

# Modelo ontogénico matemático del Nautilus

José R. Galo Sánchez

iCartesiLibri

# Modelo ontogénico matemático del Nautilus

**José R. Galo Sánchez**  
Red Educativa Digital Descartes

Fondo Editorial RED Descartes



Córdoba (España)  
2024

Título de la obra:

**Modelo ontogénico matemático del Nautilus**

Autor:

**JOSÉ R. GALO SÁNCHEZ**

Código JavaScript para el libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.

Recursos interactivos: [DescartesJS](#)

Fuentes: [Lato](#) y [UbuntuMono](#)

Fórmulas matemáticas: [K<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#)

Red Educativa Digital Descartes

Córdoba (España)

[descartes@proyectodescartes.org](mailto:descartes@proyectodescartes.org)

<https://proyectodescartes.org>

Proyecto iCartesiLibri

<https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm>

ISBN: 978-84-10368-02-6



Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-SinDerivadas 4.0 Internacional](#).

*A Pablo y a Ana*



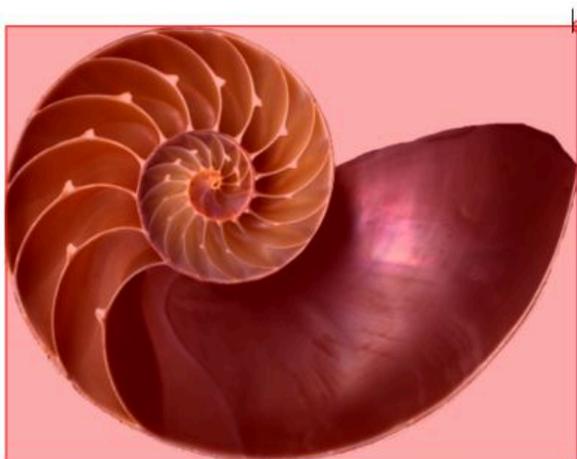
# Prefacio

Hace unos años, allá por 2016 (Galo *et al.*, 2016) [4], mostramos que **la concha del Nautilus** —la cual se considera como un prototipo de belleza natural y matemática— **es neta y completamente cordobesa, tanto en su forma como en su crecimiento**. Para justificar, detallar e ilustrar esta afirmación procedimos posteriormente —(Galo, 2024) [2]— a contextualizar este conocimiento en el saber matemático que fue recopilado y transmitido por grandes sabios como Aristóteles —quien sienta la base matemática que modela el crecimiento gnomónico, autosemejante, en la Naturaleza (Sachs, 1995) [14]— y como Euclides —quien en sus "Elementos" (Joyce, 2013) [8] destaca, de entre todas las infinitas razones posibles, la "extrema y media razón" de connotaciones pitagóricas, pentagonales y decagonales, y consecuentemente también platónicas—. Un saber de la Grecia clásica que, perdido, fue recuperado, acrecentado y transmitido por la cultura árabe y, en particular, desde el Califato de Córdoba donde la razón euclidiana era obviamente conocida, pero donde la razón ligada al octógono, la ahora llamada cordobesa, se plasmó ampliamente en la arquitectura de esa ciudad causando o provocando la belleza embelesadora que hoy en día podemos seguir admirando, por ejemplo, en su mezquita. En el Renacimiento, gracias a la traducción latina o al romance de "Los Elementos" a partir de los textos árabes, Luca Pacioli (1509) [13] magnificó la razón euclidiana haciéndola divina, Leonardo da Vinci la convirtió en armónica en su hombre de Vitrubio, y según Ghyca (1977, p. 28) [5] también fue da Vinci quien la hizo áurea o dorada, si bien Dudley (1999, p.245) [19] da el crédito a [Martin Ohm \(1792-1872\)](#). La razón áurea ha concentrado tanta admiración y alabanza a lo largo de tantos siglos que ha sido encumbrada a un misticismo que ha pasado a ser artificioso y obsesivo, forzando la necesidad de cumplir su canon para que algo sea bello. Y la concha del Nautilus, ¡cómo si no fuera naturalmente bella!, ¡excelsa de por sí!, fue encajonada, enmarcada,

en un rectángulo áureo que le venía excesivamente holgado o bien tan exageradamente pequeño que fracturaría sus frágiles paredes. Y ante tamaña discrepancia se han rebuscado otras proporciones en la que apareciera el número áureo  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033\dots$ , como puede ser  $\sqrt{\phi}$ , pero el Nautilus, sintiéndose incómodo al quedar suelto o constraído, no pudiendo más nos confesó:

**¡No!, ¡no soy áureo!  
¡Soy cordobés!**

**Enmarcando tangencialmente la sección de la concha del Nautilus**



cordobés

áureo (1)

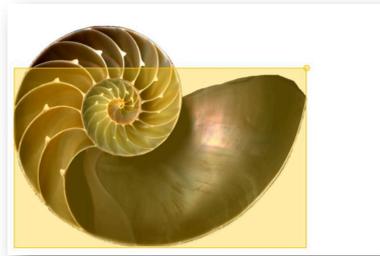
áureo (2)

$\sqrt{\phi}$  (1)

$\sqrt{\phi}$  (2)



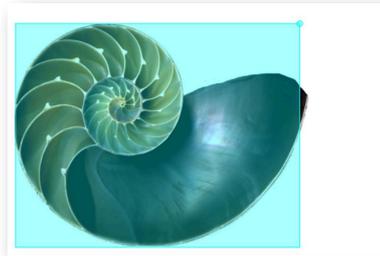
Rectángulo áureo (tangente sólo en tres puntos).



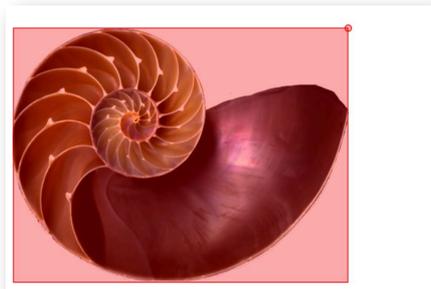
Rectángulo áureo (tangente sólo en tres puntos).



Rectángulo  $\sqrt{\phi}$  (tangente sólo en tres puntos).



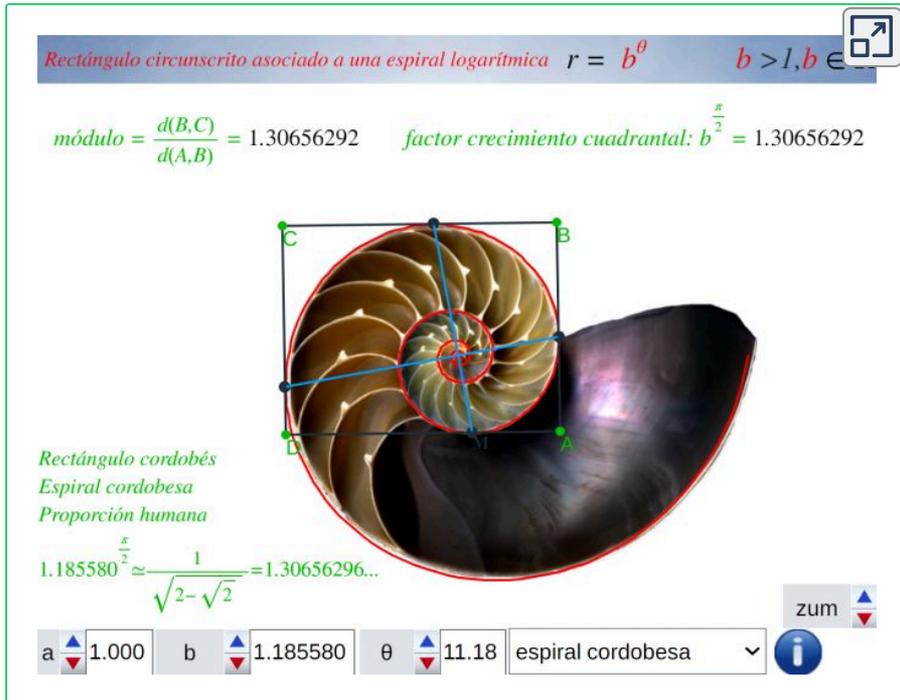
Rectángulo  $\sqrt{\phi}$  (tangente sólo en tres puntos).



Rectángulo cordobés (tangente en cuatro puntos).

Ese grito desahogador nos permitió conformar el que denominamos "**modelo matemático uniforme del Nautilus**" en el que la sección sagital de la concha del Nautilus, desde su génesis hasta su madurez, crece siempre de igual forma. Una forma que Moseley (1838) [\[11\]](#) nos enseñó que coincide con la de **una espiral equiangular** según la definición que realizó Descartes, **geométrica** por su crecimiento proporcional que se ajusta y refleja el crecimiento gnomónico aristotélico y **logarítmica** por su expresión funcional matemática, una espiral a la que Bernoulli la denominó como **maravillosa**. Y en concreto **una espiral que en todo momento puede inscribirse tangencialmente en un rectángulo cordobés**, es decir, uno en el que el cociente entre el lado mayor y el menor es el número cordobés:

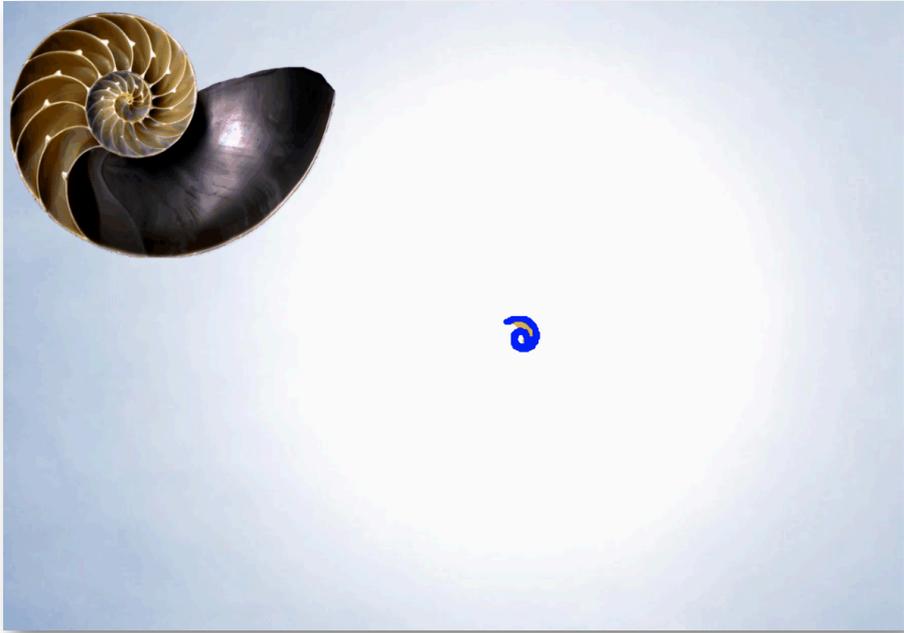
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1,306562\dots$$



Consecuentemente, en el primer capítulo de este libro se realiza una descripción del modelo uniforme y se detallan las ecuaciones que lo formalizan, mostrando en síntesis las características de este modelo:

- La pared ventral, la dorsal y el canal sifuncular son espirales cordobesas con el mismo polo<sup>1</sup>.
- Las paredes septales son arcos de una espiral cordobesa y los polos de esos arcos están en una espiral cordobesa.
- Los septos siguen una distribución uniforme de paso  $\frac{\pi}{8}$ , es decir dieciséis septos en cada verticilo (vuelta).

<sup>1</sup> La terminología sobre los nautiloideos y ammonoideos es extensa, para cualquier duda puede consultarse Barroso-Barcenilla (2008) [1]. No obstante, en este libro los términos usados son pocos y pueden observarse en este enlace: [🔗](#).



Modelo matemático uniforme del Nautilus

No obstante, también en este primer capítulo, se echa una mirada al primer verticilo de la concha y se comprueba que lo que ahí nos refleja el modelo uniforme difiere bastante de lo que, biológicamente, se puede observar. No hay que caer en el pesimismo, pero salvo la espiral cordobesa que modela la pared ventral, que en esta etapa inicial sí se ajusta a la realidad, el resto de elementos (pared dorsal, sífinculo, septos y número de estos) se muestran retadores y reacios a seguir esa uniformidad con la que, a espera de nuevas inspiraciones, nos habíamos conformado al no saber dar respuesta a las singularidades que ahí acontecen. Pero ¿acaso lo que sucede es algo que nos deba sorprender? La concha del Nautilus es el reflejo de la bitácora vital de este ser vivo y, en general, los seres vivos dentro de la homogeneidad de formas que mantienen durante su ciclo vital presentan ciertas particularidades en las etapas embrionaria, juvenil y adulta, por tanto, lo que será necesario e imprescindible es analizar, distinguir y describir su [ontogenia](#) y, para ello, la primera tarea que se aborda es la observación y aprendizaje sobre la ontogenia biológica para que podamos vislumbrar la esencia que encierra y así, quizás, poder llegar a la ontogenia matemática que la modele.

En el segundo capítulo es donde con ayuda de una escena interactiva abordamos esa tarea de análisis de la concha en el primer verticilo, detectando lo que hay que modelar —labio o pared dorsal, ombligo, ajuste del sífinculo, distribución y amplitud de los septos y espiral de los polos de estos—, y cómo hacerlo. Para ello consideramos tres invariantes que se han de cumplir en todos los verticilos (constituyen la esencia del modelo global):

1. *La pared ventral de la concha del Nautilus es una espiral cordobesa.*
2. *Todo punto de la concha o interior es la intersección de dos espirales cordobesas, una longitudinal tipo a la del perfil de la concha, pero con un factor de escala, y otra transversal tipo septal.*
3. *Los septos son tangenciales con la pared ventral.*

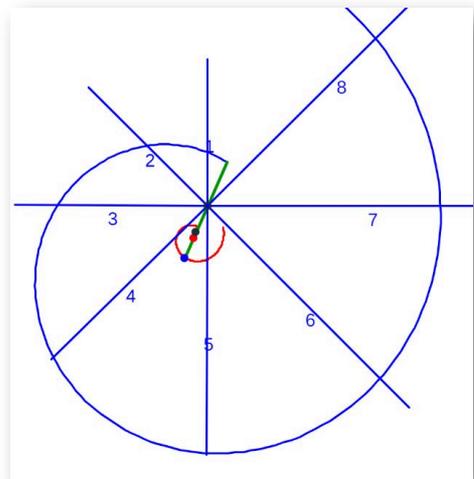
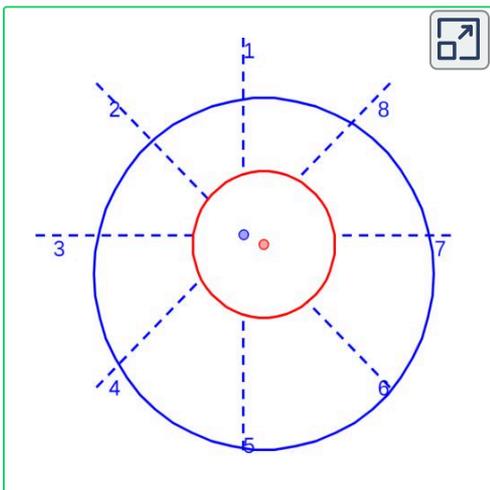
y modelando esos elementos específicos del primer verticilo, obtenemos que:

- La pared dorsal es una espiral cordobesa —¡cómo podría no ser así!—, pero con diferente polo del de la espiral ventral.
- El ombligo se forma al confluir la pared dorsal con la concha embrionaria.
- El sífinculo, adopta una forma especial en las dos primeras cámaras, pero a partir de ésta es una espiral cordobesa cuyo polo no coincide ni con el de la pared dorsal, ni con el de la ventral, en concreto es el punto medio del segmento determinado por estos dos. Esta no copolaridad es la causante de que esta espiral sífuncular no coincida con la que modela el sífinculo en verticilos posteriores.
- La espiral de los polos de los septos, también cordobesa, tiene diferente polo al de la espiral ventral.

Pero, la singularidad más destacable en este verticilo inicial es la relativa a los septos y a las cámaras septales, que presentan un comportamiento bastante diferenciado respecto a lo que acontece en los siguientes verticilos, pues:

- El número de cámaras septales es menor —ocho por vuelta, frente a las dieciséis de la segunda y de la tercera— que es fruto de no haber espacio físico suficiente para acoger tanto septo, junto a que cada uno de estos aporta un peso adicional a la concha y, en esa fase, un mayor número impediría poder alcanzar la flotabilidad neutra necesaria para su desarrollo vital.
- La relación volumétrica de las cámaras septales —realmente en este caso el área, puesto que estamos con la sección de la concha— que como consecuencia del crecimiento gnomónico (Galo, 2024 cap. 2 [2]) tiene un crecimiento exponencial en el segundo y tercer verticilo, resulta que en el primer verticilo es logarítmica, es decir, inicialmente aumenta mucho, para posteriormente estabilizarse que es lo necesario para alcanzar rápidamente la flotabilidad neutra inicial.
- Aparentemente la separación interseptal no es uniforme, sin embargo ello es consecuencia de la no copolaridad de las paredes dorsal y central, pudiendo visualizarse el paso  $\frac{\pi}{4}$  localizando un centro adecuado.

La idea que explica lo anterior es simple, como siempre, una vez que ha sido alumbrada. Y esa luz surgió inicialmente considerando dos circunferencias interiores no concéntricas y trasladando la situación, de manera similar, pero con dos espirales no copolares.



Esta dualidad ontogénica —compuesta por el fragmocono<sup>2</sup> del primer verticilo que está delimitado por dos espirales con diferente polo y en el que la espiral de los polos de los septos también tiene otro polo diferente, junto al fragmocono del segundo y tercer verticilo en el que las tres espirales citadas compartem el mismo polo— introduce una nueva perspectiva que obliga a abordar una revisión de las paredes septales, manteniendo en ellas, sin duda alguna, su esencia cordobesa pero introduciendo el tercer invariante que no se contempló en el modelo uniforme, el de la tangencialidad entre cada septo con la pared ventral. Este hecho matemático lo que aporta es el que la transición entre estas dos curvas sea suave (la continuidad y diferenciabilidad con continuidad produce ese efecto) y, consecuentemente, que la cámara habitacional aporte un adecuado acomodo al ser vivo que habita en ella<sup>3</sup>. El análisis correspondiente se desarrolla en el capítulo tercero, donde se aplica la estrategia matemática de abordar un problema más sencillo —el correspondiente al fragmocono con polo único—, para aplicar lo aprendido a otro que, a priori, es más difícil —el del fragmocono con polos diferentes—, aunque sea alterar la cronología en que se generan.

De nuevo, el Nautilus, mostrándose condescendiente nos desveló el secreto de sus septos, pues la tangencialidad se traduce en la necesidad de que para cada arco septal su polo  $S_n$  ha de estar alineado con el punto de tangencia  $T_n$  y con el polo de la pared ventral  $P$ . Ello, conlleva un comportamiento diferenciado en cada una de las dos situaciones ya que, como podrá comprobar en ese

---

<sup>2</sup> Según Barroso-Barcenilla (2008) [1]: **fragmocono** (del gr. *phrágma*, cerrado, y del lat. *conus*, éste del gr. *kōnos*, cono). Porción de la concha dividida en cámaras separadas por tabiques, que desarrolla funciones fundamentales en los procesos de regulación de la flotabilidad [*phragmocone*].

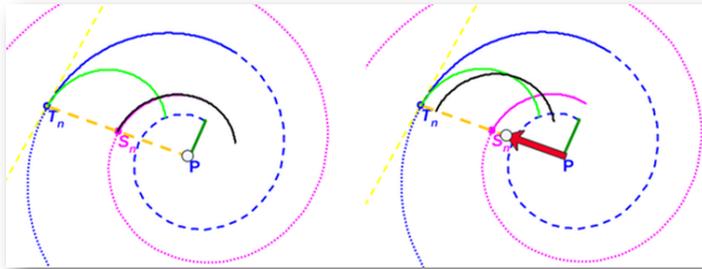
<sup>3</sup> Realmente, es el ser vivo el que contruye la cámara cálcarea para que, ésta, esté acorde a la forma de su cuerpo, pero nuestro análisis se centra en el rastro calcáreo dejado por el ser vivo y de ahí que el punto de vista matemático expuesto sea opuesto al biológico.

tercer capítulo, cada arco septal está escalado por el factor:

$$a_n = \frac{S_n T_n}{P_v T_n}$$

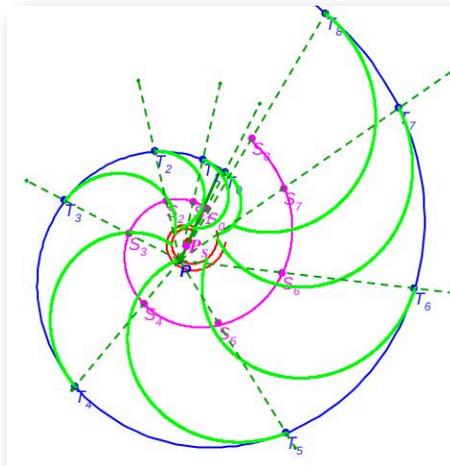
de manera que:

- En el segundo y tercer verticilo  $a_n$  es constante como consecuencia de que la pared ventral y la **espiral de los polos de los septos** son espirales cordobesas con el mismo polo  $P$ .



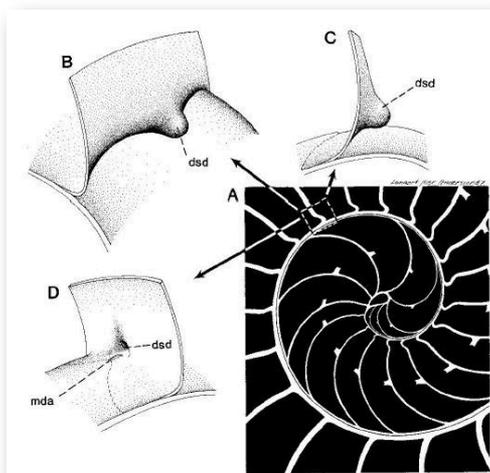
Por tanto, en este primer caso, todos los septos de estos verticilos tienen la misma amplitud angular, son arcos de la misma espiral (la de los polos de los septos), y no son más que una traslación de sendos arcos de ésta.

- En el primer verticilo  $a_n$  es variable al ser diferente el polo ventral  $P$  y el polo septal  $P_s$ .



Por consiguiente, en este segundo caso, cada septo es un arco cordobés con diferente escala y amplitud angular, reflejando la realidad previamente observada en este primer verticilo.

Así pues, la no copolaridad de la espiral ventral y la espiral de los polos de los septos da explicación a esta variación ontogénica en el tamaño de los septos, manteniendo la forma cordobesa, y es la que provoca la variabilidad indicada en la volumetría de las cámaras septales que, como señalamos, es imprescindible para alcanzar rápidamente la flotabilidad neutra inicial. Y esta benevolente concesión nautiliana, al desnudarnos la esencia de sus septos, es la que también aporta de manera directa el conocimiento funcional matemático de los mismos, permitiéndonos el cálculo de datos cuantitativos descriptivos adicionales como, por ejemplo, que el apoyo de los septos con la pared dorsal no se produce de manera perpendicular y esto es la posible causa físico-biológica que explica la necesidad de construir las denominadas depresiones septales dorsales como refuerzo de ese apoyo no ortogonal.

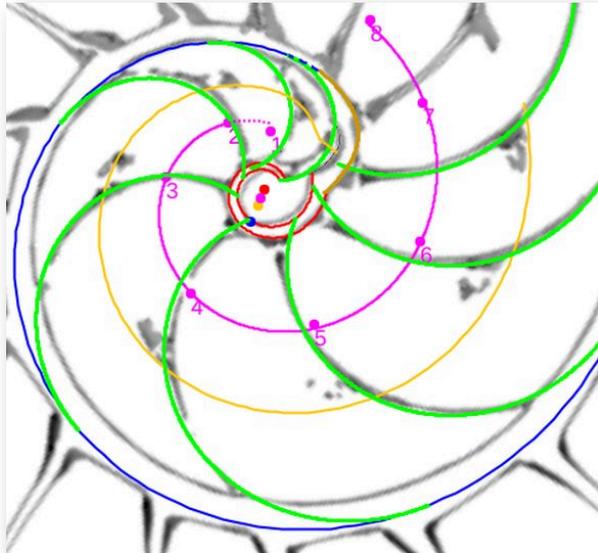


Una muestra más de cómo el análisis funcional y las abstractas ecuaciones que dan forma y gobiernan a los modelos de ese mundo virtual que es el matemático pueden aportar explicaciones en nuestra "realidad" existencial.

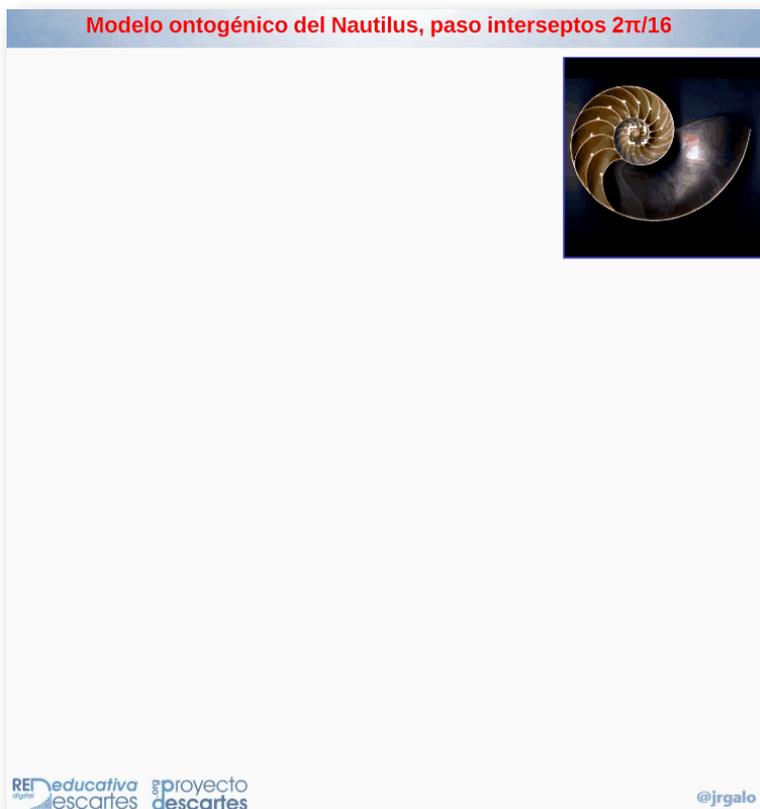
Pero el primer verticilo nos depara sorpresas adicionales, pues en él encontramos algunos sitios adicionales con un comportamiento singular y que requieren su análisis y encuadre matemático. Estos sitios singulares, que se analizan y modelan en el capítulo cuarto, son:

- La concha embrionaria, cuya asimetría puede ser relacionada con el gnomon de un triángulo cordobés.
- El primer septo que se extiende y amplifica el tamaño del fragmocono y marca el inicio tanto de la pared dorsal como de la ventral.
- El cambio que acontece en el sífúnculo en la segunda cámara que pasa de ser recto en la primera a adoptar la forma de espiral cordobesa a partir de la tercera.
- La pared de transición entre el primer y segundo verticilo, desde el momento que la pared dorsal interseca a la concha embrionaria, formando el ombligo, hasta su contacto con la pared ventral inicial que pasa a ser la nueva dorsal. Pared que tiene forma parabólica.

Este estudio completa el modelo matemático de ese primer verticilo:



Llegado este momento y después de haber dedicado bastante tiempo a desentrañar los retos que el Nautilus nos ha ido marcando, y muy satisfecho de lo logrado, el capítulo quinto se centra en realizar una síntesis descriptiva de lo analizado y en abordar el montaje del "Modelo ontogénico matemático del Nautilus" reflejando el crecimiento del mismo en una presentación secuencial de lo que acontece, pero asíncrona, no temporalizada, ya que no he contado con los datos necesarios para que este modelo pudiera ser síncrono.



La conclusión o resumen final nos lleva a reafirmar el canon cordobés que se manifiesta en todos los niveles y etapas vitales del Nautilus y que las diferencias observadas en la ontogenia del mismo tienen su fundamento y causa al iniciar su crecimiento siguiendo patrones de espirales cordobesas con diferente polo y a partir del segundo verticilo confluir a un polo común.

Ahora, como lector y posible actor interactuante, ¡es su momento! Espero que quede satisfecho, pero no saciado ya que, aunque hemos trabajado sólo con la sección sagital de la concha, no podemos olvidar la naturaleza tridimensional de ésta y tendremos que dar una nueva oportunidad al Nautilus para que continúe susurrándonos sobre el rastro de su ser y de su crecimiento (Galo, 2024 b) [\[3\]](#).

Córdoba (España), julio de 2024.



# Tabla de contenido

Prefacio .....	5
Tabla de contenido .....	19
<b>1. Modelo matemático uniforme del Nautilus .....</b>	<b>23</b>
1.1 El Nautilus cordobés .....	25
1.2 Ecuaciones del modelo matemático uniforme .....	35
1.2.1 Ecuación del fragmocono .....	35
1.2.2 Pared ventral, dorsal y sífúnculo .....	37
1.3 Limitaciones del modelo uniforme .....	38
1.4 Cómo adentrarse en la ontogenia nautiliana .....	40
<b>2. Ontogenia matemática del primer verticilo .....</b>	<b>43</b>
2.1 Aspectos biológicos de la concha embrionaria y del primer verticilo .....	45
2.2 Una primera mirada matemática revisora .....	52
2.2.1 Una herramienta para la revisión .....	53
2.2.2 Análisis y aspectos a revisar .....	56
2.3 Observando la ontogenia biológica del Nautilus con gafas .....	64
matemáticas	
2.3.1 Curvatura ventral, primer invariante .....	64
2.3.2 Intersección de espirales, segundo invariante .....	66
2.3.3 Tangencialidad de los septos con la pared ventral de la concha, tercer invariante .....	66
2.3.4 Incidencia de los septos con la pared dorsal de la concha .....	68
2.3.5 Labio dorsal y ombligo .....	70

2.4 La base matemática del primer verticilo .....	72
2.4.1 Modelando el labio dorsal .....	73
2.4.2 El canal sifuncular en el primer verticilo .....	79
2.5 Revisando los septos en el primer verticilo .....	83
2.5.1 Sobre el menor número de cámaras septales en el ..... primer verticilo	85
2.5.2 Sobre la amplitud angular de las cámaras septales en el ..... primer verticilo y en los dos restantes	89
2.5.3 Sobre la superficie de las secciones de las cámaras ..... septales en el primer verticilo	94
<b>3. Modelo ontogénico de los septos .....</b>	<b>101</b>
3.1 Mejora del modelo uniforme en los verticilos segundo y ..... tercero	104
3.1.1 Intersección de la pared dorsal y los septos en el ..... segundo y tercer verticilo	108
3.1.2 Modelo tangencial de los septos en el segundo y tercer ..... verticilo	115
3.2 Los septos en el primer verticilo .....	118
3.2.1 Modelación de los polos de los septos .....	120
3.2.2 Modelación de los arcos de los septos .....	123
3.2.2.1 Puntos de tangencia ventral .....	123
3.2.2.2 Factor de escala en los arcos de los septos..... Ecuación de los septos	127
3.2.2.3 Amplitud angular de los septos .....	128
3.2.2.4 Puntos notables y destacables en el Nautilus y su ..... relación	135

<b>4. Sitios singulares en el primer verticilo .....</b>	<b>141</b>
4.1 La concha embrionaria .....	146
4.2 El primer septo .....	149
4.3 El fragmocono embrionario y su ampliación .....	151
4.4 El sifúnculo en la segunda cámara septal .....	155
4.5 La pared dorsal en la transición entre el primer y segundo ..... verticilo	160
4.6 El modelo del primer verticilo .....	169
<b>5. El modelo ontogénico matemático .....</b>	<b>173</b>
5.1 Recurso interactivo .....	175
5.2 Síntesis descriptiva del modelo ontogénico .....	180
5.3 El modelo paso a paso .....	180
5.4 Animación del modelo ontogénico .....	182
5.5 En camino hacia el modelo tridimensional .....	183
<b>Bibliografía .....</b>	<b>185</b>





# Capítulo I

## Modelo matemático uniforme del Nautilus



## 1.1 El Nautilus cordobés



Figura 1.1. *Nautilus pompilius* (fuente: [Wikipedia](#)).

El Nautilus (**Figura 1.1**), usualmente catalogado como un fósil viviente —si bien Ward (1984) [\[21\]](#) lo encuadra en una [estasis](#) aparente<sup>4</sup>—, ha llamado siempre la atención no sólo por la belleza exterior de su concha, quizás no excesivamente destacable frente a la de otros moluscos, sino por aquella que esconde en su interior, ¡que es sorprendente!, y no deja indiferente a nadie (ver la **Figura 1.2** y el **Interactivo 1.1**).

---

<sup>4</sup> “Rather than being a prime example of a living fossil, the nautiloids may be examples of rapidly speciating organisms that change only slightly during each event, and return to the same form over and over. The result would be apparent stasis, but the actual history would be similar to that of any other rapidly speciating group—except that the net morphologic change over time would be small, rather than large” (Ward, 1984).

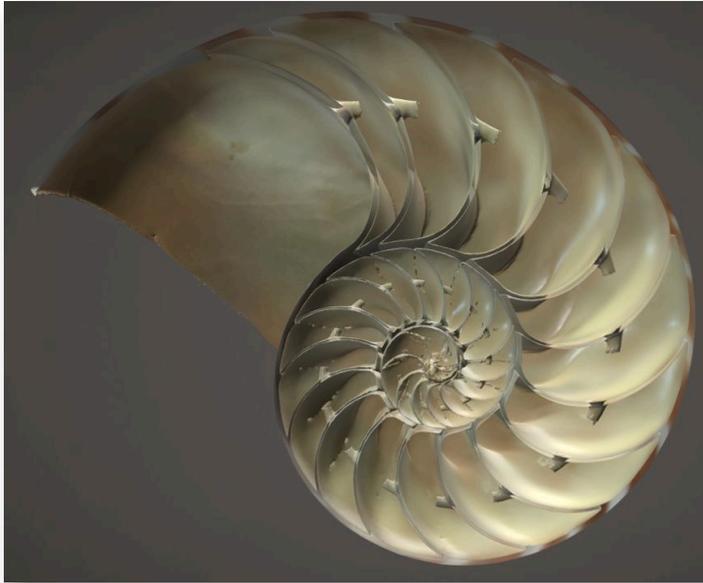


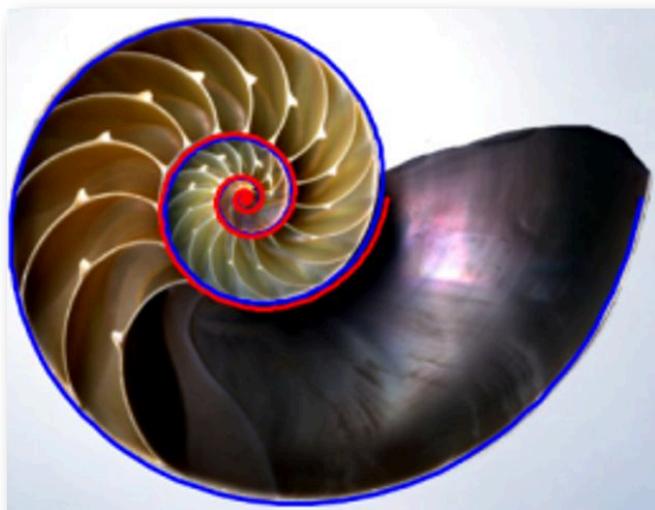
Figura 1.2. Sección sagital de la concha del Nautilus (fuente: [Nautilus Shell \(sectioned\)](#) by [University of Dundee Museum Collections](#) on [Sketchfab](#)).



Interactivo 1.1. Modelo tridimensional digitalizado de la sección de una concha de un *Nautilus pompilius*.

Esta concha, al igual que el animal que la construye, ha sido ampliamente estudiada desde el punto de vista paleontológico, zoológico, biológico u ontogénico, pero también han puesto el foco en ella en el mundo artístico, el arquitectónico, el ingenieril, el físico-químico y, por supuesto, en el matemático —donde ha llegado a ser idealizada—, sin olvidar el contexto literario donde también se ha adentrado en lugares preminentes. Aupada como prototipo de belleza ha sido continuamente encajonada de manera forzada en el canon de belleza o proporcionalidad divina o áurea, a pesar de su resistencia y continuo grito de: **¡No!, ¡no soy áureo!** [2], clamor que puede ser inaudible para legos, pero no debería serlo para eruditos. Más fácil hubiera sido haber creado la proporción nautiliana, como referente o neotipo de belleza, que con rocambolescas maneras tratar de estirar, contraer o moldear su fina superficie calcárea, pues ello es una suerte imposible de lograr con tan frágil soporte.

En el artículo "Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*" (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016) [4] detectamos y expusimos que la espiral logarítmica que se ajusta al perfil de la concha del *Nautilus* se corresponde con una espiral cordobesa (ver la **Figura 1.3**, la animación **Figura 1.4** y la **Escena interactiva 1.1**).



**Figura 1.3.** Espiral logarítmica cordobesa superpuesta sobre la concha del *Nautilus*.



Figura 1.4. Animación del ajuste del perfil por una espiral logarítmica.



Escena interactiva 1.1. Sobre el crecimiento gnomónico del Nautilus. [Indicaciones.](#)

Este hallazgo coyuntural que no deja de ser una mera coincidencia numérica, aunque para nosotros muy agradable, con la razón denominada cordobesa y que consecuentemente nos permite asociar su nombre al de Nautilus, hubiera quedado como una curiosidad anecdótica si no fuera porque ahí señalamos y detallamos que todo en el Nautilus se muestra cordobés —sí, nosotros estuvimos silenciosos y atentos y le oímos decir:

**“He vivido en un mundo áureo que me era ajeno, pero me habéis escuchado y ahora sí puedo cantar...”**

Soy cordobés,  
de la tierra de Julio Romero,  
el pintor de "La musa gitana",  
Córdoba sultana,  
¡cuánto te quiero!  
Soy cordobés,  
y a la orilla del Guadalquivir  
tengo que pone' un letrero  
diciendo "me muero",  
¡Córdoba por tii!



**Figura 1.5. ¡Soy cordobés!**

¡Sí, soy cordobé<sup>5</sup>! porque además de que el perfil de mi concha sea una espiral logarítmica cordobesa:

- El rastro calcáreo del sífúnculo (órgano que vacía las cámaras y actúa en la consecución de la flotabilidad del animal y que es el eje de simetría del teórico como topológico que forma la cavidad que ha ido construyendo y recorriendo el animal en su ciclo vital) muestra que éste crece siguiendo la forma de esa espiral cordobesa (ver la **Figura 1.6** e interactuar en el panel segundo de la **Escena interactiva 1.1**).



**Figura 1.6.** Animación: Ajuste del sífúnculo por una espiral logarítmica.

- Los septos (tabiques que conforman las cavidades de flotación) son arcos de una espiral que es también cordobesa (ver la **Figura 1.7**, la animación de la **Figura 1.8** e interactuar en el panel quinto de la **Escena interactiva 1.1**).

<sup>5</sup> En Córdoba (España) la pronunciación de las eses a final de palabra suele ser muy débil y para los oídos no habituados a esa tonalidad, éstas quedan como omitidas.

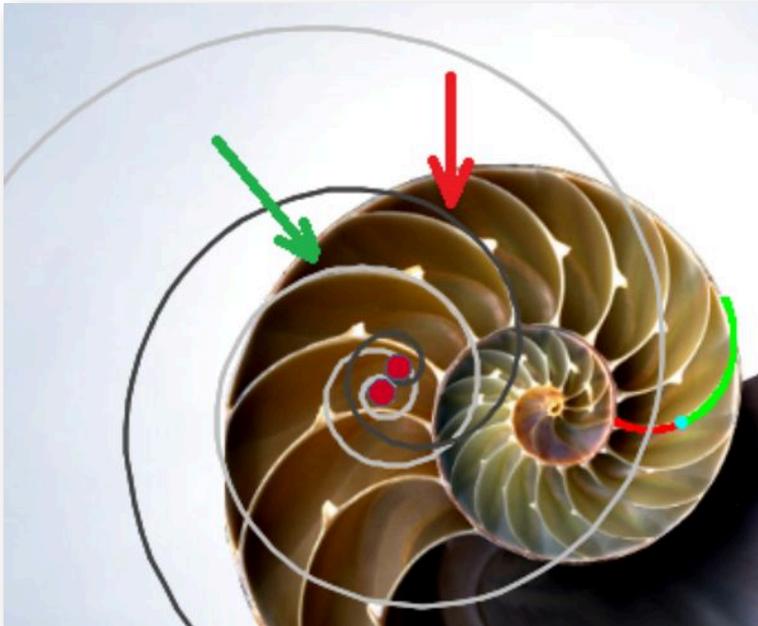


Figura 1.7. Ajuste de los septos con arcos de espirales logarítmicas y en particular con la cordobesa (color gris).



Figura 1.8. Animación: Procedimiento para ajustar la forma de los septos mediante arcos de espirales logarítmicas.

- El polo de esos arcos septales se desplaza siguiendo una espiral del mismo tipo, cordobesa, que es la mediatriz de todos los radios vectores de la espiral de la concha (ver la **Figura 1.9**, la animación de la **Figura 1.10** e interactuar en el panel quinto de la **Escena interactiva 1.1**).

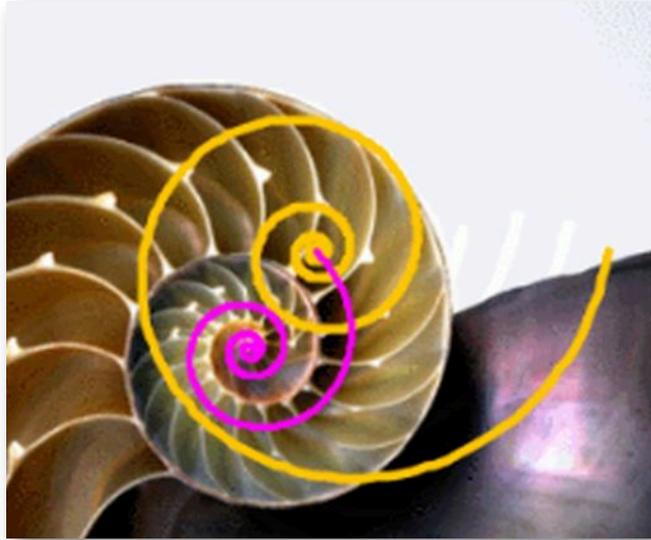
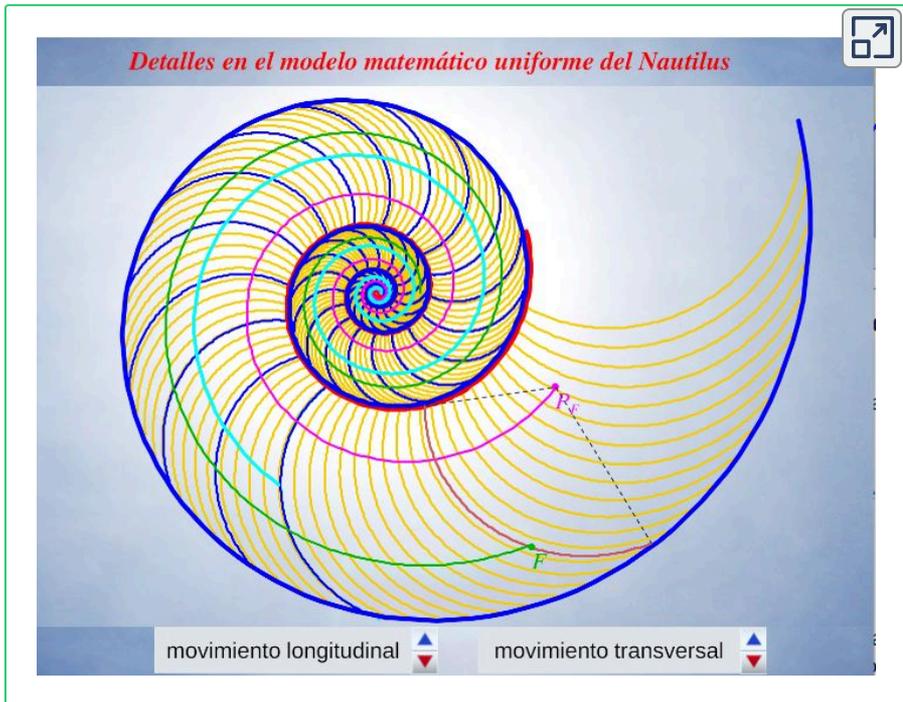


Figura 1.9. Espiral de los polos de los septos (color magenta).



