

Introducción a las Funciones de Variable Real

Juan Sebastián Romero Burgos

Título de la obra:

Introducción a las funciones de variable real

Autor:

Juan Sebastián Romero Burgos

Primera edición:

Córdoba (España) 2026

Diseño del libro: Joel Espinosa Longi

Código JavaScript del libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM

Recursos interactivos: [DescartesJS](#), RED Descartes

Fuentes: [Lato](#) y [Ubuntu Mono](#)

INTERACTIVOS PROPIOS

Escritos en HTML, CSS y JavaScript por el autor de este libro: dominio e imagen con diagrama sagital, unión e intersección de intervalos, altitud de una etapa ciclista, dominio y rango sobre la gráfica, lectura de dominio y rango, y monotonía con extremos relativos.

Recursos de terceros, utilizados con crédito a sus autores:

- [Llenado de recipientes: gráfica](#), de Juan David Serrano Díaz, en GeoGebra
- Escenas de jeroglíficos, de RED Descartes (DescartesJS), adaptadas

Proyecto iCartesilibri

<https://proyectodescartes.org/iCartesilibri/index.htm>



CC BY-NC-SA 4.0

ISBN: 978-84-10368-66-8

Introducción a las funciones de variable real



Juan Sebastián Romero Burgos

Matemático

Fondo Editorial RED Descartes



Córdoba (España)
2026

Tabla de contenido

Introducción	3
Conjuntos	4
Funciones	11
Funciones de variable real	18
Función continua	24
¡Piensa en ello!	27
Ejercicios propuestos	29

Introducción



Bienvenidos a este libro interactivo sobre las funciones de variable real, una guía diseñada para introducir uno de los conceptos más importantes de las matemáticas. Este recurso se apoya en los principios y herramientas de la Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes), una asociación sin ánimo de lucro que, desde su constitución el 1 de junio de 2013, promueve la renovación metodológica en la enseñanza de las matemáticas mediante recursos digitales interactivos.

El enfoque es práctico y accesible. Cada apartado incluye actividades que permiten explorar los conceptos de manera intuitiva, desde su definición hasta sus aplicaciones. La intuición visual, sin embargo, no reemplaza a la definición: donde las dos se separan, el libro lo advierte en un recuadro rojo.

El recorrido empieza por el lenguaje de conjuntos, que es donde vive la definición de función; sigue con dominio, imagen y gráfica; y termina con monotonía y continuidad. Al final hay ejercicios propuestos con sus respuestas.

CÓMO USAR EL LIBRO

Los recursos interactivos se abren en grande con el botón de la esquina superior derecha de cada uno. En el menú de configuración, arriba a la derecha, hay una calculadora, un editor de fórmulas y el modo oscuro.

Conjuntos

Un conjunto es una colección de elementos distintos, agrupados porque comparten una característica o simplemente porque decidimos reunirlos. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$ o $\{\text{manzana}, \text{banana}, \text{naranja}\}$.

Pertenencia

Si a es un elemento del conjunto A , escribimos $a \in A$; si no lo es, $a \notin A$. Con $A = \{1, 2, 3\}$: $2 \in A$ y $7 \notin A$.

Dos formas de escribir un conjunto

Por **extensión**, listando sus elementos: $P = \{2, 4, 6, 8\}$.

Por **comprensión**, dando la propiedad que los caracteriza:

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par, } 0 < n < 10\}.$$

La segunda forma es la única posible cuando el conjunto es infinito, como $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

El conjunto vacío

El conjunto sin elementos se denota $\emptyset$ o $\{ \}$. No es lo mismo que $\{\emptyset\}$: este último tiene un elemento, que resulta ser el conjunto vacío.

Subconjunto

Un conjunto B es **subconjunto** de A , y se escribe $B \subseteq A$, si todo elemento de B pertenece también a A . Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $B \subseteq A$.

Dos casos que conviene tener presentes: $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$, cualquiera que sea A .

Igualdad

Dos conjuntos son iguales cuando tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden ni las repeticiones al escribirlos:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Así, $\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

Unión

La **unión** de dos conjuntos reúne todos los elementos de ambos, sin repetirlos. Se denota $A \cup B$. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Intersección

La **intersección** $A \cap B$ reúne únicamente los elementos que están en ambos conjuntos a la vez. Con los mismos conjuntos, $A \cap B = \{3\}$.

