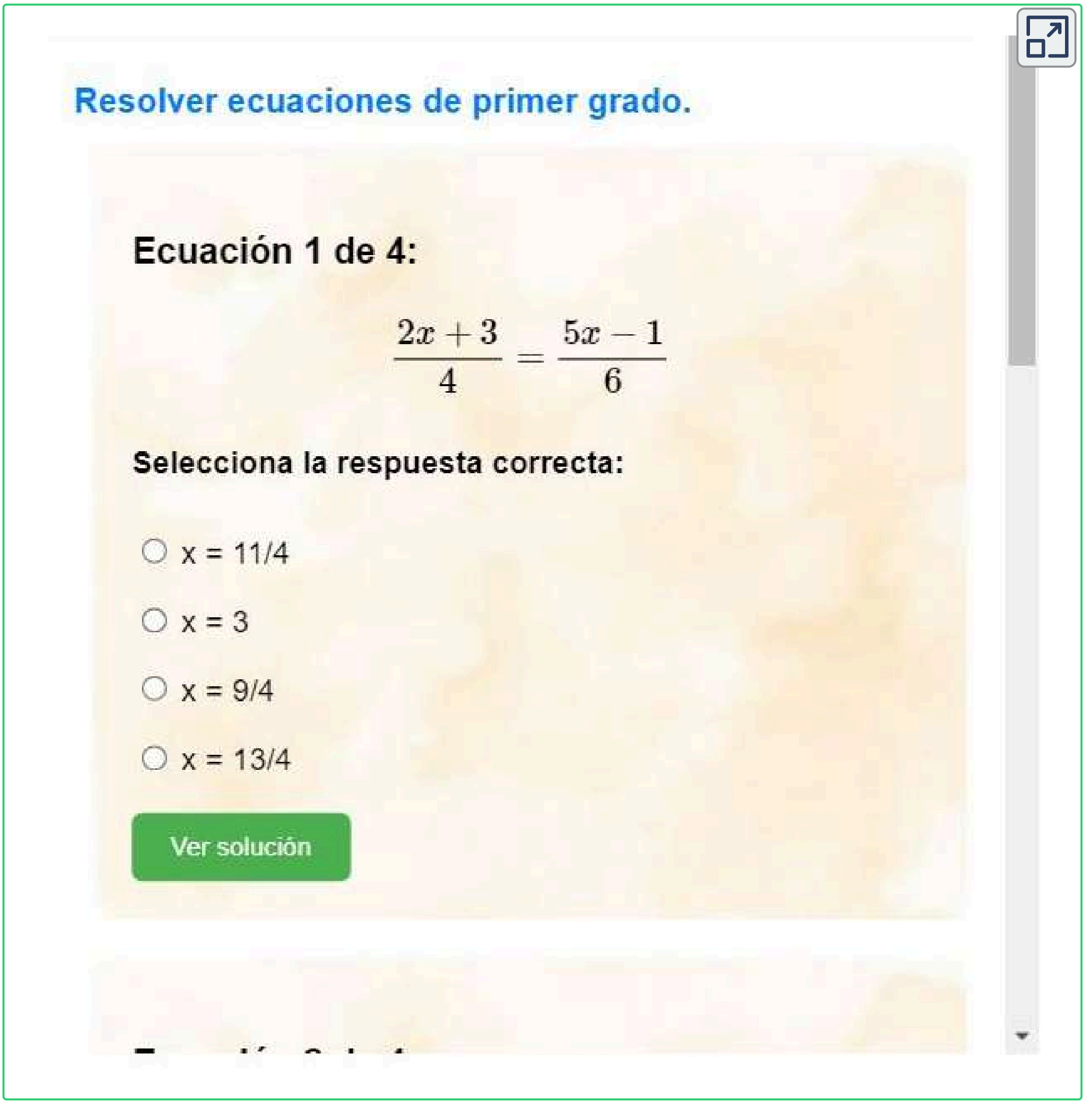
10.1 Actividades de álgebra



Ecuaciones de primer grado

1 Resuelve las ecuaciones en tu cuaderno de trabajo.

2 Una vez que tengas tus respuestas, selecciona la respuesta correcta de la escena. Con el botón ***Ver solución*** podrás ver el desarrollo paso a paso.



Matemáticas en Acción: Desafíos para Pensar

1 Resuelve los problemas en tu cuaderno de trabajo.

2 Una vez que tengas la solución de un problema, escribe la respuesta en la escena y comprueba el resultado con el botón ***Comprobar***.