Figura 1.10. Animación: Ajuste de la espiral de los polos de los septos.

- Todo punto de la concha o interior es la intersección de dos espirales cordobesas, una longitudinal tipo a la del perfil de la concha, pero con un factor de escala, y otra transversal tipo septal (interactuar en la **Escena interactiva 1.1**).



Escena interactiva 1.2. Los puntos  $F$  del fragmocono como intersección de una espiral longitudinal y otra transversal.

Así pues, en el artículo citado (Galo *et al.*, 2016) [4] se buscó y se logró captar la esencia nautiliana matemática a nivel conceptual global: “todo en el Nautilus se muestra cordobés”, y el modelo matemático que ahí se consideró fue único e indiferenciado en todo el crecimiento. Se aplicó la consideración de que dado que el crecimiento del Nautilus es gnomónico, es decir, que mantiene su forma cambiando su escala, se puede hacer una lectura atemporal esperando que el modelo sea aplicable en toda la fase vital desde su germen a su madurez y así, obtenemos el **modelo matemático uniforme del Nautilus** (ver la **Figura 1.11** y la animación de la **Figura 1.12**).

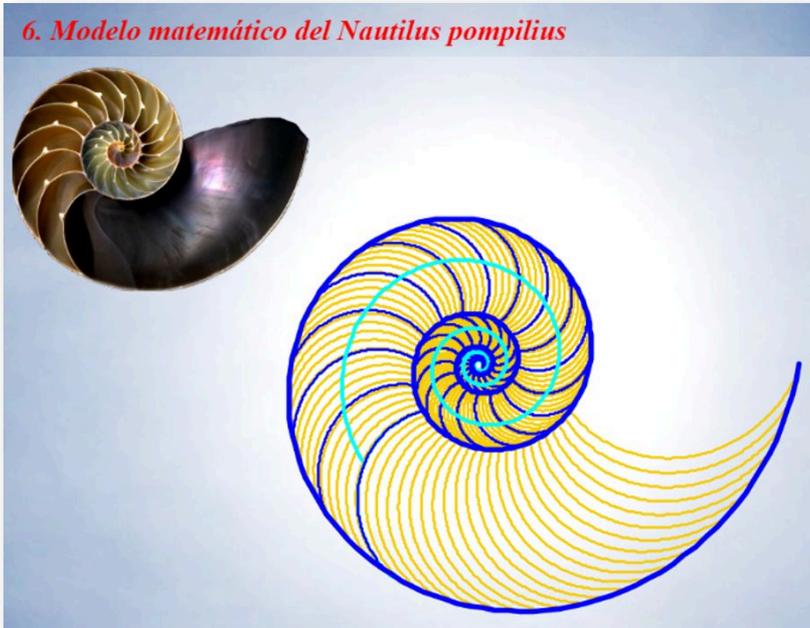


Figura 1.11. Modelo matemático uniforme del Nautilus.



Figura 1.12. Animación del crecimiento uniforme del Nautilus.

## 1.2 Ecuaciones del modelo matemático uniforme

Del libro "¡No!, ¡no soy áureo! ¡Soy cordobés! Firmado: Nautilus" (Galo, 2024) [2] extraemos y reflejamos aquí las ecuaciones correspondientes al modelo matemático uniforme del Nautilus.

### 1.2.1 Ecuación del fragmocono

En el instante de crecimiento de la concha correspondiente a un ángulo  $\lambda$ , el fragmocono es la región del plano:

$$r = a\kappa^\theta \quad \text{con} \quad \begin{cases} \kappa^{-2\pi} \leq a \leq 1 \\ \theta_0 \leq \theta \leq \lambda \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $\kappa = 1,185580\dots$  es la base de la espiral<sup>6</sup>  $r = a\kappa^\theta$  que es cordobesa para cada valor de  $a$ , pues  $\kappa = \varsigma^{\frac{2}{\pi}}$  y  $\varsigma = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$  es el número cordobés.

El número de verticilos, hasta ese instante  $\lambda$ , viene dado por  $\frac{\lambda-\theta_0}{2\pi}$ .

Así pues, todo punto<sup>7</sup>  $F(r_F, \theta_F)$  del fragmocono, el cual verifica que  $\theta_0 \leq \theta_F \leq \lambda$  y  $\kappa^{\theta_0-2\pi} \leq r_F \leq \kappa^\lambda$ , pertenece a una espiral cordobesa

$$r_F = a_F \kappa^{\theta_F} \quad (1.2)$$

que denominaremos "longitudinal" (ver la espiral en color verde oscuro en la **Escena interactiva 1.2** y pulsad los pulsadores inferiores "movimiento lateral" y "movimiento transversal" para desplazar el punto  $F$  en el fragmocono).

---

<sup>6</sup> Por simplificación, el polo común de todas esas espirales se ha posicionado en el origen de coordenadas  $O(0, 0)$ .

<sup>7</sup> En lo sucesivo, mediante el uso del subíndice  $F$  indicamos que ese valor depende del punto  $F$  que se considere.

A su vez, ese punto  $F$  también pertenece a un arco de una espiral logarítmica cordobesa “transversal”<sup>8</sup> (ver la espiral en color rojo oscuro en la **Escena interactiva 1.2**). Su ecuación paramétrica<sup>9</sup> es :

$$\begin{cases} x_F = P_{x_F} + d \kappa^{\varphi_F} \cos(\varphi_F) \\ y_F = P_{y_F} + d \kappa^{\varphi_F} \sen(\varphi_F) \end{cases} \quad \varphi_F \in [\alpha_F, \beta_F] \quad (1.3)$$

donde  $d \simeq 0,5$  es independiente de  $F$  y  $P_F(P_{x_F}, P_{y_F})$  es su polo. La amplitud de este arco viene dada por el intervalo determinado por los ángulos  $\alpha_F$  y  $\beta_F$ , ambos dependientes de  $F$ , pero como consecuencia del crecimiento gnomónico se verifica que ésta es angularmente constante en todos esos arcos y en el modelo se tasa<sup>10</sup> que  $\beta_F - \alpha_F = \frac{5\pi}{8}$ , valor que coincide con el ángulo mayor del gnomon del triángulo cordobés.

También acontece que todos esos polos  $P_F$  de las espirales transversales son puntos de la espiral longitudinal, que denominamos espiral de los polos de los septos, cuya ecuación es:

$$r = d \kappa^\theta \quad (1.4)$$

es decir,

$$\begin{cases} P_{x_F} = d \kappa^{\theta_P} \cos(\theta_P) \\ P_{y_F} = d \kappa^{\theta_P} \sen(\theta_P) \end{cases} \quad (1.5)$$

---

<sup>8</sup> Estos arcos bien son septos o bien son arcos interseptos semejantes.

<sup>9</sup> De la ecuación se deduce que todos estos arcos no son más que traslaciones de vector  $\overrightarrow{OP_F}$  de arcos de la espiral logarítmica cordobesa de ecuación  $r = d \kappa^\theta$ .

<sup>10</sup> En este libro veremos que este valor es mayor y justificaremos el porqué de ese cambio.

Si  $P_F$  y  $P_{F'}$  son dos puntos de esa espiral de los polos que se diferencian un ángulo  $\Delta\theta_P$  entonces los arcos transversales asociados verifican que

$$\alpha_{F'} = \alpha_F + \Delta\theta_P \quad (1.6)$$

y, por tanto, una traslación "longitudinal" en el fragmocono genera un traslación "transversal" en el arco septal asociado<sup>11</sup>.

Adicionalmente, tenemos que si  $\theta_P$  es el ángulo asociado a  $P_F$ , entonces  $\alpha_F$  en (3) cumple que<sup>12</sup>:

$$\alpha_F = \theta_P - \frac{51\pi}{64}. \quad (1.7)$$

## 1.2.2 Pared ventral, dorsal y sifúnculo

El fragmocono está delimitado por:

- La pared ventral (ver la espiral en color azul en la **Escena interactiva 1.2**):

$$r = \kappa^\theta \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (1.8)$$

- La pared dorsal (ver la espiral en color rojo en la **Escena interactiva 1.2**):

$$r = \kappa^{\theta-2\pi} \quad 0 < \theta \leq \lambda \quad (1.9)$$

Y el sifúnculo es el eje del fragmocono (ver la espiral en color turquesa en la **Escena interactiva 1.2**):

$$r = \frac{1 + \kappa^{-2\pi}}{2} \kappa^\theta \quad 0 < \theta \leq \lambda - \frac{3\pi}{4} \quad (1.10)$$

---

<sup>11</sup> Esto formaliza la traslación que se observa en la animación de la **Figura 1.10**.

<sup>12</sup> El desfase angular  $\frac{51\pi}{64}$  está próximo a  $\frac{3\pi}{4}$  y haremos una revisión en el modelo ontogénico objeto de este libro

## 1.3 Limitaciones del modelo uniforme

El modelo matemático uniforme del Nautilus nos ha permitido aprender bastante sobre la idiosincrasia de la concha de este animal y el porqué de algunos aspectos de su forma, su causa y el efecto producido. No obstante, esto, no es más que un útil deseo purista matemático que se mostrará débil para cualquier detenido observador que aborde su confrontación con la realidad, pues somos conscientes por experiencia vital personal que en el desarrollo de un ser vivo acontecen diferentes fases o etapas que introducen matices distintivos dentro de una esencia identificadora que permanece. Por ejemplo, Ladman, Arnold y Mutvei (1989) [9] en su artículo "**Description of the embryonic shell of Nautilus belauensis**" exponen que la forma de la concha del Nautilus sufre marcados cambios durante la embriogénesis y que los perfiles en la etapa de dos y tres cámaras difieren de los alcanzados en etapas ontogénicas posteriores.

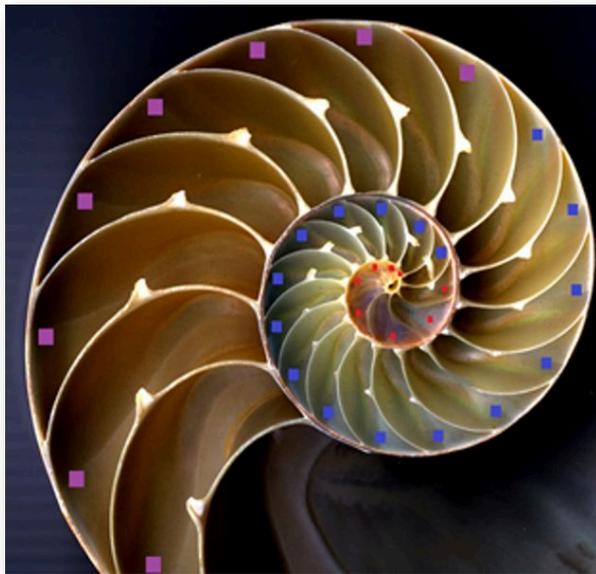


Figura 1.13. Recuento de cámaras en cada verticilo del Nautilus.

Una ilustración rápida de esos cambios, visible a primera vista, y por ende que muestra la no coincidencia con las presunciones asumidas en el modelo uniforme y que consecuentemente refleja alguna de sus limitaciones, podemos observarla en la **Figura 1.13** donde en un simple recuento de cámaras por cada verticilo<sup>13</sup> detectamos que hay ocho cámaras en la primera vuelta, dieciséis en la segunda y ocho en la tercera (pero con una cadencia de paso análoga al de la segunda), sin embargo en dicho modelo uniforme el valor de dieciséis es constante y, en particular, en la primera vuelta esto no concuerda con la realidad.

Es por ello, que en este libro lo que se persigue es abordar la ontogenia matemática del Nautilus, desde su periodo embrionario hasta la madurez y determinar cuál es el modelo matemático diferenciado en cada una de las etapas de crecimiento en correlación con los estudios biológicos micro y macroscópicos existentes. Y, de hecho, aquí veremos que se pueden diferenciar tres etapas que esencialmente se corresponden con cada uno de los tres verticilos que se contabilizan en la concha de un ejemplar adulto, tres etapas que encierran ciertas diferencias y matices dentro del citado modelo cordobés global. Todo, sin olvidar y teniendo siempre presente, siendo conscientes, que cuando atravesamos el canal que enlaza la discreta quecto-quetta realidad<sup>14</sup>, en la que vivimos, con la idealizada continuidad del mundo matemático siempre surgen interferencias (“aliasing”) que trataremos de mitigar y/o detallar, aunque hay que asumirlas.

---

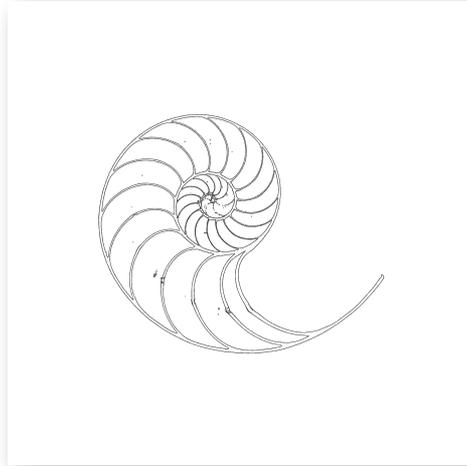
<sup>13</sup> Un verticilo es una revolución de 360° en el crecimiento en espiral de la concha de un molusco.

<sup>14</sup> Este término lo construimos tomando como base el hecho de que, desde el año 2022, quecto y quetta son los [prefijos del sistema internacional](#) que marcan el rango de valores mínimo y máximo de nuestro mundo discreto, desde  $10^{-30}$  a  $10^{30}$ . Realmente, en longitud, el [orden de magnitud](#) de aquello que es físicamente apreciable o medible en nuestro entorno se ubica actualmente en el rango determinado por el intervalo  $[10^{-35} \ 10^{26}]$  metros, es decir desde la longitud de Planck al tamaño del universo observable.

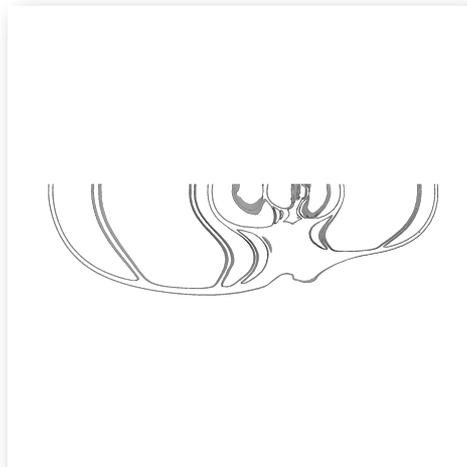
## 1.4 Cómo adentrarse en la ontogenia nautiliana

La referencia zoológica de la que partiremos es: “**Anatomy of living Nautilus: Reevaluation of primitiveness and comparison with Coleoidea**” de Sasaki, Shigeno y Tanabe (2010) [\[15\]](#) donde, aportando unas magníficas fotografías, se aborda una revisión de la anatomía del Nautilus, que si bien se centra principalmente en los órganos y partes blandas, incluye también información sobre la forma embrionaria de la concha. Adicionalmente, en la introducción de ese artículo, los autores detallan la literatura más significativa al respecto comenzando con el libro de Saunders and Landman (1987) [\[16\]](#) “**Nautilus: the biology and paleobiology of a living fossil**” que compila el conocimiento sobre el Nautilus hasta ese año y que posteriormente ha sido actualizado en la edición de 2010. Landman *et al.* (1989) [\[9\]](#) en su artículo “**Description of the embryonic shell of Nautilus belauensis**”, citado con antelación, analizan la concha en el periodo embrionario y muestran su desarrollo hasta el tercer septo, estudio que se complementa en “**Shell ultrastructure and ontogenetic growth in Nautilus pompilius L. (Mollusca: Cephalopoda)**” de Mutvei and Doguzhaeva (1997) [\[12\]](#), donde se muestran las curiosas depresiones dorsales septales en el segundo verticilo, y también en “**Development of the Embryonic Shell Structure in Nautilus**” de Tanabe and Uchiyama (1997) [\[17\]](#). Estos artículos nos servirán de soporte, guía y verificación en nuestro análisis matemático. Igualmente acudiremos al modelo virtual tridimensional e interactivo de la concha del Nautilus del “[D’Arcy Thompson Zoology Museum](#)” (ver la **Figura 1.2** y el **Interactivo 1.1**), obtenido mediante escáner, que es una magnífica fuente de observación visual interactiva, si bien hay que tener presente y es ostensible que el corte del ejemplar que se ha usado para su digitalización no coincide con el plano medio de simetría. Pueden consultarse otros modelos tridimensionales en [Sketchfab](#) (¡jojo!, ponga atención para no confundir reproducciones artísticas con digitalizaciones de ejemplares reales).

También tendremos como referencia los cortes paralelos al plano sagital y los correspondientes a los planos transversales que realizó González-Restrepo (2019) [6] a partir del modelo interactivo del D'Arcy Thompson Zoology Museum. Podemos observarlos en las animaciones de la **Figura 1.14** y de la **Figura 1.15**.

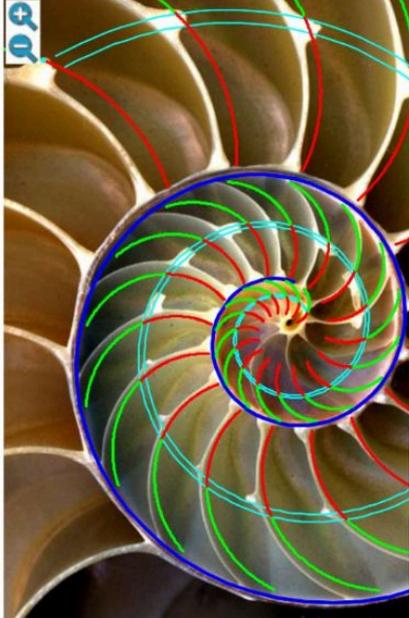


**Figura 1.14. Cortes parasagitales de la concha del Nautilus del Museo D'Arcy Thompson.**

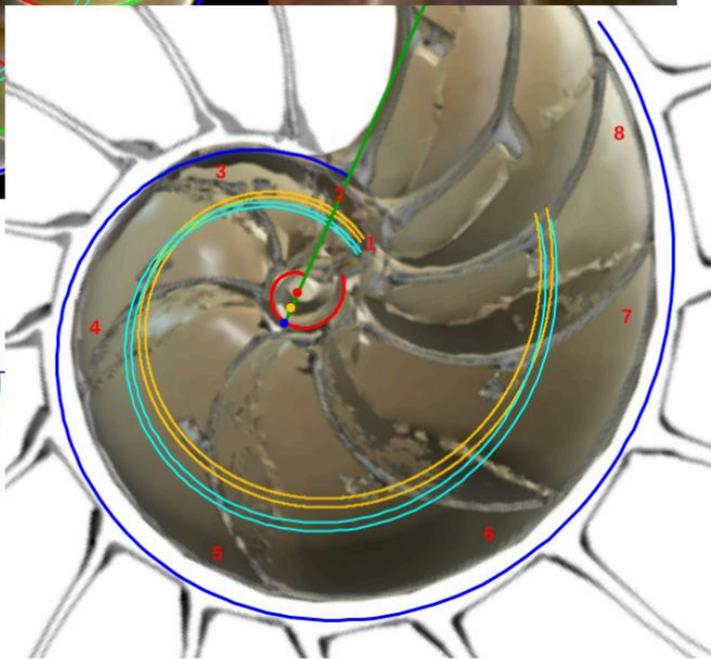
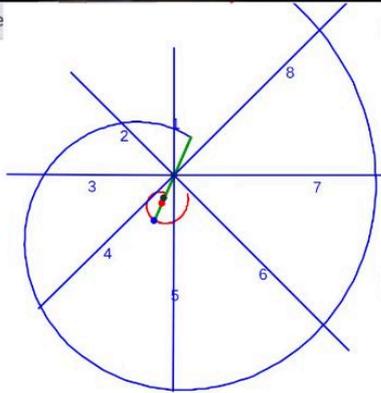


**Figura 1.15. Cortes transversales de la concha del Nautilus del Museo D'Arcy Thompson.**





se



# Capítulo II

## Ontogenia matemática del primer verticilo



En su primer verticilo, la concha del Nautilus tiene un crecimiento diferenciado del que acontece en el segundo y tercero. Su esencia, implícita y explícitamente, es siempre cordobesa, pero de partida el número de cámaras en ese primer verticilo son ocho y consecuentemente con paso  $\frac{\pi}{4}$  entre ellas, frente a las dieciséis y paso  $\frac{\pi}{8}$  del segundo, paso que también ocurre en el tercero aunque en la última o últimas cámaras puede presentarse menor. ¿Qué acontece en la ontogenia del Nautilus que sea la causa productora de esa distinción? En este segundo capítulo nos adentraremos en la biología de este animal, o más precisamente en el rastro calcáreo que deja y que conforma su concha, para tratar de dar respuesta matemática a esta pregunta. Procedamos a iniciar y a adentrarnos en la ontogenia del Nautilus y desde ahí trascender a su ontogenia matemática.

## 2.1 Aspectos biológicos de la concha embrionaria y del primer verticilo

A primera vista la concha embrionaria del Nautilus (**Figura 2.1**), en su periodo pre-cameral, aparenta una forma similar a la concha de una lapa (MolluscaBase eds., 2024 [\[10\]](#)), ver la **Figura 2.2**, pero a diferencia del crecimiento que sigue ésta, que simplícidamente podemos decir que es radial y anular, el Nautilus aborda un cambio de concavidad en la parte dorsal y adopta una curvatura similar tanto en la parte ventral como en la dorsal (**Figura 2.3** y **Figura 2.4**) y eso es lo que marca la tendencia a la forma enrollada que adquirirá con posterioridad. La parte dorsal embrionaria es inicialmente casi plana, pero en la denominada constricción de la cicatriz (**Figura 2.5**), coincidiendo con el inicio de la formación de las primeras cámaras y septos, es cuando se produce ese cambio de concavidad que forma el labio interior dorsal (observar en la parte inferior de la **Figura 2.1-D** el piquito que está formándose y en las figuras **Figura 2.7**, **Figura 2.8** y **Figura 2.9** cómo se va desarrollando ese labio).

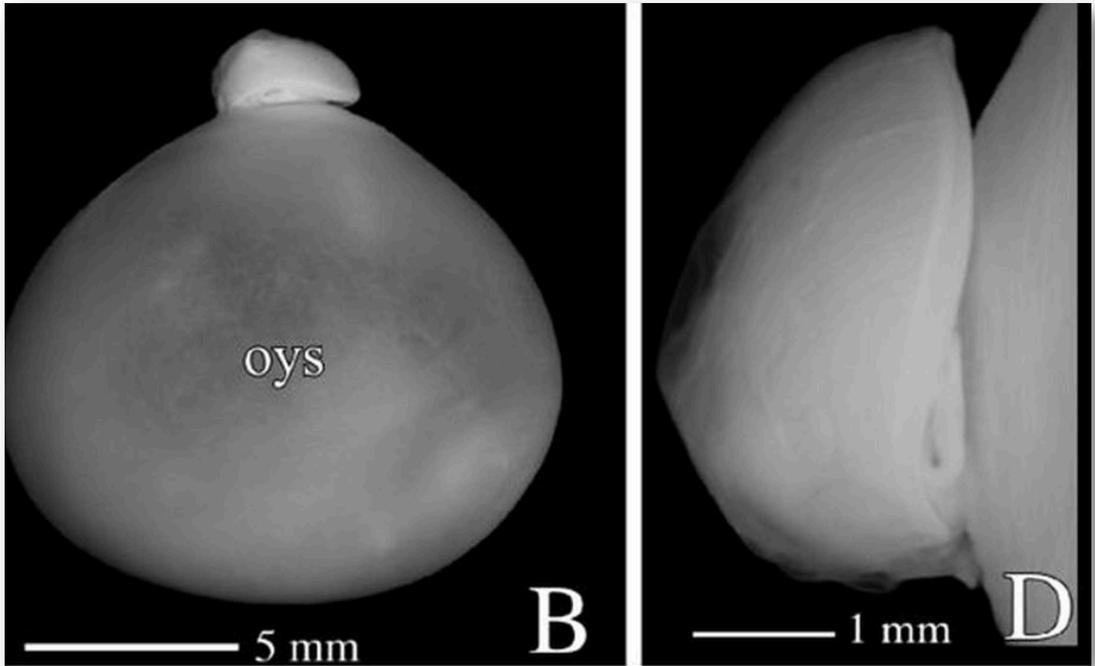


Figura 2.1. Embrión de 4 meses del *Nautilus pompilius*. Imagen B: Perfil con el saco vitelino exterior (oys: outer yolk sac). Imagen D: Detalle de la concha embrionaria. (Procedente de Sasaki, et al., 2010 [15]).



Figura 2.2. Lapa. (*Patella vulgata*).



Figura 2.3. Embrión del *Nautilus belauensis* dentro de la cápsula del huevo (éste ha sido recortado en la parte superior). El embrión contaba con una cámara septal. Procedente de Saunders and Landman (2010: pl. IV, p. xxxiv) [16].



Figura 2.4. Labio dorsal (señalado por la flecha) en la concha del *Nautilus* en la fase de dos cámaras. (Procedente de Landmam et al.1989) [9].

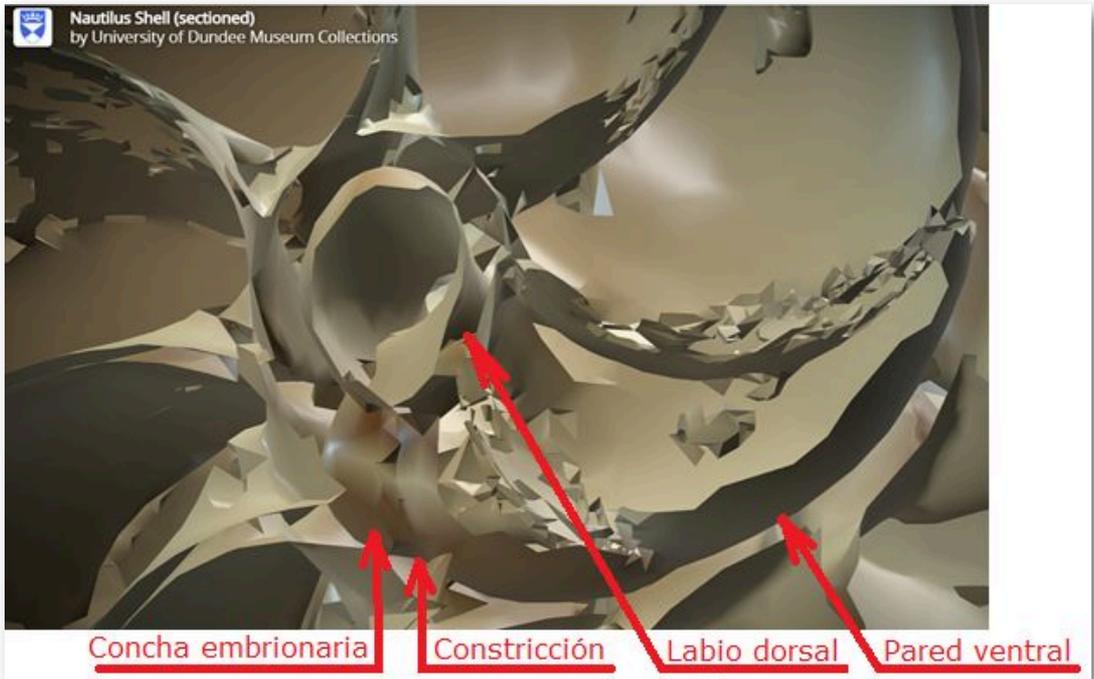
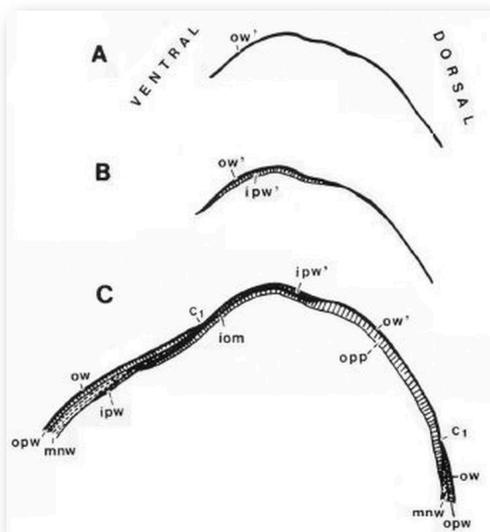


Figura 2.5. Detalle del ombligo y de las primeras cámaras. Se observa la concha embrionaria inicial tipo lapa, la constricción que marca el inicio de la pared ventral y el cambio de curvatura en la pared dorsal. ([Procedente de la imagen 3D de la Universidad de Dundee](#)).

Si no se produjera ese cambio de concavidad en la parte dorsal, irremediablemente la concha se cerraría al intersectar consigo misma. Cuando al crecer, el labio llega a confluir con la parte dorsal inicial de la concha se produce la formación del espacio umbilical u ombligo (**Figura 2.5**), momento en el que se completa el primer verticilo y, consecuentemente, la parte ventral inicial de la concha pasa ahora a ser interior a la misma y comienza a actuar como nueva parte dorsal de la cámara habitacional en el segundo verticilo.

Así pues, el perfil de la concha embrionaria preseptal del *Nautilus* (**Figura 2.1**) puede simplificarse o sintetizarse en dos líneas curvas: la que delimita la parte dorsal y la correspondiente a la ventral. Esta simplificación nos recuerda y hace pensar en la conjunción entre la espiral longitudinal y la transversal observada en el análisis resumen realizado en el capítulo primero. Y esa perspectiva se refleja claramente en la sección de dicha concha embrionaria correspondiente a esa fase preseptal (**Figura 2.6**) donde la parte dorsal embrionaria bien podremos catalogarla como el septo cero o inicial (Mutvei & Doguzhaeva, 1997 [12], indican que el protosepto o capa interior sobre la concha inicial es un septo que carece de tubo sifuncular). Precisamente es en la constricción de la cicatriz ( $C_1$  en la **Figura 2.6**) donde la concha adopta la curvatura cordobesa en la pared ventral e inicia el cambio de concavidad en la pared dorsal, iniciándose el labio dorsal. La **Figura 2.7**, **Figura 2.8** y **Figura 2.9** muestran el desarrollo durante la formación de los tres primeros septos.



**Figura 2.6.** Desarrollo sucesivo de diferentes capas inorgánicas en la concha preseptal del *Nautilus*. (Procedente Tanabe, and Uchiyama, 1997 [17]).  $C_1$  es la constricción de la cicatriz, donde la concha inicia la curvatura ventral que la caracteriza, así como el cambio de curvatura en la dorsal .



Figura 2.7. Sección media dorsoventral de la concha embrionica del *Nautilus macromphalus* en la etapa del primer septo ( $S_1$ ) y engarce del sifunculo (Procedente de Tanabe, and Uchiyama, 1997 [17]).

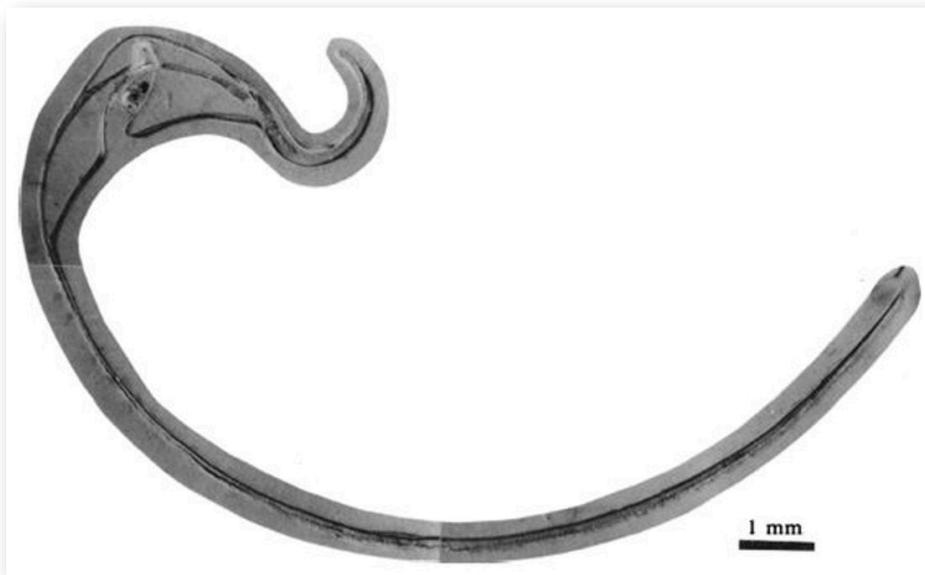


Figura 2.8. Sección media dorsoventral de la concha embrionica del *Nautilus belauensis* en la fase de dos cámaras (Procedente de Landmam *et al.* (1989) [9]. Se corresponde con el ejemplar de la Figura 2.4).

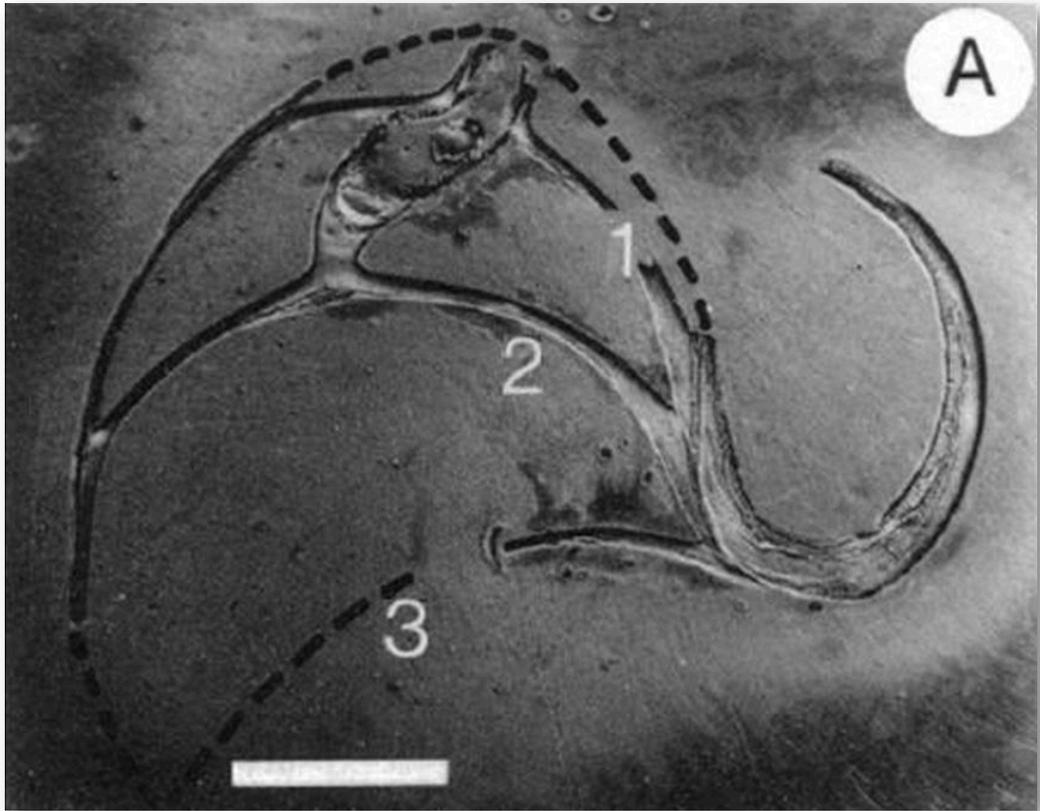


Figura 2.9. Sección en la concha del *Nautilus belauensis* en la fase de tres cámaras. Las líneas discontinuas señalan las partes fragmentadas y perdidas al efectuar el corte. (Procedente de Landman *et al.* (1989) [9]).

En la discusión que realizan en su artículo, Landman *et al.* (1989) [9] exponen que la concha del *Nautilus* sufre marcados cambios durante la embriogénesis, en particular indican que durante la etapa de dos y tres cámaras, en el fragmocono, las proporciones que acontecen entre el volumen de las cámaras septales y el de la cámara habitacional son pequeñas y difieren de las alcanzados en etapas ontogénicas posteriores, ello es debido a que la longitud de la cámara habitacional es mucho mayor en la primera etapa vital que en la fase juvenil y adulta. Sin embargo, el perfil de la concha sí se asemeja en todas las fases.

## 2.2 Una primera mirada matemática revisora

Con la base y los detalles aportados hasta ahora, nos surge el interrogante acerca de: **¿qué acontece con nuestro modelo cordobés uniforme del Nautilus [2]**, aquel que mantiene la misma forma durante todas las etapas vitales, un modelo bien adaptado a nivel global y macroscópico como ya hemos mostrado en detalle, **si lo confrontamos con esa fase inicial que biológicamente está indicada como diferenciada?** Pues, de partida, lo que ocurre es que se inicia una nueva etapa investigadora, un nuevo camino que recorrer a hombros de estos gigantes biólogos —los antes explícitamente citados y de otros muchos más que omitimos por economía literaria, pero que por supuesto no son olvidados— y junto a los de numerosos gigantes matemáticos poder modestamente contribuir a la "**Ontogenia matemática del Nautilus**". ¡Avancemos, pues!

Para poder adentrarnos en este análisis y contraste, podemos aglutinar todo lo indicado en un recurso interactivo (ver la **Escena interactiva 2.1**) que nos permita tener una visión solapada comparativa y que ayude en la conceptualización de lo que acontece, es decir, partir de una agrupación de instantáneas para lograr extraer un continuo descriptivo matemático. Es obvio, de nuevo es necesario indicarlo aunque pueda ser reiterativo, que la superposición de las fotos anteriores mostrará variaciones, algunas debido a que proceden de diferentes ejemplares y especies de Nautilus, otras serán consecuencia de la variabilidad que intrínsecamente acontece en todo espécimen o individuo concreto dentro de las características comunes e identificadoras que comparten y que definen a esa especie; o quizás que estén generadas por posibles desviaciones angulares al realizar los cortes sobre la concha para obtener su sección o perfil. En definitiva, errores comunes e implícitos en cualquier estudio y que aquí, adicionalmente, se ven magnificados gracias a la amplificación visual que nos aporta la técnica.

No obstante si alguien tiene un empeño cuantificador especial, en esa escena puede verificar —con la regla interactiva que se dispone— que nos adentramos en variaciones en el entorno de la décima de milímetro. Estos son detalles con los que se ha de convivir y que han de ponderarse en su justa magnitud para lograr esa visión global y poder encuadrarse en la perspectiva de búsqueda de un modelo o patrón conceptual y, así, lograr encontrarlo.

## 2.2.1 Una herramienta para la revisión



Escena interactiva 2.1. Contrastando y revisando el modelo uniforme cordobés del Nautilus. [Indicaciones.](#)

El lector de este libro puede convertirse en actor al interactuar con la **Escena interactiva 2.1** anterior y confrontar en primera persona el modelo uniforme con la biología nautiliana. Para ello, cuenta con los botones que escribiremos a continuación y también si posa el ratón sobre alguno emergerá un breve mensaje descriptivo de su función.

En el objeto interactivo podemos distinguir tres zonas:

- Parte superior con diferentes botones que activan y desactivan la presentación de diferentes imágenes.



De izquierda a derecha los botones disponibles son:

- Fase de tres cámaras en el crecimiento del Nautilus.
  - Fase de dos cámaras.
  - Fase de una cámara.
  - Concha embrionaria o preseptal.
  - Sección media de la concha del Nautilus del [museo Dundee](#).
  - Sección media de la concha del Nautilus usada como referencia en la modelación uniforme del Nautilus.
  - Muestra u oculta la concha anterior en un recuadro que sirve de referencia para ubicar la parte ampliada de la misma en la parte central.
- Parte inferior con diferentes botones que activan y desactivan la presentación de diferentes objetos matemáticos que modelan o tratan de modelar las diferentes partes y características de la concha del Nautilus.



De izquierda a derecha los botones disponibles son:

- Selección de la fase correspondiente a número de septos seleccionado.
  - Modelo de radios vectores con paso entre ellos de  $\pi/8$ .
  - Representación de todos los septos hasta el número seleccionado.
  - Representación del septo correspondiente al número seleccionado.
  - Espiral cordobesa de los polos de los septos.
  - Espiral cordobesa que modela los septos.
  - Espiral cordobesa que modela el sífúnculo.
  - Espiral cordobesa que modela la pared ventral.
  - Regla para medir en mm.
  - Prolongación de las espirales que estén activas a partir del septo seleccionado.
  - Prolongación de las espirales que estén activas desde su polo hasta el septo cero.
- Parte central que muestra la sección media de un Nautilus como soporte de referencia para abordar el análisis matemático de su forma y crecimiento.



- El fondo refleja la sección media del Nautilus que se ha tomado como referencia para mostrar la modelación.
- En la esquina superior izquierda se cuenta con dos botones (lupas) que permiten amplificar o minorar la imagen central.
- En la esquina superior derecha se muestra la concha de referencia y un recuadro que ubica la zona de ella que está representada en la imagen central.

## 2.2.2 Análisis y aspectos a revisar

En base a la ayuda portada por la herramienta interactiva anterior se puede contrastar el modelo uniforme con las imágenes del Nautilus que reflejan la ontogenia del mismo y en la siguiente presentación se refleja la reflexión realizada en base a esa comparativa, la cual puede usarse también como guía a reproducir en la **Escena interactiva 2.1**.

[Presentación con Google Slides](#), [Versión en pdf](#) y [versión en PowerPoint](#).

**El modelo cordobés uniforme del Nautilus**

Uniforme = con igual forma durante todas las etapas vitales

José R. Galo Sánchez  CC by-nc-nd

< 1 > ⋮  Google Slides

En la barra de herramientas inferior puede gestionar manualmente el paso de las diapositivas.

En las once primeras diapositivas se hace una síntesis del modelo uniforme, el cual ya lo hemos descrito en el primer capítulo. De ellas lo más ostensible y/o novedoso que hemos de destacar es:

- La disponibilidad de una herramienta de medida (ver la diapositiva cuarta) que permite conocer las dimensiones reales del ejemplar. El factor de escala, necesario para ello, se ha obtenido tomando como base la medida aportada por Landman *et al.* (1989) [9] (ver la **Figura 2.8**) y la superposición de esta imagen sobre el ejemplar considerado (**Figura 2.10**).
- Que en el primer verticilo el paso interseptos no se corresponde con  $\frac{\pi}{8}$ , es decir con 16 cámaras por verticilo (diapositiva séptima y **Figura 2.11**).