Cuando $A \cap B = \emptyset$ decimos que los conjuntos son **disjuntos**: no comparten ningún elemento.

Diferencia

La diferencia $A \setminus B$ está formada por los elementos de A que no están en B . En el ejemplo anterior, $A \setminus B = \{1, 2\}$ y $B \setminus A = \{4, 5\}$. El orden importa: la diferencia no es conmutativa.

Complemento

Si se trabaja dentro de un conjunto universal U , el complemento de A es $A^c = U \setminus A$: todo lo que está en U pero no en A . Por ejemplo, si $U = \mathbb{R}$ y $A = [0, \infty)$, entonces $A^c = (-\infty, 0)$.

Propiedades útiles

Propiedad	Enunciado
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Las leyes de De Morgan son las que más se usan al calcular dominios: negar una unión de condiciones equivale a exigir que fallen todas a la vez.

Intervalos

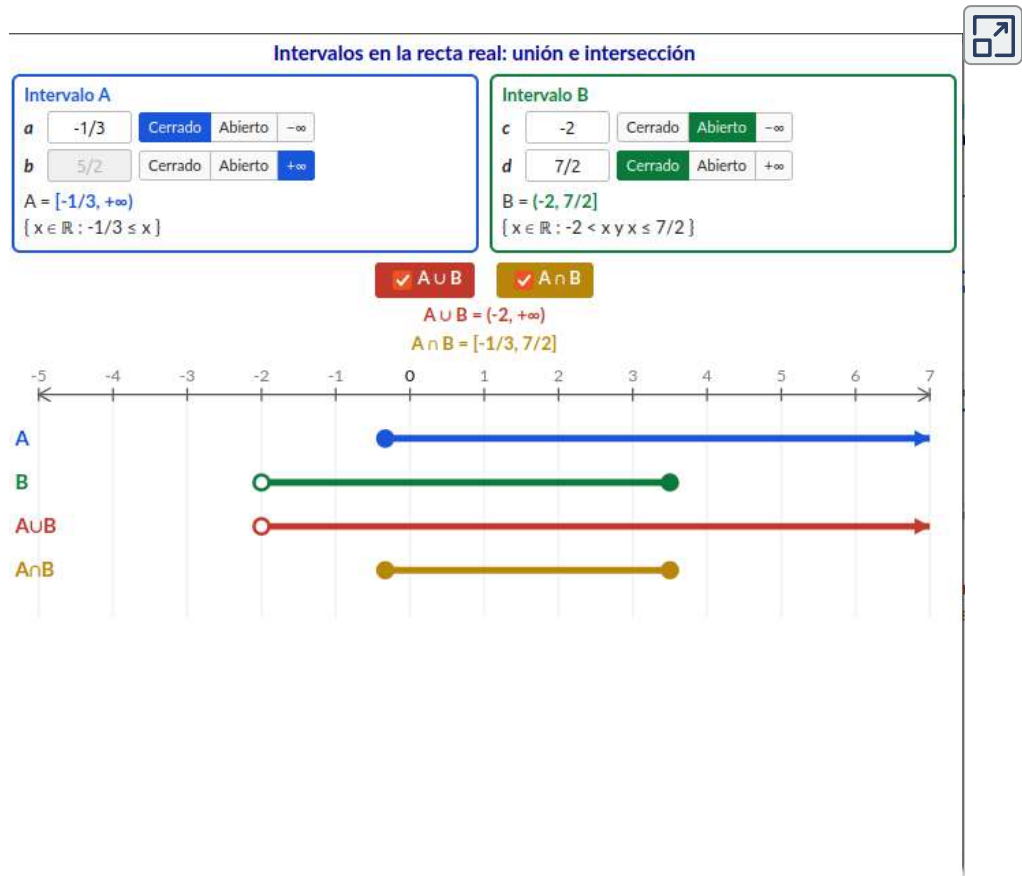
Un **intervalo** es un conjunto de números reales que contiene todos los números comprendidos entre dos extremos. Los extremos pueden incluirse o excluirse, y de ahí salen cuatro tipos, más los no acotados.