1. El triple de un número disminuido en 4 es igual a 11. ¿Cuál es el número?

Comprobar

2. Si se resta 5 a un número, el resultado es el doble de ese número menos 1. Encuentra el número.

Comprobar

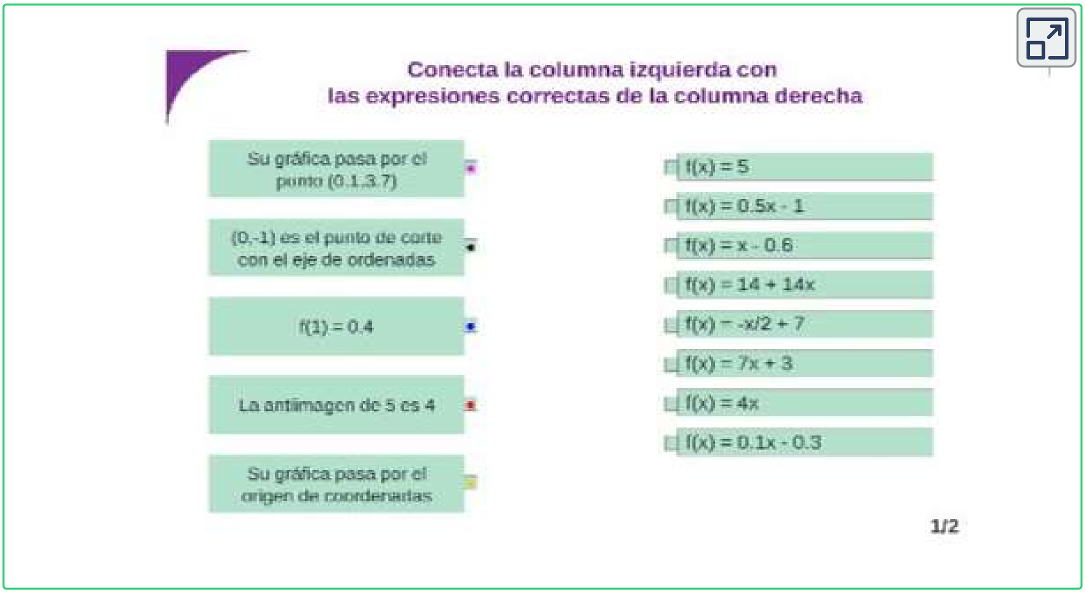
3. Un número dividido por 3 más 2 es igual a 7. ¿Cuál es el número?

Comprobar

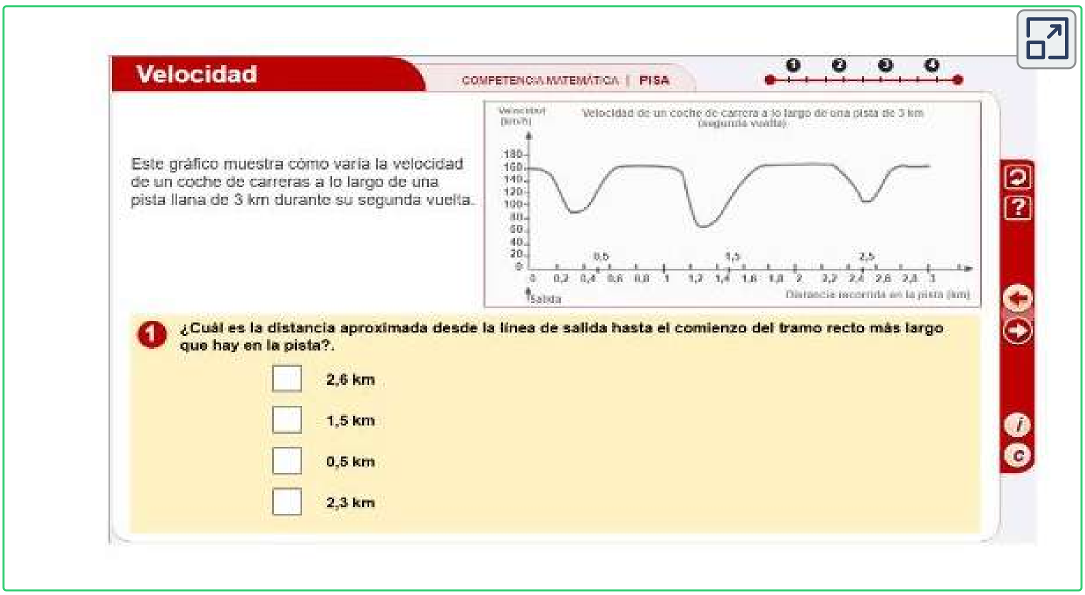
4. De los 20 compañeros de clase de David, el 20% ha nacido en Ecuador, el 10% en Rumania y tres compañeros han nacido en China. Los demás han nacido en España. ¿Cuántos compañeros de David han nacido en España?

Comprobar

10.2 Explorando funciones: Patrones y relaciones



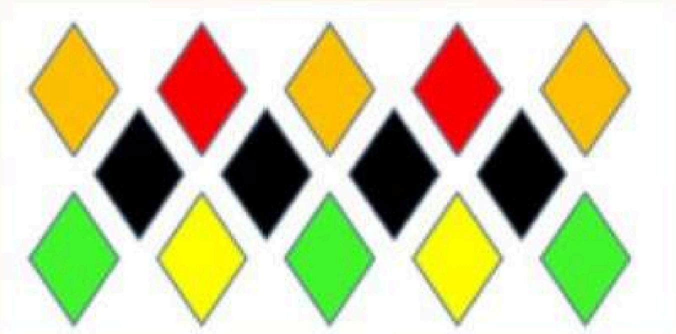
10.3 Piensa, Aplica y Resuelve: Actividades Competenciales



Actividades Competenciales I

Lámpara con bombillas led

Hemos diseñado un modelo de lámpara con bombillas led utilizando focos en forma de rombo de color negro rodeados de otros focos de rombo de colores. Queremos descubrir una fórmula para calcular el número de rombos de colores en función del número de rombos negros que hay que utilizar.



Siendo "c" el número de rombos de colores y "n" el número de rombos negros, ¿cuál es la fórmula correcta?

- ○ $c = 2(n - 1)$
- ○ $c = 2n$
- ○ $c = 2n + 2$
- ○ $c = 2n + 1$

Sala de juegos

El instituto tiene habilitada una sala de juegos en el

[1]

Actividades Competenciales II

Problema de edades

La edad de un señor es de 45 años y la de su hijo 11. Si llamamos "x" al número de años que deben transcurrir para que la edad del padre triplique a la de su hijo, ¿cuál es la ecuación que describe esta situación?

- ○ $45 + 3x = 11 + x$
- ○ $45 + x = 3(11 + x)$
- ○ $45 - 3x = 11 + x$
- ○ $3(45 + x) = 11 + x$

Tarde de cine

[2]

Actividades Competenciales III

Tarifa mensual contratada

Mónica tiene contratada, para su móvil, la siguiente tarifa mensual para llamadas:

Si en un mes Mónica consume 400 minutos en llamadas desde el móvil, ¿cuántos euros tendrá que pagar?