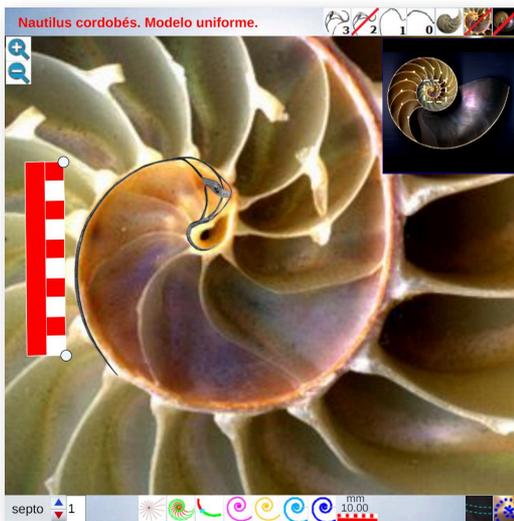


Figura 2.10. Escala real obtenida en base a las medidas aportadas por Landman *et al.* (1989) [9] en la fase de dos cámaras. Figura 2.11. Paso interseptos en el primer verticilo.

En las restantes diapositivas profundizamos en las deficiencias del modelo y anotaremos los aspectos sobre los que es necesario abordar un nuevo estudio para tratar de modelarlos.

- En el primer verticilo (**Figura 2.12**) observamos ocho cámaras con un paso interseptos aparentemente variable y consecuentemente divergente con un teórico paso medio de  $\frac{\pi}{4}$ . ¿Qué cambios se producen en esta primera vuelta y qué ley biológica y/o física los gobierna y bajo qué aparataje matemático se modela?
- Nos movemos en un área cuya amplitud real está en una anchura en el entorno de 16 mm (**Figura 2.13**).

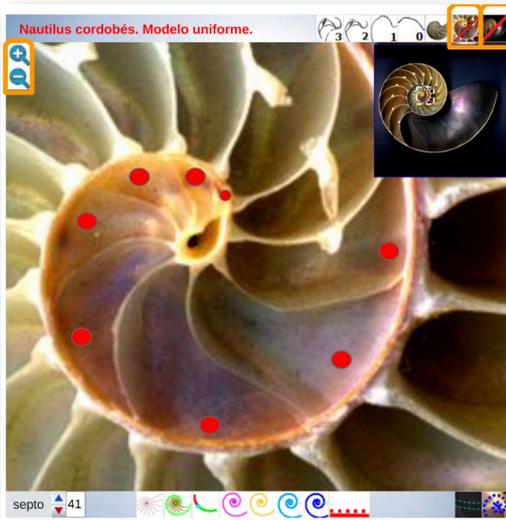


Figura 2.12. Ocho cámaras en el primer verticilo y variabilidad de las mismas .

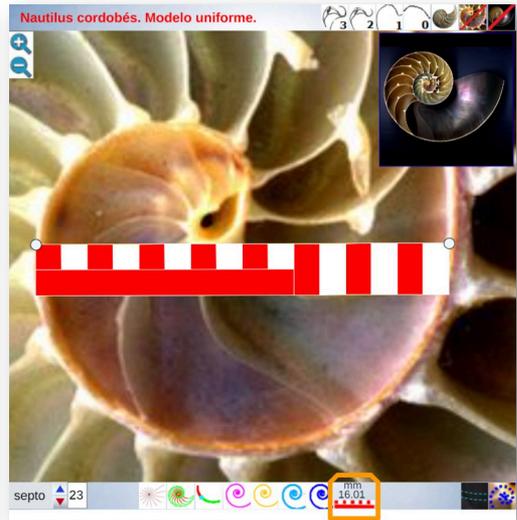


Figura 2.13. Amplitud espacial en el que se enmarca el primer verticilo (16 mm aprox.) .

- Superponiendo los cortes aportados por Tanabe y Uchiyama (1997) [17] y por Landman *et al.* (1989) [9] (**Figura 2.14** a **Figura 2.17**), e independientemente de las diferencias no significativas que observemos en esa superposición dado que son cortes que proceden de diferentes ejemplares, podremos avanzar en la compresión del modelo.
  - El corte de la fase preseptal (**Figura 2.14**) es asimétrico y, a priori, no aporta una información suficiente para su modelado.

- El primer septo genera la primera cámara y se observa el engarce del sífinculo (**Figura 2.15**). La amplitud del fragmocono se incrementa en la constricción, conformándose por un lado la pared ventral, y también, en ella, el labio dorsal cambia su curvatura adoptando el mismo tipo de concavidad que la ventral.



Figura 2.14. Concha embrionaria preseptal .



Figura 2.15. Fase del primer septo. Inicio del sífinculo .

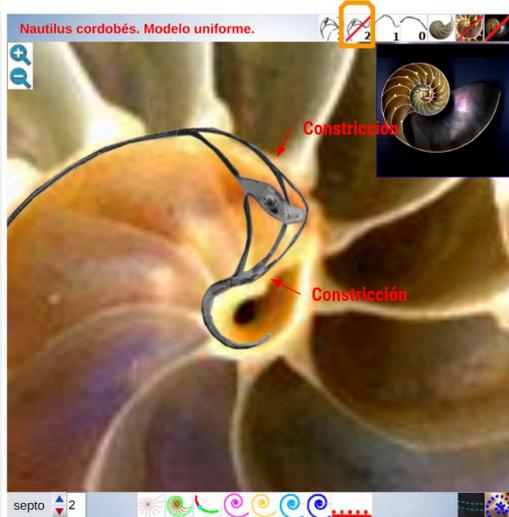


Figura 2.16. Fase de dos cámaras .



Figura 2.17. Fase de tres cámaras .

- En la segunda cámara el sífúnculo también cambia su curvatura y el labio dorsal crece aparentemente según una espiral **Figura 2.16**.
- En la fase de tres cámaras (**Figura 2.17**) el labio dorsal sigue su crecimiento en espiral ¿será esta espiral cordobesa al igual que lo es la pared ventral? Es de esperar porque posteriormente este labio dorsal enlazará con la pared ventral inicial que pasa a ser la nueva pared dorsal, pero no deja de ser intuiciones, muy matizables, mezcla de deseos y ganas, si bien en línea a lo que gratamente descubriremos con posterioridad.
- Al superponer las primeras etapas (**Figura 2.18**) observamos pequeñas diferencias, pues como hemos indicado son secciones de distintos ejemplares, pero nuestro objetivo es el paso de la quecto-quetta realidad al mundo matemático continuo. Hay que aislar las interferencias (*aliasing*) que se generan en la primera para poder observar diáfananamente el segundo.

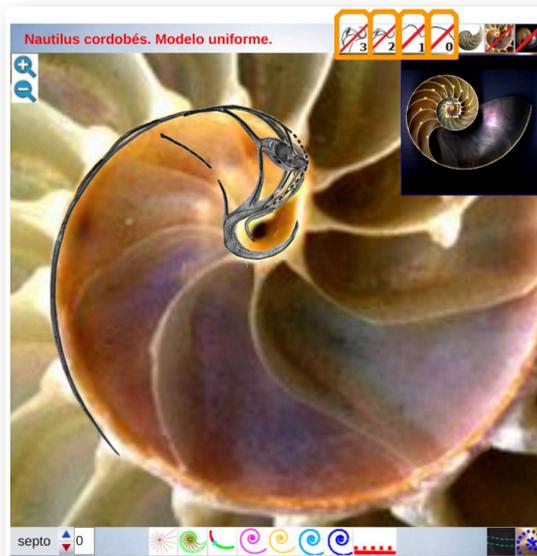


Figura 2.18. De cero a tres cámaras, superposición de fases .

- La pared ventral, desde la constricción, adopta la forma de una espiral cordobesa. Es un invariante en el modelo durante toda su etapa vital ( Figura 2.19).
- La espiral cordobesa que modela la pared ventral no sirve para modelar la pared o labio dorsal (Figura 2.20).

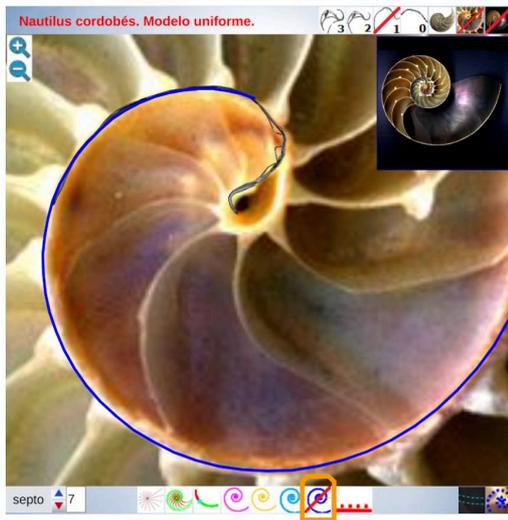


Figura 2.19. Ajuste de la pared ventral en el primer verticilo .

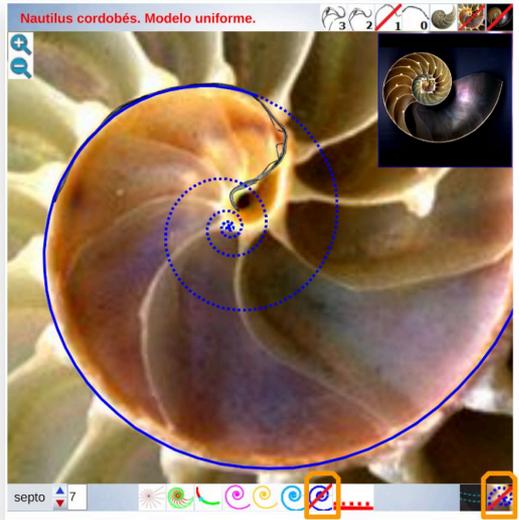


Figura 2.20. Contextualización de la pared ventral .

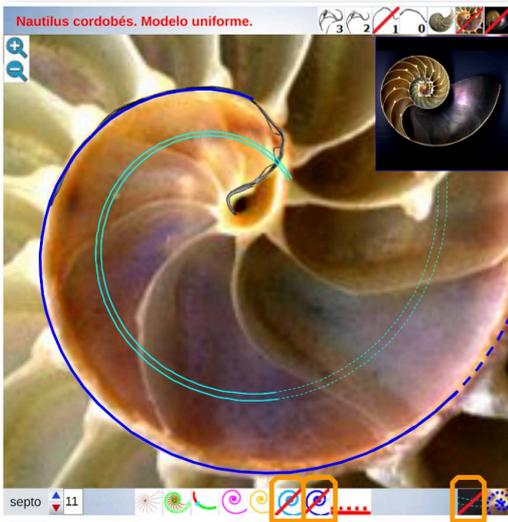


Figura 2.21. Ajuste del canal sifuncular .

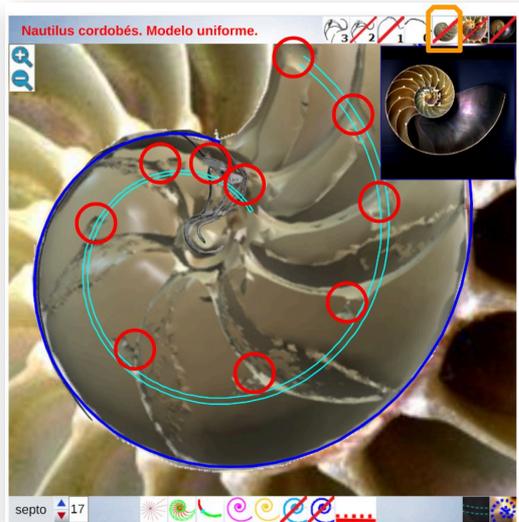


Figura 2.22. El sifúnculo en el Nautilus del Museo Dundee .

- La espiral cordobesa que modela al sífunculo en el segundo y tercer verticilo no se ajusta debidamente en el primero (**Figura 2.21**), hay divergencias presentando un separación clara en el engarce e inicio respecto al modelo considerado. Adicionalmente en la referencia gráfica que estamos usando como base comparativa no se muestra el canal sífuncular y por ello necesitamos apoyarnos, por ejemplo, en la sección del Nautilus de Dundee.
- Al contrastar la espiral sífuncular del modelo uniforme con el corte del Nautilus del museo Dundee en el primer verticilo observamos que el sífunculo teórico no se ajusta en este verticilo al canal sífuncular real, coincidiendo sólo a partir del octavo septo e inicio del segundo verticilo. En la **Figura 2.22** los círculos en color rojo muestran los restos del canal sífuncular para destacar las diferencias.



Figura 2.23. Ajuste de los septos en el primer verticilo .



Figura 2.24. Los septos y la pared ventral, contextualización .

- Al observar el encuadre de los septos en el primer verticilo (**Figura 2.23**) siguiendo el modelo uniforme, comprobamos un gran desajuste, no sólo en el paso interseptos que ya hemos indicado con anterioridad, sino también en la amplitud de sus arcos.

- La amplitud de los septos en el primer verticilo sería la adecuada en el supuesto de que la pared dorsal coincidiera con la espiral que determina la pared ventral, pero nada de eso es así (**Figura 2.24**).
- Esos septos sí se ajustan mejor en el segundo y tercer verticilo (**Figura 2.25**), no obstante también podemos analizar con mayor profundidad la amplitud del arco de los mismos y la intersección de estos con la pared ventral y la dorsal.



Figura 2.25. Los septos en el modelo uniforme (primer a tercer verticilo)

La ontogenia nautiliana en este primer verticilo se muestra retardora y es evidente la necesidad de un nuevo modelo matemático que:

- Modele el labio dorsal y el ombligo.
- Ajuste el sifúnculo en su fase inicial y en la primera etapa vital hasta el segundo verticilo.
- De respuesta a la amplitud de los septos en el primer verticilo y a su confluencia con las paredes en todo el fragmocono.

Por ello, adentrémonos en la **ontogenia matemática del Nautilus**.

## 2.3 Observando la ontogenia biológica del Nautilus con gafas matemáticas

La esencia del Nautilus es ostensiblemente cordobesa, pero al analizar su ontogenia biológica hemos detectado un comportamiento diferente en cada uno de los tres verticilos que pueden contabilizarse en la concha de todo animal adulto. Esta diferencia es especialmente manifiesta y significativa en el primero de ellos. Así pues, tendremos que ponernos nuestras gafas matemáticas para tratar de localizar la causa y así, poder mejorar el modelo matemático uniforme que previamente habíamos compartido, es decir, hemos de adentrarnos plenamente en la ontogenia matemática del Nautilus. Y para lograr modelarla tendremos que apoyarnos en la ontogenia biológica detectando en ésta los diferentes detalles y particularidades que determinan las características esenciales en cada momento y etapa, y habrá que concretar cada una de ellas para su adecuada traslación al modelo matemático final.

### 2.3.1 Curvatura ventral, primer invariante

La constricción de la cicatriz, coincidente con la intersección de la concha embrionaria con el primer septo, es la que marca el inicio del patrón de crecimiento correspondiente a la sección de la concha ventral. A partir de la imagen correspondiente a la fase del primer septo (**Figura 2.26**) podemos observar claramente la curvatura de la parte ventral y verificar cómo ésta se ajusta a una espiral cordobesa, ajuste que permanece durante toda la vida del animal (**Figura 2.27**). Por tanto, ésta es una característica intrínseca y permanente, un primer invariante, en toda la ontogenia del Nautilus desde el periodo embrionario septal a la madurez:

*La pared ventral de la concha del Nautilus es una espiral cordobesa.*



Figura 2.26. Ajuste de la pared ventral en la fase del primer septo. C<sub>1</sub>: Constricción .

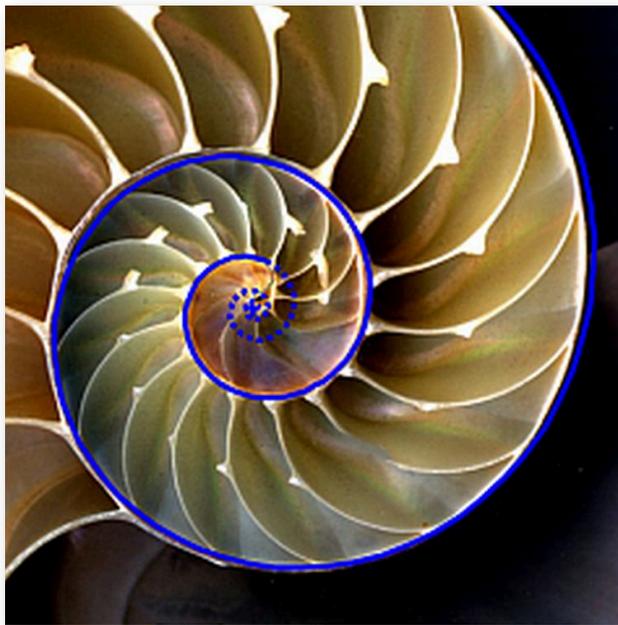


Figura 2.27. El perfil ventral es cordobés en toda la etapa vital (primer invariante) .

## 2.3.2 Intersección de espirales, segundo invariante

En la observación de la concha embrionaria inicial (imagen A de la **Figura 2.28**) ya indicamos que su perfil queda modelado por dos curvas, lo cual da pie y nos recuerda a un invariante citado en el modelo uniforme (**Escena interactiva 1.2**) que se mantendrá en el modelo revisado:

*Todo punto de la concha o interior es la intersección de dos espirales cordobesas, una longitudinal tipo a la del perfil de la concha, pero con un factor de escala, y otra transversal tipo septal.*



Figura 2.28. Concha embrionaria preseptal .

## 2.3.3 Tangencialidad de los septos con la pared ventral de la concha, tercer invariante

En las imágenes de la **Figura 2.7**, la **Figura 2.8** y la **Figura 2.9** puede intuirse que las paredes septales confluyen con la pared ventral de la concha tangencialmente, lo cual a priori parece lógico que acontezca para que el cuerpo del animal pueda asentarse de manera uniforme

en la zona de unión de ambas paredes. Eso se visualiza claramente a nivel microscópico (**Figura 2.29**), donde en la parte apical (parte izquierda en esa imagen) también puede observarse un cemento de unión entre ambas paredes que a nivel macroscópico difumina esta tangencialidad y puede inducir a interpretar inadecuadamente la forma en que ambas capas confluyen. Esta tangencialidad se da en toda la ontogenia del Nautilus, tercer invariante, y necesitamos destacarla y fijarla porque es básica para el modelo matemático buscado.

*Los septos son tangenciales con la pared ventral*

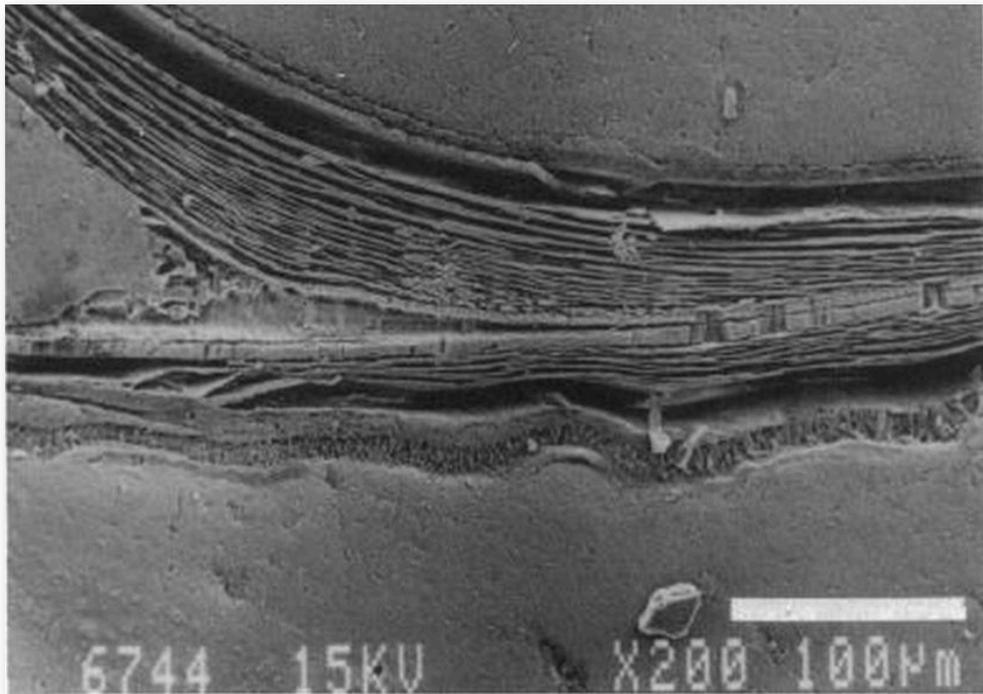


Figura 2.29. Detalle de la unión del segundo septo y la parte ventral de la concha en la fase de dos cámaras. Ampliación de la imagen de la Figura 2.8. Entre ambas paredes en la parte apical se observa un cemento de unión. (Procedente de Landmam *et al.* 1989 [9]).

## 2.3.4 Incidencia de los septos con la pared dorsal de la concha

La modelación de la incidencia de los septos con la pared dorsal requiere un análisis detallado ya que presenta variaciones destacables en cada verticilo y, por tanto, habrá que localizar la causa de las mismas. Así pues, observando la unión de los dos primeros septos con dicha pared dorsal (**Figura 2.30**) podemos constatar que aquí no acontece, no se reproduce, la indicada tangencialidad ventral y se detecta cemento de unión en la parte apical (en esta imagen ubicada a la derecha) y en la adoral (izquierda).

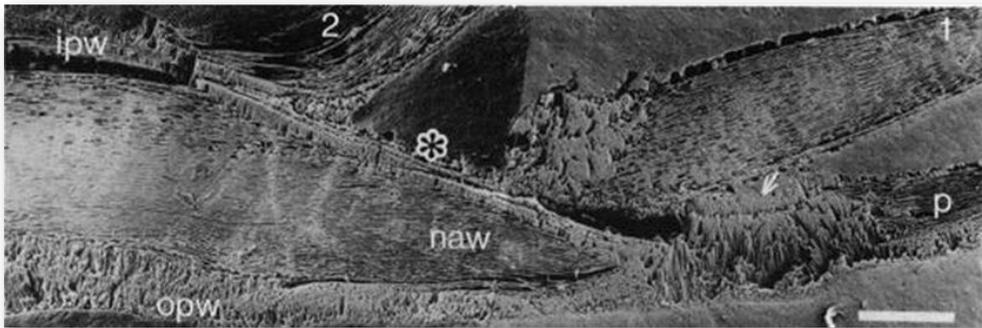
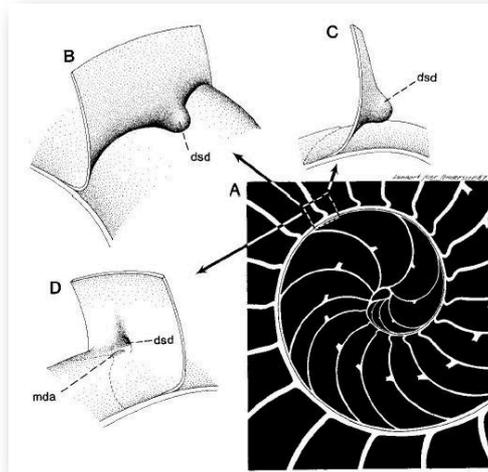


Figura 2.30. Detalle de la unión de los dos primeros septos (1 y 2) y la parte dorsal de la concha en la fase de dos cámaras. Ampliación de la imagen de la Figura 2.8. Entre ambas paredes se observa un cemento de unión. (Procedente de Landmam *et al.* 1989 [9]).

Matemáticamente, si partimos de que la forma del septo sigue una determinada curva prefijada (en el modelo global uniforme indicamos, mostramos y asumimos que es un arco de espiral) y considerando la tangencialidad indicada de éste con la pared ventral, entonces se concluye que la incidencia que acontece con la pared dorsal viene dada, está preestablecida, es forzada y tiene que asentarse según el ángulo que corresponda en cada momento, y quizás ello es lo que constructivamente obliga a que la unión se tenga que reforzar para obtener una consistencia adecuada (de ahí el cemento indicado).

Algebraicamente, detectada la forma de la pared dorsal, la determinación del ángulo y punto de incidencia quedan reducidos a intersecar la ecuación del septo con la de la pared dorsal, y eso es lo que haremos en su momento y en cada una de las fases del crecimiento, las cuales hemos asociado a cada verticilo.

Adicionalmente, dado que la parte dorsal de la concha es diferente en el primer verticilo (lo analizaremos posteriormente en un apartado específico), la amplitud del arco del septo parece ser variable y, si es así, tendrá que acortarse o alargarse hasta encontrar el punto de apoyo necesario para el cierre de cada cámara. Acorde con ello, el ángulo de incidencia observado parece ser diferente en los septos del primer verticilo (observar detenidamente la **Figura 2.31**, imagen A). En esa misma figura se observa que en el segundo verticilo, en el área dorsal media (mda), son ostensibles las depresiones septales dorsales (dsd), ver detalle de su forma en las imágenes B, C y D, y éstas se vuelven menos notables en el tercer verticilo. La ontogenia biológica parece mostrarse esquiva con la matemática o simplemente gusta de marcarnos retos adicionales sobre los que dilucidar.



**Figura 2.31.** Sección de la concha del Nautilus. Diferentes vistas de la depresión septal dorsal (dsd) en el área dorsal media (mda). (Procedente de Mutvei & Doguzhaeva, L. 1997 [\[12\]](#)).

## 2.3.5 Labio dorsal y ombligo

Como indicamos con antelación (ver la **Figura 2.5**) es en la constricción dorsal, que es también el punto de incidencia del primer septo, donde el perfil de la concha en su parte dorsal cambia su concavidad y adopta la misma que la pared ventral, si no fuera así, la cavidad se cerraría. Y al confluir la pared dorsal de este primer verticilo con la concha embrionaria preseptal es como se forma el ombligo.

A priori, no es fácil poder modelar con certeza la forma que adopta este labio dorsal dado que su recorrido es inferior a una vuelta y, consecuentemente, las referencias sobre las que apoyarse puede que no sean suficientes. Lo que sí puede observarse es un posible crecimiento en espiral, es esperable que sea así ¿verdad?, y además que ésta sea una espiral geométrica para que el crecimiento sea gnomónico; por tanto, planteamos y establecemos esta hipótesis.

Adicionalmente, por uniformidad, consideraremos que el tipo de crecimiento sea también cordobés ya que la pared dorsal en el segundo y tercer verticilo tiene esa forma (las paredes dorsales en estos verticilos eran previamente, en la vuelta anterior, sendas paredes ventrales ) y es lógico que ésta se mantenga en el primero o mejor dicho que ésta sea la tendencia original que continúa posteriormente. Es esperable y lógico que la curvatura del dorso del animal se mantenga en toda su existencia. Bajo esa consideración, lo que sí es obvio (observar la **Figura 2.26**) que:

- La espiral que modela la pared ventral, no modela al labio dorsal. Observad como la parte correspondiente a esta espiral que se ha dibujado en la imagen mediante puntos no se ajusta a dicho labio.

- El polo de la espiral del labio no puede coincidir con el polo de la espiral de la pared ventral ya que el primero ha de ubicarse en el interior del ombligo y el segundo según lo ya modelado se sitúa sobre su borde (ver la **Figura 2.32**). Estamos hablando de una distancia entre esos dos polos que estará en el entorno de un milímetro y que puede parecer una diferencia no significativa, sin embargo, como veremos, **ésta es realmente la clave diferenciadora y la causa de las variaciones que se observan en el crecimiento durante el primer verticilo respecto al de los restantes**. Sí, ¡así es de simple! A nivel global, a la escala de la concha de un ejemplar maduro, no hay una diferencia visual entre ambas (ver en la esquina superior derecha en la **Figura 2.32** que la espiral ventral, en color azul, y la dorsal en rojo se "solapan"), pero a nivel local se contempla un comportamiento muy diferenciado (ver la parte central en esa **Figura 2.32**), ¡esas son las maravillas de la espiral logarítmica o geométrica o "*Spira mirabilis*" como la bautizó Jacob Bernoulli.

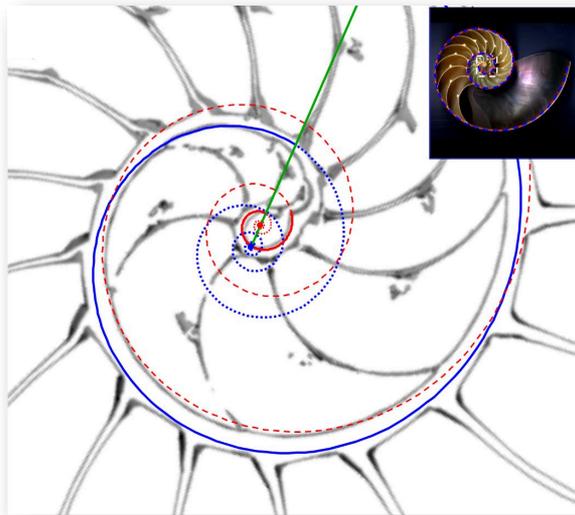


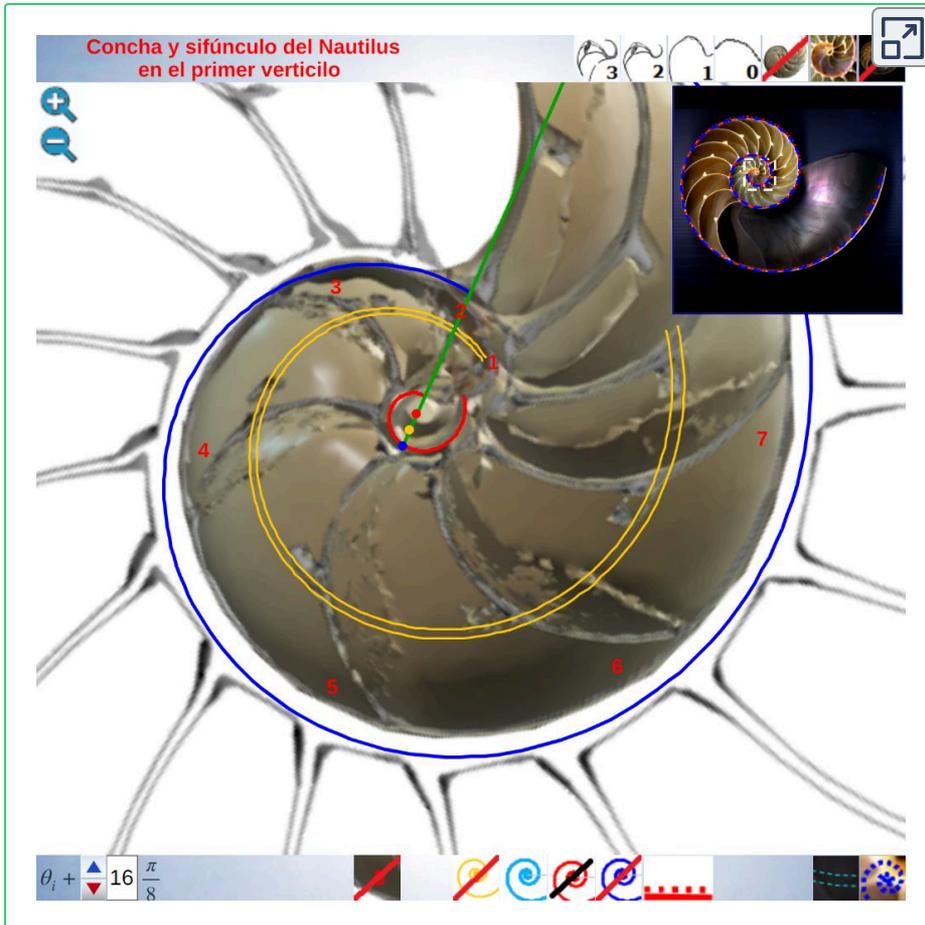
Figura 2.32. Modelización de la concha en el primer verticilo. Espirales cordobesas con diferente polo. En rojo el labio dorsal y en azul la pared ventral. Diferenciado a nivel microscópico (imagen central) y "coincidente" a nivel macroscópico (esquina superior derecha).

¡Vaya! Ya lo había adelantado literariamente antes, pero ahora ¡se me hizo irresistible mostrarles gráficamente, en esta **Figura 2.32**, la causa o germen que permitirá comprender mejor al Nautilus! Bien sabe quien se dedica a investigar que no puede ocultarse la satisfacción cuando en el interior de nuestra mente surge la inspiración ¡Ajá! que sublimó [Martin Gardner](#) y la que llevó a Arquímedes a correr desnudo, inconscientemente, a la par que gritaba ¡[Eureka!](#) a sus paisanos de Siracusa. Y salvando las distancias y comparaciones, estaba deseoso de que lo vieran. Pero esa inspiración inicial, que esporádicamente regalan las musas generalmente sólo a quien está trabajando, no es más que la piedra angular que asienta y modula la futura estructura global, pero habrá que seguir construyendo sobre ella en base a nuevas inspiraciones y deducciones lógicas. Así pues, hemos de asentar esa piedra base y aplicar todos los detalles detectados, analizados y descritos en la particular revisión que hemos realizado de la ontogenia biológica del Nautilus, para así llegar con paso firme a nuestro objetivo que es poder comunicarles lo que *sotto voce* nos cuenta el Nautilus acerca de su ser y crecer, y poder hacerle de traductor al lenguaje que muchos catalogan como el criptográfico o secreto de la Naturaleza: el matemático.

Ahora sí, llegó el momento esperado, o al menos anunciado, de formular detalladamente la "Ontogenia matemática del Nautilus". Gracias por ser pacientes, considero que se verán gratificados por haber llegado aquí y por continuar conmigo.

## 2.4 La base matemática del primer verticilo

Para realizar el análisis matemático en este primer verticilo utilizaremos el siguiente recurso interactivo (**Escena interactiva 2.2**). Puede interactuar libremente con él y si posiciona el ratón sobre los botones tendrá una breve información sobre su efecto o acción. También puede consultar [las instrucciones](#).



Escena interactiva 2.2. Concha y sífúnculo del Nautilus en el primer verticilo. [Indicaciones.](#)

## 2.4.1 Modelando el labio dorsal

Para mostrar la modelización del labio dorsal y el primer verticilo hemos elegido la concha digitalizada por el Museo de D'Arcy Thompson en la Universidad de Dundee (**Figura 2.33**) y, en particular, los datos tridimensionales aportados por dicho museo correspondientes a esa digitalización y los cortes parasagitales y transversales o radiales realizados por González-Restrepo (2019) [\[6\]](#) (**Figura 1.14** y **Figura 1.15**). Realizamos esta elección porque en esta

fuente gráfica el corte con los septos del primer verticilo y con los restos del canal sifuncular es más visible que los que pueden observarse en la concha que hemos utilizado, hasta ahora, como soporte de referencia (**Figura 2.34**) para mostrar el modelo uniforme y las propiedades observadas. Aquí se puede ver que los septos del primer verticilo están incompletos y consecuentemente tampoco se visualiza el rastro del canal del sífúnculo, por tanto, no es posible modelar lo que no es visible. Esta es la razón de cambiar la referencia gráfica que utilizamos como muestra.



Figura 2.33. Primer verticilo de la concha de D'Arcy Thompson .



Figura 2.34. Primer verticilo en la concha de referencia hasta el momento .

Partamos de que la espiral logarítmica cordobesa que modela la pared ventral (representada en color azul en la **Escena interactiva 2.2** y en sucesivas imágenes) viene dada en coordenadas polares por:

$$r = \kappa^\theta \quad \theta \in [\theta_i, \theta_f] \quad (2.1)$$

o en coordenadas cartesianas en función del parámetro  $\theta$ :

$$\begin{cases} x = \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_f] \quad (2.2)$$

es decir, que ubicamos **su polo en el origen de coordenadas**. Adicionalmente denotaremos el ángulo inicial de la espiral como  $\theta_i$ , y como  $\theta_f$  el ángulo final correspondiente a la boca de la concha.

Fijada la pared ventral y polo de la misma y con la orientación dada a la imagen de la concha tomada como referencia, tenemos que entonces el polo de la espiral cordobesa que aproxima al labio dorsal se situaría en  $D(0,035, 0,080)$  y su ecuación paramétrica sería:

$$\begin{cases} x = D_x + a \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = D_y + a \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + \frac{7\pi}{4}] \quad (2.3)$$

Donde el coeficiente  $a$  verificaría que  $0,10 \leq a \leq 0,13$ .<sup>15</sup>

De los valores posibles el que teóricamente podría ser más certero se correspondería con:

$$a = \kappa^{-4\pi} = 0,1177... \quad (2.4)$$

que matemáticamente representaría que el labio dorsal tiene un retraso de dos vueltas (un ángulo de retardo de  $4\pi$ ) respecto a la pared ventral inicial. Sería de esperar que el retraso fuera de  $2\pi$ , dado que ésta es la relación que acontece en los siguientes verticilos cuando la que antes era pared ventral pasa a ser la nueva pared dorsal en la siguiente vuelta (de ahí lo de  $2\pi$ ), pero lo esperado no es siempre lo encontrado.

---

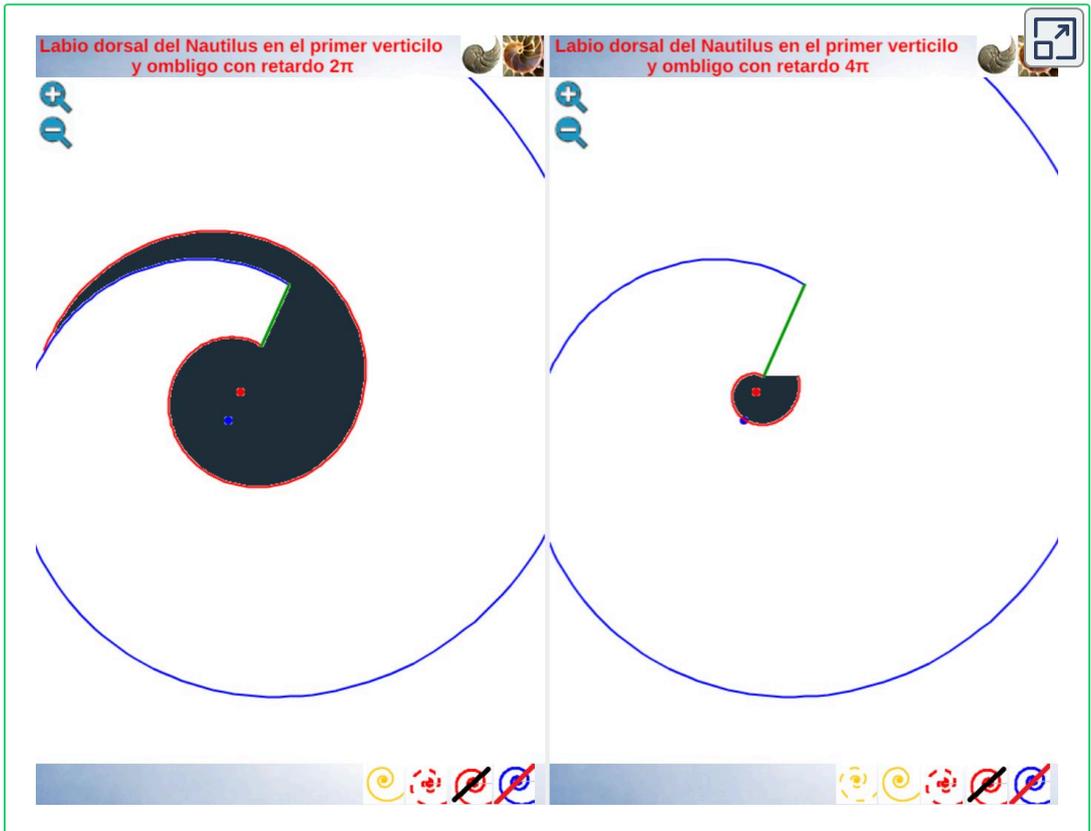
<sup>15</sup> En la **Figura 2.35** se puede observar **la pared ventral** y **el labio dorsal** representados para  $\theta_i \leq \theta \leq \theta_i + \frac{7\pi}{4}$  y también reproducirlo en la **Escena interactiva 2.2**.



Figura 2.35. **Pared ventral con su polo**, **labio dorsal con su polo** y **eje polar** (recta que incluye a esos dos polos) en el primer verticilo .

Geoméricamente, si el labio dorsal en el primer verticilo tuviera sólo el retardo de  $2\pi$  se generaría un ombligo de mayor tamaño al que se observa en la concha del Nautilus. Esto, representaría al animal un esfuerzo constructivo mayor, pues tendría que cubrir una superficie más amplia (en este caso más longitud dado que estamos trabajando con la sección) ya que este labio dorsal bordearía a la concha embrionaria. En la **Escena interactiva 2.3**, espacio izquierdo, puede verse cuál sería la forma del **labio dorsal**, ombligo (superficie en color negro en ese espacio) y **concha ventral** en el supuesto de un retardo de  $2\pi$  y en el espacio derecho el caso de retardo  $4\pi$ . Entre las dos alternativas la correspondiente a  $4\pi$  parece la más eficiente. Podrían plantearse retardos que no tuvieran que ser múltiplos de  $2\pi$ , pero de partida ello no se observa como biológicamente adecuado, pues

estaría considerándose que la parte dorsal del cuerpo del animal tendría un crecimiento descompensado, al menos en algún instante o periodo temporal, respecto a la ventral. Pudiera acontecer, pero el deslizamiento que realiza a lo largo del fragmacono al crecer, inspira más una situación más regular. Si en el periodo evolutivo acontecido en la larga historia de este animal han ocurrido retardos de otro tipo, al menos parece que la selección natural ha conducido al retardo de  $4\pi$  que hemos detectado y que consideramos en nuestro modelo del primer verticilo.



Escena interactiva 2.3. Modelando el **labio dorsal** del Nautilus en el primer verticilo. Espacio izquierdo retardo de  $2\pi$ , espacio derecho retardo de  $4\pi$ . [Indicaciones](#).

Ambas espirales comparten el mismo **eje polar** inicial (en ese color **verde** está pintado en la escena), es decir, el eje inicial de cada una de ellas está incluido en la semirrecta que pasa por el **polo ventral** y por el **polo dorsal**. Adicionalmente, esta semirrecta interseca a la concha en la constricción dorsal y la ventral que son los puntos de intersección y tangencia, respectivamente, del primer septo con la **pared dorsal** y la **ventral** de dicha concha. Esto cuadra con la ontogenia biológica descrita antes y matemáticamente aporta también una pauta común de crecimiento al compartir ambas espirales el mismo parámetro angular. El ángulo inicial común para ambas espirales indicamos que lo denotaríamos como  $\theta_i$  y entonces el recorrido total de la espiral dorsal termina en  $\theta_i + \frac{7\pi}{4}$ .

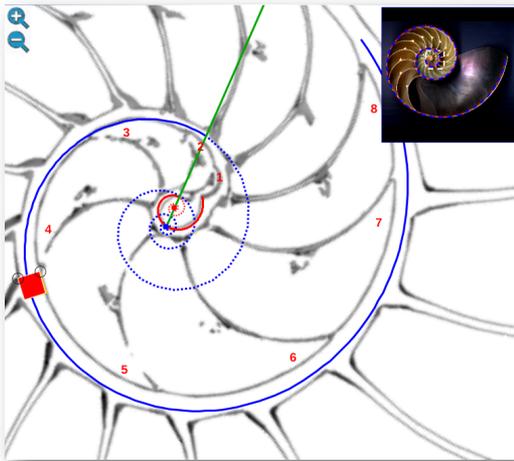


Figura 2.36. Ajuste del **labio dorsal** y de la **pared ventral** en el primer verticilo. La sección gráfica de referencia se debe a González-Restrepo (2019) . En rojo la regla de medida que marca 1 mm .