Notación	Definición	Nombre
$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	cerrado
(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	abierto
$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	semiabierto
$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	semiabierto
$[a, \infty)$	$\{x : x \geq a\}$	no acotado
$(-\infty, b)$	$\{x : x < b\}$	no acotado

CUIDADO

El símbolo ∞ no es un número real, así que el extremo infinito siempre va abierto: se escribe $[a, \infty)$ y nunca $[a, \infty]$.

Explora cómo se combinan dos intervalos mediante la unión y la intersección. Fíjate en qué pasa con los extremos cuando uno es abierto y el otro cerrado, y en cuándo la unión deja de ser un solo intervalo.



Interactivo propio

Producto cartesiano

El **producto cartesiano** de A y B es el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyo primer elemento está en A y cuyo segundo elemento está en B :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y\}$, entonces $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$. El orden importa: $(1, x)$ y $(x, 1)$ no son la misma pareja, y en general $A \times B \neq B \times A$.

Si A tiene m elementos y B tiene n , entonces $A \times B$ tiene $m \cdot n$ parejas.

POR QUÉ IMPORTA

Este conjunto es la base sobre la que se define el concepto de función. Cuando $A = B = \mathbb{R}$, el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ es el plano cartesiano donde dibujamos las gráficas.

Funciones

Una función asigna a cada elemento de un conjunto de partida exactamente un elemento de un conjunto de llegada. Las funciones son fundamentales en matemáticas y describen una gran cantidad de fenómenos.

DEFINICIÓN

Sean A y B conjuntos. Una función f de A en B , escrita $f : A \rightarrow B$, es una regla que asigna a **cada** elemento $a \in A$ **un único** elemento $f(a) \in B$.

La definición exige dos condiciones, y las dos importan:

- **Existencia:** ningún elemento de A se queda sin asignación.
- **Unicidad:** ningún elemento de A recibe dos asignaciones distintas.

En términos del producto cartesiano, f es un subconjunto de $A \times B$ tal que para cada $a \in A$ existe exactamente una pareja $(a, b) \in f$.

Qué no es una función

Las dos condiciones anteriores se entienden mejor viendo cómo fallan. Tomemos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$.

FALLA LA EXISTENCIA

La relación $\{(1, a), (2, b)\}$ deja al 3 sin imagen. No es función de A en B , aunque sí lo sería de $\{1, 2\}$ en B .

FALLA LA UNICIDAD

La relación $\{(1, a), (1, b), (2, a), (3, b)\}$ asigna al 1 dos imágenes distintas. No es función bajo ninguna elección del conjunto de partida.

Un ejemplo con números reales: la relación $x^2 + y^2 = 1$ no define a y como función de x , porque para $x = 0$ valen tanto $y = 1$ como $y = -1$. Sí lo hacen, por separado, $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

El siguiente recurso ilustra la idea de asignación: cada signo de un conjunto se corresponde con un elemento del otro. La Piedra de Rosetta es un buen ejemplo histórico, porque estableció justamente esa correspondencia entre tres sistemas de escritura.



La Piedra Roseta encierra un documento escrito de tres formas distintas. En la parte superior (jeroglíficos), en la central, (demótico) dos formas de escritura de una lengua muerta, el egipcio. En la parte inferior aparece la misma inscripción en griego. Esto último y la genialidad de Champollion permitió encontrar las claves de la correspondencia entre los signos jeroglíficos y sus imágenes fonéticas.



Recurso interactivo de RED Descartes (DescartesJS), adaptado.

Dominio, codominio e imagen

En una función $f : A \rightarrow B$:

- El **dominio** es A , el conjunto de las entradas.
- El **codominio** es B , el conjunto donde viven las salidas.
- La **imagen** (o recorrido) es el subconjunto de B formado por los valores que la función realmente alcanza: $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$.

La imagen puede ser más pequeña que el codominio. Siempre se cumple $f(A) \subseteq B$, pero la igualdad no está garantizada.