- ○ 26 €
- ○ 24.20 €
- ○ 8 €

Observa los siguientes gráficos y determina cuál es el que mejor representa la tarifa contratada.

[3]

10.4 Pon a Prueba tu Ingenio

Problemas Cangur

El ***Concurso Cangur*** [4] es una desafiante y divertida competición matemática que se celebra en numerosos países y es organizada por la ***Asociación Kangourou sans Frontières***. En Cataluña, la ***Sociedad Catalana de Matemáticas (SCM)*** es la entidad encargada de su organización, ofreciendo cada año una selección de problemas que estimulan el pensamiento lógico, la creatividad y la resolución de problemas de manera original.

A diferencia de los ejercicios matemáticos tradicionales, los problemas del ***Concurso Cangur*** no requieren conocimientos avanzados de matemáticas, sino que se centran en el razonamiento, la intuición y la capacidad de encontrar soluciones ingeniosas. Las preguntas abarcan una amplia variedad de temas, desde cálculo y geometría hasta patrones lógicos, juegos de estrategia y acertijos numéricos.

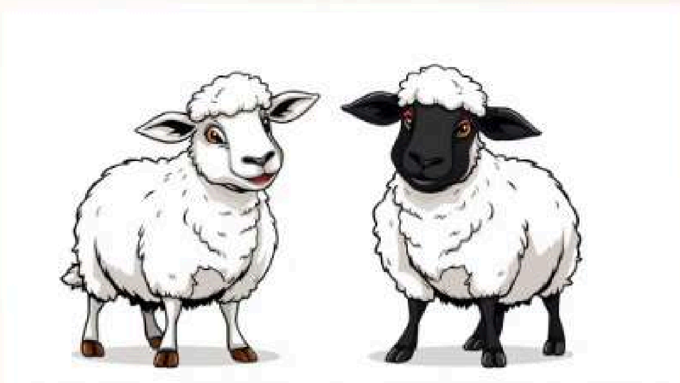
Los problemas seleccionados en esta actividad interactiva han sido extraídos de diferentes ediciones del ***Concurso Cangur***, organizadas y publicadas en la web de la ***Sociedad Catalana de Matemáticas***. Cada uno de ellos representa un desafío diferente que pondrá a prueba tu ingenio y capacidad de análisis. No dudes en probar distintas estrategias, hacer anotaciones y disfrutar del placer de descubrir la solución a cada reto.

¡Adéntrate en el mundo de los problemas Cangur y diviértete pensando!

Problemas Cangur I

1

En un rebaño que pasta en un prado hay ovejas blancas y ovejas negras. El pastor se lleva 15 ovejas negras, y entonces quedan en el prado el doble de ovejas blancas que negras. Más tarde, se lleva 31 ovejas blancas, y quedan la misma cantidad de ovejas blancas que negras. ¿Cuántas ovejas había al principio?



○ 33 ○ 50 ○ 80 ○ 100 ○ 108

2

El diagrama muestra la posición inicial, la dirección y la distancia que recorren cuatro autos de choque en cinco segundos. Si siguen estos movimientos, ¿qué dos autos chocarán primero?

Problemas Cangur II

1

La canguro Lola da saltos de 1 metro hacia adelante. Sin embargo, si da tres saltos seguidos hacia adelante, inmediatamente da otro salto de 1 metro hacia atrás. Si Lola quiere avanzar exactamente 10 metros hacia adelante, ¿cuántos saltos debe dar?

○ 12 ○ 10 ○ 18 ○ 19 ○ 16

2

La suma de las edades de un grupo de canguros es de 36 años. Dentro de dos años, la suma de sus edades será 60 años. ¿Cuántos canguros hay en el grupo?

Sopa de Letras

Palabras encontradas: 0 de 7

D	Y	E	B	P	Ñ	A	R	N	G	E
J	O	K	N	I	N	I	Ñ	E	U	N
S	N	M	Ñ	G	Y	U	V	G	R	Ó
I	S	Á	I	S	F	A	Y	A	S	I
M	B	L	Q	N	R	V	Q	M	A	C
A	B	G	W	I	I	P	U	I	Q	A
G	C	E	A	B	N	O	L	I	U	U
E	J	B	Ñ	M	I	A	H	T	O	C
N	L	R	Y	I	N	O	F	N	M	E
E	D	A	V	U	B	Z	Q	A	B	H
R	Y	N	R	G	R	Á	F	I	C	A