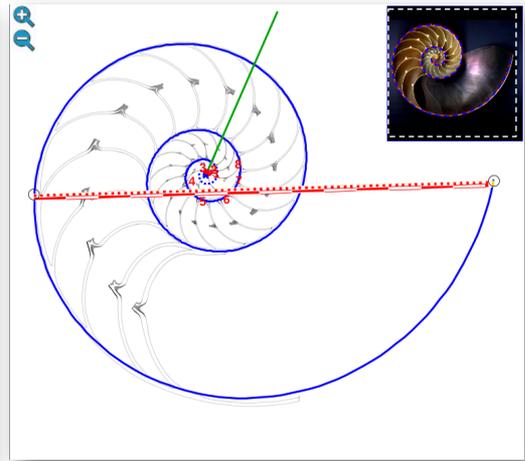


Figura 2.37. Ajuste global de la **concha** del Museo de D'Arcy Thompson, en base al corte realizado por González-Restrepo (2019) . La regla de medida marca 143 mm .

La pequeña variación existente entre los polos de ambas espirales (aproximadamente un milímetro) conduce a que el labio dorsal no finalice su recorrido siendo tangente a la concha embrionaria preseptal, sino que este labio incide e interseca a dicha concha primigenia cuando se cierra el primer verticilo y se genera el ombligo.

Consecuentemente, el enlace con la parte ventral inicial no es suave, sino que se produce a través del séptimo y octavo septo. Son estos últimos septos del primer verticilo los que al apoyarse en la concha primigenia se adaptan para dar continuidad con la pared ventral inicial. Más tarde abordaremos un estudio específico de la transición del primer al segundo verticilo. El hecho de que no se produzca la tangencialidad entre la pared ventral inicial y la finalización del labio dorsal refuerza y muestra la necesidad de considerar la existencia de dos polos diferenciados en el modelo teórico y, también, que no se pueda atribuir esta diferencia a un error en la precisión del ajuste gráfico realizado<sup>16</sup>. Ver detalle del modelo a nivel local en la **Figura 2.36** y a nivel global en la **Figura 2.37**.

## 2.4.2 El canal sifuncular en el primer verticilo

En nuestro primigenio modelo uniforme detectamos que el canal sifuncular actuaba como el eje del fragmocono, es decir, que es equidistante de la pared ventral y dorsal. En este supuesto uniforme

---

<sup>16</sup> De nuevo, hemos de recordar que el paso de la quecto-quetta realidad al modelo teórico requiere de la consideración de cierta tolerancia, pero que hay que saber distinguirla de la existencia de una diferencia que provoque cambios en el modelo. Si la toma en consideración de esa tolerancia no cambia el modelo podremos aceptarla y admitirla, pero habrá que evitarla cuando se provoque un cambio en él. Así pues, en este caso es obligado considerar que los polos son diferentes. Por el contrario, por ejemplo, en las espirales que hemos considerado para ajustar el perfil del labio dorsal y de la pared ventral, en especial ésta, podría aducirse que necesitarían una mejora en su ajuste a la imagen de la concha en ese primer verticilo, pero realmente no es necesario ya que tal y como se ha considerado es suficientemente adecuado para determinar el modelo global que caracteriza al genus *Nautilus*. Esto ya lo mostramos en la **Figura 2.32**, y lo detallamos ahora, pues al observar el ajuste de la pared ventral (espiral azul) en el primer verticilo y su ajuste global en la toda la concha, se marca de manera evidente que la tolerancia considerada es admisible para determinar el modelo a nivel tanto local como global (el grosor de la pared es inferior a un mm, lo puede medir en la escena, y el ejemplar considerado tiene unos 143 mm en su etapa adulta (**Figura 2.36** y **Figura 2.37**)). Sin embargo, si modificásemos la posición del polo de la pared dorsal, es decir, ignorásemos la pequeña distancia que existe entre ambos polos obtendríamos variaciones no admisibles a nivel local, es decir, cambiaría el modelo y no se ajustaría a la ontogenia del *Nautilus*.

ambas paredes describen sendas espirales cordobesas con igual polo, de manera que si la ecuación en coordenadas polares de la primera es  $r = \kappa^\theta$ , la de la segunda sería  $r = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta = 0,3431... \kappa^\theta$  (realmente es la misma espiral, pero la segunda con un ángulo de retardo de  $2\pi$  o coeficiente 0,3431...) y, entonces, el sífúnculo tiene de ecuación:

$$r = b \kappa^\theta \quad (2.5)$$

donde  $b$  toma el valor medio de los respectivos coeficientes  $1$  y  $\kappa^{-2\pi}$  de las espirales anteriores, es decir,

$$b = \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} = \frac{0,3431... + 1}{2} = 0,6715... \quad (2.6)$$

lo que se corresponde con una espiral cordobesa con un ángulo de retardo de  $\frac{-3\pi}{4}$ . Pero, ya comprobamos que el ajuste anterior es adecuado en el segundo y tercer verticilo, pero no así para el primero (**Figura 2.22**). No obstante, ahora sí, estamos en condiciones de determinar cómo queda modelado el sífúnculo en esta primera vuelta.

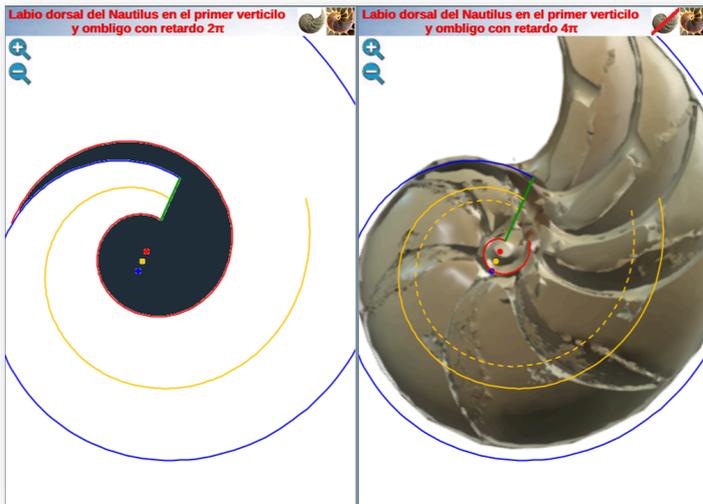
El fragmocono en el primer verticilo está delimitado por dos espirales cordobesas cuyas ecuaciones son (2.2) y (2.3), ambas con un ángulo polar común, pero con distinto polo. Si consideramos que el sífúnculo en este verticilo tiene un comportamiento similar a los dos posteriores, entonces éste sería el eje de ese fragmocono y, para determinarlo, procedamos a determinar el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas y obtendremos que viene determinado por la ecuación:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{2} + \frac{\kappa^{-4\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \frac{D_y}{2} + \frac{\kappa^{-4\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \sen(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_f] \quad (2.7)$$

que se corresponde con una espiral cordobesa, cuyo polo  $S(0, 0175, 0, 0400)$  es el punto medio de segmento determinado por el polo de la pared dorsal  $D(D_x, D_y)$  y el de la ventral  $(0, 0)$ , y su coeficiente es la media aritmética de los coeficientes respectivos:<sup>17</sup>

$$\frac{\kappa^{-4\pi} + 1}{2} = \frac{0,1177... + 1}{2} = 0,5588... \quad (2.8)$$

Al representar gráficamente la espiral (2.7) con el coeficiente (2.8) observamos que realmente no modela adecuadamente a dicho sífunculo en ese verticilo (ver en la imagen derecha de la **Figura 2.38** la línea discontinua en color **naranja** o interactuar en la **Escena interactiva 2.3**).



**Figura 2.38.** En la imagen de la izquierda y de la derecha la espiral continua de color **naranja** es el eje del fragmocono en el primer verticilo cuando el labio dorsal tiene un retardo de  $2\pi$ . A la derecha en línea discontinua el eje del fragmocono en el primer verticilo cuando el labio dorsal tiene un retardo de  $4\pi$ . La primera es la que se ajusta al canal sífuncular .

<sup>17</sup> En general puede comprobarse que dadas dos espirales logarítmicas con igual base, con el mismo ángulo polar y con diferentes polos; si se halla el lugar geométrico de los puntos de plano obtenidos mediante una combinación lineal de las mismas se obtiene que es una espiral logarítmica del mismo tipo, es decir, de igual base y ángulo polar, y con polo la combinación lineal de los polos y coeficiente la combinación de los coeficientes.

La ecuación de la espiral que se ajusta al sifúnculo es la siguiente:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{2} + \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \frac{D_y}{2} + \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_f] \quad (2.9)$$

donde

$$\frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} = \frac{0,3431\dots + 1}{2} = 0,6715\dots \quad (2.10)$$

y se corresponde con el eje del fragmocono, pero en el caso de que el labio dorsal tuviera sólo un retardo de  $2\pi$  (ver imagen izquierda en la **Figura 2.38** o interactuar en la **Escena interactiva 2.3**). Ese coeficiente o retardo en el sifúnculo es el mismo que acontece en el segundo y tercer verticilo, pero aquí el polo es diferente. En la **Figura 2.39** podemos ver una comparativa de la espiral sifuncular determinada aquí (en color **naranja**) y la del sifúnculo en el modelo uniforme en (**turquesa**).

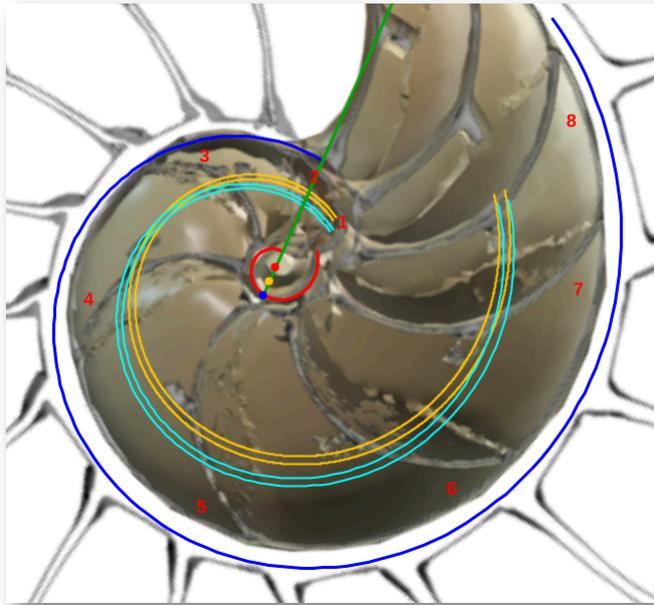


Figura 2.39. Comparativa de la espiral sifuncular del primer verticilo (**naranja**) y la del sifúnculo en el modelo uniforme (**turquesa**).

Así pues, la causa de que el sifúnculo tenga un comportamiento diferenciado en el primer verticilo se centra en el hecho de que el labio dorsal y la pared ventral tienen diferente polo. La explicación de cuál es la causa de su desviación respecto al eje del fragmocono queda abierta...

Pienso que hemos dado un gran paso en la comprensión y explicación de la ontogenia matemática del Nautilus. En ella, sigue imperando su carácter netamente cordobés, introduciendo bonitos matices matemáticos que explican los matices biológicos observados. Pero D. Antonio Machado nos indicó [que se hace camino al andar](#) y para ello, después del primer paso dado, han de llegar otros y en nuestro estudio, ahora, tendremos que centrarnos especialmente con las paredes septales y, ¿por qué no?, quizás tratar de localizar cuál es el germen de la esencia cordobesa de este entrañable, al menos para mí, animalito.

## 2.5 Revisando los septos en el primer verticilo

Continuemos nuestra andadura procediendo a revisar y a analizar los septos y las cámaras septales en la primera etapa de la ontogenia del Nautilus y busquemos caracterizar las particularidades que, de manera evidente, se muestran en el primer verticilo. Ya indicamos con una simple, pero atenta mirada, que en esa primera vuelta se observa que hay un número menor de cámaras que las que se contabilizan en la segunda y tercera, que se visualiza una amplitud angular de las mismas que se muestra como no uniforme, que se intuye un tamaño o capacidad volumétrica diversa con unas cámaras pequeñas y otras grandes con un crecimiento quizás no gnomónico e incluso en algunos casos decreciendo. Muchos detalles en los que aquí profundizaremos y sobre los que desvelamos y aportamos explicaciones y posibles causas que lo ocasionan, siempre desde una perspectiva y visión matemática, pero con soporte y con referencias biológicas.

Para el análisis de los septos en el primer verticilo nuestra referencia inicial ha de situarse en el modelo uniforme (Galo, 2024) [2] que hemos sintetizado en el primer capítulo, en la [pág. 35](#) y siguientes, donde las cámaras septales se distribuyen siguiendo una amplitud angular central de  $\frac{\pi}{8}$ , lo que conduce en cada vuelta a un número de dieciséis tabiques que son arcos de espirales cordobesas cuyos polos están en otra espiral cordobesa.

Los  $n$  septos<sup>18</sup>,  $0 \leq n \leq 40$ , tienen una ecuación común donde varía el polo  $P_n(P_{n_x}, P_{n_y})$  y el ángulo  $\alpha_n$ , pero todos con una amplitud constante  $\frac{5\pi}{8}$ :

$$\begin{cases} x = P_{n_x} + d \kappa^\varphi \cos(\varphi) \\ y = P_{n_y} + d \kappa^\varphi \operatorname{sen}(\varphi) \end{cases} \quad \varphi \in \left[ \alpha_n, \alpha_n + \frac{5\pi}{8} \right] \quad (2.11)$$

en ellos<sup>19</sup>  $d \simeq 0,5$  y el polo  $P_n$  de cada espiral está en la espiral cordobesa

$$r = d \kappa^\theta \quad (2.12)$$

siendo

$$\begin{cases} P_{n_x} = d \kappa^{\theta_n} \cos(\theta_n) \\ P_{n_y} = d \kappa^{\theta_n} \operatorname{sen}(\theta_n) \end{cases} \quad (2.13)$$

donde

$$\theta_n = \theta_i + n \frac{\pi}{8} \quad (2.14)$$

---

<sup>18</sup> En el modelo uniforme tenemos 16 septos en el primer verticilo, 16 en el segundo y 8 en el tercero, en todos ellos con una amplitud constante de  $\frac{\pi}{8}$ .

<sup>19</sup> El valor de  $d$  se aproxima al valor intermedio entre el coeficiente de la espiral dorsal  $\kappa^{-2\pi}$  y el del sífinculo  $\frac{\kappa^{-2\pi+1}}{2}$ , es decir  $\frac{\kappa^{-2\pi} + \kappa^{-2\pi+1}}{2} = 0,507359\dots$  y, por tanto, la espiral de los polos de los septos sería la intermedia entre la dorsal y el sífinculo.

para un ángulo inicial  $\theta_i$ , que marca el comienzo de la construcción, y

$$\alpha_n = \theta_n - \frac{51\pi}{64} \quad (2.15)$$

Lo antes descrito ha de ser la base primordial sobre la que tenemos que apoyarnos para tratar de canalizar ese análisis y para poder focalizar adecuadamente la búsqueda y para lograr recopilar cuáles son los datos más certeros que nos conduzcan a la comprensión del comportamiento y también a su modelación. O al menos a esta última, pues aun teniendo el modelo no siempre es factible saber la causa o posicionarse tajantemente en ella.

### 2.5.1 Sobre el menor número de cámaras septales en el primer verticilo

Si observamos las cámaras septales del primer verticilo es evidente, basta recordar el recuento que ya hicimos en la **Figura 1.13**, que el número de éstas son ocho y ello se correspondería con una amplitud angular media de  $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ . No obstante, a primera vista o aparentemente, parece más que esa amplitud se manifiesta como variable y que no es obvio fijarla a priori. Esa cantidad de cámaras es inferior a las existentes en el segundo verticilo en el que son dieciséis con una amplitud constante de  $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$  y también a las del tercero donde hay un número variable, según el ejemplar y nivel de madurez, pero manteniendo también esa amplitud de  $\frac{\pi}{8}$ .

¿Por qué el número de cámaras es menor en el primer verticilo? Ilustrémonos en el devenir de esta etapa inicial del Nautilus acudiendo a algunas referencias descriptivas biológicas y acompañémoslas de unas primeras reflexiones matemáticas personales:

- Landman et al. (1989, pp. 12-13) [9] indican que, en la parte correspondiente al labio dorsal, el tercer septo se apoya parcialmente en el segundo e igualmente el segundo en el primero. Por tanto, se induce que el labio dorsal no tiene la suficiente longitud para poder aportar un espacio disjunto para cada septo. Y si eso acontece con la amplitud media interseptal de  $\frac{\pi}{4}$ , antes indicada, podemos imaginar el colapso o imposibilidad constructiva a la que se vería abocado el Nautilus si la amplitud fuera aún menor, en concreto la mitad:  $\frac{\pi}{8}$ . Esto lo podemos evidenciar sin más que calcular la longitud del labio dorsal aplicando que la longitud  $l$  de un arco de la espiral de ecuación  $r = a b^\theta$  para  $\theta \in [\alpha, \beta]$  viene dada por<sup>20</sup>:

$$l = \frac{\sqrt{1 + \ln^2 b}}{\ln b} a (b^\beta - b^\alpha) \quad (2.16)$$

y, por tanto, aplicándolo a la ecuación del labio dorsal (2.3)-(2.4) y considerando la escala real de las imágenes de la concha del Nautilus que estamos usando en las escenas interactivas, se obtiene que  $l \simeq 4,54$  mm. Esto conduce a que en el labio dorsal, para las ocho cámaras que se visualizan en el primer verticilo, hay un espacio medio<sup>21</sup> para cada cámara de unos 0,57 mm lo cual de por sí ya es bastante ajustado, pues en la **Figura 2.8** y en la **Figura 2.9** procedentes de Ladman et al. y usando la regla de la **Escena interactiva 2.2** puede observarse que el apoyo dorsal de cada uno de los tres primeros septos ocupa ese espacio e incluso algo más y de ahí que tengan que superponerse, y que

---

<sup>20</sup> Puede consultarse las páginas 150-151 en Galo, 2024 [2]

<sup>21</sup> Al ser un crecimiento gnomónico, la longitud del apoyo dorsal necesaria para cada cámara va incrementándose, pero aquí lo que buscamos es poner de manifiesto el escaso espacio existente y, consecuentemente, este razonamiento basado en el cálculo del espacio medio disponible es suficiente para alcanzar este objetivo.

en el resto de las cámaras septales de ese verticilo la distancia entre septos es sólo algo superior. En el supuesto de considerar dieciséis cámaras estaríamos hablando de un espacio medio de 0,285 mm... al Nautilus no le salen las cuentas, ni le trae cuenta<sup>22</sup> elaborar tanto septo, más si consideramos adicionalmente lo que detallamos a continuación.

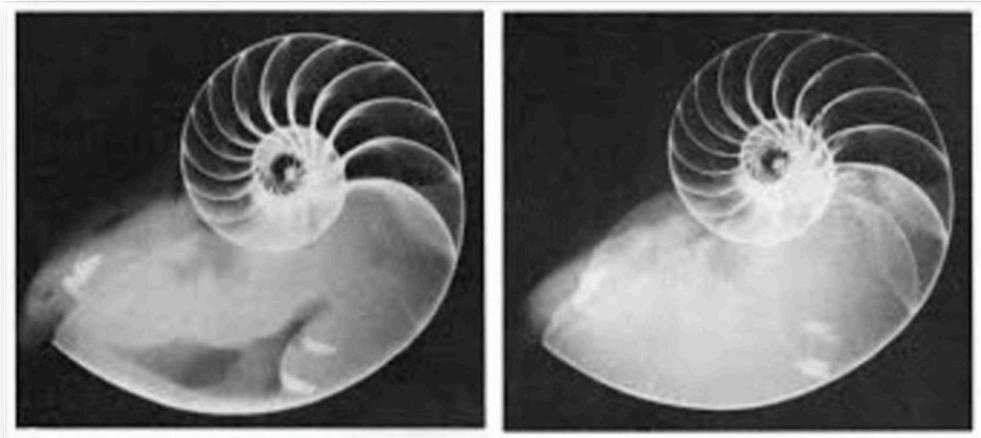
- Greenwald y Ward (2010) [7] indican que un Nautilus, que pesa en el aire un kg, en el interior del agua en la que habita pesa solo unos pocos gramos, es decir, ponen de manifiesto una de sus características vitales esenciales: su flotabilidad casi neutra. Adicionalmente, detallan como esta flotabilidad se alcanza mediante el vaciado del líquido de las cámaras y cómo éste ha de ir compensándose adecuadamente con el aumento de peso que aporta cada nueva pared septal y también con el correspondiente a la ampliación de la concha ventral que da forma a la cámara habitacional y que es la que pasa a ocupar el animal. El propio animal suma su incremento de peso al crecer (ver la **Figura 2.40**). Y, de nuevo, Landman et al. (1989, p. 15) [9] indican que en la fase de construcción de los primeros septos la proporción entre el volumen de las cámaras septales y el del fragmocono es pequeña y por tanto en esa etapa inicial el animal no alcanza la flotabilidad.

Consecuentemente, en una somera visión, parece fácil concluir que principalmente en la etapa inicial y también en general, ha de ser un empeño básico el lograr economizar en la cantidad de

---

<sup>22</sup> Desde el punto de vista causal podríamos apuntar que el hecho de que el espacio disponible sea pequeño es precisamente lo que conduce a ese menor número de cámaras septales. El Nautilus, para construir un nuevo septo ha de desplazarse hacia adelante en su cámara habitacional, necesita un espacio interseptal mínimo, y ese espacio es el que adquiere para cumplir su objetivo natural de crecer y, si es posible, hacerlo gnomónicamente para mantener sus proporciones, su forma. Su preocupación o necesidad es la de avanzar para crecer, ocupando un nuevo espacio, y deja la contabilidad para otros o más precisamente para nosotros.

material calcáreo a utilizar —dato que de nuevo incide y aporta cierto porqué relativo al menor número de septos— y que lo que se use ha de ser compensado por el empuje ocasionado por el volumen de líquido septal que se desaloje, es decir, ha de estar equilibrado con el volumen que alcancen las cavidades septales. Así pues, dado que el Nautilus inicialmente no flota y después sí, se deduce que debe haber una variabilidad volumétrica en las primeras cámaras y que este posible hecho puede ir también relacionado con la amplitud angular interseptos que parece ser variable, según indicamos con antelación.



**Figura 2.40. Formación de una cámara y vaciado del líquido de las cámaras que acontece en la cámara anterior.**

Fuente: Buoyancy in Nautilus, Greenwald L., Ward P.D. (2010) [7].

Es necesario y procede analizar esta capacidad de las cámaras, pero en este estudio bidimensional acudiremos sólo al cálculo de la superficie ocupada por las secciones de las cámaras y analizaremos su variación. No obstante, avancemos sin precipitación, que progresivamente van apareciendo diversas facetas y es necesario asentar estas ideas con un material de apoyo adecuado y procede darle el necesario sustento matemático.

## 2.5.2 Sobre la amplitud angular de las cámaras septales en el primer verticilo y en los dos restantes

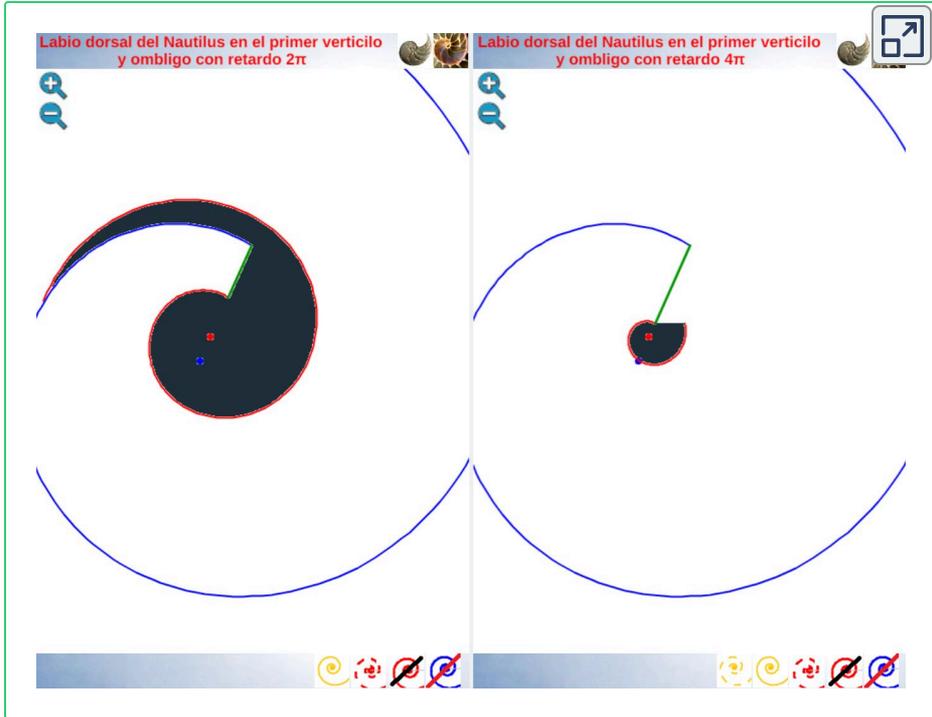
Ya hemos indicado, e incluso reiterado, que las dieciséis cámaras del segundo verticilo conducen a una amplitud angular entre cámaras de  $\frac{\pi}{8}$ , la cual se mantiene para los septos de tercer verticilo, y que las ocho del primero llevan a una amplitud de  $\frac{\pi}{4}$ . Si consideramos el retardo de la espiral dorsal respecto a la ventral en el segundo y tercer verticilo que es de  $2\pi$ , al efectuar el cociente  $\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$  obtenemos el valor numérico antes indicado, pero si aplicamos igual proporción en el primer verticilo ¿qué ocurre? El retardo entre el labio dorsal y la pared ventral en este caso es de  $4\pi$  y resulta que  $\frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$ , es decir, un paso entre septos de  $\frac{\pi}{4}$ , paso que casualmente conduciría a los ocho septos observados en ese verticilo<sup>23</sup>.

Sí, parece como si estuviéramos enfrascados en el reiterado y recurrente dilema de ¿qué fue antes: el huevo o la gallina?, pero más bien sería una estrategia de observación múltiple, desde puntos de vista opuestos o diferentes, buscando la generación de algún destello que, al menos, difumine un poquito las sombras platónicas en las que toda investigación siempre anda envuelta. Para tratar de provocar la necesaria chispa detonadora vamos a usar la **Escena interactiva 2.4**. En el espacio izquierdo de esta escena contamos con herramientas auxiliares que nos permiten analizar la distribución que pueda acaecer en la amplitud septal. Con ellas hemos obtenido las imágenes mostradas desde la **Figura 2.41** hasta la **Figura 2.46**, que sintetizan el análisis que detallamos a continuación:

- Con el control tipo botón “centro y radios de paso  $\frac{\pi}{4}$ ” (ver **Figura 2.41**), disponemos de un conjunto de radios distribuidos con esa amplitud angular constante y con el ratón es posible moverlos a

---

<sup>23</sup> Al igual que acontecía con el eje del fragmocono, el retardo diferente entre pared dorsal y ventral,  $4\pi$  vs.  $2\pi$ , vuelve a aparecer ahora ligado a las cámaras septales.



Escena interactiva 2.4. Amplitud angular interseptal en el primer verticilo y área de las secciones de las cámaras del Nautilus. [Indicaciones.](#)

voluntad sin más que desplazar el centro o punto de intersección de ellos y, también, se pueden girar con el pulsador situado a la derecha de ese botón. Con esta herramienta podemos tratar de localizar, si existe, el punto de vista desde el que los apoyos de los septos sobre el labio dorsal y ventral se observen con la esperada o deseada distribución uniforme de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Esta búsqueda viene impuesta por el hecho que desde el polo de la espiral ventral no se cumple esa relación (ver **Figura 2.42**) ni para los apoyos dorsales, ni para los ventrales; y si consideramos esos radios con centro el polo del labio dorsal los apoyos dorsales (ver **Figura 2.43**) puede considerarse quedan próximos a esa distribución, pero no ocurre así con los ventrales. Le invitamos a realizar sus pruebas e indagaciones usando dicha escena interactiva.

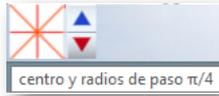


Figura 2.41. Botones para situar y girar un haz de radios secantes de paso  $\frac{\pi}{4}$ .

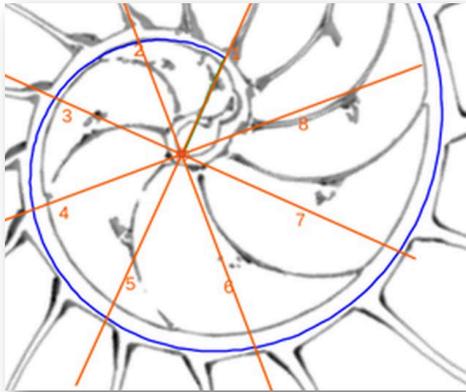


Figura 2.42. Radios de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Aproximación de los apoyos ventrales de los septos.

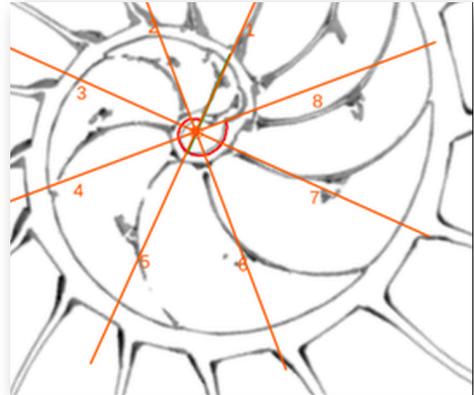


Figura 2.43. Radios de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Aproximación de los apoyos dorsales de los septos.

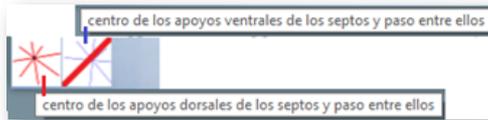


Figura 2.44. Botones para mostrar los haces de radios de paso  $\frac{\pi}{4}$  que aproximan los apoyos dorsales y ventrales de los septos.

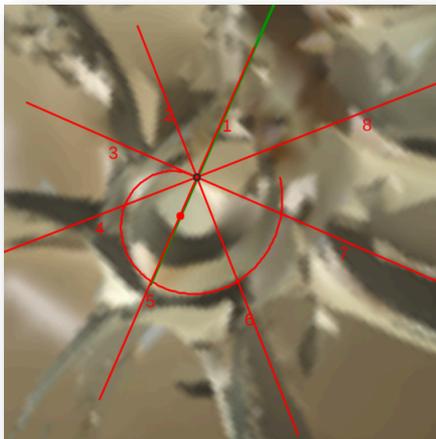


Figura 2.45. Radios de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Aproximación de los apoyos dorsales de los septos con paso  $\frac{\pi}{4}$  ubicación de su centro.

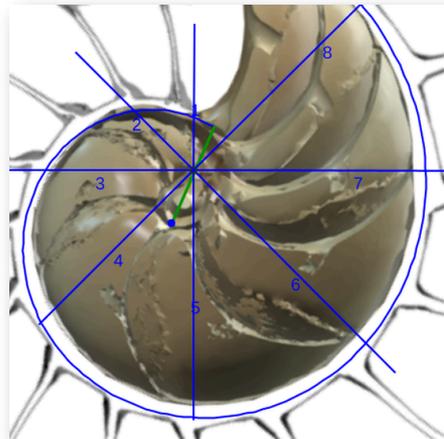


Figura 2.46. Radios de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Aproximación de los apoyos ventrales de los septos con paso  $\frac{\pi}{4}$  ubicación de su centro.

- En las pruebas que he realizado concluyo que hay dos posiciones que modelan adecuadamente esos apoyos septales con distribución uniforme de paso  $\frac{\pi}{4}$ . Ambas las tenemos accesibles respectivamente con el botón etiquetado como “centro de los apoyos dorsales de los septos y pasos entre ellos” y con el botón análogo para “los apoyos ventrales” (ver **Figura 2.44**). Ambos modelos están reflejados en la **Figura 2.45** y en la **Figura 2.46**. En ellas puede verse que:
  - El polo del labio dorsal (punto rojo en la **Figura 2.45**) y el centro considerado para los radios (punto rojo con borde negro en esa figura) no coinciden, si bien ambos están ubicados en el eje polar (recta dibujada en color verde que une el polo dorsal y el ventral) y el radio correspondiente al primer septo está alineado con él —recordemos que el primer septo intersecaba al labio dorsal en la constricción y el eje polar también—. Las coordenadas determinadas para ese centro, que denominaremos a partir de ahora como centro dorsal, son:  $C_d(0, 055, 0, 126)$ .
  - El polo de la pared ventral (punto azul en la **Figura 2.46**) y el centro considerado para los radios (punto azul con borde negro en esa figura) claramente no coinciden, pero también ambos están ubicados en el eje polar. El radio correspondiente al apoyo ventral del primer septo está desviado un ángulo aproximado de  $\frac{\pi}{8}$  respecto a dicho eje polar. Las coordenadas de ese centro, que denominaremos centro ventral, son:  $C_v(0, 009, 0, 21)$ .

Adicionalmente, si mostramos conjuntamente el polo dorsal  $P_d$  y el ventral  $P_v$  junto a los respectivos centros dorsal  $C_d$  y ventral  $C_v$  (ver la **Figura 2.47**), se observa que la mediatriz del segmento  $\overline{P_d C_d}$  coincide con la del segmento  $\overline{P_v C_v}$ , es decir, que hay un punto  $C$  que es centro de simetría de esas dos parejas de puntos.

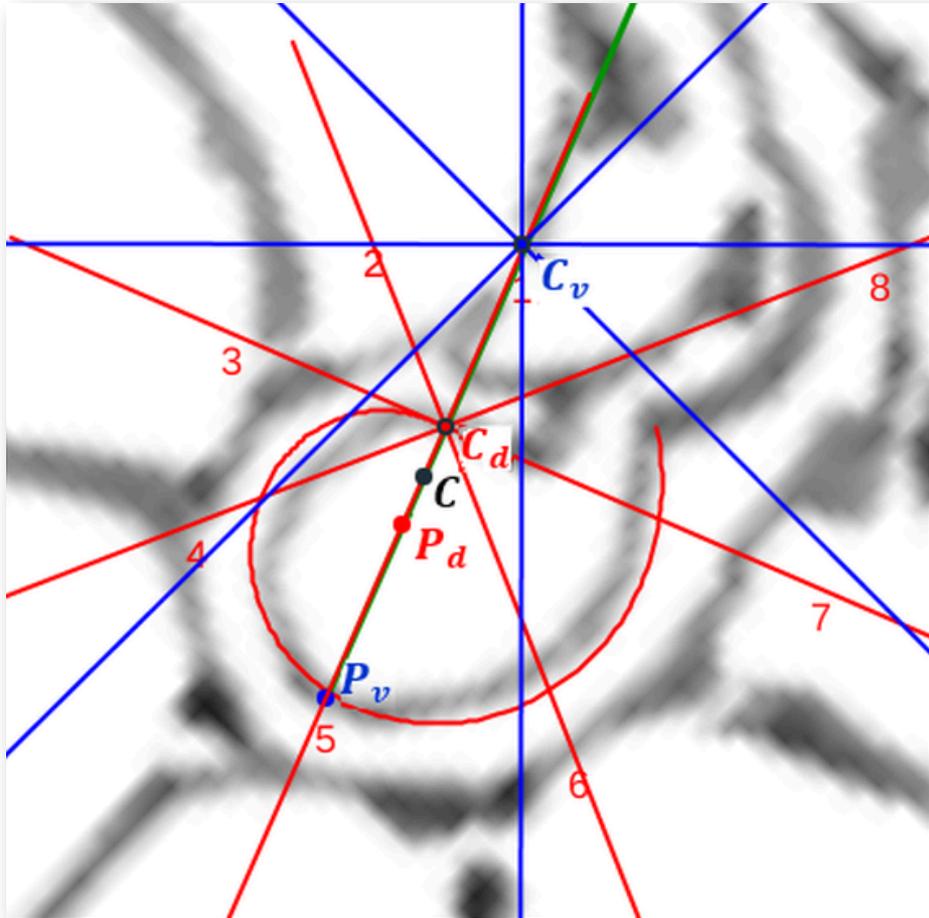


Figura 2.47. Alineación de los polos ventral y dorsal con los centros dorsal y ventral. Ubicación simétrica.

Ahora sí, podemos visualizar por qué las cámaras septales aparentan a primera vista una amplitud no uniforme y también por qué las superficies de las secciones de las cámaras se muestran tan diferentes. De nuevo, ya lo detectamos con el sífúnculo, **la no coincidencia entre el polo dorsal y ventral que ahora se refleja** (reflejo en sentido estricto dada la simetría detectada) **en la existencia de dos centros no coincidentes** da explicación matemática a esa diferente distribución de cámaras septales en este primer verticilo.

## 2.5.3 Sobre la superficie de las secciones de las cámaras septales en el primer verticilo

Para analizar el crecimiento de las cámaras y así tratar de detectar los aspectos alométricos<sup>24</sup> que aquí acontecen, hemos construido una herramienta auxiliar que nos permite calcular el área de cada una de las secciones de esas cámaras (ver el espacio de la derecha en la **Escena interactiva 2.4** y ver la **Figura 2.48** y la **Figura 2.49**). Mediante la concanetación de triángulos se puede ajustar la superficie deseada y se facilita de manera automática su área a la escala real del Nautilus.

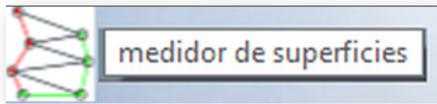


Figura 2.48. Botón de acceso al medidor de superficies.

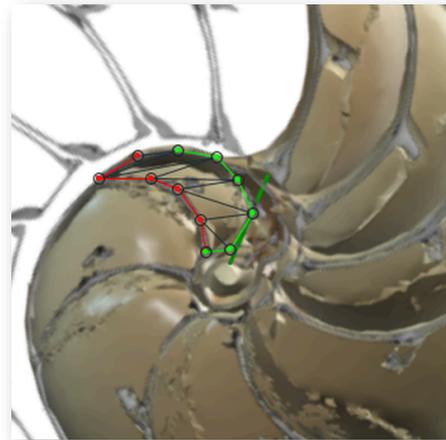


Figura 2.49. Midiendo el área de una sección de una cámara.

En la tabla incluida en la **Figura 2.50** se refleja la medición realizada con dicha escena interactiva. La columna "Cámara" se corresponde con la numeración de las mismas, "Nautilus 1" recoge las áreas de las secciones del Nautilus Dundee y "Nautilus 2" las del otro ejemplar. El primero cuenta con treinta y tres cámaras y el segundo treinta y dos (en los gráficos comparativos no consideraremos la cámara 33). Las

<sup>24</sup> La alometría son los cambios de dimensión relativa de unas partes corporales en relación a los cambios que acontecen en el tamaño total. Y en particular, la alometría en el crecimiento detecta qué partes de un cuerpo o ente tienen un comportamiento diferenciado.

columnas " $\sqrt{pc_1}$ " y " $\sqrt{pc_2}$ " reflejan respectivamente la raíz cuadrada de las proporciones entre las cámaras  $pc = \frac{A_{n+1}}{A_n}$ ,  $1 \leq n \leq 31$  para cada uno de los ejemplares.

Cámara	Nautilus 1	Nautilus 2	$\sqrt{pc_1}$	$\sqrt{pc_2}$
1	1,72	0,75		
2	5,82	3,10	1,839	2,033
3	12,92	6,65	1,490	1,465
4	22,00	13,02	1,305	1,399
5	28,59	18,85	1,140	1,203
6	30,24	31,60	1,028	1,295
7	31,24	32,22	0,867	1,010
8	23,35	24,96	0,945	0,880
9	24,38	24,46	1,096	0,990
10	30,68	31,88	1,122	1,142
11	30,13	35,25	0,991	1,052
12	37,41	39,19	1,114	1,054
13	43,59	51,17	1,079	1,143
14	46,52	53,71	1,033	1,025
15	60,19	56,40	1,137	1,025
16	60,26	63,36	1,001	1,060
17	70,21	67,97	1,079	1,036
18	86,81	81,07	1,112	1,092
19	91,61	94,61	1,027	1,080
20	105,61	110,02	1,074	1,078
21	118,35	112,36	1,059	1,011
22	143,88	138,63	1,103	1,111
23	166,65	145,73	1,076	1,025
24	188,53	174,74	1,064	1,095
25	215,37	211,64	1,069	1,101
26	251,96	228,15	1,082	1,038
27	286,89	276,36	1,067	1,101
28	334,66	317,02	1,080	1,071
29	370,82	368,22	1,053	1,078
30	468,01	432,54	1,123	1,084
31	466,53	508,39	0,998	1,084
32	481,31	578,76	1,016	1,067
33	300,14		0,790	

Figura 2.50. Área de las cámaras. Proporción.

Dado que el crecimiento angular teórico de la pared ventral en el segundo y tercer verticilo es  $\frac{\pi}{8}$ , sin más que aplicar la expresión (2.16) que nos da la longitud de un arco de una espiral, en este caso cordobesa, se verifican la proporciones:

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \kappa^{\frac{\pi}{8}} \quad (2.17)$$

$$\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n - l_{n-1}} = \kappa^{\frac{\pi}{8}} \quad (2.18)$$

donde  $l_n$  es la longitud de la pared ventral hasta la cámara  $n$  y, por tanto,  $l_{n+1} - l_n$  es el incremento ventral que ocurre en la cámara  $n + 1$ . Consecuentemente es de esperar que en esos verticilos la proporción entre las áreas de las cámaras sea:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = (\kappa^{\frac{\pi}{8}})^2 \quad (2.19)$$

Y en el primer verticilo también sería de esperar la obtención de relaciones análogas en base al crecimiento angular de  $\frac{\pi}{4}$ , pero quizás con matices diferenciados pues centros angulares y polos en este verticilo son distintos y ya estamos acostumbrándonos a la diferenciada ontogenia de esta etapa.

En la **Figura 2.51** y la **Figura 2.52** se han representado las áreas de las secciones de las cámaras mediante una poligonal y a su vez se ha determinado la línea de tendencia mediante un ajuste exponencial. En la primera de esas dos gráficas se han considerado todas las cámaras y en la segunda las correspondientes al segundo y tercer verticilo, como hemos señalado el objetivo es detectar posibles variaciones entre la primera etapa de crecimiento y las posteriores. En el primer caso la proporción entre las áreas de cada dos cámaras consecutivas es un poquito superior al valor teórico esperado indicado en (2.19), pues el exponente en ambos casos es algo

superior a dos. Esto está provocado por el crecimiento diferenciado que acontece en el primer verticilo, ya que si consideramos la proporción citada sólo en las cámaras del segundo y tercero (figura 37) entonces sí se está en el entorno cuadrático que caracteriza a ese valor teórico.