EJEMPLO

Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$: el dominio es $\mathbb{R}$, el codominio es $\mathbb{R}$ y la imagen es $[0, \infty)$, porque ningún cuadrado de un número real es negativo y todo número no negativo es el cuadrado de su raíz.

En este libro usamos *imagen* y *rango* como sinónimos, pero conviene saber que algunos textos llaman rango al codominio.

Dominio natural

Cuando una función se define con una fórmula y no se especifica el conjunto de partida, se toma como dominio el mayor conjunto donde la fórmula tiene sentido. Es el **dominio natural**.

En la práctica, tres reglas cubren casi todos los casos:

Si aparece...	Hay que exigir...
un denominador $g(x)$	$g(x) \neq 0$
una raíz par $\sqrt[n]{g(x)}$	$g(x) \geq 0$
un logaritmo $\ln g(x)$	$g(x) > 0$

CLAVE

Cuando aparecen varias condiciones a la vez, el dominio es la **intersección** de todas ellas: hay que cumplirlas todas simultáneamente.

EJEMPLO 1

$f(x) = \frac{1}{x-2}$. Se exige $x - 2 \neq 0$, es decir $x \neq 2$. Dominio:
 $\mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

EJEMPLO 2

$g(x) = \sqrt{x+3}$. Se exige $x + 3 \geq 0$, o sea $x \geq -3$. Dominio:
 $[-3, \infty)$.

EJEMPLO 3

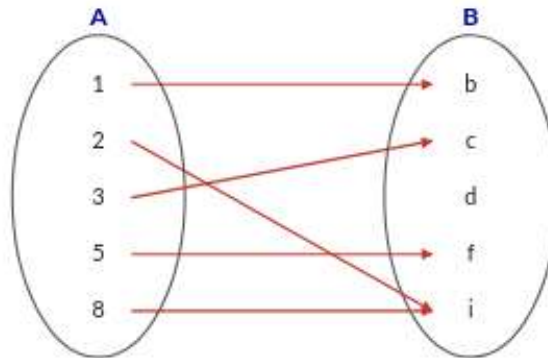
$h(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$. Ahora hay dos condiciones: $x \geq -3$ y $x \neq 2$.
El dominio es la intersección:

$$[-3, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\}) = [-3, 2) \cup (2, \infty).$$

En el ejercicio de la página siguiente se genera al azar una correspondencia entre dos conjuntos finitos. Los elementos sin flecha no forman parte del dominio.



¿Cuál es el dominio y cuál la imagen de esta función?



Dominio (separado por comas):

ej: 1, 3, 5

Imagen (separada por comas):

ej: a, c

Verificar

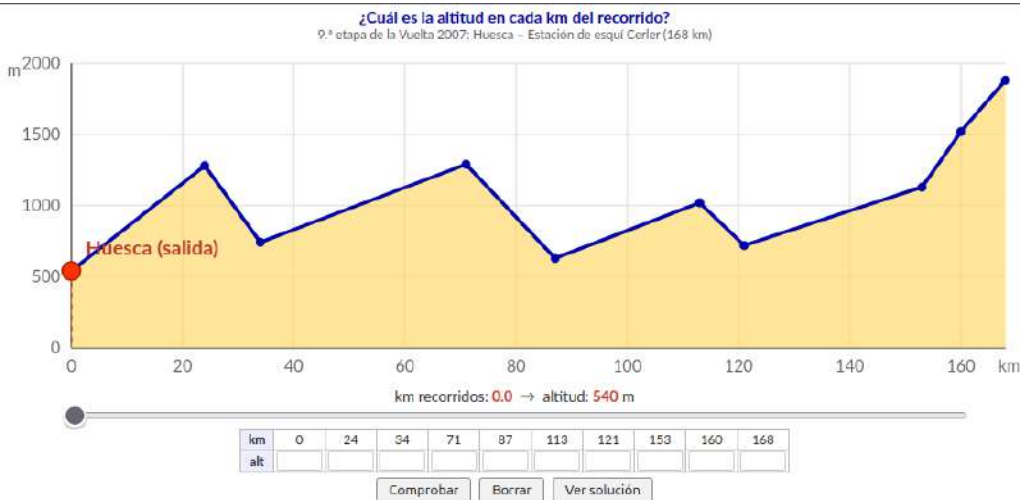
Nueva función

Interactivo propio

Funciones de variable real

Una función de variable real es una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$: asigna a cada número real x del dominio exactamente un número real $y = f(x)$.