IMAGEN

ANTIIMAGEN

DOMINIO

VARIABLE

ECUACIÓN

ÁLGEBRA

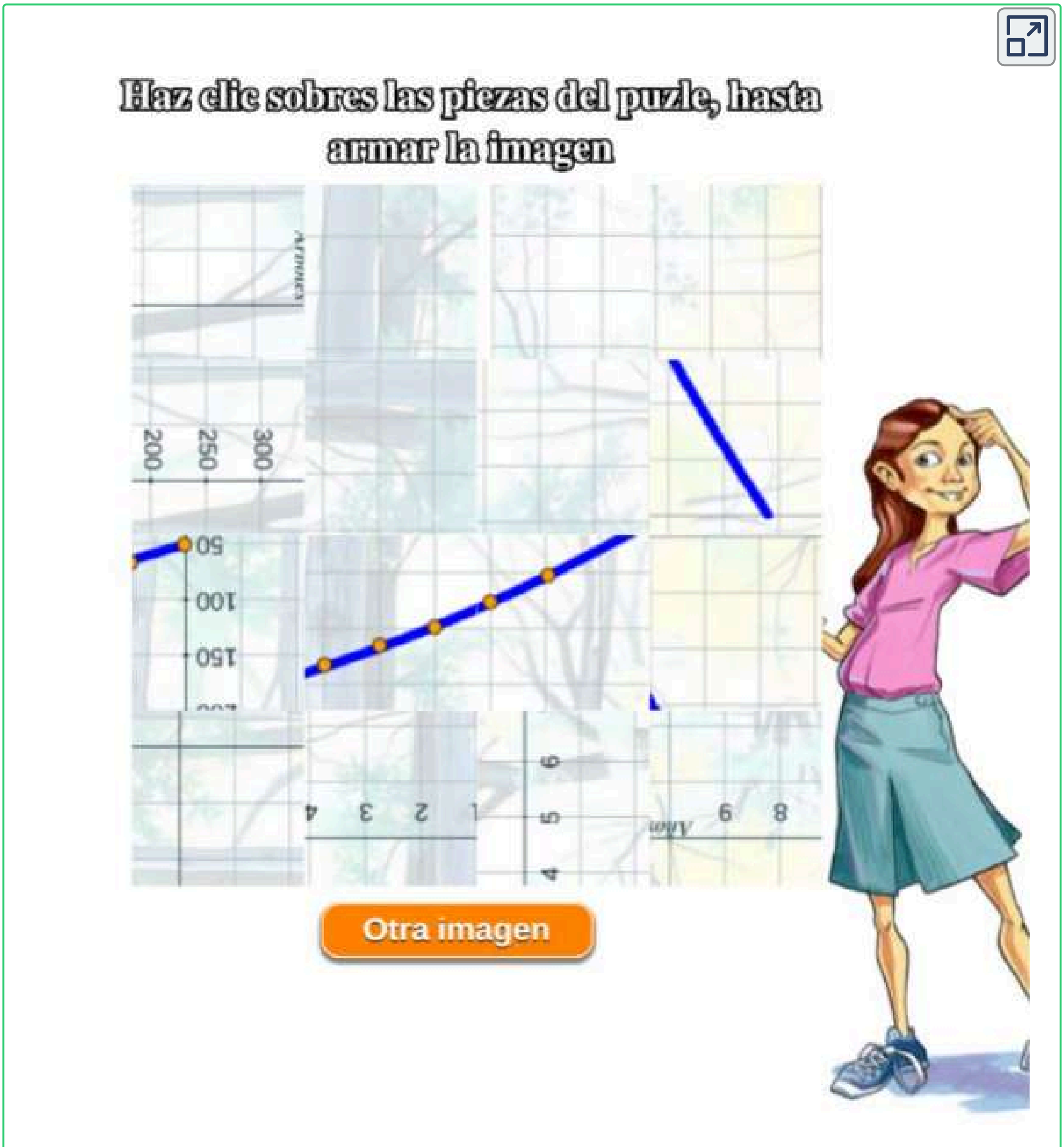
GRÁFICA

Reiniciar

Solución

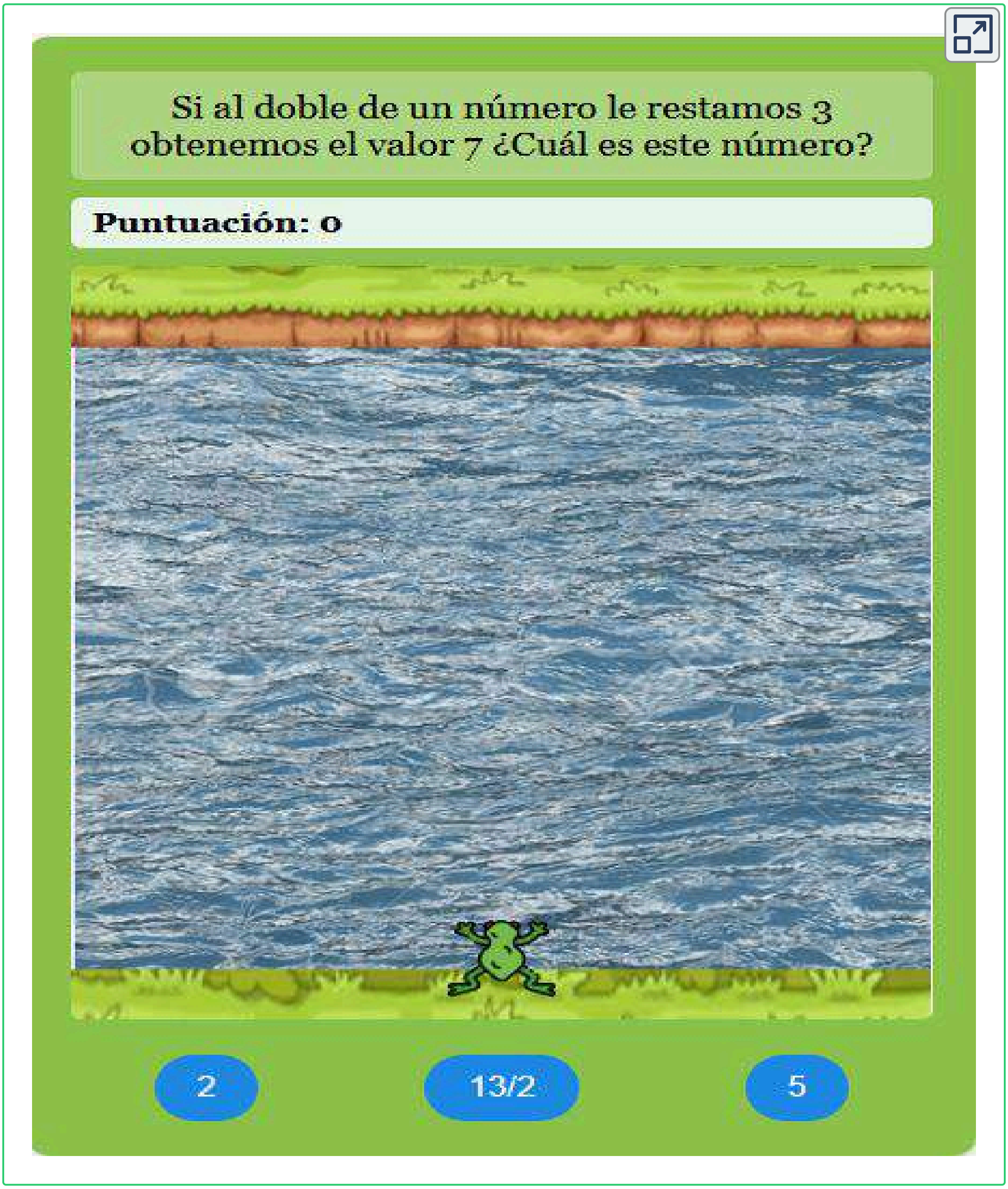
Puzle de funciones:

Te presentamos un puzle de seis piezas con gráficas de funciones. Cada pieza representa un ejercicio trabajado en este libro. Tu tarea es ensamblarlas correctamente. Observa las formas y relaciones entre las piezas para completar la imagen. ¡Buena suerte!



Juego de la rana

Guía a la rana hasta la otra orilla saltando con las respuestas correctas:



Scrabble

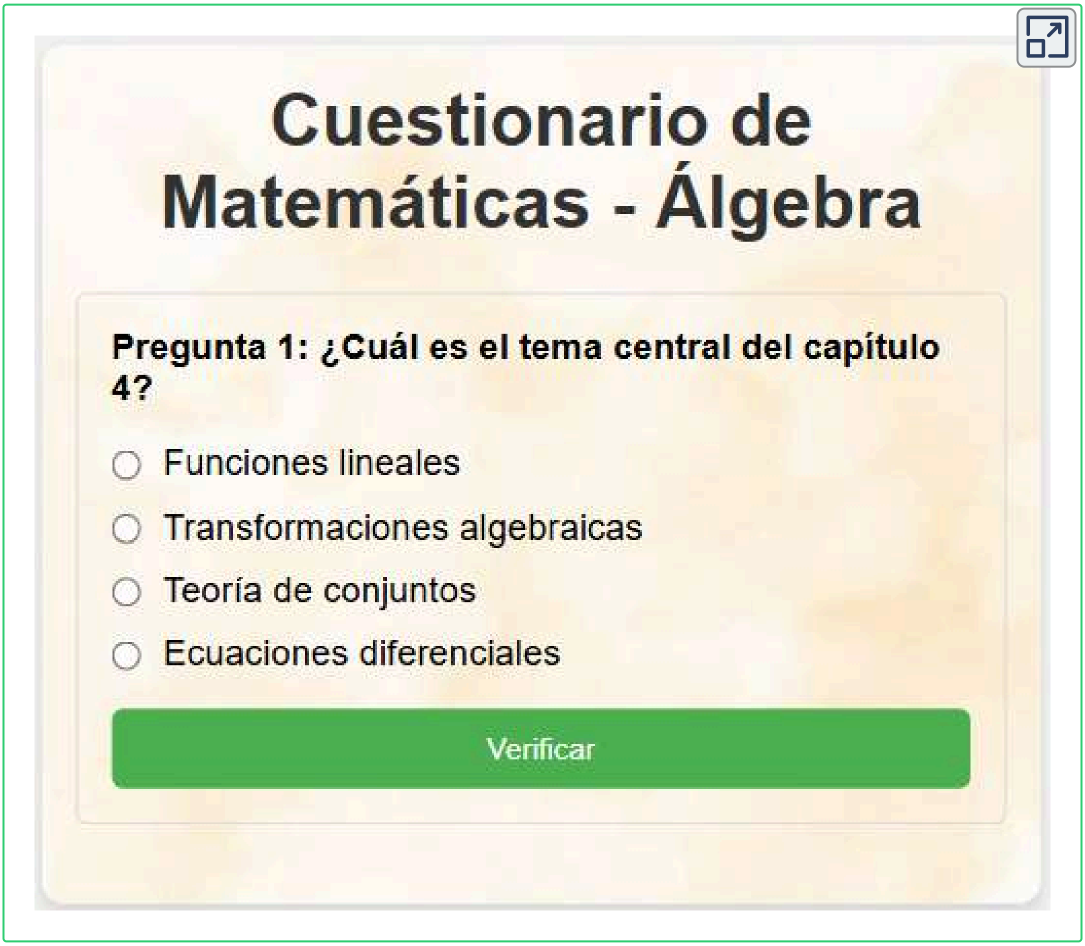
Pon a prueba tu vocabulario, creatividad y habilidades lingüísticas:

Pasapalabra

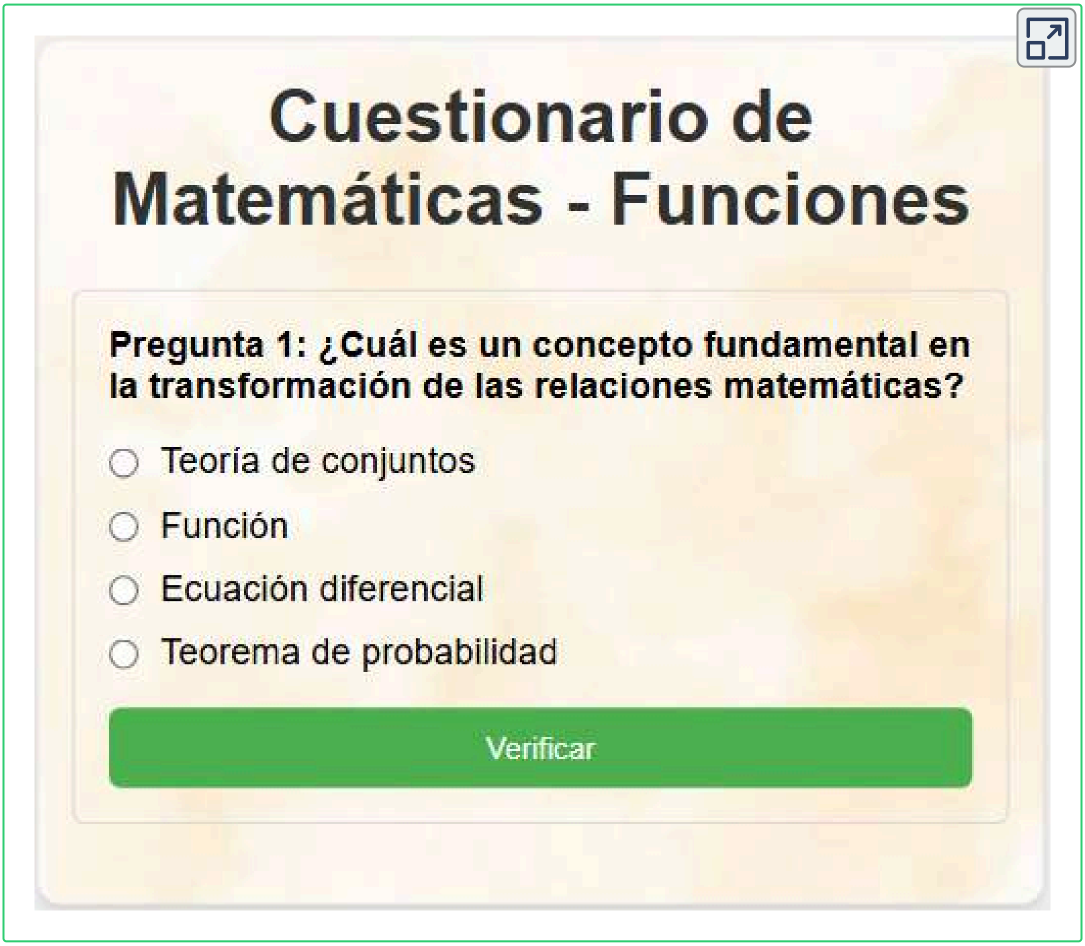
10.5 Cuestionarios

Has recorrido un camino fascinante a través del álgebra, explorando desde la representación de números con letras hasta la resolución de ecuaciones y la relación entre variables.

Ahora, te invitamos a poner a prueba lo aprendido con este cuestionario. Responde cada pregunta con atención y demuestra cuánto has avanzado en tu comprensión del lenguaje algebraico.



Las funciones nos permiten comprender y modelar relaciones entre variables, desde sus representaciones en tablas y gráficas hasta sus distintas formas de expresión. En este cuestionario, aplicarás lo aprendido para analizar y relacionar conceptos clave.