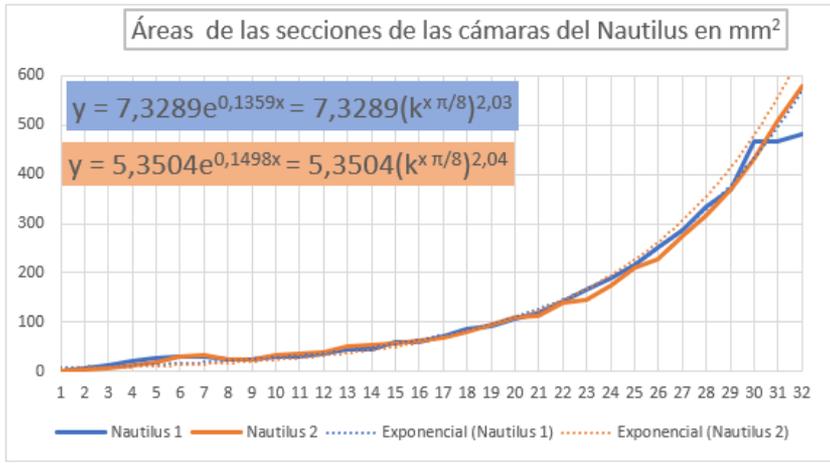


Figura 2.51. Áreas de las cámaras del Nautilus en los tres verticilos. Ajuste exponencial.

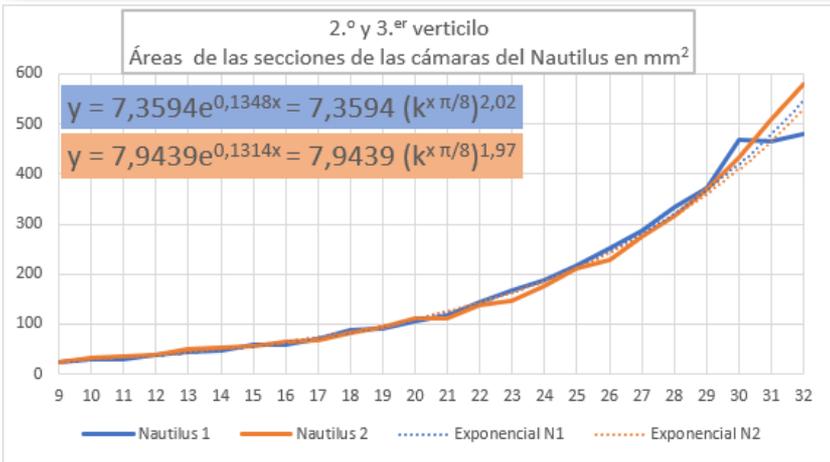
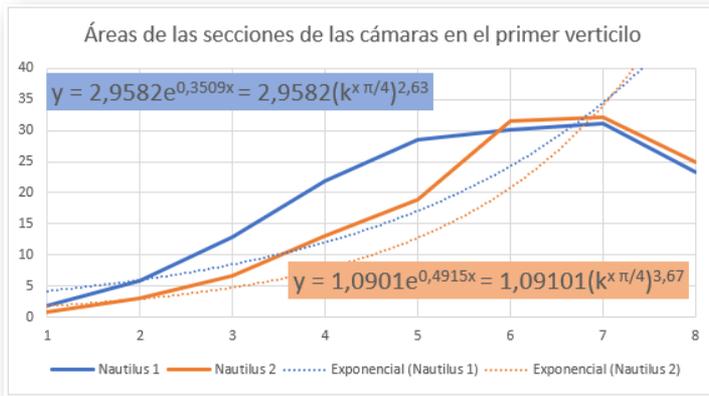


Figura 2.52. Áreas de las cámaras del Nautilus en el segundo y tercer verticilo. Ajuste exponencial.

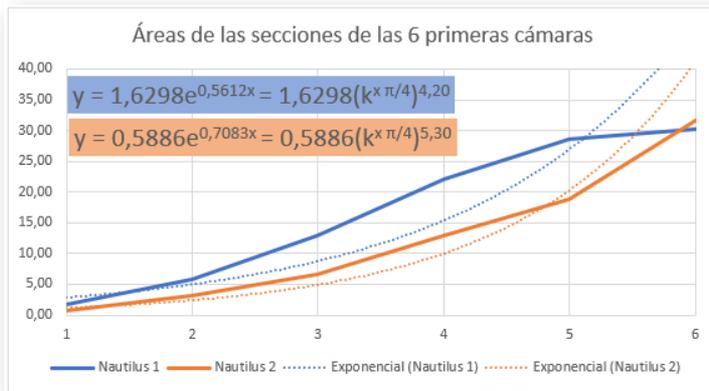
En la **Figura 2.53** se refleja ese comportamiento diferenciado del primer verticilo y en especial la disminución que acontece en la octava cámara. Si realizamos un ajuste exponencial en este caso el valor esperado sería:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = (\kappa^{\frac{\pi}{4}})^2 \quad (2.20)$$

al ser el paso angular  $\frac{\pi}{4}$ , pero podemos observar en el ajuste que el valor es superior, e incluso si descartamos la octava cámara (**Figura 2.54**) el exponente es aún mayor, superior a cuatro.

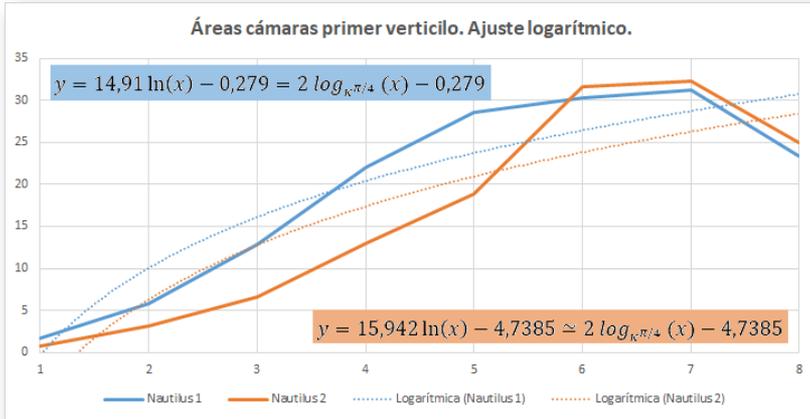


**Figura 2.53. Áreas de las cámaras en el primer verticilo. Ajuste exponencial.**



**Figura 2.54. Áreas de las seis primeras cámaras del primer verticilo. Ajuste exponencial.**

Pero en este primer verticilo el ajuste más certero sería el logarítmico (ver la **Figura 2.55**) ya que inicialmente en este verticilo el Nautilus ha de conseguir la flotabilidad mediante un crecimiento rápido, es decir, con cámaras amplias y conseguida ésta cierta estabilización, retomando el crecimiento a partir de la cámara novena, pero en este caso ya de tipo exponencial.



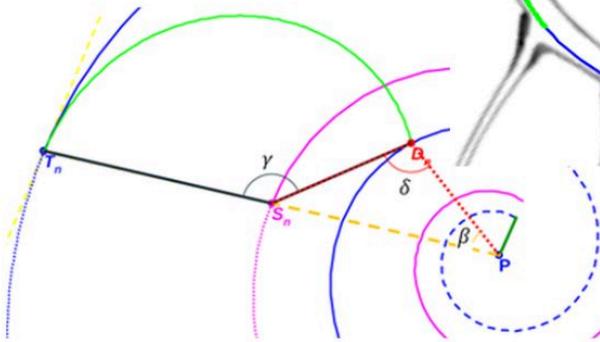
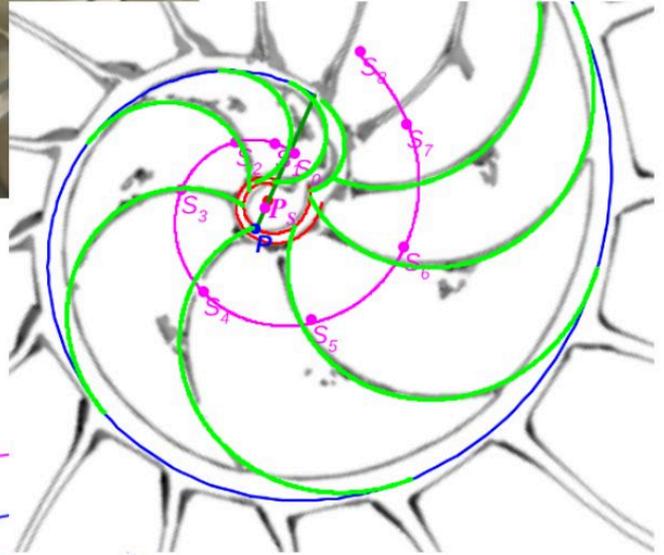
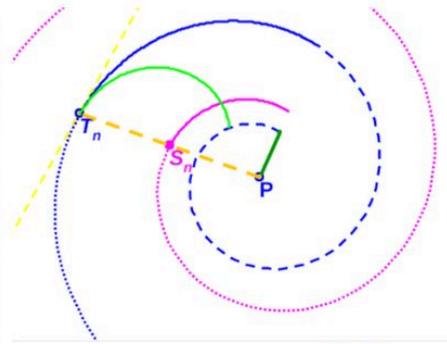
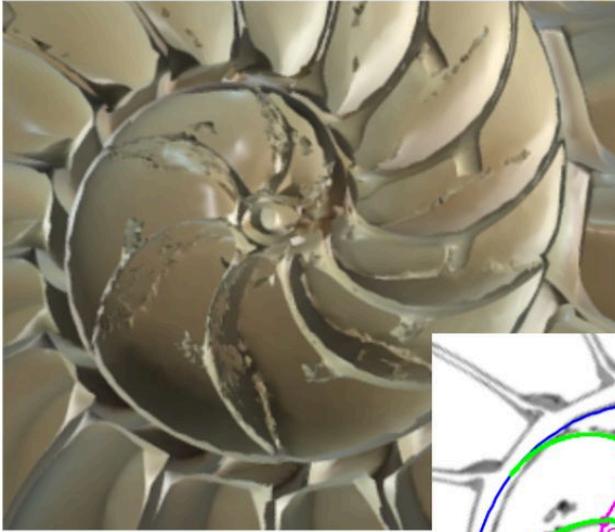
**Figura 2.55. Áreas de las ocho primeras cámaras del primer verticilo. Ajuste logarítmico.**

En el ajuste logarítmico del primer verticilo la relación obtenida entre las cámaras es:

$$A_{n+1} - A_n = 2 \log_{k, \frac{\pi}{4}} \left( \frac{n+1}{n} \right) \quad (2.21)$$

Para poder tratar de comprender y explicar lo que acontece será necesario adentrarnos en otra tarea que está intrínsecamente relacionada con ésta ya que cada cámara queda determinadas por dos septos y un arco de la pared ventral y otro de la dorsal. Por tanto, como ya adelantamos, necesitamos profundizar en los septos, en particular en su amplitud y en especial en el primer verticilo, y también cómo se intersecan estos con la paredes de la concha. Sobre la forma de los mismos sabemos que son arcos de espirales cordobesas. Así pues, ¡adentrémonos!... pero será en un nuevo capítulo.





# Capítulo III

## Modelo ontogénico de los septos



En el modelo uniforme del Nautilus (Galo, 2024) [2] detectamos que los septos son arcos de espirales cordobesas y, adicionalmente, que sus respectivos polos estaban ubicados también en una espiral cordobesa. Ése fue, quizás, el mayor y más novedoso avance logrado en la modelación de esta concha. No obstante, allí, no abordamos la evidente diferencia que acontece entre los septos según las etapas vitales de estos especímenes y, consecuentemente, lo que ocurre también en las cámaras septales que determinan. En especial, esas diferencias se presentan entre el primer verticilo y los dos restantes. Allí, tampoco profundizamos en el modelado de las intersecciones de los septos con la pared ventral y con la dorsal y sólo aventuramos una posible base teórica del fragmocono en base al gnomon de un triángulo cordobés. Ahora, después de haber ahondado en los capítulos anteriores de este libro en el estudio de la literatura existente sobre la ontogenia biológica del Nautilus y también en el análisis matemático del modelo propuesto, entonces, es el momento de adentrarnos en un modelo matemático diferenciado por fases, es decir, pasemos a abordar la ontogenia matemática de los septos.

Siguiendo lo indicado en los capítulos anteriores de este libro, en particular en lo relativo a la modelación de la pared dorsal y ventral de la sección sagital de la concha, partimos de una base o fundamento primordial que es el que justifica y explica el distinto comportamiento de los septos entre el primer verticilo y los siguientes. En el primero, ambas paredes se corresponden con arcos de dos espirales cordobesas que tienen diferente polo; sin embargo, en el segundo y en el tercer verticilo las espirales de ambas paredes son copolares, tienen el mismo polo, siendo realmente arcos de una única espiral con un retardo angular entre ambas de  $2\pi$ . Así pues, dado que la complejidad es mayor en el primer verticilo vamos a proceder en orden cronológico inverso y analizaremos en primer lugar el segundo y tercer verticilo y posteriormente el primero.

### 3.1 Mejora del modelo uniforme en los verticilos segundo y tercero

La pared ventral en el segundo y tercer verticilo viene dada por:

$$\begin{cases} x = \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f] \quad (3.1)$$

donde  $\theta_i$  es el ángulo que marca el inicio del fragmocono y  $\theta_f$  la terminación de la misma delimitando la boca de la concha.

En el mismo instante<sup>25</sup> angular vital  $\theta$ , la pared dorsal sería:

$$\begin{cases} x = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta \text{sen}(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f] \quad (3.2)$$

La espiral que contiene a los polos de los septos es:

$$\begin{cases} x = e \kappa^\alpha \cos(\alpha) \\ y = e \kappa^\alpha \text{sen}(\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [\theta_i + 2\pi, \theta_f] \quad (3.3)$$

donde  $e$  es un factor de escala o de retardo en la espiral cordobesa<sup>26</sup>.

---

<sup>25</sup> Al no tener una referencia temporal del crecimiento del Nautilus, sólo podemos señalar un mismo instante vital teórico mediante el uso de una amplitud angular común. De esta manera establecemos momentos, atemporales, en la que se han de dar coincidencias vitales. En este caso, para un valor fijado de  $\theta$ , conocemos el punto de la pared ventral y el punto de la pared dorsal que están relacionados entre sí.

<sup>26</sup> En estos verticilos, en el modelo uniforme se detectó que  $e \simeq 0,5$ , que es un valor próximo al valor medio del factor correspondiente al sifúnculo y al del de la pared dorsal

Y cada septo es un arco de una espiral cordobesa:

$$\begin{cases} x = S_{n_x} + d \kappa^\rho \cos(\rho) \\ y = S_{n_y} + d \kappa^\rho \sen(\rho) \end{cases} \quad \rho \in [\theta_{p_n}, \theta_{p_n} + \Delta\theta_{p_n}] \quad (3.4)$$

donde  $[\theta_{p_n}, \theta_{p_n} + \Delta\theta_{p_n}]$  determina la amplitud angular del arco de esa espiral que comprende el septo  $n$ -ésimo;  $\rho$  determina unívocamente cada uno de los puntos de dicho septo, pero todos ellos se corresponden con un mismo instante vital<sup>27</sup>,  $d$  es un factor de

<sup>27</sup> Para conocer el proceso de formación de las cámaras de los nautilus podemos acudir a lo estudiado y analizado por Ward, Greenwald y Magnier (1981) [22] en su artículo “The chamber formation cycle in *Nautilus macromphalus*”. Estos autores basan su estudio en la observación radiográfica (ver **Figura 2.40**) de diferentes ejemplares en distintos momentos y, así, pueden analizar las variaciones que acontecen y realizar mediciones que llevan a plantear un crecimiento periódico que comprende tres fases:

1. Formación de una cresta mural en la posición que ocupará el nuevo septo. Esta cresta es una delgada banda anular interna de carbonato cálcico.

2. Desplazamiento hacia delante del manto septal para ubicarse a la altura de la cresta mural y ajustarse a ella. Inicio del proceso de calcificación del nuevo septo. También el sífinculo comienza a calcificar un anillo de conexión en el interior de la nueva cámara uniendo el septo anterior y el nuevo. Durante esta fase la nueva cámara está llena de líquido cameral (Ward, 1979) [20] y no acontece ningún vaciado de la misma, pero ese vaciado sí continúa en las cámaras anteriores.

3. Vaciado del líquido de la nueva cámara, que se inicia cuando el nuevo tabique ha alcanzado de un tercio a dos tercios de su espesor final. Este vaciado se denomina acoplado pues el líquido está en contacto con el anillo de conexión sífincular. En esta fase el tabique septal sigue construyéndose, engrosándose, finalizando este proceso cuando el volumen del líquido vaciado es aproximadamente el 50% y ya no está en contacto con el anillo sífincular, momento en el que se pasa a un proceso de vaciado desacoplado y comienza la formación de una nueva cresta mural y, consecuentemente, un nuevo ciclo.

Durante el ciclo de formación de una cámara, el crecimiento de la concha exterior parece ser que es continuo, pero hay una correlación inversa entre el porcentaje de líquido que se ha vaciado en la última cámara construida y la amplitud angular de la cámara habitacional. A medida que la cámara septal está más vacía la cámara habitacional es mayor y viceversa. Esta relación logra mantener la flotabilidad ya que cuando la nueva cámara está más llena de líquido el peso de la concha en la zona habitacional es menor y a medida que decremента el líquido aumenta la amplitud de la zona habitacional. El inicio de cada cámara representa un punto crítico para la flotabilidad global, pero esto se compensa con el vaciado desacoplado que sigue aconteciendo en las cámaras anteriores.

escala o de retardo a determinar en el modelo; y  $S_n(S_{n_x}, S_{n_y})$  es el polo de la espiral que incluye a ese arco septal  $n$ -ésimo y que perteneciendo a la espiral (3.3) quedará determinado por cierto valor  $\alpha_n$ .

La aplicación en el modelo del que hemos denominado tercer invariante (**tangencialidad entre la pared ventral y las paredes de los septos**) nos puede llevar a determinar los parámetros antes citados. De partida:

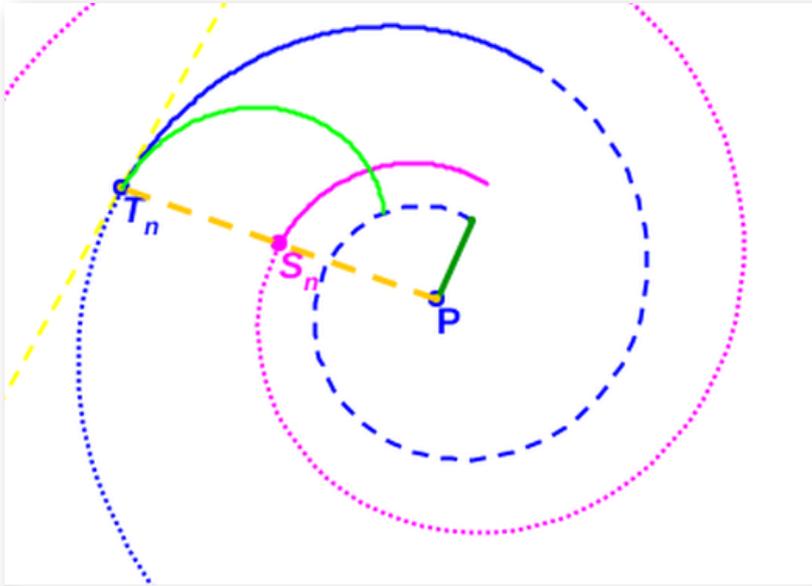
- Toda espiral logarítmica es equiangular, así pues, en cualquier punto de la espiral la recta tangente y el radio vector forman siempre un mismo ángulo  $\Psi$ . Éste es característico de cada tipo espiral y depende sólo de la base  $b$  que la define, siendo  $\cos \Psi = \frac{\ln b}{\sqrt{1+\ln^2 b}}$ . En el caso de una espiral cordobesa este ángulo es  $\Psi \simeq 80,32^\circ$ , al ser la base logarítmica o exponencial que la define  $\kappa = 1,185580\dots$
- Al ser tangentes la espiral ventral y la septal, ambas comparten la misma recta tangente. Y dado que ambas espirales son cordobesas entonces, consecuentemente, los radios vectores de ambas han de estar también en la misma recta, porque ambos han de formar el mismo ángulo con la tangente común.

Por tanto (ver **Figura 3.1**), si  $T_n$  es el punto de tangencia del  $n$ -ésimo septo (con  $n > 8$ , pues en el primer verticilo hay ocho septos),  $S_n$  es el polo de éste y  $P$  el polo de la pared ventral, tenemos que:

- Al ser  $T_n$  un punto de la espiral ventral (3.1), entonces:

$$\overline{PT_n} = \kappa^\theta \tag{3.5}$$

para algún  $\theta$ .



**Figura 3.1. Tangencialidad de los septos con la pared ventral**

- (i) **Espiral azul** discontinua: pared dorsal en el segundo verticilo.
- (ii) **Espiral azul** continua y de puntos: pared ventral en el segundo verticilo.
- (iii) **Espiral magenta**: espiral de los polos de los septos.
- (iv)  $T_n$ : punto de tangencia septo y pared ventral;  $S_n$ : polo del septo y  $P$ : polo común de la espiral dorsal, de la ventral y de la de los polos de los septos.

- Al ser  $S_n$  un punto de la espiral de los polos de los septos, por (3.3),

$$\overline{PS_n} = e\kappa^\alpha \quad (3.6)$$

donde  $\alpha = \theta$  al estar alineados  $P, S_n$ , y  $T_n$  y ser  $P$  el polo común a la espiral ventral (3.1) y a la espiral de los polos de los septos (3.3).

- Al ser  $T_n$  un punto del septo  $n$ -ésimo, por (3.4)

$$\overline{S_nT_n} = d\kappa^\rho \quad (3.7)$$

para algún valor de  $d$  y  $\rho$ .

Y dado que

$$\overline{S_n T_n} = \overline{P T_n} - \overline{P S_n} \quad (3.8)$$

de las relaciones anteriores, (3.5) a (3.7), obtenemos que:

$$d \kappa^\rho = (1 - e) \kappa^\theta. \quad (3.9)$$

Expresando en (3.9)  $d = d' \kappa^{\theta-\rho}$ , es decir, considerando que  $\rho$  es un ángulo de retardo, tenemos:

$$d' \kappa^\theta = (1 - e) \kappa^\theta. \quad (3.10)$$

Y de ahí

$$d' = (1 - e). \quad (3.11)$$

En Galo *et al.* (2016) [4] detectamos que en la espiral de los polos de los septos (3.3)  $e \simeq 0,5$  e igual acontecía para la espiral que da forma a los arcos de los septos. Aquí la relación obtenida en (3.11) conduce a considerar que  $e = 0,5$  (exactamente ese valor<sup>28</sup>), pues en ese caso también es  $d' = 0,5$ , y consecuentemente la espiral correspondiente a un determinado arco septal se obtiene sin más que realizar una traslación de la espiral de los polos para que el polo de ésta coincida con el polo de dicho septo. (ver **Figura 3.2**).

### 3.1.1 Intersección de la pared dorsal y los septos en el segundo y tercer verticilo

Centrémonos ahora en la determinación de la intersección de los arcos de los septos con la pared dorsal y la amplitud de estos.

---

<sup>28</sup> También se apuntó la posibilidad de que ese valor correspondiera a la espiral intermedia entre la del sífinculo y la pared dorsal, es decir,  $e = \frac{1+\kappa^{-2\pi}}{2} + \kappa^{-2\pi} = 0,50735\dots$ , pero en este caso  $d' \neq e$ , es decir, las dos espirales citadas son diferentes. De ahí que optemos por el valor  $e = 0,5$ .

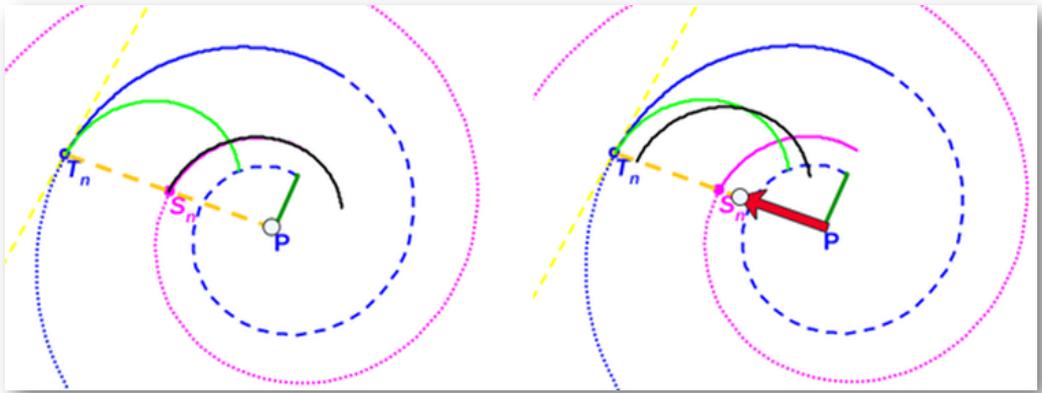


Figura 3.2. Obtención de un arco septal como traslación de un arco de la espiral de los polos.

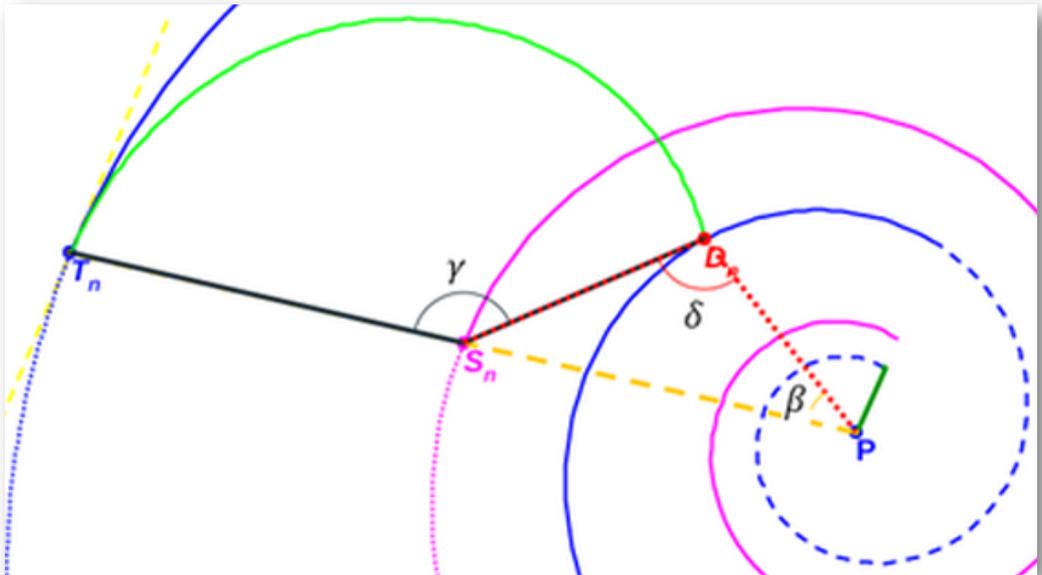


Figura 3.3. Parámetros que definen los septos en el segundo y tercer verticilo.

Para el septo  $n$ -ésimo, según la denominación de los ángulos reflejados en la **Figura 3.3** y fijado el valor de  $e = 0,5$ , por (3.6) tenemos que:

$$\overline{PS_n} = 0,5 \kappa^\theta. \quad (3.12)$$

El punto  $D_n$ , intersección de ese septo con la pared dorsal, por pertenecer a ella y según (3.2) verifica que:

$$\overline{PD_n} = \kappa^{\theta-2\pi-\beta} \quad (3.13)$$

y, a su vez, por pertenecer al arco del septo:

$$\overline{S_n D_n} = 0,5 \kappa^{\theta-\gamma}. \quad (3.14)$$

- Aplicando el teorema del coseno en el triángulo de vértices  $P$ ,  $S_n$  y  $D_n$ :

$$\overline{PD_n}^2 = \overline{S_n D_n}^2 + \overline{PS_n}^2 - 2\overline{S_n D_n} \overline{PS_n} \cos \gamma \quad (3.15)$$

y considerando las expresiones (3.12), (3.13) y (3.14) llegamos a la igualdad:

$$\kappa^{-2\beta-4\pi} = 0,25 (\kappa^{-2\gamma} + 2\kappa^{-\gamma} \cos \gamma + 1). \quad (3.16)$$

- Aplicando el teorema del coseno en el triángulo de vértices  $T_n$ ,  $S_n$  y  $D_n$ , y teniendo en consideración que  $\overline{S_n T_n} = \overline{PS_n}$  obtenemos que:

$$\overline{D_n T_n}^2 = \overline{S_n T_n}^2 + \overline{S_n D_n}^2 - 2\overline{S_n T_n} \overline{S_n D_n} \cos \gamma \quad (3.17)$$

Y puesto que las coordenadas de los puntos que intervienen en esa igualdad son:

$$P(0, 0)$$

$$D_n(\kappa^{\theta-2\pi-\beta} \cos(\theta - \beta), \kappa^{\theta-2\pi-\beta} \operatorname{sen}(\theta - \beta))$$

$$T_n(\kappa^\theta \cos \theta, \kappa^\theta \operatorname{sen} \theta)$$

se tiene que:

$$\overline{D_n T_n}^2 = \kappa^{2\theta} (\kappa^{2(-\beta-2\pi)} - \kappa^{-\beta-2\pi} \cos \beta + 1) \quad (3.18)$$

Y teniendo en consideración (3.12) y (3.14)

$$\begin{aligned} \overline{P S_n}^2 + \overline{S_n D_n}^2 - 2\overline{P S_n} \overline{S_n D_n} \cos \gamma \\ = 0,25 \kappa^{2\theta} (1 + \kappa^{-2\gamma} - 2\kappa^{-2\gamma} \cos \gamma) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por tanto, la igualdad (3.17) queda expresada como:

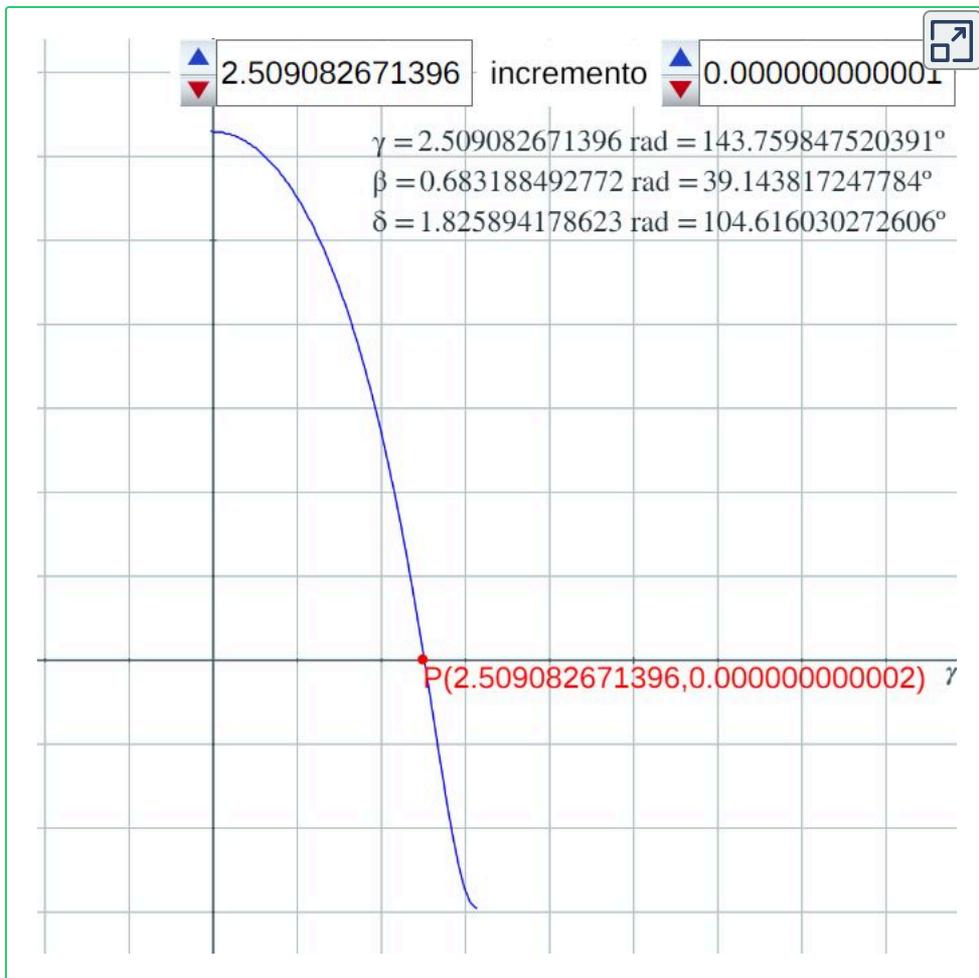
$$\begin{aligned} \kappa^{2(-\beta-2\pi)} - \kappa^{-\beta-2\pi} \cos \beta + 1 \\ = 0,25 (1 + \kappa^{-2\gamma} - 2\kappa^{-2\gamma} \cos \gamma) \end{aligned} \quad (3.20)$$

A partir de (3.16) y (3.20) tenemos un sistema de dos ecuaciones que nos relaciona al ángulo  $\gamma$  (amplitud del arco del septo), con el  $\beta$  (retardo del punto de intersección dorsal del septo  $D_n$ , respecto al punto de intersección ventral  $T_n$ ). Este sistema puede reescribirse como:

$$\begin{cases} \beta = -2\pi - \log_{\kappa} \left( \frac{\sqrt{\kappa^{-2\gamma} + 2\kappa^{-\gamma} \cos \gamma + 1}}{2} \right) \\ \beta = \arccos \left( \frac{1 + \kappa^{-\gamma} \cos \gamma}{\sqrt{\kappa^{-2\gamma} + 2\kappa^{-\gamma} \cos \gamma + 1}} \right) \end{cases} \quad (3.21)$$

Es decir,

$$\begin{aligned} -2\pi - \log_{\kappa} \left( \frac{\sqrt{\kappa^{-2\gamma} + 2\kappa^{-\gamma} \cos \gamma + 1}}{2} \right) \\ = \arccos \left( \frac{1 + \kappa^{-\gamma} \cos \gamma}{\sqrt{\kappa^{-2\gamma} + 2\kappa^{-\gamma} \cos \gamma + 1}} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$



Escena interactiva 3.1. Determinación numérica de la amplitud del septo.

La resolución numérica de la ecuación (3.22) —puede observarse en la **Escena interactiva 3.1**, donde la gráfica en azul se corresponde con la función en la variable  $\gamma$ , definida por la expresión del miembro de la izquierda en (3.22) con  $0 \leq \gamma \leq \pi$ — nos permite determinar:

- La amplitud del septo:

$$\widehat{T_n S_n D_n} = \gamma = 2,5090\dots \text{radianes} \simeq 143,76^\circ.$$

- El desplazamiento entre la intersección dorsal y la ventral:

$$\widehat{T_n P D_n} = \beta = 0,6831... \text{ radianes} \simeq 39,14^\circ.$$

- El ángulo entre los radios vectores  $\overline{P D_n}$  y  $\overline{S_n D_n}$ :

$$\widehat{P D_n S_n} = \delta = 1.8258... \text{ radianes} \simeq 104,62^\circ.$$

Apoyándonos en que en una espiral cordobesa el ángulo que forma el radio vector con la recta tangente es de  $80,32^\circ$  tenemos que (ver el detalle en la **Figura 3.4**) el ángulo que forma la recta tangente a la pared dorsal en  $D_n$  con la recta tangente al septo en ese mismo punto es de  $75,38^\circ$ , es decir el septo no interseca a la pared dorsal perpendicularmente, si no formando con respecto a esa perpendicular un ángulo de  $14,62^\circ$ . Eso concuerda con lo indicado por Mutvei & Doguzhaeva (1997) [\[12\]](#), que ya reflejamos en la **Figura 2.31**, y la depresión septal dorsal en el área media —sección o corte que es el que estamos analizando en este estudio— lo que hace es corregir dicha desviación respecto a la perpendicular buscando aportar y lograr, quizás, una mayor consistencia (eso es lo que puede interpretarse de este hecho aportado por la matemática).

Este comportamiento teórico es el mismo tanto en el segundo como en el tercer verticilo, pues en ambos casos la pared dorsal y ventral comparten el mismo polo. En el tercer verticilo, esa depresión dorsal parece ser menos notable, al menos aparentemente, si bien sí pueden visualizarse o intuirse (interactuar por ejemplo con la digitalización del Nautilus del Museo Dundee incluida en el **Interactivo 1.1**—. Matemáticamente no hay diferencia entre esos dos verticilos.

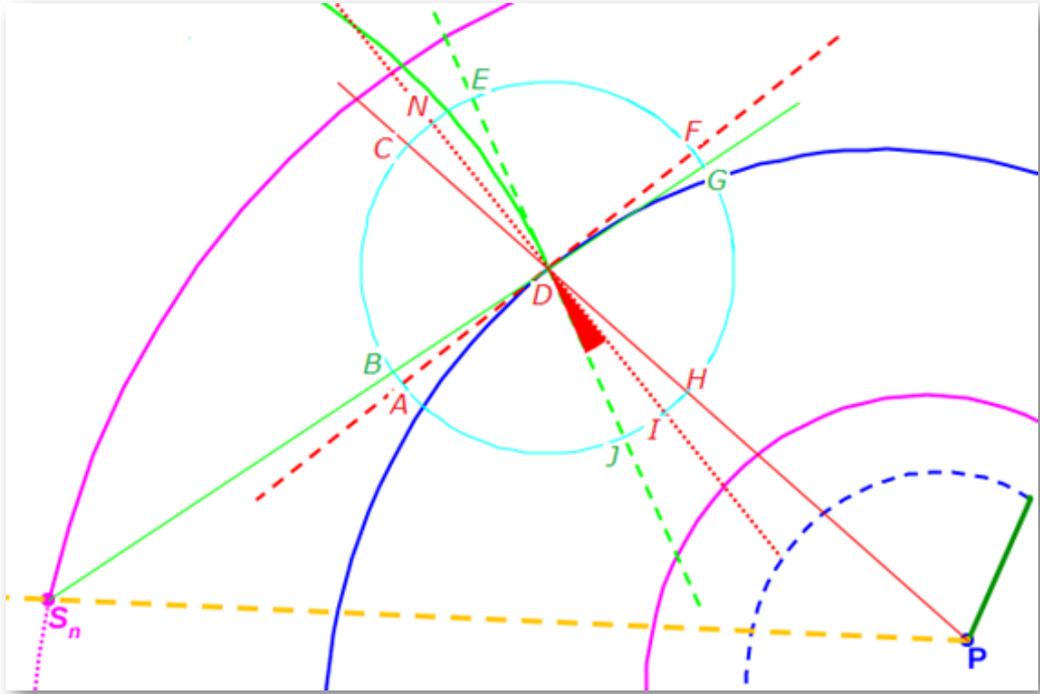


Figura 3.4. Ángulo de incidencia entre septo y pared dorsal en el segundo y tercer verticilo.

- (i)  $\overline{FDA}$  es la recta tangente a la pared dorsal en  $D$ , e  $\overline{IDN}$  la recta normal en ese punto, luego  $\widehat{NDF} = 90^\circ$ .
- (ii)  $\overline{PD}$  es el radio vector de  $D$  en la pared dorsal.  $\widehat{ADC} = 80,32^\circ$  por ser la pared dorsal una espiral cordobesa y ser ese ángulo el característico de esta espiral.
- (iii)  $\overline{JDE}$  es la recta tangente al septo en  $D$ .  $\overline{S_nD}$  el radio vector de  $D$  en ese septo. Por tanto,  $\widehat{GDE} = 80,32^\circ$  por ser el septo una espiral cordobesa.
- (iv)  $\widehat{PDS_n} = \widehat{PDB} = \delta = 104,62^\circ$ , luego  $\widehat{ADB} = \widehat{PDB} + \widehat{ADC} - 180^\circ = 104,62^\circ + 80,32^\circ - 180^\circ = 4,94^\circ$ . Y también  $\widehat{FDG} = 4,94^\circ$ .
- (v) Consecuentemente, el ángulo que forma la recta tangente a  $D$  en el septo y la normal a la pared dorsal en ese punto es:  $\widehat{NDE} = \widehat{NDF} + \widehat{FDG} - \widehat{GDE} = 90^\circ + 4,94^\circ - 80,32^\circ = 14,62^\circ$ .

### 3.1.2 Modelo tangencial de los septos en el segundo y tercer verticilo

Así pues, en estos dos verticilos los arcos de los septos tienen por ecuación (3.4), la cual de acuerdo con lo antes analizado quedaría concretada como:

$$\begin{cases} x = S_{n_x} + d \kappa^\rho \cos(\rho) \\ y = S_{n_y} + d \kappa^\rho \sen(\rho) \end{cases} \quad \rho \in [\alpha_n - \gamma, \alpha_n] \quad (3.23)$$

donde

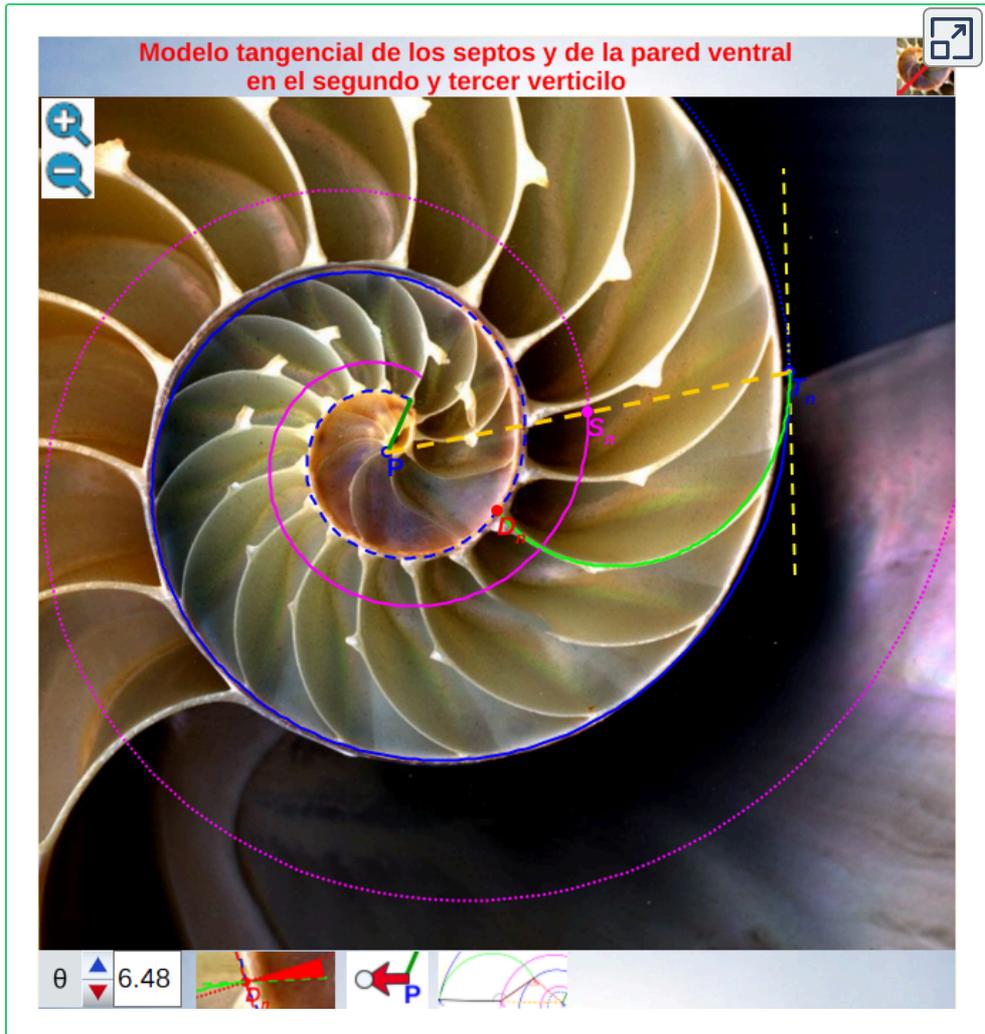
- $d = 0,5$ .
- $\begin{cases} S_{n_x} = 0,5\kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n) \\ S_{n_y} = 0,5\kappa^{\alpha_n} \sen(\alpha_n) \end{cases} \quad \alpha_n = \theta_i + 2\pi + (n - 8)\frac{\pi}{8}$ .
- $\rho \in [\alpha_n - \gamma, \alpha_n]$ , con  $\gamma = 2,5090\dots$
- $n \geq 8$  (en el primer verticilo hay ocho septos y el octavo da inicio al segundo).