El perfil de una etapa ciclista es un buen ejemplo: a cada kilómetro recorrido le corresponde una única altitud.



Interactivo propio, con datos de la 9.ª etapa de la Vuelta 2007

Algunas funciones elementales

Tipo	Fórmula	Dominio natural
Constante	$f(x) = c$	$\mathbb{R}$
Afín	$f(x) = mx + b$	$\mathbb{R}$
Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$
Racional	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$	$\{x : q(x) \neq 0\}$
Raíz cuadrada	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
Valor absoluto	$f(x) = x $	$\mathbb{R}$

También son frecuentes las funciones **definidas a trozos**, que usan fórmulas distintas en distintas partes del dominio. El valor absoluto es un ejemplo:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Gráfica de una función

La gráfica de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$ del plano, con x recorriendo el dominio. Es, literalmente, la función vista como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. En ella se leen las intersecciones con los ejes, los tramos de crecimiento y decrecimiento, las asíntotas y las discontinuidades.

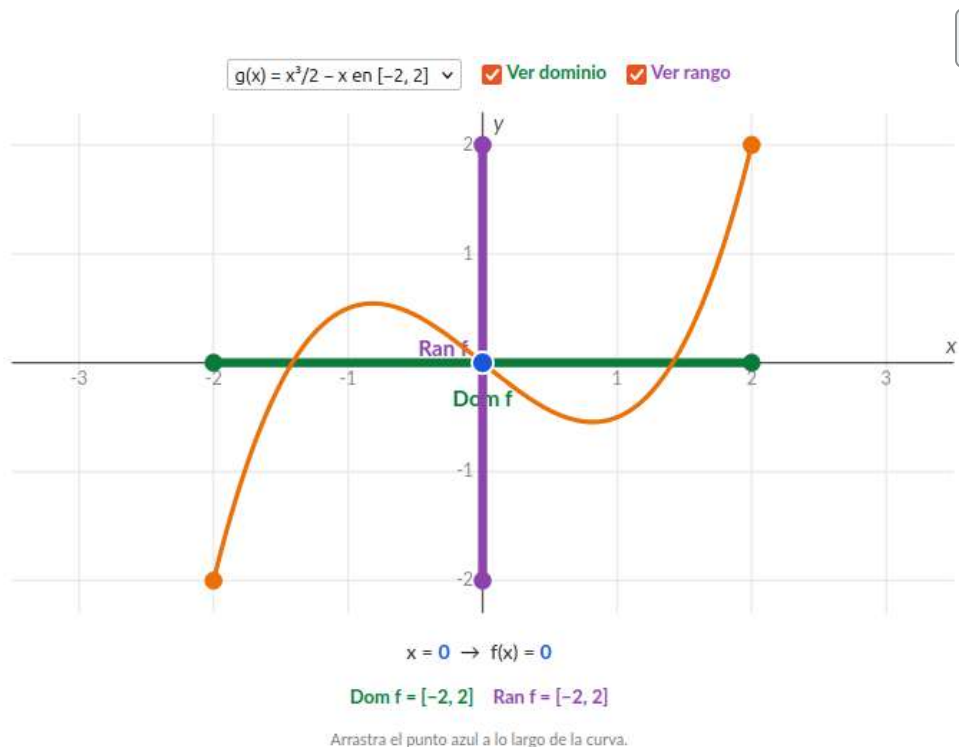
PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL

Una curva del plano es la gráfica de una función de x si y solo si ninguna recta vertical la corta en más de un punto.

Es la traducción gráfica de la unicidad: dos cortes sobre la misma vertical significarían dos valores de y para un mismo x . Por eso la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ no es la gráfica de una función, y la semicircunferencia superior sí lo es.

El dominio se lee proyectando la gráfica sobre el eje horizontal, y la imagen proyectándola sobre el vertical.