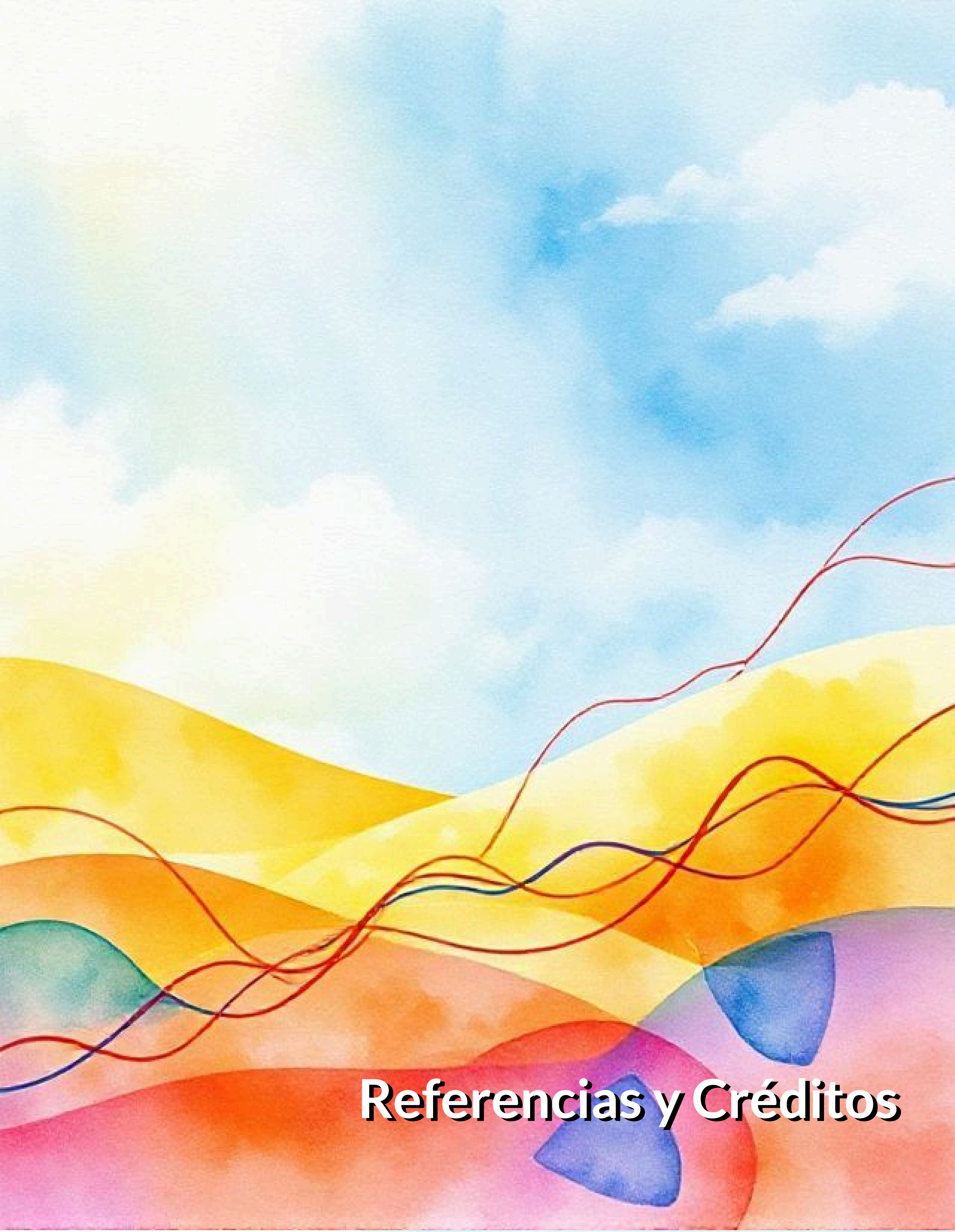


Resumen Final

A lo largo de este libro, hemos recorrido los fundamentos del álgebra y las funciones, explorando cómo las matemáticas nos permiten describir y analizar relaciones entre números y variables. Desde la introducción al uso de letras en lugar de números hasta la representación gráfica de funciones, hemos desarrollado herramientas esenciales para comprender patrones y resolver problemas de manera estructurada.

En el último capítulo, se presentan diversas actividades diseñadas para consolidar y aplicar los conceptos aprendidos. A través de ***problemas por competencias***, hemos enfrentado situaciones matemáticas en contextos reales. Los ***problemas de ingenio*** nos han retado a pensar de manera creativa y a encontrar soluciones no convencionales. Los ***juegos*** han permitido reforzar conocimientos de forma dinámica y entretenida, mientras que los ***cuestionarios*** han servido para evaluar la comprensión global del contenido.

El estudio del álgebra y las funciones no termina aquí. Cada concepto aprendido es un paso más en el camino hacia una comprensión más profunda de las matemáticas y su aplicación en distintas áreas del conocimiento. La clave está en seguir explorando, cuestionando y resolviendo nuevos desafíos.



Referencias y Créditos

11. Referencias y Créditos

Referencias web

[1] Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Gobierno de España. 2.º de ESO. Pruebas del curso 2023-2024. https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/evaluaciones-nacionales/evaluaciones-de-diagnostico/ed-2023-2024/pruebas-2eso.html

[2] Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Gobierno de España. Pruebas Liberadas de diversas evaluaciones. Educación Secundaria https://www.educacionfpydeportes.gob.es/inee/dam/jcr:9c1ff16c-00c9-43e4-b2e1-fdff5fab70a1/itemsliberadoseducacionsecundaria.pdf

[3] Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu. Generalitat de Catalunya. Avaluació diacnóstica. Curs 2014-2015 http://csda.gencat.cat/ca/arees-actuacio/arxiu-avaluacions-estudis/avaluacio-diagnostica/diagnostica-2014-2015-eso/#FW_bloc_74097490-6e60-11e4-9c05-000c29cdf219_7

[4] Kangourou sans Frontières https://www.aksf.org/index.xhtml
Catalonia (CT). Institut d'Estudis Catalans - Societat Catalana de Matemàtiques https://scm.iec.cat/prova-cangur/

Créditos de las imágenes

A continuación, se indica la fuente de las imágenes. Aquellas que no incluyen una cita han sido creadas por la autora.

Imágenes generadas por pollination.ai, usando el modelo Flux

- Portada Introducción al Álgebra
- Portada capítulo I:
- Portada capítulo II
- Portada capítulo III
- Portada capítulo IV
- Portada capítulo V
- Portada Introducción a las Funciones
- Portada capítulo VI
- Portada capítulo VII
- Portada capítulo VIII
- Portada capítulo IX
- Portada capítulo X
- Portada Referencias y créditos
- Figura 1: Al-Kitab al-Mukhtasar fi Hisab al-Jabr wal-Muqabala
- Figura 2: Ofertas y descuentos
- Figura 3: Modelos matemáticos en arquitectura
- >Figura 1.1: Comprar refrescos para una fiesta
- Figura 1.2: Compartir los gastos de un viaje
- Figura 1.3: Ajustar ingredientes para una receta
- Figura 2.1: Cartulinas de colores
- Figura 2.2: Recortar círculos verdes
- Figura 2.3: Recortar triángulos rojos

Imágenes generadas por ChatGPT (OpenAI)

Imágenes de fuentes diversas

- Figura 6.4: Diseño de un videojuego creado con unity
- Figura 6.6: Estimación mensual de nacimientos en España (2020-2024) Instituto Nacional de Estadística
- Figura 6.7: Imagen de Peter H en Pixabay
- Figura 6.8: Proyecciones cartográfica, imagen de Clker-Free-Vector-Images en Pixabay
- Escena interactiva pág. 146: Imagen de Nikita Kachanovsky en Unsplash

Créditos de las actividades interactivas

Actividades creadas con el soporte de [ChatGPT (OpenAI)]