Los puntos de tangencia son:  $T_n(\kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n), \kappa^{\alpha_n} \sen(\alpha_n))$  y los de intersección con la pared dorsal pueden escribirse:

- como punto de la pared dorsal:  $D_n(\kappa^{\beta_n} \cos(\beta_n), \kappa^{\beta_n} \sen(\beta_n))$ , donde denotamos  $\beta_n = \alpha_n - 2\pi - \beta$  con  $\beta = 0,6831$ .
- como punto del arco de septo:

$$\begin{cases} D_{n_x} = 0,5\kappa^{\alpha_n} \cos(\alpha_n) + 0,5\kappa^{\alpha_n - \gamma} \cos(\alpha_n - \gamma) \\ D_{n_y} = 0,5\kappa^{\alpha_n} \sen(\alpha_n) + 0,5\kappa^{\alpha_n - \gamma} \sen(\alpha_n - \gamma) \end{cases} \quad (3.24)$$

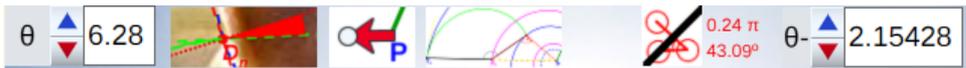
La introducción de la tangencialidad entre la pared ventral y los septos nos ha permitido lograr la modelación matemática de la sección sagital del Nautilus en el segundo y tercer verticilo y acentuar el caracter cordobés de sus elementos. En la **Escena interactiva 3.2**, podemos observar e interactuar con este modelo.



Escena interactiva 3.2. Modelo tangencial de los septos y de la pared ventral en el segundo y tercer verticilo. [Indicaciones](#).

En este objeto interactivo podemos distinguir:

- Un **espacio central** donde se refleja gráficamente el análisis objeto de esta escena interactiva. Incluye un par de pulsadores (lupas) que permiten cambiar la escala de lo representado. El espacio puede desplazarse con clic sostenido en él o desplazándolo con el dedo en dispositivos táctiles.
- **Parte superior** con un botón que activa y desactiva la presentación de la sección de la concha del Nautilus para ubicar el modelo en lo modelado.
- **Parte inferior** con diversos botones que activan y desactivan la presentación de diferentes objetos matemáticos que muestran el modelo de los septos del Nautilus.



De izquierda a derecha tenemos:

- Control tipo pulsador que permite modificar el ángulo de la espiral de la concha correspondiente al punto de tangencia y elementos anejos. Tiene un tope inferior y otro superior para centrar y limitar el estudio sólo en el segundo y tercer verticilo.
- Botón que activa y desactiva la representación de la recta tangente en la pared dorsal (línea roja discontinua) y la recta normal (línea roja de puntos), así como la recta tangente al septo (línea verde discontinua). Todas estas rectas referidas al punto de corte entre la pared dorsal y el septo. También se refleja la desviación entre la tangente al septo y la normal a la pared dorsal (arco relleno en rojo).
- Botón que visualiza u oculta cómo los septos son arcos de la espiral de los polos (espiral magenta) pero desplazados.

- Botón que muestra los arcos que miden la amplitud de los septos y el ángulo que determina el punto de corte dorsal del septo y el respectivo tangencial teniendo como vértice el polo de la espiral ventral del Nautilus.
- Botón que muestra la amplitud de los septos (ángulo que forma el punto de tangencia ventral, el polo y la recta tangente al septo que pasa por el polo (el punto de tangencia se refleja como  $Q$ ). Esa amplitud es de  $0,24\pi$ , es decir, aproximadamente  $\frac{\pi}{4}$ . Puede variarse la posición de  $Q$ .

El camino seguido en el análisis anterior nos puede servir de guía para abordar el estudio de los septos en ese primer verticilo que es tan especial. Especial por ser la pared dorsal y la ventral espirales cordobesas con distinto polo y, como veremos, por ser ésta la causa esencial de esas cámaras diferentes y esos septos variables. Un estudio que considero es interesante y matemáticamente bonito. La miel que le dejo en los labios podrá saborearla a continuación.

## 3.2 Los septos en el primer verticilo

Después de haber modelizado los septos en el segundo y tercer verticilio bajo el invariante de tangencialidad, nos adentramos en la modelización de los septos en el primer verticilo. Esta primera fase de crecimiento ya hemos visto que se muestra diversa y con apariencia poco regular, cambiante (menor número de cámaras septales, ocho frente a las dieciséis de la etapa juvenil y adulta, con secciones y amplitudes que cambian como necesidad biológica para alcanzar la flotabilidad) y, ahora, ha llegado el momento de mostrar el modelo matemático que da explicación a esta etapa e introduce la regularidad esperada que parecía no acaecer, pero que queda al descubierto bajo la perspectiva matemática. De nuevo, **el hecho de**

que intervengan dos espirales con diferente polo, en este caso la espiral de la pared ventral y la espiral de los polos de los septos, conduce a proporciones variables entre los radios vectores y consecuentemente a que se formen septos con factores de escala variables. Ello nos conduce y permite determinar las ecuaciones de los septos, los puntos de tangencia con la pared ventral y los de intersección con la pared dorsal (para ello, nos encontraremos con la necesidad de introducir un grosor en el modelo matemático de esa pared, que es lo que físicamente acontece).

Completaremos el contenido de este análisis agrupando y relacionando entre sí diferentes puntos que se han ido detectando en este análisis. Unos que denominamos notables, porque matemáticamente son los que establecen el modelo matemático y dan explicación causal al mismo, y que son polos de diferentes espirales. Y otros que catalogaremos como destacables, posible fuente de inspiración matemática futura, y que son centros desde los que algunos objetos se observan con perspectiva angular constante.

En el primer verticilo la pared ventral es el arco de la espiral cordobesa<sup>29</sup>:

$$\begin{cases} x = \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^\theta \sen(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + 2\pi] \quad (3.25)$$

Y, como ya indicamos, en el mismo instante vital  $\theta$  la pared dorsal es el arco de otra espiral cordobesa:

$$\begin{cases} x = D_x + a \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = D_y + a \kappa^\theta \sen(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + \frac{7\pi}{4}] \quad (3.26)$$

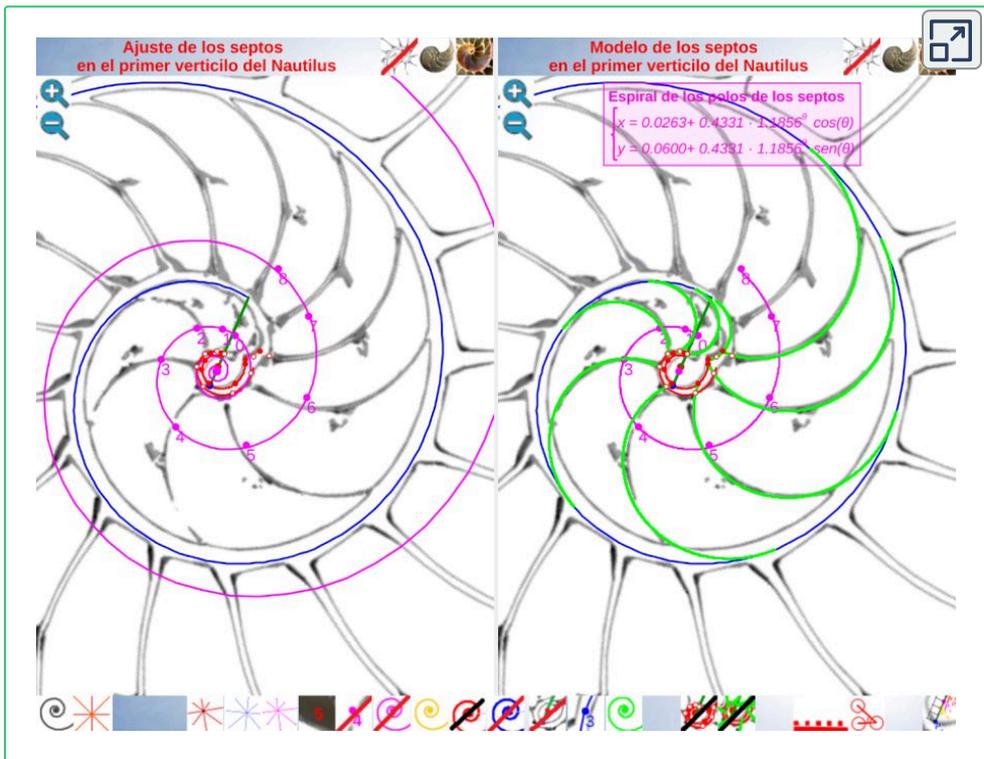
---

<sup>29</sup> De acuerdo con la orientación con la que hemos presentado la concha del Nautilus en las escenas interactivas y, por tanto, la del eje inicial, el ángulo  $\theta_i = -5, 12$ . Este valor lo necesitaremos en cálculos auxiliares posteriores.

con  $P_D(D_x, D_y) = (0,035, 0,080)$  y  $a = \kappa^{-4\pi}$ .

### 3.2.1 Modelación de los polos de los septos

Para modelar los arcos de los septos en este verticilo, busquemos inicialmente cuales serían sus polos  $S_n(S_{n_x}, S_{n_y})$  y, para ello, podemos utilizar la **Escena interactiva 3.3**, donde activando el botón cuya imagen es una espiral en color negro  disponemos de una espiral cordobesa que podemos desplazar cambiando su polo, así como escalarla adecuadamente para que se adapte a cada uno de esos septos. Su uso nos permite tabular las coordenadas de sus polos y verificar, en una primera aproximación, que cada septo tiene un factor de escala (o ángulo de retardo) diferente.



**Escena interactiva 3.3. Modelación de los septos del Nautilus en el primer verticilo.**  
En el espacio de la izquierda: "herramientas de modelado" y en el de la derecha:  
"modelo obtenido". [Indicaciones.](#)

Los valores obtenidos están reflejados en la tabla de la **Figura 3.5**.

Polo septo $n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_{n_x}$	0,110	0,056	-0,057	-0,212	-0,150	0,160	0,425	0,430	0,300
$S_{n_y}$	0,217	0,246	0,250	0,111	-0,180	-0,260	-0,050	0,300	0,510
Factor escala en el septo $n$	0,4031	0,4131	0,4431	0,5531	0,6531	0,6331	0,5631	0,5231	0,5

**Figura 3.5.** Coordenadas de los polos de los septos y factor de escala de estos en el primer verticilo.

Y usando de nuevo la espiral auxiliar de color negro, comprobamos que los polos  $S_n$  son puntos de la espiral cordobesa:

$$\begin{cases} x = 0,0263 + 0,4331\kappa^\alpha \cos(\alpha) \\ y = 0,0600 + 0,4331\kappa^\alpha \sen(\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [\theta_i, \theta_i + 2\pi] \quad (3.27)$$

Podemos verlo en la **Escena interactiva 3.3** pulsando el botón  de la espiral magenta.

En esta espiral de los polos de los septos observamos que:

- Su polo es  $P_s(0,0263, 0,0600)$  y éste<sup>30</sup> no coincide ni con el polo de la espiral dorsal en este primer verticilo  $P_D(0,035, 0,080)$ , ni con el polo de la espiral ventral  $P_v(0,0)$ . No obstante, sí existe una relación entre ellos  $\overrightarrow{P_v P_s} = \frac{3}{4} \overrightarrow{P_v P_D}$ .
- El factor de escala es **0,4331**, difiere del hallado en la sección anterior para la espiral de los polos en el segundo y tercer verticilo, que en ese caso era  $e = 0,5$ . Habrá que preguntarse por el porqué de ese cambio, es decir, buscar su explicación matemática.

<sup>30</sup> En una sección posterior detallaremos estos puntos notables que estamos detectando, su relación y aportaremos algunas posibles explicaciones a si intervienen como elementos causales en la ontogenia, si bien quedan abiertas diversas preguntas.

- Los ángulos  $\overline{S_n P_s S_{n+1}}$ ,  $0 \leq n \leq 7$  que miden el paso entre los polos en esta espiral se observa que son distintos. Calculando los ángulos a partir de las coordenadas de esos puntos obtenemos que aproximadamente son:  $19^\circ$ ,  $33^\circ$ ,  $54^\circ$ ,  $66^\circ$ ,  $59^\circ$ ,  $52^\circ$ ,  $46^\circ$ ,  $28^\circ$ , es decir, un crecimiento inicial, una estabilización posterior y un decrecimiento que confluye al valor  $22,5^\circ = \frac{\pi}{8}$  que es el paso angular que acontece en el segundo y tercer verticilo. Ello se corresponde con el análisis realizado previamente respecto a las áreas de las secciones de las cámaras.
- Hay un punto  $C_s(0.07, 0, 16)$ , situado en el eje polar, desde el que los ángulos que definen ese paso entre polos, es decir,  $\overline{S_n C_s S_{n+1}}$ ,  $0 \leq n \leq 7$ , se corresponden con un valor constante de  $\frac{\pi}{4}$  (ver **Figura 3.7** o bien en la **Escena interactiva 3.3** podemos pulsar el botón que visualiza un haz de radios de color magenta <sup>31</sup>). ¿Tiene esa posición una razón especial, un porqué especial?
- La relación entre el polo ventral  $P_v$ , este centro  $C_s$  y el polo dorsal  $P_D$  es:  $\overline{P_v C_s} = 2\overline{P_v P_D}$ . Es decir  $P_D$  es el centro de simetría de  $P_v$  y  $C_s$ . (imagen derecha de la fig. 44).

---

<sup>31</sup> La determinación de este punto puede hacerse usando un haz de rectas de paso  $\frac{\pi}{4}$  que podamos posicionar con un control gráfico y a su vez girarlo con otro control. Esta herramienta la tenemos disponible pulsando el botón  en la **Escena interactiva 3.3**. Al hacerlo vemos un haz de rectas que puede desplazarse desplazando su centro y girarse con un pulsador que cambia el ángulo de giro con una medición relativa al eje polar. En este caso cuando ese centro está posicionado en  $C_s$  y el giro relativo es  $-0.16$  es cuando aproximadamente se ajusta mejor, siendo el polo séptimo  $S_7$  el que queda más desajustado (ver **Figura 3.6**).

Perspectiva desde la que el paso angular entre los polos de los septos en el primer verticilo es constante .

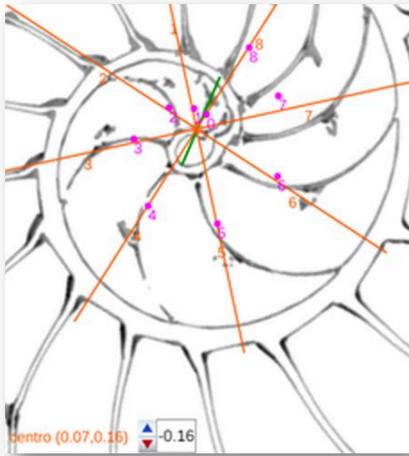


Figura 3.6. Ajuste del paso angular .

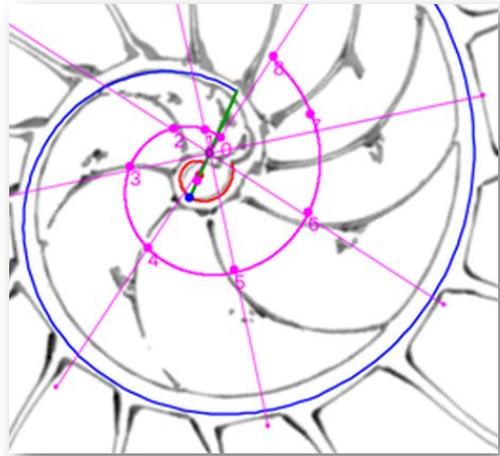


Figura 3.7. Modelo de paso angular constante .

Así pues, la base constructiva que estamos siguiendo para la determinación del modelo nos marca que éste puede obtenerse mediante un procedimiento inverso al realizado en la experimentación y simulación anterior, es decir:

- Partimos de la espiral cordobesa (3.27).
- Consideramos el punto  $C_s$  y desde él se traza una haz de rectas de paso  $\frac{\pi}{4}$  que al intersecarlas con la espiral (3.27) nos determinan los polos de los septos  $S_n$ .

## 3.2.2 Modelación de los arcos de los septos

### 3.2.2.1 Puntos de tangencia ventral

Para modelar los arcos de los septos en este primer verticilo acudamos de nuevo al principio de tangencialidad entre los septos y la pared ventral que ya aplicamos en el segundo y tercer verticilo (ver **Figura 3.1**) e igualmente a lo allí analizado, los puntos de tangencia  $T_n$

comunes a ambas curvas, han de estar alineados con el polo ventral  $P_v$  y con los polos de los septos  $S_n$ . Así pues, para determinar cada punto  $T_n$ , intersequemos cada una de las semirrectas que contienen a los segmentos  $\overline{P_v S_n}$  con la espiral (3.25) y, para ello, nos basta hallar el paso angular  $\varepsilon_n$  existente entre cada polo septal y el semieje polar  $\overline{P_v P_D}$  ya que con él obtenemos para  $0 \leq n \leq 8$  las coordenadas de

$$T_n(\kappa^{\theta_i + \varepsilon_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n), \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n} \operatorname{sen}(\theta_i + \varepsilon_n)) \quad (3.28)$$

Estos puntos están representados en la **Figura 3.8** y pueden verse en la **Escena interactiva 3.3** pulsando el botón .

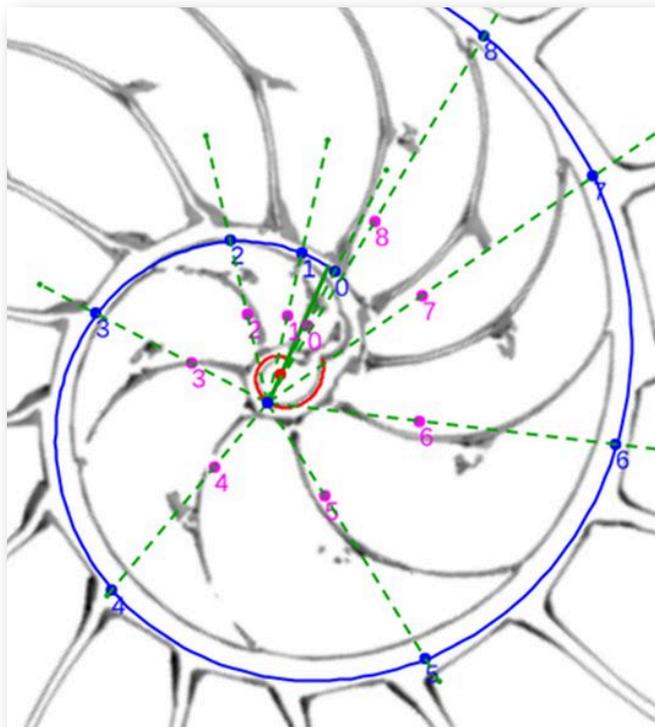


Figura 3.8. Perspectiva desde el **polo ventral** del paso angular interseptos (**línea verde discontinua**). **Polos de los septos** y puntos de tangencia de estos con la **pared ventral**.

Para calcular los ángulos  $\varepsilon_n$ ,  $0 \leq n \leq 8$ , determinamos primero  $\varepsilon_0 = \overline{P_D P_V S_0} = -0,06 = -3^\circ$  y los ángulos  $\eta_n = \overline{S_n P_V S_{n+1}}$  para  $0 \leq n \leq 7$  que son los ángulos formados por las líneas discontinuas pintadas en color verde en la **Figura 3.8**. Conocidos estos, tenemos  $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \eta_n$ ,  $0 \leq n \leq 8$ . Los valores de los ángulos citados están reflejados en la tabla de la **Figura 3.9**.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\eta_n$	0,25	0,45	0,86	1,36	1,25	0,90	0,73	0,43	
	14°	26°	49°	78°	72°	52°	42°	25°	
$\varepsilon_n$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
	-3°	11°	37°	86°	164°	236°	288°	330°	355°

**Figura 3.9.** Paso angular entre los polos de los septos respecto a la pared ventral.

Adicionalmente, si incidimos en la búsqueda del paso angular de  $\frac{\pi}{4}$ , podemos emparejar esos puntos  $\overline{T_0 T_4}$ ,  $\overline{T_1 T_5}$ ,  $\overline{T_2 T_6}$ ,  $\overline{T_3 T_7}$  y  $\overline{T_4 T_8}$  y ver qué acontece con su intersección. En la imagen de la **Figura 3.10**, puede observarse que salvando el segmento  $\overline{T_3 T_7}$  (ya observamos que  $S_7$  quedaba algo desplazado respecto al paso teórico de  $\frac{\pi}{4}$  y, consecuentemente esto se traslada a  $T_7$ ), esos segmentos se intersecan en torno a un punto que vamos a denominar  $C_v$ . Con la herramienta auxiliar usada anteriormente, accesible desde el botón ✨ en la **Escena interactiva 3.3**, podemos determinar aproximadamente sus coordenadas:  $C_v(0, 14, 0, 32)$ , ver la **Figura 3.11**. Se verifica que  $\overline{P_v C_v} = 4\overline{P_v P_D}$ .

En la **Escena interactiva 3.3** disponemos del botón ✨ que permite ver el modelo obtenido, que está reflejado también en la **Figura 3.12**.

Perspectiva desde la que el paso angular entre los puntos de tangencia ventrales en el primer verticilo es constante e igual a  $\frac{\pi}{4}$ .

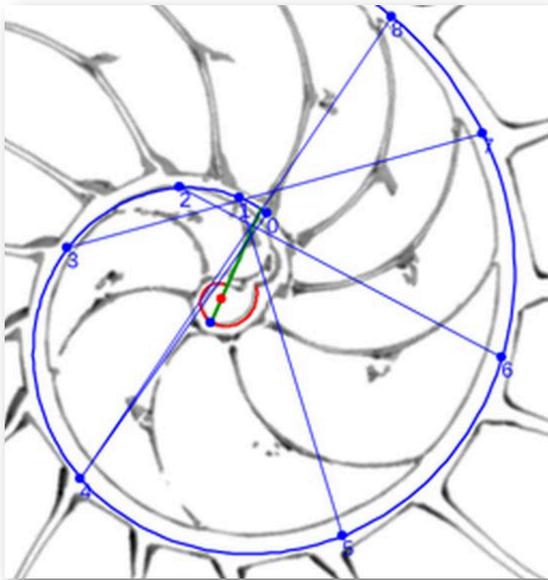


Figura 3.10. Segmentos  $\overline{T_n T_{n+4}}$ ,  $0 \leq n \leq 4$ .

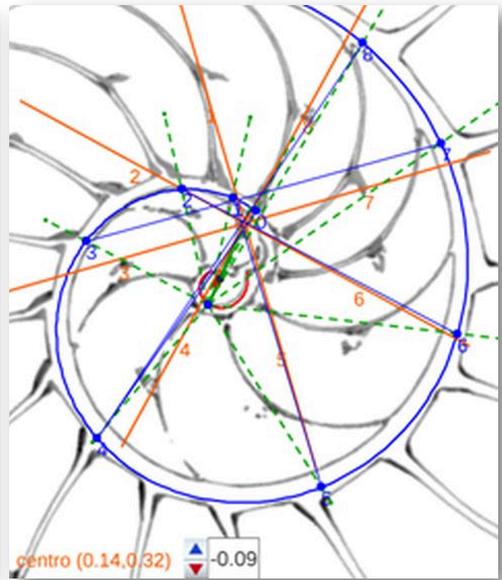


Figura 3.11. Determinación del punto  $C_v$ .

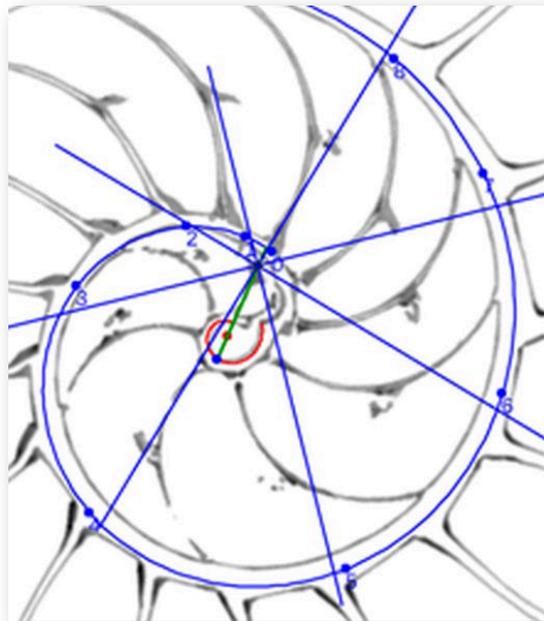


Figura 3.12. Centro de los puntos de tangencia ventrales y paso de  $\frac{\pi}{4}$  entre ellos.

### 3.2.2.2 Factor de escala en los arcos de los septos. Ecuación de los septos.

Conocidos los puntos de tangencia  $T_n$  y los polos de los septos  $S_n$  procedamos a determinar la ecuación de cada uno de los arcos de los septos en este primer verticilo. En la tabla de la **Figura 3.13** se refleja la proporción existente entre  $\overline{S_n T_n}$  y  $\overline{P_v T_n}$  para  $0 \leq n \leq 8$ , es decir, entre el radio vector del arco del septo n-ésimo y el radio vector de la pared ventral, ambos en el punto de tangencia  $T_n$  y el mismo ángulo  $\theta_i + \varepsilon_n$ . Así pues,  $\overline{S_n T_n} = a_n \overline{P_v T_n}$  y, por tanto,  $\overline{S_n T_n} = a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n}$  y, consecuentemente, el arco de ese septo queda definido como:

$$\begin{cases} x = S_{nx} + a_n \kappa^\sigma \cos(\sigma) \\ y = S_{ny} + a_n \kappa^\sigma \sin(\sigma) \end{cases} \quad \sigma \in [\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n, \theta_i + \varepsilon_n] \quad (3.29)$$

donde  $\lambda_n$  es el ángulo que determina la amplitud de ese arco y que tendremos que determinar.

$\theta_i =$ $-5,12$ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{P_v S_n}$	0,2433	0,2523	0,2564	0,2393	0,2343	0,3053	0,4279	0,5243	0,5917
$\overline{P_v T_n}$	0,4139	0,4316	0,4658	0,5396	0,6800	0,8407	0,9803	1,1093	1,1935
$\frac{\overline{S_n T_n}}{\overline{P_v T_n}}$	0,4122	0,4154	0,4495	0,5565	0,6554	0,6369	0,5635	0,5273	0,5042

**Figura 3.13.** Relación entre la pared ventral y los arcos de los septos.

Podemos observar que los coeficientes obtenidos se corresponden con los factores de escala determinados experimentalmente en la tabla de la **Figura 3.5**. Y aquí observamos que **la causa de que las**

cámaras y los septos del Nautilus sean diferentes en el primer verticilo es como consecuencia de que la espiral ventral y la espiral de los polos tienen diferente polo y, consecuentemente, cambia la razón de las distancias entre el polo ventral y los puntos de tangencia  $\overline{P_v T_n}$  y la de cada uno de los polos de los septos con dicho punto de tangencia  $\overline{S_n T_n}$  (Figura 3.14).

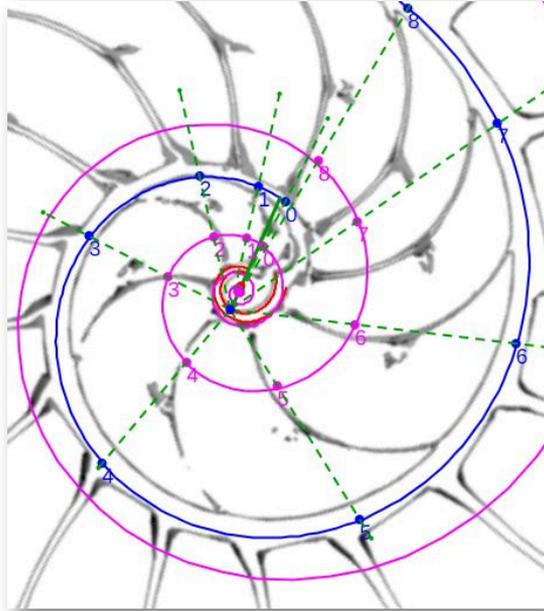


Figura 3.14. Proporción variable entre  $\overline{S_n T_n}$  y  $\overline{P_v T_n}$ .

### 3.2.2.3 Amplitud angular de los septos.

En la ecuación de los septos (3.29) el único parámetro por determinar para cada septo es su amplitud  $\lambda_n$  y para ello, dado que conocemos un extremo del arco del septo, que es el punto de tangencia  $T_n$ , podemos determinar el punto de intersección con la pared dorsal que vamos a denominar  $D_n$ .

Igualando las coordenadas del punto común en (3.26) y (3.29) tenemos:

$$\begin{cases} S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = a \kappa^{\theta_i + \rho_n} \cos(\theta_i + \rho_n) \\ S_{n_y} - D_y + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \operatorname{sen}(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = a \kappa^{\theta_i + \rho_n} \operatorname{sen}(\theta_i + \rho_n) \end{cases} \quad (3.30)$$

donde  $\rho_n$  es el ángulo cuyo vértice es el polo dorsal  $P_D$ , un lado el eje inicial y otro la semirrecta que une  $P_D$  con el punto de corte buscado  $D_n$  y  $a$  es el valor correspondiente a la pared dorsal que según lo hallado con anterioridad sería  $a = \kappa^{-4\pi}$ , pero que vamos a expresar de manera genérica como  $a = \kappa^{-\omega}$  porque posteriormente veremos que será necesario reproducir el cálculo con otro valor.

Elevando al cuadrado en ambas igualdades de (3.30), sumándolas y simplificando obtenemos que:

$$\kappa^{-2\omega} \kappa^{2\theta_i + 2\rho_n} = N(\lambda_n) \quad (3.31)$$

Es decir,

$$\rho_n = \theta_i + \omega + \log_{\kappa} \sqrt{N(\lambda_n)} \quad (3.32)$$

siendo

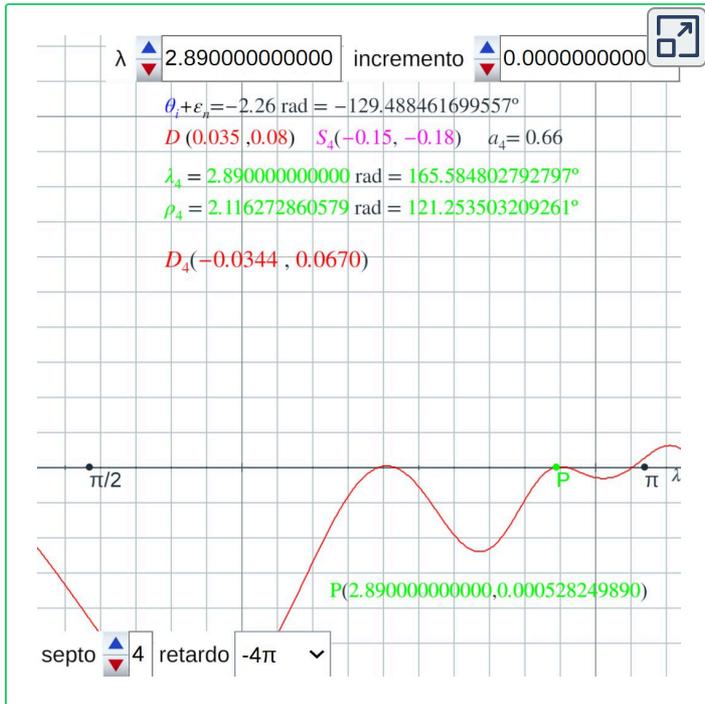
$$\begin{aligned} N(\lambda_n) = & (S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n))^2 \\ & + (S_{n_y} - D_y + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \operatorname{sen}(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n))^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Luego la determinación de  $\lambda_n$  y  $\rho_n$  puede realizarse resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = \kappa^{-\omega} \kappa^{\theta_i + \rho_n} \cos(\theta_i + \rho_n) \\ \rho_n = \theta_i + \omega + \log_{\kappa} \sqrt{N(\lambda_n)} \end{cases} \quad (3.34)$$

La resolución numérica de (3.34) podemos realizarla usando la **Escena interactiva 3.4** y, dado que puede haber más de una raíz, hemos de tener en consideración que la amplitud del septo tomará

aproximadamente valores en el intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  (pudiendo ser algo superior como veremos) y el ángulo en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ .



Escena interactiva 3.4. Determinación de la amplitud del septo y del punto de intersección de éste con la pared dorsal mediante la resolución numérica del sistema (3.34).

Tomando  $\omega = 4\pi$ , que es el valor considerado para la pared dorsal, la resolución nos conduce a los valores representados en la tabla de la **Figura 3.15**. En ella, no se ha considerado el septo octavo ya que su intersección no se produce con la pared dorsal, sino que lo hace con el septo cero, es decir, con la concha embrionaria. Adicionalmente, la intersección obtenida para el primer y segundo septo no es la adecuada (se ha puesto en color rojo solo a nivel informativo) ya que realmente ésta no ocurre para este valor  $\omega = 4\pi$  (ver **Figura 3.16**), será necesario considerar cierto grosor en esa pared —lo cual se corresponde con la situación real, aunque inicialmente lo omitamos en el mundo matemático— para que se produzca el corte esperado.

$\theta_i = -5,12$									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_n$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
$\theta_i + \varepsilon_n$	-5.18	-4,93	-4.48	-3,62	-2,26	-1,01	-0,11	0,62	1,05
<b>Dorsal</b> <b><math>-4\pi</math></b>	<b>Resolución numérica del sistema (3.34)</b>								
$\lambda_n$	2,28	3,45	3,10	2,67	2,89	3,15	3,22	3,12	
	131°	198°	178°	153°	166°	181°	185°	179°	
$\theta_i +$ $\varepsilon_n - \lambda_n$	-7,46	-7,88	-7,38	-6,28	-5,15	-4,15	-3,33	-2,49	
$\rho_n$	5,38	3,19	2,67	1,50	2,12	3,04	4,36	5,23	
$\rho_n$	-51°	183°	153°	86°	121°	175°	250°	300°	
$D_{n_x}$	0,1544	0,0059	-0,0235	-0,0213	-0,0344	-0,0046	0,1110	0,1540	
$D_{n_y}$	0,1101	0,1597	0,1309	0,1097	0,0670	0,0070	0,0099	0,0938	

Figura 3.15. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -4\pi$ . Resolución numérica del sistema (3.34).

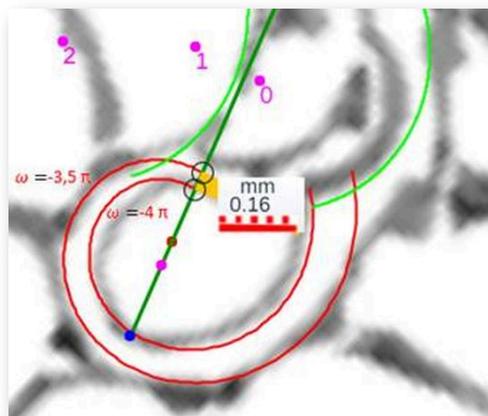
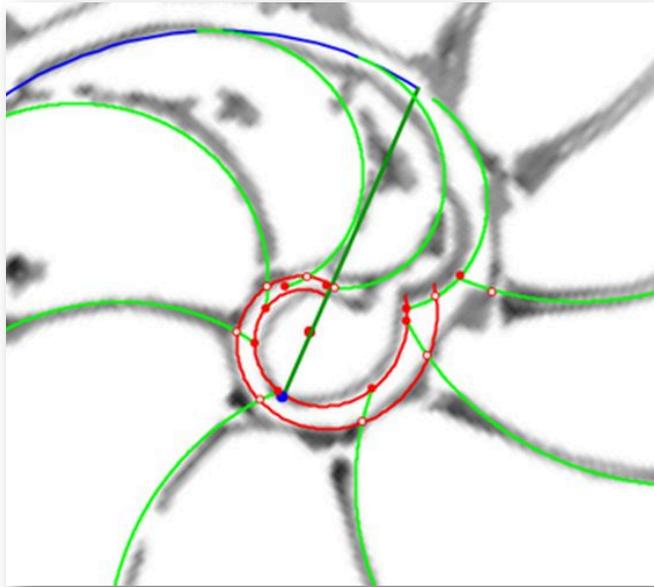


Figura 3.16. Intersección del primer septo con la pared dorsal. La espiral interior se corresponde con  $\omega = -4\pi$  y la exterior con  $\omega = -3,5\pi$ . El grosor existente entre ambas paredes en el eje inicial es de 0,16 mm aproximadamente.

Utilizando la **Escena interactiva 3.3** y, en concreto, la herramienta de medida de ángulos y las coordenadas del punto en que se posiciona el ratón pulsando clic (ver **Figura 3.17**) podemos verificar los resultados anteriores y aportar los valores correspondientes a los septos primero y segundo. Esos datos están reflejados en la **Figura 3.19**.



**Figura 3.17.** Herramienta de medida de ángulos y coordenadas de un punto en la Escena interactiva 3.3.



**Figura 3.18.** Representación de los septos del primer verticilo en el entorno de la pared dorsal e intersección con ésta.

Si consideramos la espiral dorsal determinada con  $\omega = -3,5\pi$ , en la tabla de la **Figura 3.20** está reflejados los datos obtenidos mediante la resolución del sistema (3.34) y manualmente en el caso del septo octavo. Puede observarse en la **Figura 3.18**, la cual se ha obtenido con la **Escena interactiva 3.3**.

$\theta_i = -5,12$ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dorsal $-4\pi$	Manual en la Escena interactiva 3.3								
$\lambda_n$	2,28	2,95	2,90	2,66	2,89	3,14	3,22	2,87	2,73
	131°	169°	166°	152°	166°	180°	185°	164°	156°
$\rho_n$	-0,91	0,05	0,91	1,52	2,16	3,05	4,38	5,24	
	-52°	3°	52°	87°	124°	175°	251°	300°	
$D_{n_x}$	0,1544	0,0539	0,0036	-0,0213	-0,0344	-0,0046	0,1110	0,1540	0,22
$D_{n_y}$	0,1101	0,1389	0,1365	0,1097	0,0670	0,0070	0,0099	0,0938	0,15

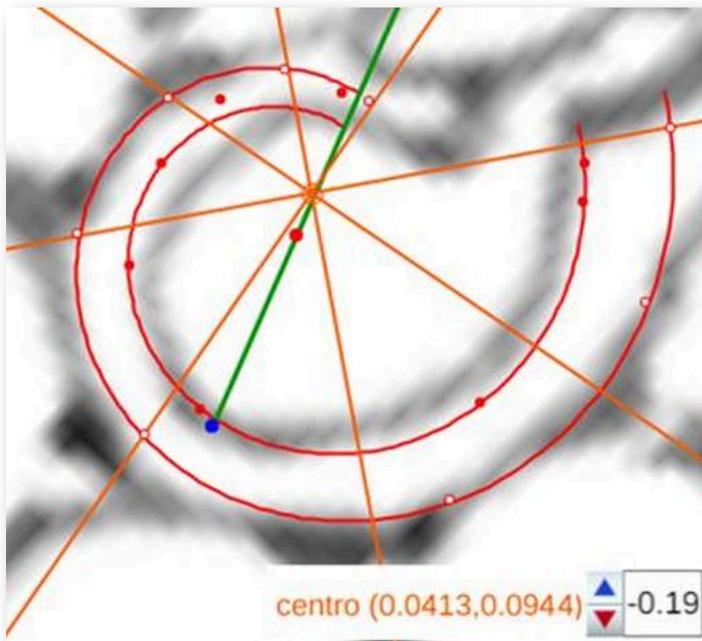
Figura 3.19. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -4\pi$ . Verificación manual de los datos obtenidos en la tabla de la Figura 3.15 y determinación de los septos primero y segundo.

$\theta_i = -5,12$ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_n$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
$\theta_i + \varepsilon_n$	-5,18	-4,93	-4,48	-3,62	-2,26	-1,01	-0,11	0,62	1,05
Dorsal $-3, 5\pi$	Resolución del sistema (3.34)								
$\lambda_n$	1,96	2,84	2,66	2,53	2,80	3,07	3,09	2,98	2,84
	112°	163°	152°	145°	160°	176°	177°	171°	163°
$\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n$	-7,14	-7,77	-7,14	-6,15	-5,06	-4,08	-3,20	-2,36	
$\rho_n$	5,39	-0,09	0,44	1,13	2,01	2,85	4,03	4,87	
	-51°	-5°	25°	65°	115°	163°	231°	279°	
$D_{n_x}$	0,1901	0,0653	0,0303	-0,0184	-0,0557	-0,0280	0,0987	0,1796	0,26
$D_{n_y}$	0,1246	0,1357	0,1492	0,1369	0,0804	-0,0035	-0,0309	0,0515	0,13

Figura 3.20. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -3, 5\pi$ . Resolución numérica del sistema (3.34).

Por otra parte, adicionalmente, usando la herramienta para la visualización del paso  $\frac{\pi}{4}$  ✱ en la **Escena interactiva 3.3**, podemos observar si las intersecciones de los septos con la pared dorsal desde algún punto siguen esa distribución:

- Para los puntos de la espiral dorsal  $\omega = -3,5\pi$ , encontramos que esa relación se consigue aproximadamente desde el punto del eje polar  $C_D(0,0413,0,0944)$  y con un ángulo de desviación respecto a éste de  $-0,19$  (ver **Figura 3.21**). Los puntos de los septos quinto y sexto quedan desplazados —hay que ser consciente que, en concreto, éste no deja de ser más que un divertimento matemático de búsqueda de una regularidad sincrónica teórica que sea sencilla en una difícil asincronía aparente—.



**Figura 3.21.** Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y la pared dorsal con  $\omega = -3,5\pi$ .

- Para los puntos de la espiral dorsal  $\omega = -4\pi$ , esa relación es más burda, pero sí puede observarse esa regularidad fácil de obtener. En la **Figura 3.22** hemos hecho coincidir los puntos del tercer, cuarto y séptimo septo.

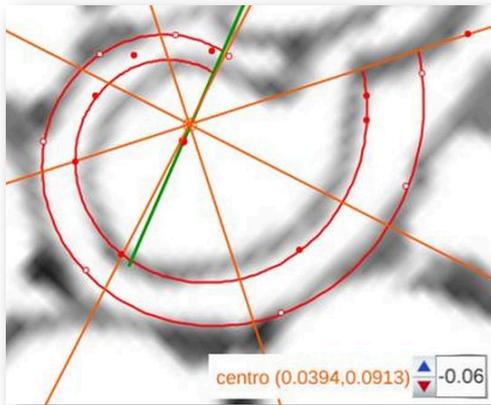


Figura 3.22. Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y la pared dorsal con  $\omega = -4\pi$ .