Arrastra el punto a lo largo de la curva y observa cómo el dominio se marca sobre el eje horizontal y el rango sobre el vertical. Cambia de función con el selector: la última tiene los extremos abiertos.



Interactivo propio

Monotonía

Sea I un intervalo contenido en el dominio de f .

DEFINICIÓN

f es **creciente** en I si para todos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$; y **estrictamente creciente** si vale $f(x_1) < f(x_2)$. Las definiciones de decreciente son las mismas con las desigualdades al revés.

Un punto c es un **máximo relativo** si $f(c) \geq f(x)$ para todo x cercano a c ; es **mínimo relativo** si vale la desigualdad contraria.

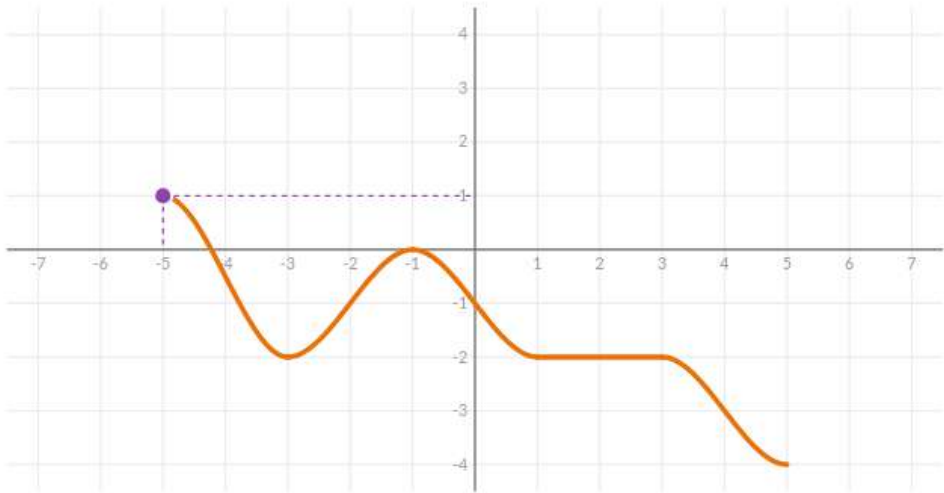
DÓNDE BUSCARLOS

Los extremos relativos aparecen donde la función pasa de crecer a decrecer, o al revés. Si entre los dos tramos hay una parte constante, el extremo no es un punto sino todo ese tramo.

Identifica los intervalos donde la función crece, decrece o es constante, y los extremos relativos. Al ver la solución la curva se colorea por tramos.



[Nuevo ejercicio](#) [Corregir](#) [Ver solución](#)



Punto sobre la curva: $(-5, 1)$

Crece	(-6,-2) U (2,4)	Decrece	(-2,2)	Constante	ninguno
Máximos	(-2, 3)	Mínimos	(2, -1); (4, 0)		

Intervalos abiertos separados con U. Puntos como (x, y) separados con punto y coma. Si una categoría está vacía, déjala en blanco.

Interactivo propio

Función continua

La imagen habitual es que una función es continua si su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. La idea de fondo es correcta: cambios pequeños en x producen cambios pequeños en y . Pero la definición precisa es esta:

DEFINICIÓN

f es continua en un punto a de su dominio si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Y f es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.

La igualdad encierra tres exigencias: que $f(a)$ esté definido, que el límite exista, y que ambos coincidan.

CUIDADO CON EL LÁPIZ

La imagen del trazo sin levantar el lápiz solo funciona cuando el dominio es un intervalo. La función $f(x) = 1/x$ es continua en todo su dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y, sin embargo, su gráfica tiene dos ramas separadas.

Funciones discontinuas

Una función es discontinua en un punto a de su dominio cuando falla la igualdad anterior. Según cómo falle, se distinguen tres casos.

EVITABLE

El límite existe pero no coincide con $f(a)$. Por ejemplo $f(x) = x^2$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 3$: el límite en 1 es 1, no 3. Se arregla redefiniendo un solo punto, y de ahí el nombre.