- Página 17: Calcular el número de refrescos a partir de precios variables.
- Página 19: Calcular el precio de un viaje por persona
- Página 29: Generador de círculos
- Página 29: Cuestionario generador de círculos
- Página 31: Generador de triángulos
- Página 31: Cuestionario generador de triángulos
- Página 33: Generador de cuadrados
- Página 34: Cuestionario generador de cuadrados
- Página 35: Generador de círculos
- Página 36: Cuestionario generador de círculos
- Página 37: Generador de triángulos
- Página 38: Cuestionario generador de triángulos
- Página 48: Primera actividad: cuadrado
- Página 49: Segunda actividad: rectángulo
- Página 50: Tercera actividad: triángulo
- Página 53: Calcular descuentos
- Página 55: Cálculo de la velocidad
- Página 56: Ejemplos de cálculo del valor numérico
- Página 57: Cálculo del valor numérico
- Página 59: Traducir al lenguaje algebraico I
- Página 60: Traducir al lenguaje algebraico II
- Página 60: Emparejar las definiciones con expresiones algebraicas I
- Página 62: Emparejar las definiciones con expresiones algebraicas II
- Página 69: Expresiones algebraicas. Notación
- Página 70: Expresiones algebraicas. Notación

- Página 76: Reducir a términos semejantes
- Página 77: Calcular y reducir a términos semejantes
- Página 79: Propiedad distributiva
- Página 90: Solución de una ecuación. Ejemplos
- Página 91: Comprobar la solución de una ecuación.
- Página 95: Solución de una ecuación. Ejemplos
- Página 98: Resolver ecuaciones sencillas
- Página 104: Resolver ecuaciones con denominadores y con paréntesis. Ejemplos
- Página 106: Resolver ecuaciones con paréntesis
- Página 107: Resolver ecuaciones con denominadores
- Página 108: Resolver ecuaciones
- Página 130: Plano de Barcelona
- Página 138: Coordenadas geográficas
- Página 149: Crecimiento de una Planta. Cuestionario
- Página 150: Compra de libretas. Tabla
- Página 157: Trayectoria de un dron
- Página 161: Variación de temperaturas
- Página 163: Crecimiento de una planta. Cuestionario
- Página 165: Ventas semanales. Cuestionario
- Página 167: Velocidad de un ciclista. Cuestionario
- Página 178: Relación entre magnitudes
- Página 181: Expresión algebraica de una función
- Página 189: Interpretar una gráfica
- Página 191: Explorar el recorrido de un ciclista
- Página 200: Análisis de una función a partir de la fórmula
- Página 203: Crecimiento de un bosque. Cuestionario
- Página 205: Grosor de la nieve. Cuestionario
- Página 207: Energía de la batería de un celular. Tabla

- Página 208: Energía de la batería de un celular. Cuestionario
- Página 220: Actividades de competencias I
- Página 221: Actividades de competencias II
- Página 222: Actividades de competencias III
- Página 224: Poblemas cangur I
- Página 225: Poblemas cangur II

Actividades creadas con el soporte de [MathGPT]

- Página 96: Resolver ecuaciones
- Página 109: Problema resuelto
- Página 111: Problemas para resolver. Actividad de selección I
- Página 112: Problemas para resolver. Actividad de selección II
- Página 112: Problemas para resolver. Actividad de selección III
- Página 113: Problemas para resolver. Actividad de selección IV
- Página 113: Problemas para resolver. Actividad de selección V
- Página 114: Problemas para resolver.
- Página 115: Problemas para resolver. Actividad de selección
- Página 184: Cálculo de imágenes y antiimágenes
- Página 216: Resolver ecuaciones de primer grado
- Página 217: Problemas para resolver.

Actividades creadas con el soporte de Haiku 3.5 mediante websim.ai

- Página 229: Cuestionario de álgebra
- Página 230: Cuestionario de funciones

Escenas de la Red Educativa digital Descartes

Escenas del Proyecto Plantillas. Las plantillas han sido modificadas para ajustarse a los objetivos del presente material.

- Página 78: Actividad de reducción a términos semejantes con una plantillas de selección múltiple
- Página 82: Actividad de reducción a términos semejantes con una plantillas de emparejamiento
- Página 83: Actividad de reducción a términos semejantes con una plantillas de selección múltiple
- Página 215: Contenedor de actividades de álgebra
- Página 218: Funciones I. Actividad de selección
- Página 218: Funciones II. Actividad de selección
- Página 210: Funciones III. Actividad de emparejamiento
- Página 227: Puzle de funciones

Escenas tomadas de diferentes proyectos del Proyecto Descartes:

- Página 128: Escena modificada de la quincena Tablas y gráficas de 1° de la ESO de los materiales ED@D
- Página 213: Escena tomada del Proyecto Competencias, disponible en La factura del móvil
- Página 220: Escena tomada del Proyecto Competencias, disponible en Velocidad de un coche de carreras

Rivera Berrío, J. G., & Muñoz Calle, J. M. (2024). *Plantillas para libros con inteligencia artificial.* Red Educativa digital Descartes.
ISBN 978-84-10368-05-7

Actividades creadas a partir de las plantillas:

- Página 226: Sopa de letras
- Página 228: Juego de la rana.
- Página 229: Scrabble
- Página 230: Pasapalabra

Escenas interactivas diseñadas por la autora utilizando la herramienta Descartes:

- Página 125: Representación de puntos en el plano cartesiano
- Página 127: Representación de puntos en el plano cartesiano
- Página 129: Crear una cuadrícula sobre el plano de Barcelona
- Página 148: Crecimiento de una Planta
- Página 150: Compra de libretas. Gráfica
- Página 152: Precio de un viaje según los quilómetros recorridos
- Página 153: Temperatura a lo Largo del Día
- Página 155: Trayectoria de una Pelota
- Página 159: Temperaturas máximas y mínimas
- Página 180: Relación entre magnitudes. Consumo de un coche
- Página 199: Representar una función desde una definición
- Página 202: Crecimiento de un bosque
- Página 204: Grosor de la nieve
- Página 206: Gráfica energía de la batería de un celular

DESCARTES
matemáticas interactivas