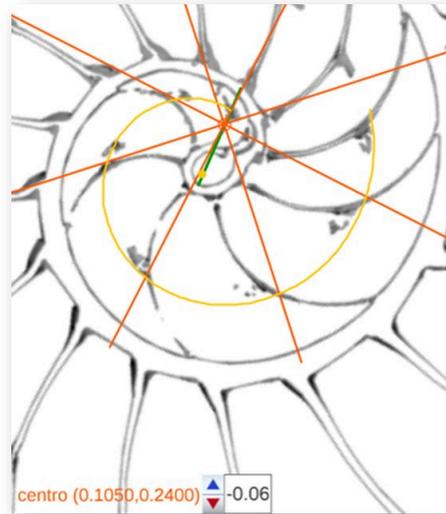


Figura 3.23. Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y el sífinculo en el primer verticilo.

Y, también, podemos observar cuál es la perspectiva de paso  $\frac{\pi}{4}$  para la intersección de los septos con el sífinculo en este primer verticilo (**Figura 3.23**) donde desde el punto  $C_{S_f}(0, 105, 0, 2400)$  y con un ángulo de desviación respecto al eje polar de  $-0,06$  se hacen coincidir las intersecciones correspondientes a los septos segundo al séptimo.

### 3.2.2.4 Puntos notables y destacables en el Nautilus y su relación.

A lo largo del análisis realizado hemos encontrado algunos puntos que podemos catalogar como **puntos notables del Nautilus** que son los que nos han permitido fundamentar y dar la explicación matemática a su ontogenia:

- polo de la pared ventral  $P_v(0, 0)$ ,
- polo de la pared dorsal  $P_D(0, 0350, 0, 0800)$ ,
- polo del sífúnculo  $P_{S_f}(0, 0175, 0, 0400)$  y
- polo de la espiral de los septos  $P_S(0, 0263, 0, 0600)$ .

Y también hemos detectado, en la búsqueda de una regularidad en la irregularidad observable a primera vista, la posible existencia teórica de otros que podemos catalogar como **puntos destacables**, y que son los centros desde los que se observa un paso de  $\frac{\pi}{4}$  entre puntos de análoga procedencia<sup>32</sup>:

- centro de las intersecciones dorsales  $C_D(0, 0413, 0, 0944)$ ,
- centro de los polos de los septos  $C_S(0, 0700, 0, 1600)$ ,
- centro de las intersecciones de los septos con el sífúnculo  $C_{S_f}(0, 1050, 0, 2400)$  y
- centro de las intersecciones ventrales  $C_v(0, 1400, 0, 3200)$ .

Unos y otros están reflejados en la **Figura 3.24** y se ubican en el eje que hemos denominado polar, el cual marca el ángulo inicial común a todas las espirales cordobesas involucradas en el estudio y es el comienzo de la fase de crecimiento post embrionario.

---

<sup>32</sup> En una fase anterior de este estudio se realizó una primera aproximación de los valores de los centros y que aquí modificamos, la introducción de la tangencialidad de los septos y el cálculo de las intersecciones ventrales y dorsales ha permitido ubicar teóricamente mejor dichos centros.

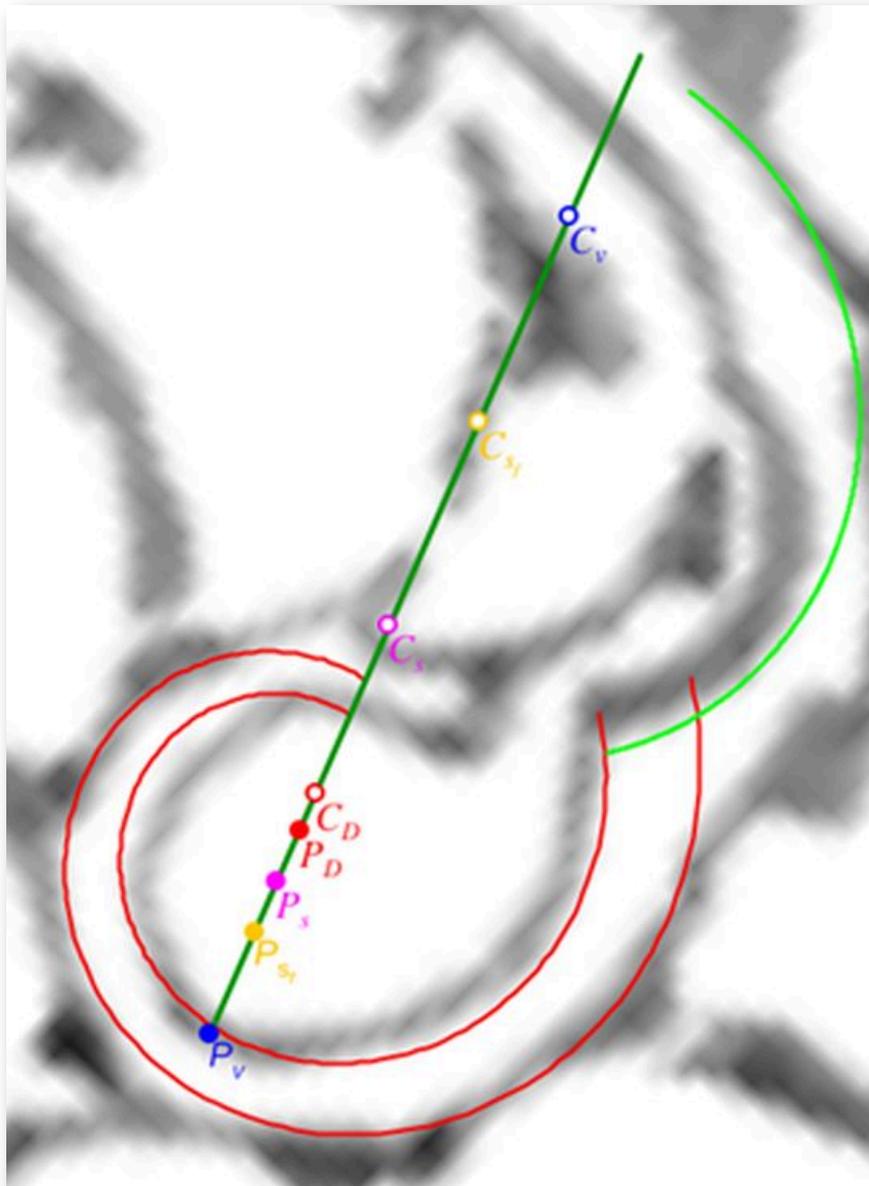


Figura 3.24. Ubicación del polo de la espiral ventral  $P_v$ , polo de la espiral de septos  $P_s$ , polo de la espiral del sínculo  $P_{S_f}$ , polo de la espiral o espirales dorsales  $P_D$ , centro de las intersecciones dorsales  $C_D$ , centro de los polos de los septos  $C_s$ , centro de las intersecciones con el sínculo  $C_{S_f}$  y centro de las intersecciones ventrales  $C_v$ .

La relación existente entre los puntos notables ha quedado reflejada anteriormente y puede resumirse en:

- La no coincidencia entre el polo ventral  $P_v$  y el dorsal  $P_D$  es la que establece la diferencia ontogénica entre el crecimiento en el primer verticilo (no uniforme) y en los restantes (uniforme).
- El polo del sífúnculo  $P_{S_f}$  es el punto medio del segmento determinado por los polos anteriores, es decir,  $\overline{P_v P_{S_f}} = \frac{1}{2} \overline{P_v P_D}$ . Esta relación ha quedado justificada matemáticamente con anterioridad al plantear el sífúnculo como eje intermedio entre la pared dorsal y la ventral.
- El polo  $P_S$  sigue la relación  $\overline{P_v P_S} = \frac{3}{4} \overline{P_v P_D}$ , si bien no he desentrañado el porqué de esa proporción concreta. La no coincidencia de este polo con el ventral es la causa de que los septos en este primer verticilo tengan diferente factor de escala y cambie la amplitud de su arco.

Y la de estos puntos notables con los puntos destacables:

- El centro dorsal  $C_D$ :  $\overline{P_v C_D} = \frac{6}{5} \overline{P_v P_D}$ .
- El centro de los polos de los septos  $C_s$ :  $\overline{P_v C_s} = 2 \overline{P_v P_D}$ .
- El centro de las intersecciones septo-sífúnculo  $C_{S_f}$ :  $\overline{P_v C_{S_f}} = 3 \overline{P_v P_D}$ .
- El centro ventral  $C_v$ :  $\overline{P_v C_v} = 4 \overline{P_v P_D}$ .

Relaciones, cuya causalidad queda abierta a futuras sinapsis neuronales de quienes profundicen en esta investigación.

En la **Escena interactiva 3.3** el botón  nos permite visualizar su localización y las relaciones, también puede observarse en la **Figura 3.25**.

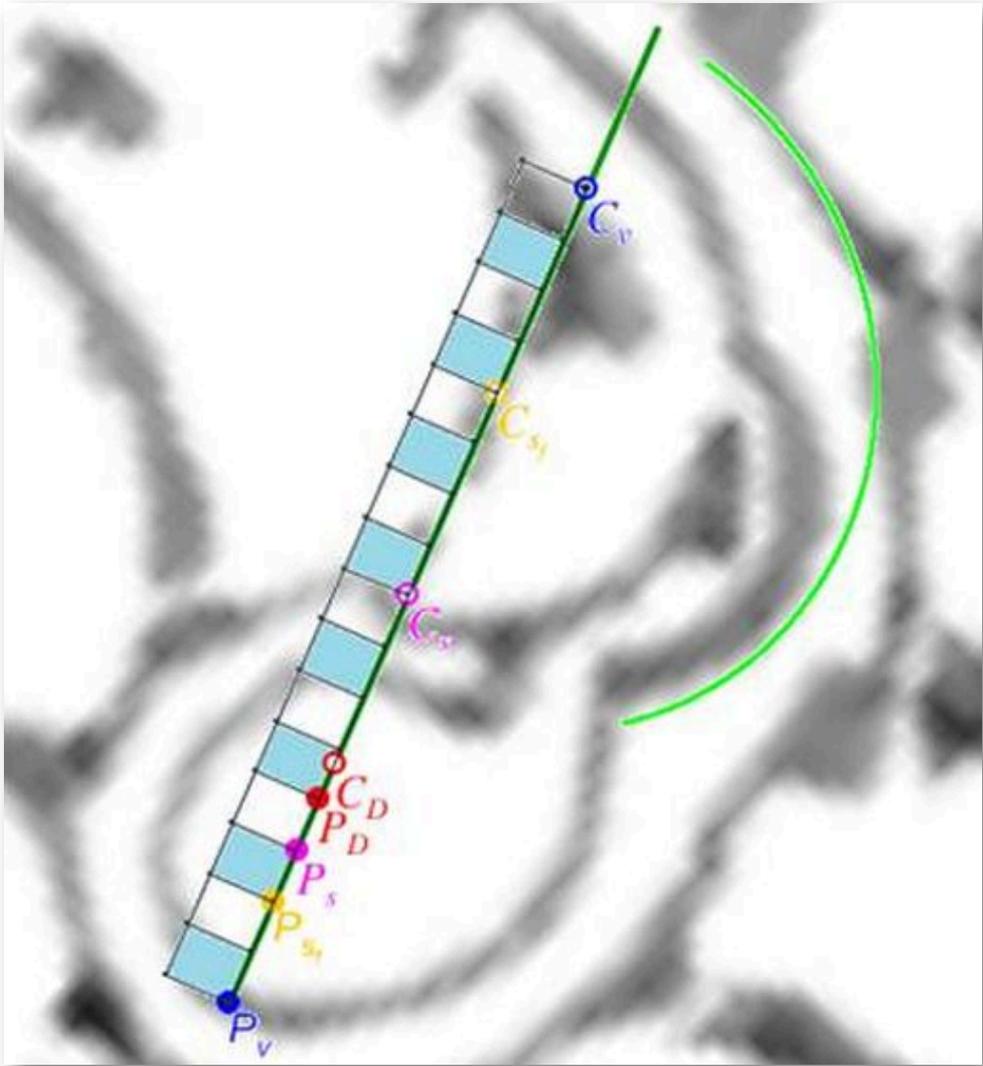
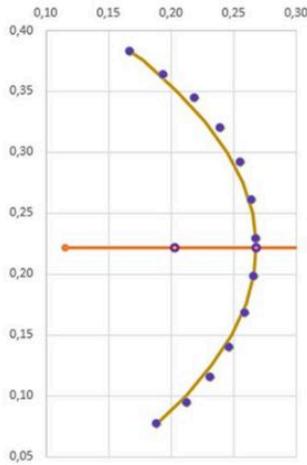
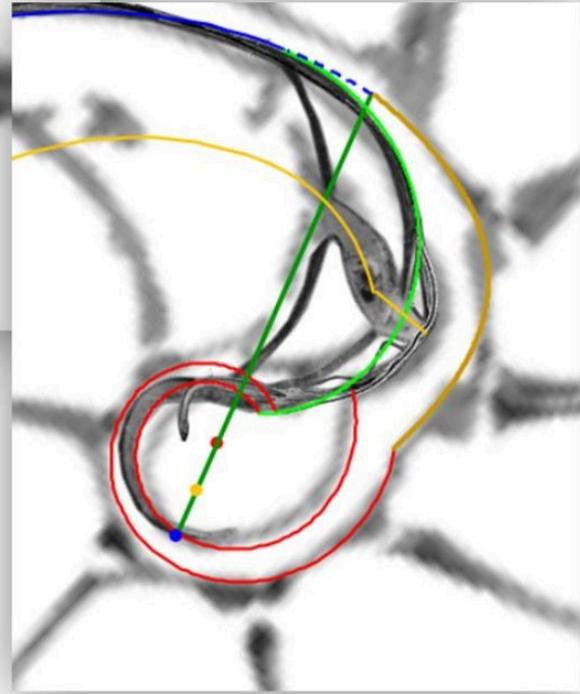
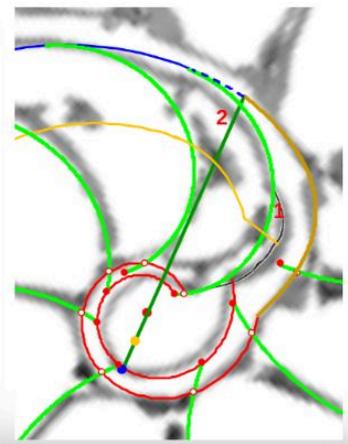
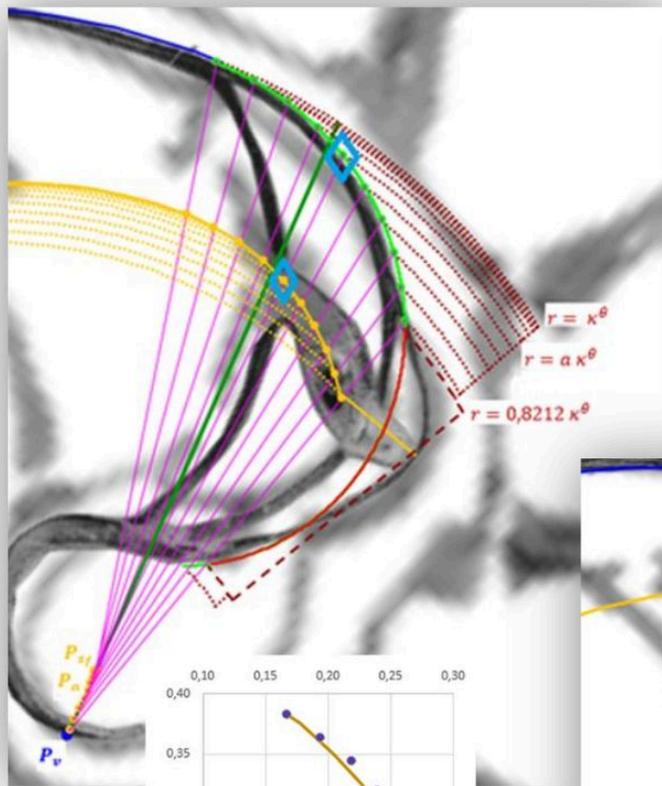


Figura 3.25. Puntos notables y destacables del Nautilus y regla escalada que muestra sus relaciones.





# Capítulo IV

## Sitios singulares en el primer verticilo



Adicionalmente a lo analizado hasta ahora, en el primer verticilo del Nautilus encontramos algunos sitios que podemos catalogar como singulares, pues se muestran como específicos respecto a su entorno o que, aparentemente, se salen de la uniformidad cordobesa que hemos ido detectando y desgranando en los capítulos anteriores sobre la "Ontogenia matemática del Nautilus". Pero, hasta en estas situaciones, la proporción cordobesa y la espiral cordobesa aparece sin más que rasgar matemáticamente en la concha del Nautilus, por supuesto con gran mimo.

Esos sitios singulares son:

- La concha embrionaria (**Figura 4.1**).
- El sífúnculo en la segunda cámara septal y su relación con la ampliación del fragmocono en el primer septo (**Figura 4.2**).
- La confluencia de la pared dorsal con la concha embrionaria en la fase de transición entre el primer y segundo verticilo, cámaras octava, novena y décima (**Figura 4.3**).

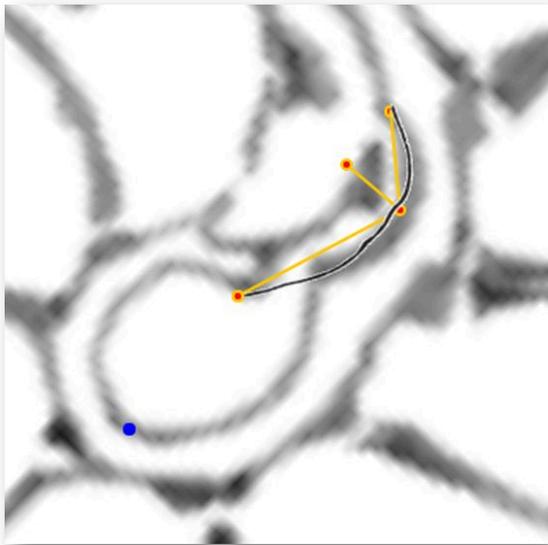


Figura 4.1. La concha embrionaria.

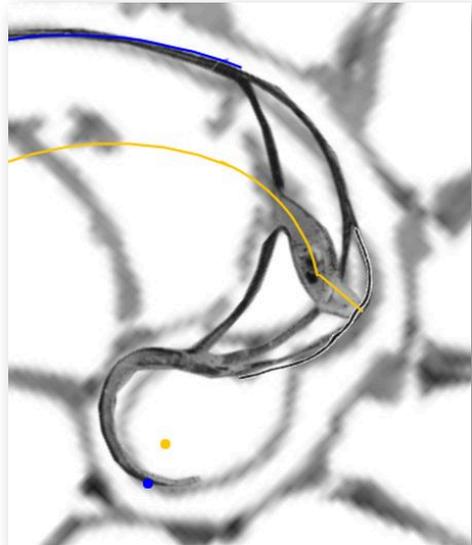


Figura 4.2. El sífúnculo en la segunda cámara septal y la ampliación del fragmocono .

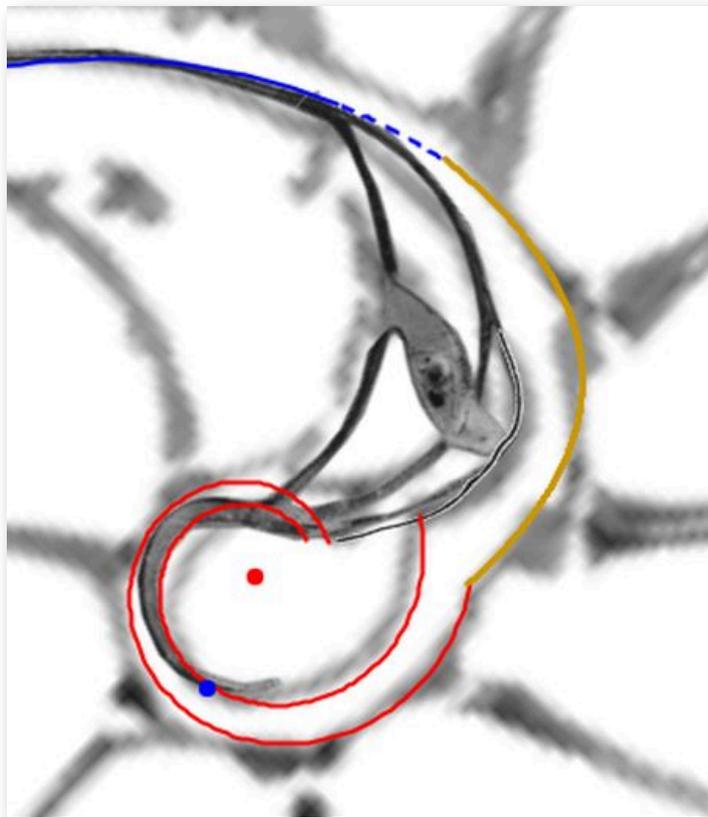
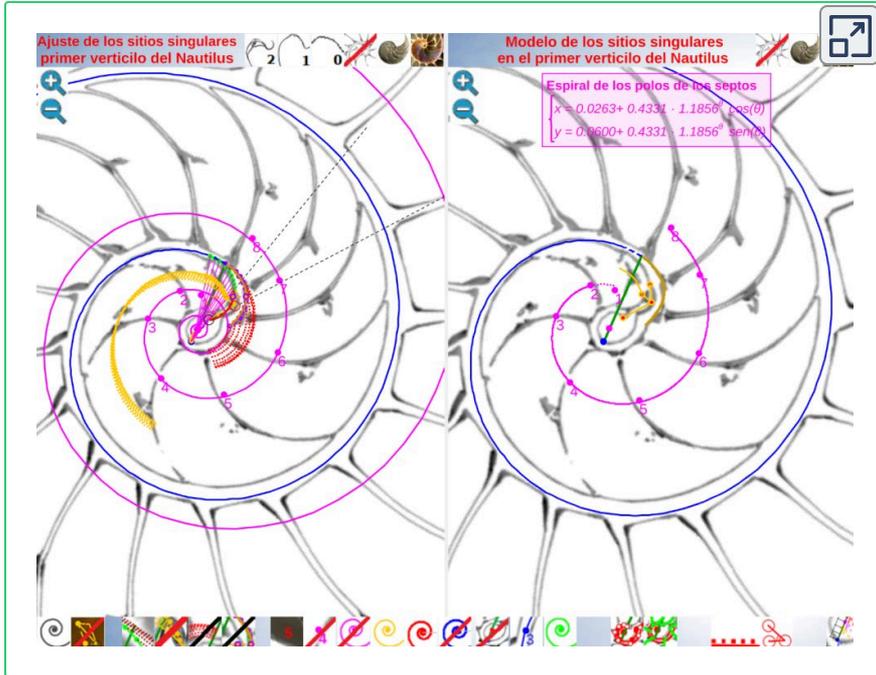


Figura 4.3. La pared dorsal en la transición entre el primer y segundo verticilo.

En este capítulo analizamos estas singularidades y encuadramos su modelado en el contexto cordobés del Nautilus. Para ello, acudimos y aplicamos el invariante enunciado desde el inicio y que reiteradamente hemos ido aplicando en toda la modelación:

"Todo punto interior a la concha o sobre ella se obtiene como la intersección de dos espirales cordobesas, una longitudinal similar a la ventral y otra transversal similar a la septal"

La **Escena interactiva 4.1** es la que nos ha servido de base para efectuar el análisis de estos sitios singulares y en la **Figura 4.4** podemos observar el modelo al que llegaremos.



Escena interactiva 4.1. Modelando los sitios singulares del Nautilus en el primer verticilo. En el espacio de la izquierda: "Ajuste de los sitios" y en el de la derecha: "Modelo de los sitios". [Indicaciones](#).

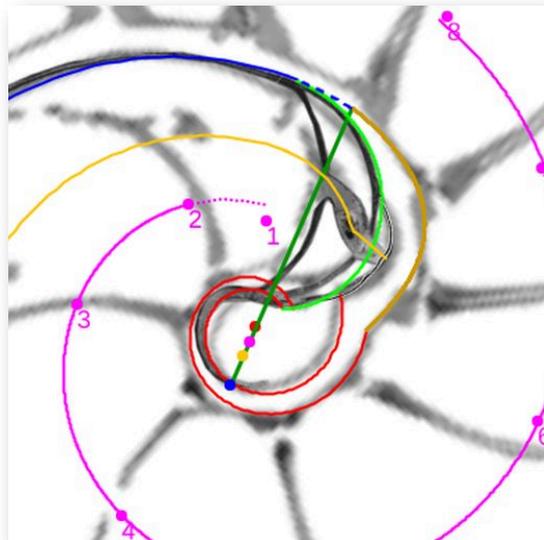


Figura 4.4. Modelando los sitios singulares del Nautilus en el primer verticilo.

## 4.1 La concha embrionaria

En nuestro planteamiento teórico, la concha embrionaria la hemos aproximado de manera análoga a los otros septos, es decir, como un arco de espiral cordobesa, asimilándola a un septo primigenio que hemos ordenado y enumerado como septo cero, pero es obvio que ese ajuste fue algo meramente coyuntural para salvar el desconocimiento de su forma exacta inicial y, por ello, excluirémos ese septo del modelo final. En la **Figura 2.6** (procedente de Tanabe and Uchiyama, 1997 [17]) se muestra esa concha preseptal observándose que es asimétrica y en la **Figura 2.7** (de los mismos autores), ya en la etapa del primer septo, el engarce del sífúnculo mantiene esa asimetría o más bien podríamos intuir que se ubica en esa posición como consecuencia de ella. Este primer septo marca el paso a la etapa postembrionaria y a la regularidad que hemos ido analizando, detectando y reflejando en todo el análisis que hemos detallado anteriormente y, sin embargo, la primera cavidad septal queda opacada en nuestra comprensión actual, en parte, debido a que su especificidad y unicidad dificulta su modelación.

En Galo *et al.* (2016) [4] conjeturamos que la asimetría de la concha embrionaria, no la concha en sí, se asemejaba a la correspondiente a los lados del triángulo gnomon de un triángulo cordobés. En la **Figura 4.5** puede observarse este triángulo y su relación con el triángulo cordobés como gnomon<sup>33</sup> del mismo.

Usando la **Escena interactiva 4.1**, podemos contrastar el perfil de la concha embrionaria aportada por Tanabe, and Uchiyama [17] con dicho gnomon. Para ello accedemos a la herramienta “gnomon cordobés”, pulsando el botón , y mediante dos controles gráficos podemos posicionar ese gnomon, desplazarlo y escalarlo para

<sup>33</sup> En la **Figura 4.5** observamos que el triángulo  $BDE$  es semejante al  $ABD$  y, por ello, el triángulo  $ABE$  es el gnomon del primero.

confrontarlo con ella (en el espacio izquierdo de esa escena se dibuja un paralelogramo para un ajuste mejor y en el derecho el ajuste final).

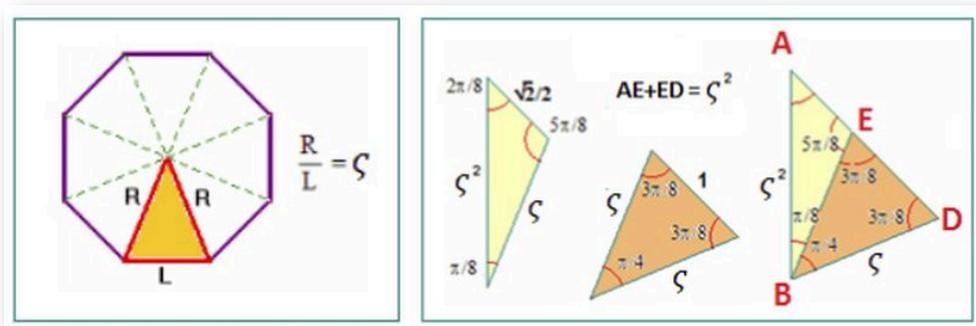


Figura 4.5. Número cordobés  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$  y la proporción cordobesa (relación entre el radio y el lado de un octógono). Triángulo cordobés (en color naranja) y el gnomon de este triángulo (en amarillo).

La concha embrionaria podemos ponerla visible pulsando el botón . Cuando esos controles se posicionan en los puntos  $P(0,0864,0,1063)$  y  $Q(0,2155,0,1751)$  obtenemos la imagen reflejada en la **Figura 4.6**. En ella:  $P$  es la constricción dorsal,  $Q$  se ubica en la cicatriz,  $R(0,2078,0,2539)$  es la constricción ventral y  $H(0,1723,0,2107)$  es el pie de la altura trazada desde  $Q$ .

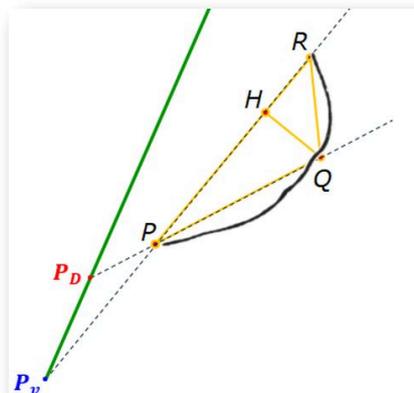
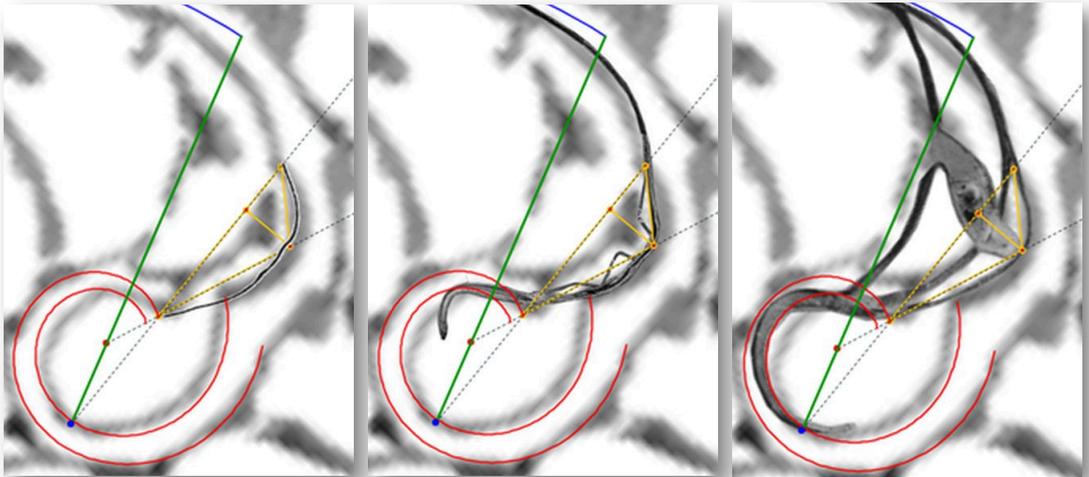


Figura 4.6. Ajuste del gnomon de un triángulo cordobés a la concha embrionaria.

Adicionalmente observamos que el segmento  $\overline{PR}$  que une la constricción dorsal con la ventral se ubica en la semirrecta que pasa por el polo ventral  $P_v$  y ésta forma un ángulo con el eje inicial de  $-0,27$  radianes. Pero también nos encontramos con una nueva sorpresa, pues el segmento  $\overline{PQ}$  está en la semirrecta que pasa por el polo dorsal  $P_D$ , formando ésta un ángulo de  $-0.69$  radianes con el eje inicial.

En las imágenes de la **Figura 4.7** se refleja ese gnomon en una triple comparativa que se corresponde con las fases embrionaria, la del primer septo y la del segundo (éstas se obtienen pulsando los botones  $\curvearrowright_0$ ,  $\curvearrowright_1$  y  $\curvearrowright_2$  en la **Escena interactiva 4.1**). Y ahora lo que se comprueba es que el **sifúnculo** en la primera cámara septal sigue la dirección de la altura  $\overline{QH}$  de este triángulo gnomon.



A. Gnomón cordobés y concha embrionaria.

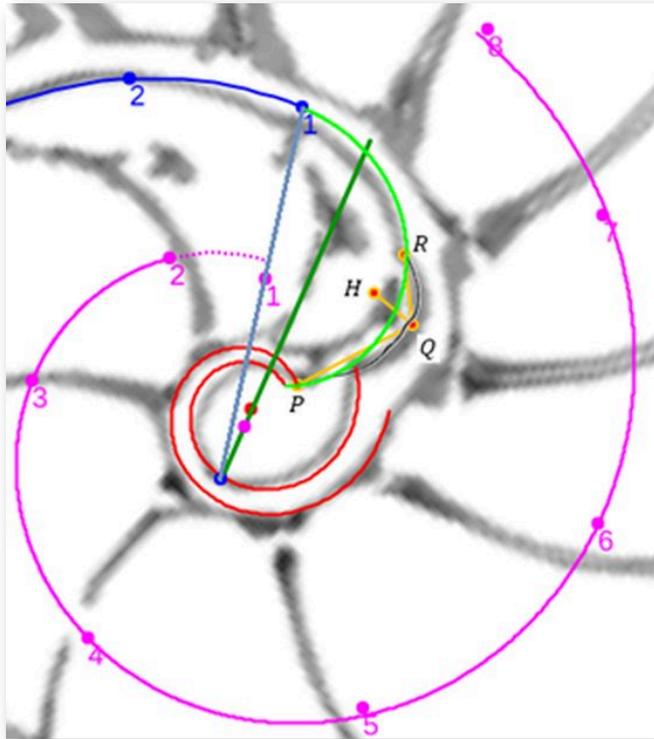
B. Gnomón cordobés y fase del primer septo.

C. Gnomón cordobés y fase del segundo septo.

**Figura 4.7. Ajuste del gnomon de un triángulo cordobés en las tres primeras fases de la ontogenia del Nautilus .**

## 4.2 El primer septo

En el primer septo podemos distinguir dos fases: una correspondiente a la formación de la primera cámara septal al cerrar la concha embrionaria en la constricción dorsal  $P$  y en la ventral  $Q$ , y otra en la que este septo<sup>34</sup> amplía su longitud hasta el primer punto de tangencia con la pared ventral  $T_1$  (3.28). Ver la **Figura 4.8**.



**Figura 4.8.** El primer septo (línea verde) y la espiral de los polos de los septos (línea magenta). Segmento  $P_v S_1 T_1$  (polo ventral, polo del primer septo y primer punto de tangencia con la pared ventral) en color azul grisáceo.

<sup>34</sup> Para ser más precisos, quizás deberíamos decir que es la concha embrionaria la que se extiende adoptando la misma forma que el primer septo. Biológicamente es distinguible por el tipo de sedimentos —**Figura 2.6.C**—, pero matemáticamente no es trascendente e identificamos ambas capas en una única línea.

La imposición de que el primer septo pase por los puntos  $P$  y  $R$  y sea tangente en  $T_1$ , lo cual adicionalmente obliga a que el polo  $S_1$  de este septo esté incluido en el segmento  $\overline{P_v T_1}$ , nos fuerza a rectificar la posición que previamente habíamos considerado en (3.29) para  $n = 1$  o, más bien, a ubicarlo con más certeza y/o respaldo. Imponiendo estas condiciones determinamos<sup>35</sup> que la ecuación de este primer septo se ha de corresponder con:

$$\begin{cases} x = 0.0499 + 0,4571 \kappa^\sigma \cos(\sigma) \\ y = 0,2277 + 0,4571 \kappa^\sigma \sen(\sigma) \end{cases} \quad \sigma \in [\theta_i - 2,42, \theta_i - 0,97] \quad (4.1)$$

donde el valor inferior en el intervalo  $\rho = \theta_i - 2,42 = -7.54$  es el argumento correspondiente a  $P$ , que es también el punto de inicio de la pared dorsal con ángulo de retardo  $-3,5\pi$ , y para el valor superior  $\rho = \theta_i - 0,97 = -6,09$  tenemos  $R$ .

Hay que reseñar que el nuevo polo  $S_1(0,0499,0.2277)$  obtenido para este septo ya no se ubica en la espiral de polos de los septos cuya ecuación es (3.27), sino que está trasladado respecto a ella. Pero como veremos a continuación, en la segunda cámara septal también acontece una traslación del sífinculo al producirse una ampliación del fragmocono y, por tanto, esta aparente excepcionalidad hemos de encuadrarla en los cambios que acontecen en esta cámara que se muestra tan especial.

Cerrada la primera cámara con el arco de espiral descrito en (4.1), éste se prolonga hasta el punto  $T_1$ , es decir,  $\rho$  en (4.1) va incrementando su valor en el intervalo  $[-6,09, -4.93]$ , y si consideramos también su intersección con la espiral dorsal con

---

<sup>35</sup> Se tienen suficientes datos para hacerlo analíticamente y también de manera aproximada en la **Escena interactiva 4.1** se dispone de la herramienta “espiral cordobesa”, accesible desde el botón .

ángulo de retardo  $-4\pi$ , también  $\rho$  decrementaría tomando valores en el intervalo  $[-7.66, -7.54]$ .

### 4.3 El fragmocono embrionario y su ampliación

Para acotar el fragmocono correspondiente a la concha embrionaria determinemos analíticamente las espirales cordobesas que teniendo como polo el ventral  $P_v$ <sup>36</sup> —aquellas que son del tipo  $r = a \kappa^\theta$ —, pasan respectivamente por las constricciones dorsal y ventral ( $P$  y  $R$  en la **Figura 4.6** y en la **Figura 4.8**):

- $P$  se incluye en  $r = 0,3428 \kappa^\theta = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta$  con  $\theta = \theta_i - 0,27$  y esta espiral acota al fragmocono embrionario en la parte dorsal.
- $R$  está en  $r = 0,8212 \kappa^\theta$  con igual argumento  $\theta = \theta_i - 0,27$ , acotando al fragmocono embrionario en la parte ventral.

Adicionalmente, ubiquemos también de análoga forma a  $H$  y  $Q$  (**Figura 4.6** y **Figura 4.8**) por su relación con el sífúnculo en la primera cámara septal, datos que usaremos posteriormente:

- $H$  está en  $r = 0,6813 \kappa^\theta$  con  $\theta = \theta_i - 0,27$  y es el punto que marca el final del sífúnculo en la primera cámara septal.
- $Q$  está en  $r = 0,7191 \kappa^\theta$  con  $\theta = \theta_i - 0,47$  y es el inicio del sífúnculo en esa cámara septal.

---

<sup>36</sup> Parece coherente que en esta fase primigenia optemos por este tipo de espirales, pues el fragmocono en el segundo y tercer verticilo está delimitado por dos espirales cordobesas (realmente la misma) con ese polo  $P_v$  común y en el primer verticilo interviene la espiral ventral que es de ese tipo y la espiral dorsal que tiene un polo diferente, pero ésta última se inicia en la segunda cámara.

Y también al punto  $T_1$ , que además de punto de tangencia del septo es el inicio de la pared ventral<sup>37</sup>, que está en la espiral en  $r = \kappa^\theta$ .

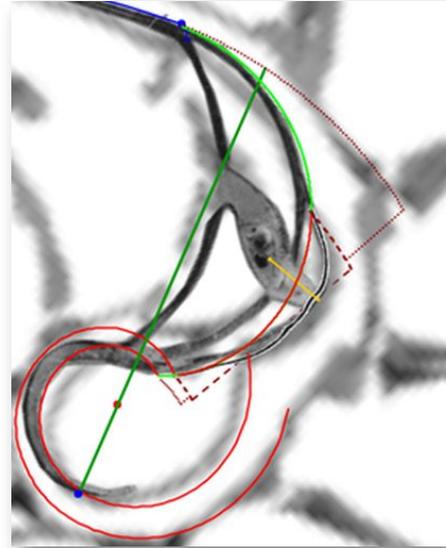
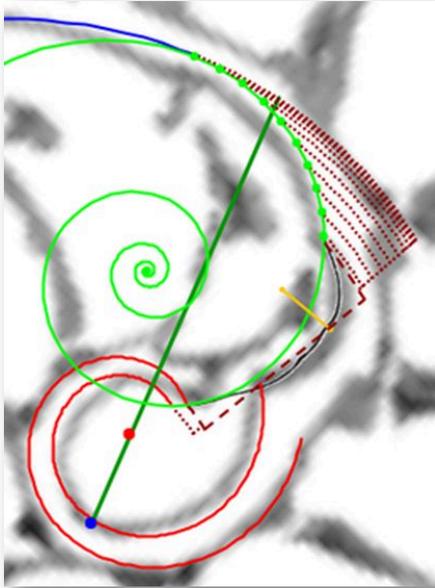
Con base en los datos anteriores, el fragmocono embrionario está acotado por las espirales  $r = \kappa^{-2\pi} \kappa^\theta$  y  $r = 0,812 \kappa^\theta$  y al ir ampliándose el primer septo hacia  $T_1$ , va aumentando progresivamente su amplitud hasta quedar delimitado por la pared ventral  $r = \kappa^\theta$ .

En las imágenes A y B de la **Figura 4.9** puede observarse este cambio en el fragmocono y también pulsando el botón  en la **Escena interactiva 4.1**. En esas figuras, para reflejar la ampliación del fragmocono, se han tomado diez puntos ubicados en la parte ampliada de este primer septo, dibujados en color verde, y que están angularmente equiespaciados, es decir, que se corresponden con una partición uniforme del intervalo  $[-6,09, -4.93]$  y en color marrón se han reflejado sendos arcos de espirales copolares, con polo  $P_v$ , y que pasan respectivamente por esos diez puntos. Se observa, que la distribución de esos arcos no es uniforme y, por tanto, que la ampliación del fragmocono acontece de manera no uniforme, crece más rápido inicialmente para estabilizarse después convergiendo a la espiral que será la pared ventral  $r = \kappa^\theta$ .

El incremento en la amplitud del fragmocono puede interpretarse que es un recurso o adaptación biológica mediante la que se aumenta sustancialmente la capacidad de la segunda cámara (en una relación cúbica, según las reglas de proporcionalidad) y de esta manera se contribuye significativamente a la consecución de la flotabilidad en fases posteriores.

---

<sup>37</sup> Este es un nuevo detalle que precisamos aquí y, por tanto, en la ecuación de la pared ventral (2.1) o (2.2), dado que su trayectoria se inicia en  $T_1$ , entonces el intervalo donde toma valores  $\theta$  es  $[\theta_i + \varepsilon_1, \theta_f]$  con  $\varepsilon_1 = 0.19$  de acuerdo con lo reflejado en la tabla de la **Figura 3.9**.



A. Incremento de la amplitud del fragmocono en el primer septo. Detalle del crecimiento progresivo.

B. Comparación de la amplitud del fragmocono en la concha embrionaria y el primer septo ampliado.

Figura 4.9. Con la poligonal discontinua en color **marrón** se muestra la amplitud del fragmocono en la concha embrionaria y con la poligonal de puntos, con ese mismo color **marrón**, cómo se amplía el fragmocono al extenderse el primer septo. La parte del septo correspondiente a la concha embrionaria es la línea continua de color **marrón rojizo** y en color **verde** por un lado su extensión hacia la pared dorsal (en **rojo**) y por otro hacia la ventral (en **azul**) .