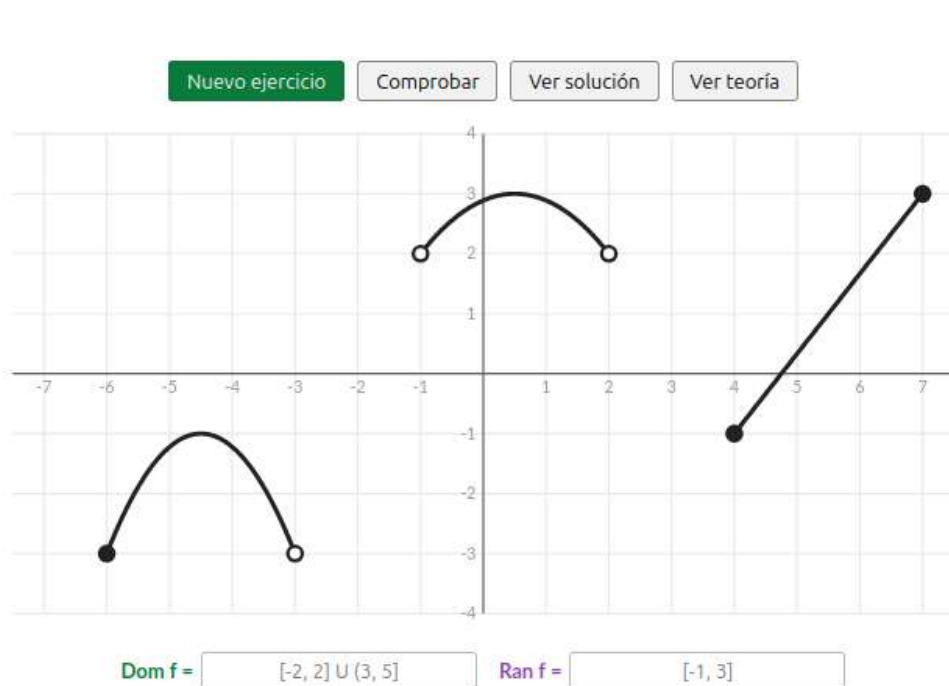
DE SALTO

Los límites laterales existen pero son distintos. Por ejemplo, la función que vale -1 para $x < 0$ y 1 para $x \geq 0$ salta en el origen.

ESENCIAL

Algún límite lateral no existe o es infinito. Por ejemplo $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$: cerca del origen la función oscila sin acercarse a ningún valor.

Ahora al revés: dada la gráfica, escribe su dominio y su rango. Fíjate en si los extremos de cada trozo están marcados con punto lleno o hueco, porque eso decide si el valor pertenece o no al conjunto.

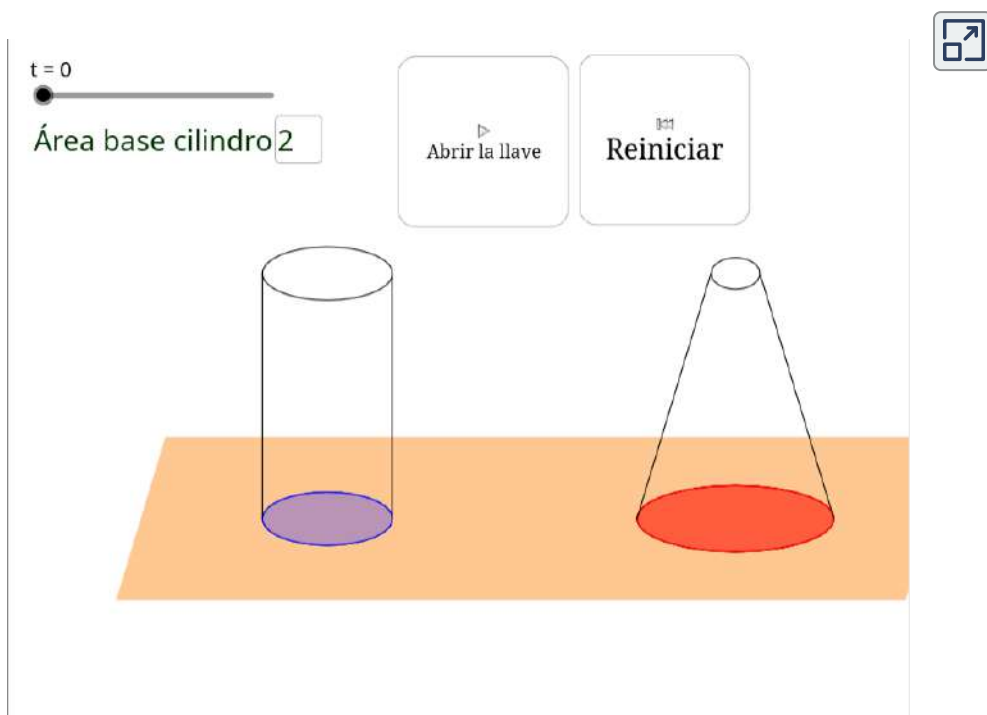


Escribe la unión con U. Un punto suelto se escribe {3}.

Interactivo propio

¡Piensa en ello!

Las siguientes gráficas describen el proceso de llenado de distintos recipientes: la altura del líquido en función del volumen vertido.



Llenado de recipientes: gráfica, de Juan David Serrano Díaz, en GeoGebra.

Preguntas para discutir

- Describe cada una de las gráficas.
- ¿Qué tienen en común?
- ¿En qué se diferencian?
- ¿A qué se deben esas semejanzas y diferencias?
- ¿Todas las gráficas corresponden a funciones continuas? Justifica tu respuesta con la definición, no con el dibujo.
- ¿Cuál es el dominio y cuál la imagen en cada caso?
- ¿Por qué el recipiente cónico da una gráfica curva y el cilíndrico una recta? ¿Qué le pasaría a la gráfica si el recipiente fuera más ancho arriba que abajo?

Ejercicios propuestos

1. Con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, calcula $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$.
2. Escribe por comprensión el conjunto $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.
3. Expresa como intervalo o unión de intervalos: $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$.
4. Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, ¿cuántos elementos tiene $A \times B$? Escríbelos.
5. Determina el dominio natural de: (a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$, (b) $g(x) = \sqrt{5-x}$, (c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
6. Halla la imagen de $f(x) = x^2 + 1$ con dominio $\mathbb{R}$.
7. ¿La relación $y^2 = x$ define a y como función de x ? Justifica con la prueba de la recta vertical.
8. Clasifica la discontinuidad en $x = 0$ de la función que vale $x + 1$ para $x < 0$ y $x - 1$ para $x \geq 0$.

Respuestas

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cap B = \{3, 4\}$; $A \setminus B = \{1, 2\}$;
 $B \setminus A = \{5\}$.
2. $\{n^2 : n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$.
3. $(-3, 3)$.
4. Seis: $(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)$.
5. (a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; (b) $(-\infty, 5]$; (c) $(1, \infty)$, porque además de $x - 1 \geq 0$ el denominador obliga a $x - 1 \neq 0$.
6. $[1, \infty)$.
7. No. Para $x = 4$ hay dos valores, $y = 2$ y $y = -2$, así que la recta vertical $x = 4$ corta la curva dos veces.
8. De salto: el límite por la izquierda es 1 y por la derecha es -1 .

Referencias

- [1] Espinosa Longi, J. *Plantilla libro interactivo*. IMATE, UNAM.
https://github.com/jlongi/libro_interactivo
- [2] GeoGebra. (2024). *Materiales de matemáticas interactivas*.
<https://www.geogebra.org>
- [3] Proyecto Descartes. (2024). *Recursos y código de matemáticas interactivas*. <https://proyectodescartes.org>
- [4] Sáenz, J. (2001). *Fundamentos de la matemática* (2.^a ed.). Hipotenusa.
- [5] Spivak, M. (2008). *Calculus* (4.^a ed.). Publish or Perish.

Sobre el autor

Juan Sebastián Romero Burgos es matemático, de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, en Bogotá, Colombia.

Le apasionan el análisis matemático, la topología algebraica, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), la programación y la actuarial. Este libro reúne varias de esas facetas: escribió el contenido como matemático y programó varios recursos interactivos que lo acompañan.

Introducción a las funciones de variable real • Córdoba (España), 2026
Obra publicada bajo licencia [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