Observemos que el eje del fragmocono embrionario viene dado por la espiral:

$$r = \frac{\kappa^{-2\pi} + 0,8212}{2} \kappa^\theta = 0,5820 \kappa^\theta \quad (4.2)$$

que claramente difiere de la posición que ocupa la parte final del sífúnculo en esta primera cámara  $r = 0,6813 \kappa^\theta$ , éste está desplazado respecto al eje y se encuentra más próximo a la pared ventral que a la dorsal. La asimetría de la concha embrionaria causa esa posición asimétrica del sífúnculo y este hecho es de gran interés

ya que si esa posición se mantiene en las cámaras posteriores, lo cual acontece según vimos en (2.7) y (2.8) y en la **Figura 2.39**, entonces el sífúnculo está durante más tiempo en contacto directo con el líquido cameral y, por tanto, la fase de vaciado acoplado (Ward *et al.* 1981) [22], que es la que acontece cuando el sífúnculo está en contacto con el líquido (**Figura 2.40**), puede acontecer durante más tiempo que la desacoplada.

El coeficiente de valor **0,6813** sí está próximo al coeficiente del sífúnculo que a partir de la tercera cámara es  $\frac{1+\kappa^{-2\pi}}{2} \simeq 0,6715$  y, éste sí coincide con el coeficiente del eje del fragmocono correspondiente al primer septo ampliado (el que está acotado entre  $r = \kappa^{-2\pi}\kappa^\theta$  y  $r = \kappa^\theta$ ), pero con la particularidad de que, en este primer verticilo, a partir del segundo septo, el polo del sífúnculo  $P_{S_f}$  es diferente al ventral y, por ello, está trasladado respecto a dicho eje.

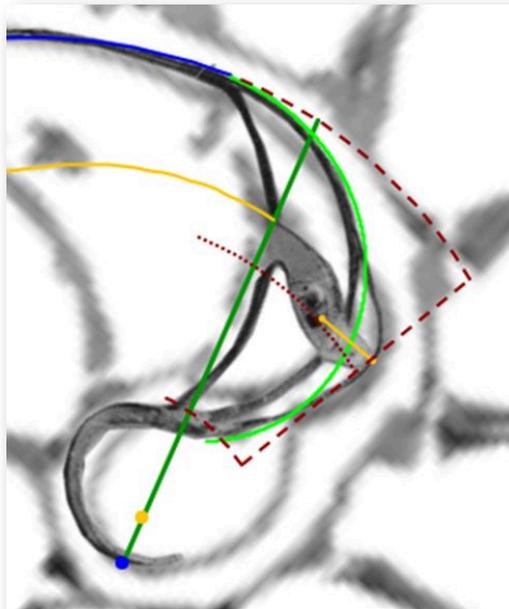


Figura 4.10. Fragmocono (línea **marrón** discontinua) delimitado por el primer septo ampliado (**verde**), eje del mismo (línea **marrón** de puntos), sífúnculo en la cámara embrionaria y sífúnculo a partir del segundo septo (**naranja**).

Ver detalle en la **Figura 2.39**, donde el sífúnculo (en color **naranja**) a partir de la segunda cámara es la traslación del eje del fragmocono (línea **marrón** de puntos). Estos datos, junto al análisis que haremos en la próxima sección, nos permite explicar la causa de la desviación del sífúnculo en el primer verticilo respecto al eje del fragmocono, aspecto que había quedado abierto en la sección “El canal sífuncular en el primer verticilo”. El sífúnculo en el segundo y tercer verticilo, como ya vimos, sí coincide con el eje del fragmocono.

## 4.4 El sífúnculo en la segunda cámara septal

La variación en la amplitud del fragmocono en el inicio de la fase postembrionaria también va acompañada de una curiosa y, a priori, extraña y llamativa variación del sífúnculo en la segunda cámara septal, que bien acontece en su forma o bien ocurre en su posición (ver la **Figura 4.11** y la **Figura 4.12**). Es obvio establecer una relación causal entre ambas situaciones y tratar de modelarlo matemáticamente. Un reto, pues este hecho acontece en un corto trayecto y se presenta como una singularidad respecto al comportamiento posterior —el sífúnculo a partir del segundo septo es una espiral cordobesa que analizamos en (2.7) y (2.8)—. Planteando una analogía en lo que sería un comportamiento humano, en definitiva, un comportamiento animal, ¿qué haría usted, intuitivamente, si va avanzando por un pasillo que progresivamente va ensanchándose? Yo apuntaría a que su posición iría adaptándose al nuevo ancho manteniendo cierta correlación en la distancia a las paredes, es decir, si inicialmente ocupara la posición intermedia en el pasillo, tendería a mantener esa posición media, y si la posición inicial estuviera más cercana a una pared tendería a mantener una relación similar adaptativa al nuevo ancho encontrado, ¿opina igual?



Figura 4.11. Fotografía de la primera y segunda cámara septal procedente de Landman et al. (1989, p. 7) [9]. El asterisco marca al primer septo.

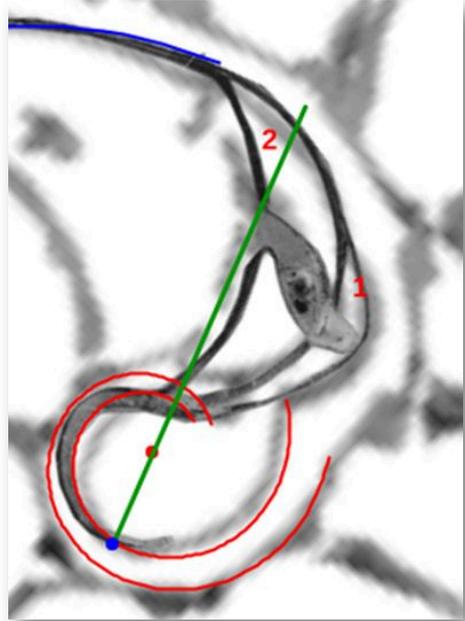


Figura 4.12. Variación que acontece en la posición del sífinculo en la segunda cámara septal (cavidad entre el primer y segundo septo) respecto a la primera (cavidad formada por la concha embrionaria y el primer septo).

Consecuentemente, aquí establecemos que el incremento que acontece en la amplitud de la segunda cámara septal, respecto a la primera, es la causa del cambio sífincular observado en esa segunda cámara. Y, desde el punto de vista matemático, entre la alternativa de cambio de forma del sífinculo o cambio adaptativo a la nueva amplitud manteniendo la forma, optaremos por esta segunda opción aplicando la segunda invariante de nuestro modelo —el sífinculo es una espiral cordobesa—. Pero, a su vez, esta adaptación puede plantearse desde dos perspectivas: una mediante un cambio de escala (coeficiente variable con polo común al ventral, es decir, espiral cordobesa  $r = a_t \kappa^\theta$  con  $a_t$  variable en el tiempo  $t$ ) u otra con coeficiente constante y traslación progresiva de la espiral mediante la correspondiente traslación de su polo.

Esta segunda opción puede ser la más plausible, ya que como hemos visto el sífúnculo en el primer verticilo y a partir de la segunda cámara tiene un polo común  $P_{S_f}$  diferente del ventral. Así pues, inicialmente coincide su polo con el polo ventral  $P_v$  y finalmente queda ubicado en  $P_{S_f}$ .

Para concretar analíticamente este modelo, quizás, sea conveniente realizar una retrospectiva rápida de lo analizado anteriormente en relación con el sífúnculo, en orden cronológico inverso al de crecimiento. Hemos visto que el sífúnculo:

- En el segundo y tercer verticilo coincide con el eje del fragmocono y su forma es la de una espiral cordobesa de ecuación  $r = b \kappa^\theta$  con polo coincidente con el ventral<sup>38</sup> y factor de escala  $b = \frac{1+\kappa^{-2\pi}}{2} = 0,6715\dots$
- En el primer verticilo, a partir del segundo septo, tiene la forma cordobesa con el mismo factor de escala anterior, pero con el polo ubicado en el punto que hemos denotado  $P_{S_f}$ , su ecuación es la (2.7), y no se corresponde con el eje del fragmocono delimitado por la pared ventral y la dorsal, pero sí es la traslación del eje del fragmocono ampliado por el primer septo.
- En la segunda cámara septal, la comprendida entre el primer y segundo septo, el sífúnculo sufre un cambio que es el objeto actual de estudio.

---

<sup>38</sup> A raíz del análisis que efectuamos en esta sección podría plantearse que, realmente, en el segundo y tercer verticilo el polo del sífúnculo es también  $P_{S_f}$  y no el ventral, no obstante, a la escala de esos verticilos la diferencia no es significativa entre ambas espirales y además dado que en dichos verticilos la espiral ventral y dorsal tienen como polo común el ventral, también el eje del fragmocono tiene a éste como polo común.

- Y en la primera cámara, la formada por la concha primigenia y el primer septo, el sífúnculo embrionario sigue una trayectoria rectilínea en una posición asimétrica coincidente con la asimetría conocida y advertida en la concha embrionaria (ver el detalle de esta fase en la fotografía original de Ladman *et al.* (1989, p.7) [9] que se ha incluido en la **Figura 4.7.C** y en la **Figura 2.7, Figura 2.8 y Figura 2.9**).

En base a todo lo indicado, nuestra propuesta para modelar el sífúnculo en la segunda cámara septal establece que todos los puntos de este trozo sífuncular son puntos de la misma espiral cordobesa  $r = \frac{1+\kappa^{-2\pi}}{2} \kappa^\theta$ , pero con un polo que va trasladándose en la dirección del eje polar y en el sentido de  $\overrightarrow{P_v P_D}$ , en la misma proporción en la que se incrementa el fragmocono al ir ampliándose el primer septo, el polo inicial es el ventral  $P_v$  y el final  $P_{S_f}$ . Formalicemos este modelo (ver **Figura 4.13** y en la **Escena interactiva 4.1** pulsando los botones  y ):

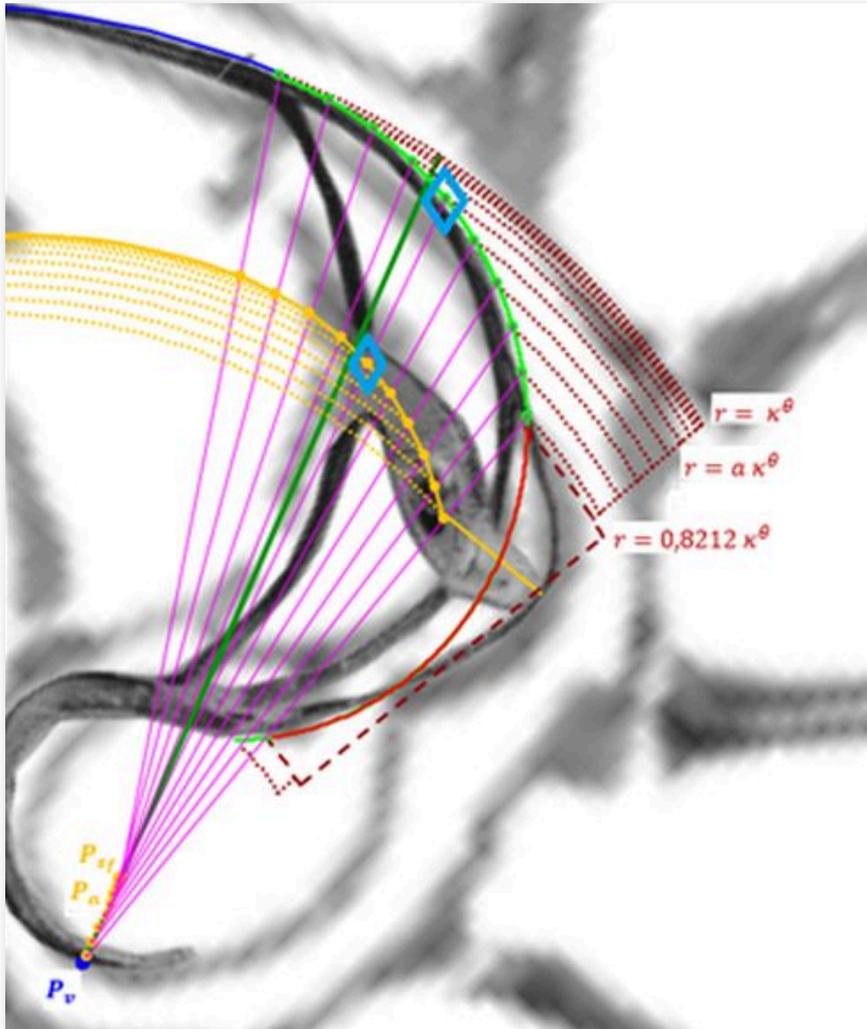
$$\begin{cases} x = b_a \kappa^{\theta_i} \cos(\theta_i) + \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \cos(\theta_a) \\ y = b_a \kappa^{\theta_i} \sen(\theta_i) + \frac{\kappa^{-2\pi} + 1}{2} \kappa^\theta \sen(\theta_a) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $\theta_a = \theta_i + \chi_a$  y  $\chi_a$  es el ángulo que forma el punto del primer septo correspondiente a  $r = a \kappa^\theta$  con el eje polar y

$$b_a = \frac{P_v P_{S_f}}{1 - 0,8212} \frac{a - 0,8212}{1 - 0,8212} = 0,1044 \frac{a - 0,8212}{1 - 0,8212} \quad (4.4)$$

$\frac{a-0,8212}{1-0,8212}$  es la proporción entre el incremento del fragmocono al pasar del límite del fragmocono  $r = 0,8212\kappa^\theta$  a  $r = a \kappa^\theta$  y la amplitud final que alcanza el fragmocono al quedar delimitado por las espirales  $r = 0,8212\kappa^\theta$  y  $r = \kappa^\theta$ .

En la **Figura 4.13** se han destacado con dos rombos azules el punto del septo para la espiral etiquetada como  $r = \kappa^\theta$  y su correspondiente del sífunculo. Cada segmento en color magenta une una terna formada por polo del sífunculo, punto de éste y punto del primer septo que son correspondientes entre sí.



**Figura 4.13.** Traslación del sífunculo en la segunda cámara septal mediante la traslación del polo, de la espiral que lo modela, proporcionalmente al incremento que acontece al ampliarse el fragmocono por el crecimiento del primer septo.

## 4.5 La pared dorsal en la transición entre el primer y segundo verticilo

La fase de transición entre el primer y segundo verticilo recoge, a su vez, otra zona difícil de modelar (ver la región pintada en azul en la **Figura 4.14**, realizada sobre el corte que González-Restrepo (2019) [6] realizó sobre la digitalización de la concha del Nautilus 3D del museo Dundee). En ella la pared dorsal del primer verticilo bordea la concha embrionaria y progresivamente se aproxima a la pared ventral primigenia y, al alcanzarla, entonces ésta pasa a desempeñar el papel de nueva pared dorsal.

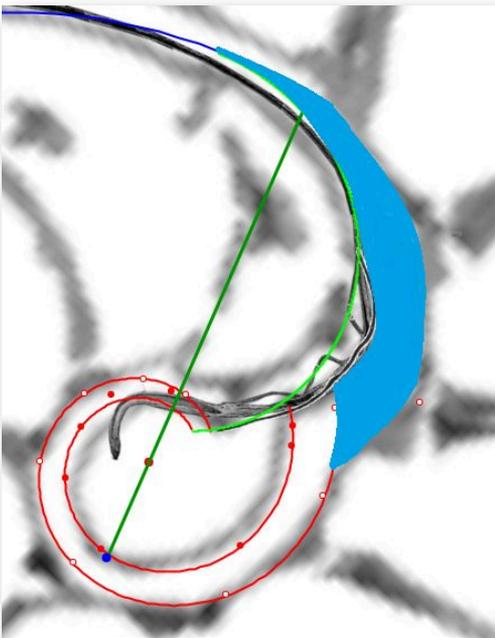


Figura 4.14. Zona de transición entre el primer y segundo verticilo.

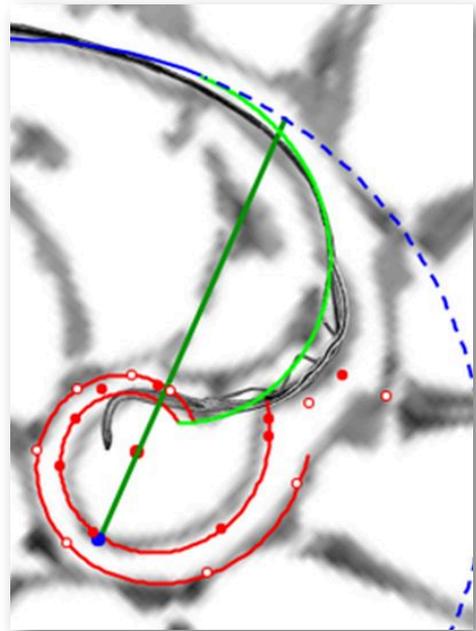


Figura 4.15. Diferencia entre la espiral ventral inicial y la zona de transición entre el primer y segundo verticilo.

En una primera hipótesis puede pensarse inicialmente que la parte exterior de esa zona podría tener la forma de la espiral ventral inicial, pero en la **Figura 4.15** se observa la gran diferencia existente. Y a

posteriori, después de ver esa imagen, es lógica esa diferencia, pues la situación real es que la pared dorsal es la que ha de adaptarse a la ventral y no al contrario.

Estamos hablando de un recorrido que, a la escala real de esa concha, representa un arco de unos tres o cuatro milímetros que afecta a los septos octavo, noveno y décimo (el undécimo se apoya ya sobre la pared ventral inicial) y comprende una amplitud angular aproximada de  $\frac{3\pi}{8}$  radianes. Un trayecto importante para la continuidad del crecimiento de nuestro Nautilus, que nosotros podemos interpretar inicialmente como un desajuste matemático —de nuevo, adelanto que una visión ligera y apresurada puede llevarnos a equívocos—, pero que realmente no debe de suponer más que una pequeña incomodidad que ha de salvar este animal y que ésta ha de seguir un patrón continuo, como lo es su crecimiento. Trasladando de nuevo la situación a nuestro contexto humano, mediante otra analogía, ¿qué haríamos nosotros si nos encontramos con un estrechamiento o cambio en un pasillo en el que nos encontramos encajonados? La respuesta es obvia, modificamos levemente nuestro cuerpo, lo menos posible, encogiéndolo un poquito para adaptarnos a ese cambio y así poder sortear el obstáculo. Y es de suponer que eso es lo que hace nuestro Nautilus. Pero ¿cómo se realiza esa adaptación? La respuesta la podemos encontrar en el segundo invariante considerado en este modelo: “Todo punto interior a la concha o sobre ella se obtiene como la intersección de dos espirales, una longitudinal similar a la ventral y otra transversal similar a la septal”. Así pues, la adaptación del Nautilus para sortear ese estrechamiento es un pequeño encogimiento corporal que libera el espacio necesario para una pequeña amplificación de la pared dorsal, es decir, que se pueda abordar un cambio de escala sin modificar su forma cordobesa y eso se traduce en puntos de una familia de espirales cordobesas con polo común —ver la **Figura 4.16** y la expresión funcional (4.5)—, el polo dorsal  $P_D$ , y un factor de escala variable  $a(\mu)$ .

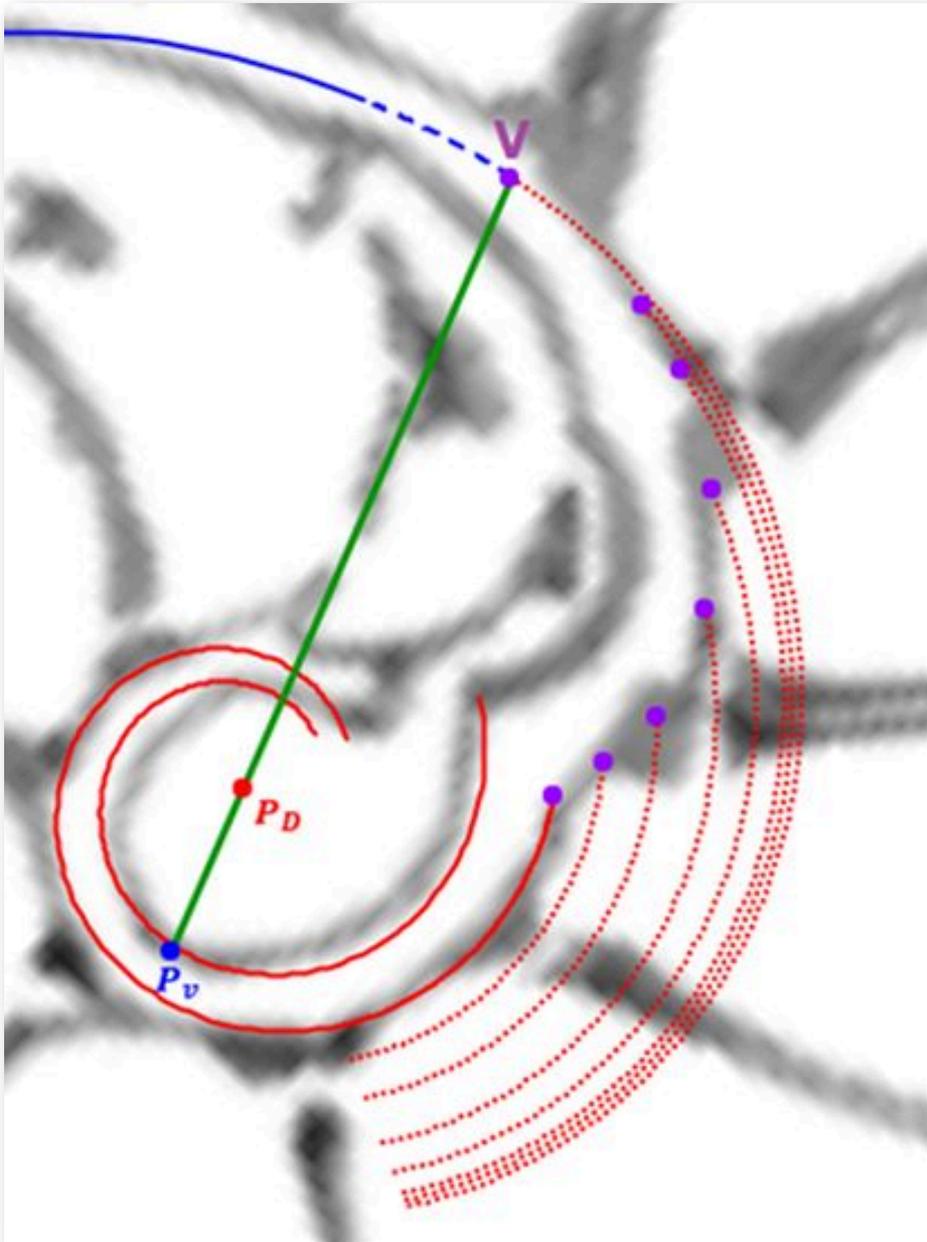


Figura 4.16. Familia de espirales cordobesas que permiten modelar la pared dorsal en la transición entre el primer y segundo verticilo correspondientes a los valores angulares reflejados en la tabla de la Figura 4.17. En color morado extremos de esas espirales que son los puntos que conforman la pared dorsal.

$$\begin{cases} x = D_x + a(\mu) \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = D_y + a(\mu) \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + \mu], \mu \in \left[\frac{13}{8}\pi, 2\pi\right] \quad (4.5)$$

El valor  $\frac{13}{8}\pi$  indicado en (4.5) es el valor observado para la espiral dorsal con factor de escala  $\kappa^{-3,5\pi}$ , es decir,  $a\left(\frac{13}{8}\pi\right) = \kappa^{-3,5\pi}$  y la variación que introduce el factor de escala  $a(\mu)$  permite reflejar el modelo descrito e ir pasando desde la pared dorsal de partida con ese factor a aquella que ha de confluir con la pared ventral inicial para dar continuidad al crecimiento del Nautilus, es decir, la correspondiente a  $a(2\pi)$ . Estas dos espirales deben de ser tangentes porque es esperable un tránsito suave, regular, y efectivamente es así como acontece porque los tres puntos  $P_v$ ,  $P_D$  y el que hemos denotado como  $V$  en la **Figura 4.16** son puntos del eje polar, están alineados, y consecuentemente siendo  $\overline{P_v V}$  y  $\overline{P_D V}$  los radios polares de dos espirales cordobesas, comparten la misma recta tangente por ser equiangulares. Para hallar el factor de escala correspondiente a esta espiral de radio vector  $\overline{P_D V}$  partimos de la relación:

$$\overline{P_v V} = \overline{P_v P_D} + \overline{P_D V} \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{cases} \overline{P_v V} = \kappa^{\theta_i} \\ \overline{P_v P_D} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 0,087321 \\ \overline{P_D V} = a(2\pi) \kappa^{\theta_i + 2\pi} \end{cases} \quad (4.7)$$

y, por tanto, en (4.5)

$$a(2\pi) = \kappa^{-2\pi} - 0,087321 \kappa^{-\theta_i - 2\pi} = \kappa^{-2,44\pi} \quad (4.8)$$

Así pues,

$$\kappa^{-3,5\pi} = a\left(\frac{13}{8}\pi\right) \leq a(\mu) \leq a(2\pi) = \kappa^{-2,44\pi} \quad (4.9)$$

$a(\mu)$  es una función creciente ya que la espiral se amplifica de manera continua para alcanzar la forma de la pared ventral inicial, y también podemos expresarla en función de ángulos de retardo  $r(\mu)$ :

$$a(\mu) = \kappa^{r(\mu)\pi} \quad \mu \in \left[\frac{13}{8}\pi, 2\pi\right], -3,5 \leq r(\mu) \leq -2,44 \quad (4.10)$$

En la **Figura 4.16** se han representado algunas de las espirales de dicha familia (4.5), correspondientes a los valores angulares  $\mu$  y  $r(\mu)$  reflejados en la tabla de la **Figura 4.17**. Esos valores se han obtenido usando la **Escena interactiva 4.1** y abordando un ajuste de cada espiral al perfil de la concha que estamos modelando (usad el botón  en esa escena).

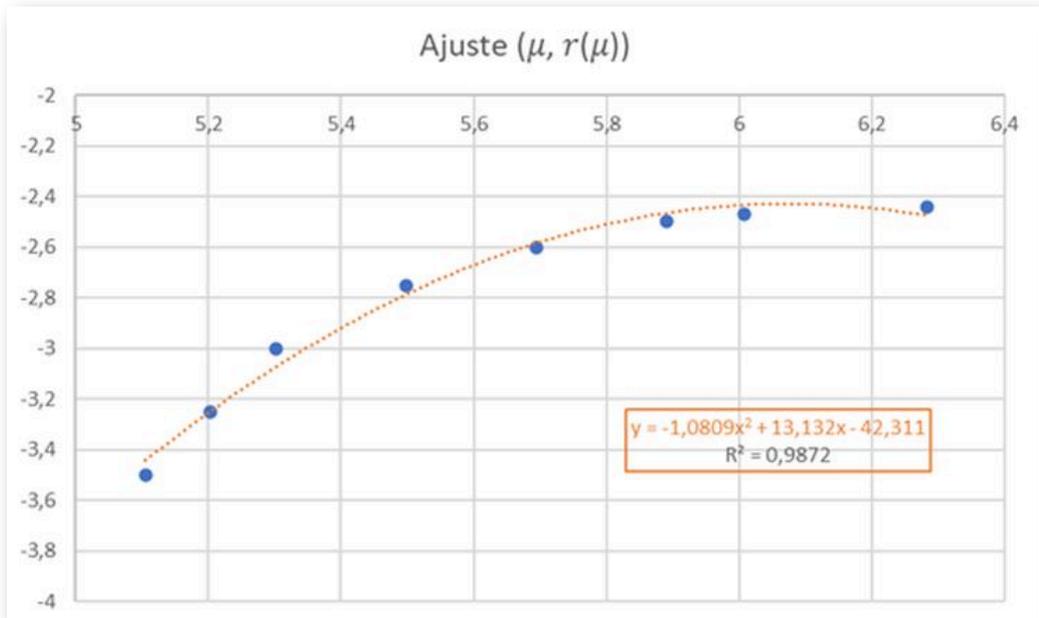
$n$	$\mu = n\frac{\pi}{8}$	$r(\mu)$	$a(\mu) = \kappa^{r(\mu)\pi}$
13,00	5,10508806	-3,50	0,15384652
13,25	5,20326283	-3,25	0,17585424
13,50	5,30143760	-3,00	0,20101016
14,00	5,49778714	-2,75	0,22976463
14,50	5,69413668	-2,60	0,24895582
15,00	5,89048623	-2,50	0,26263243
15,30	6,00829595	-2,47	0,26688009
16,00	6,28318531	-2,44	0,27119644

**Figura 4.17.** Valores experimentales del paso angular  $\mu$ , ángulo de retardo  $r(\mu)$  y coeficiente  $a(\mu)$  en la pared dorsal, fase de transición del primer al segundo verticilo.

Realmente la curva que describe la pared dorsal, en su transición del primer al segundo verticilo, está formada por los puntos extremos de cada una de esas espirales (ver los puntos morados dibujados en la **Figura 4.16**). Es decir,

$$D(\mu) \equiv \begin{cases} x = D_x + a(\mu) \kappa^{\theta_i + \mu} \cos(\theta_i + \mu) \\ y = D_y + a(\mu) \kappa^{\theta_i + \mu} \text{sen}(\theta_i + \mu) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mu \in [\frac{13}{8}\pi, 2\pi] \\ \kappa^{-3,5\pi} \leq a(\mu) \leq \kappa^{-2,44\pi} \end{cases} \quad (4.11)$$

Y, ahora, la dificultad se centra en determinar cuál es la expresión analítica bien de  $a(\mu)$  o bien de  $r(\mu)$ . Partiendo de los datos reflejados en la tabla de la **Figura 4.17** se detecta que estos se ajustan con un coeficiente de determinación  $R^2 = 0,9872$  a un polinomio de segundo grado  $y = -1,0809x^2 + 13,132x - 42,311$  (**Figura 4.18**).



**Figura 4.18.** Ajuste de los valores  $(\mu, r(\mu))$  reflejados en la tabla de la **Figura 4.17**.

Consecuentemente podemos interpolar los valores de  $r(\mu)$  y calcular en (4.10) los puntos  $D(\mu)$  que deseemos para modelar suficientemente la pared dorsal. Todo ello lo hemos reflejado en la tabla de la **Figura 4.19**. Para los extremos de este ajuste consideraremos los valores teóricos obtenidos que dan continuidad a la pared septal previa a esta fase, es decir,  $r(13\frac{\pi}{8}) = -3,50$  y la que es tangencial con la pared ventral inicial  $r(16\frac{\pi}{8}) = -2,44$ ; esos valores están reflejados en esa tabla en color **rojo**.

$n$	Ajuste $\mu = n\frac{\pi}{8}$	$r(\mu)$	$a(\mu) = \kappa^{r(\mu)\pi}$	$D_x(\mu)$	$D_x(\mu)$
13,00	5,10508806	-3,441317352 <b>-3,5</b>	0,15875133 <b>0,15384652</b>	0,1932 <b>0,1883</b>	0,0769 <b>0,0770</b>
13,25	5,20326283	-3,245978666	0,17623284	0,2131	0,0940
13,50	5,30143760	-3,071476025	0,19347148	0,2313	0,1150
13,75	5,39961237	-2,917809431	0,21004273	0,2468	0,1397
14,00	5,49778714	-2,784978882	0,22550645	0,2588	0,1676
14,25	5,59596191	-2,672984378	0,23942576	0,2662	0,1978
14,50	5,69413668	-2,581825921	0,25138734	0,2683	0,2293
14,75	5,79231146	-2,511503509	0,26102165	0,2647	0,2610
15,00	5,89048623	2,462017143	0,26802189	0,2551	0,2916
15,25	5,98866100	-2,433366822	0,27216020	0,2398	0,3197
15,50	6,08683577	-2,425552547	0,27329996	0,2191	0,3441
15,75	6,18501054	-2,438574318	0,27140330	0,1939	0,3636
16,00	6,28318531	-2,472432135 <b>-2,44</b>	0,26653318 <b>0,27119644</b>	0,1651 <b>0,1674</b>	0,3774 <b>0,3826</b>

**Figura 4.19.** Valores correspondientes a los puntos de la pared de transición del primer al segundo verticilo.

El ajuste poligonal a partir de esos puntos  $(D_x(\mu), D_x(\mu))$  está reflejado en la **Figura 4.20**, y podemos tratar de verificar si siguen alguna trayectoria sencilla. Efectuando un ajuste por mínimos cuadrados se detecta que esa pared dorsal se ajusta, con un coeficiente de determinación  $R^2 = 0,9894$  a la parábola de ecuación:

$$x = -3,8329y^2 + 1,6999096461y + 0,07999021 \quad (4.12)$$

cuyo vértice es el punto  $V(0,26828946, 0,22164633)$  y su foco  $F(0,20306470, 0,22164633)$ .

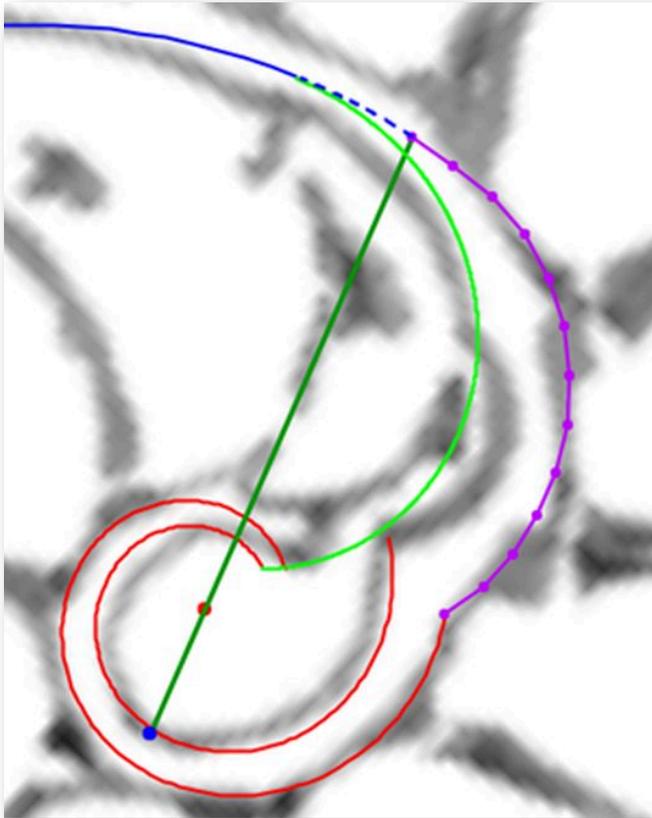
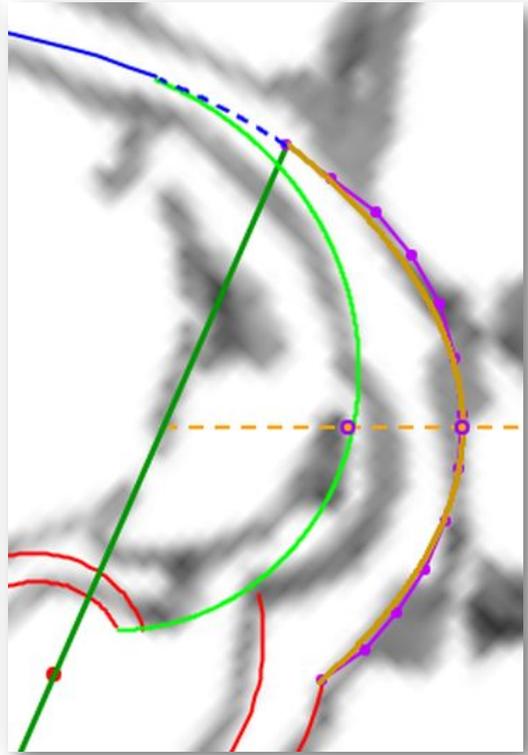
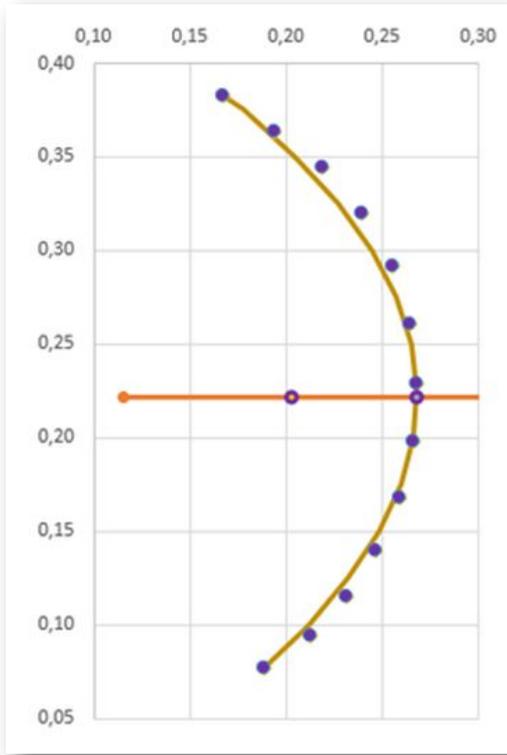


Figura 4.20. Ajuste de la pared dorsal en la transición del primer al segundo verticilo. En verde eje polar, en rojo pared dorsal, en verde claro primer septo y en violeta la pared de transición.

El ajuste teórico (4.12) está reflejado en la **Figura 4.21**, y en la **Figura 4.22** se muestra su superposición sobre el modelo y sobre la sección de la concha del Nautilus. Todo, también puede observarse en la **Escena interactiva 4.1** pulsando el botón .



**Figura 4.21.** Ajuste parabólico de la pared dorsal en la transición del primer al segundo verticilo (eje, foco y vértice).

**Figura 4.22.** Superposición del ajuste parabólico en el modelo y en la sección de la concha del Nautilus.

El tramo restante entre el punto final de esta parábola y el inicio de la pared ventral original es el arco de la espiral ventral  $r = \kappa^\theta$  con  $\theta \in [\theta_i, \theta_i + 0,19]$ .

## 4.6 El modelo del primer verticilo

Integrando todo lo analizado en este capítulo en relación a los sitios que hemos denominado singulares obtenemos el modelo que hemos reflejado en la **Figura 4.23** e integrándolo con lo analizado con anterioridad obtenemos el modelo global del primer verticilo reflejado en la **Figura 4.24**.

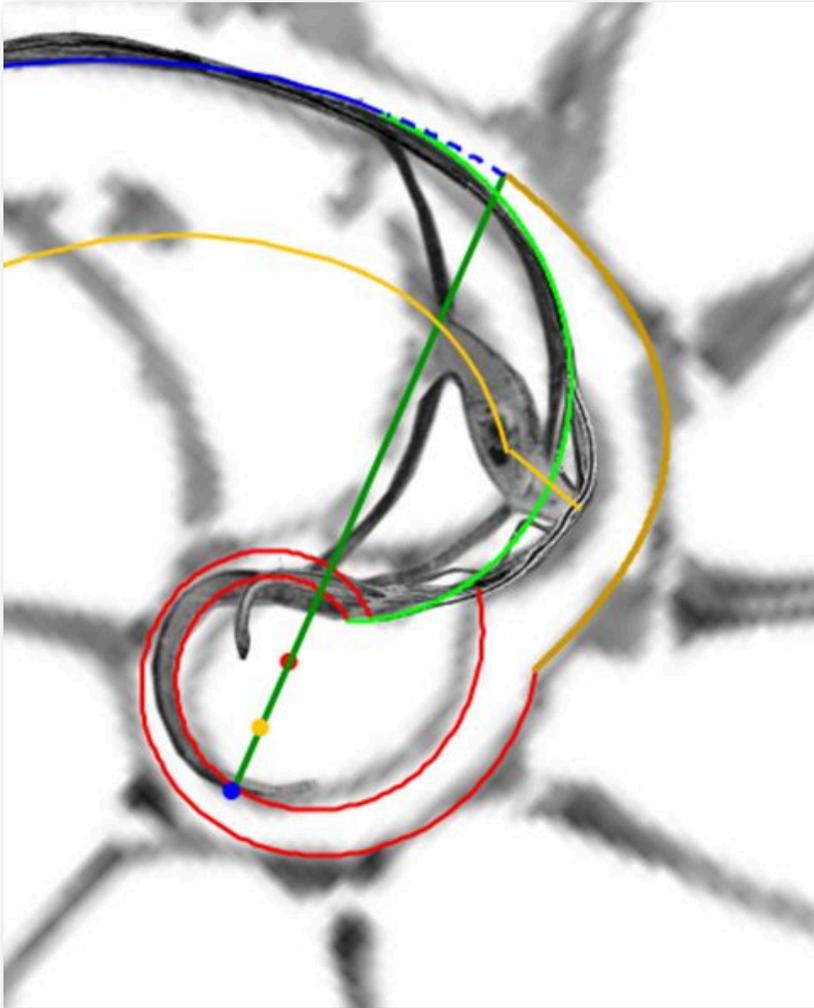


Figura 4.23. Detalle conjunto del modelo de los sitios singulares del primer verticilo.

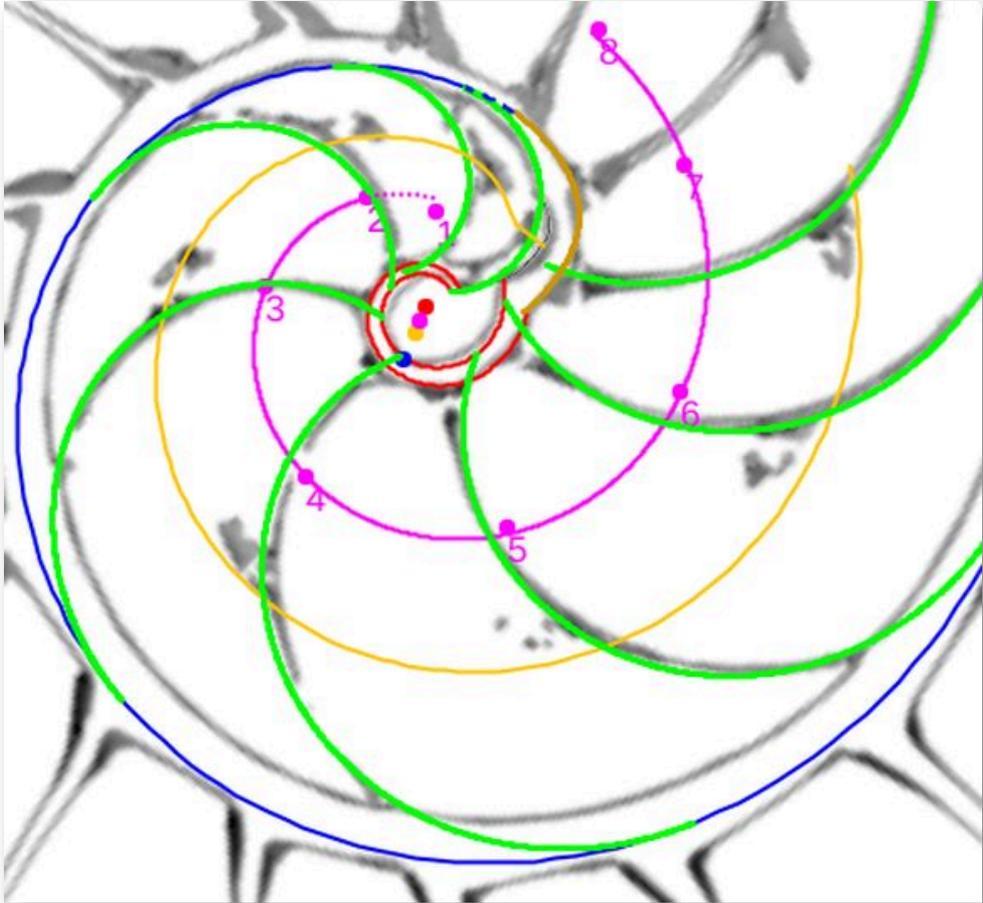
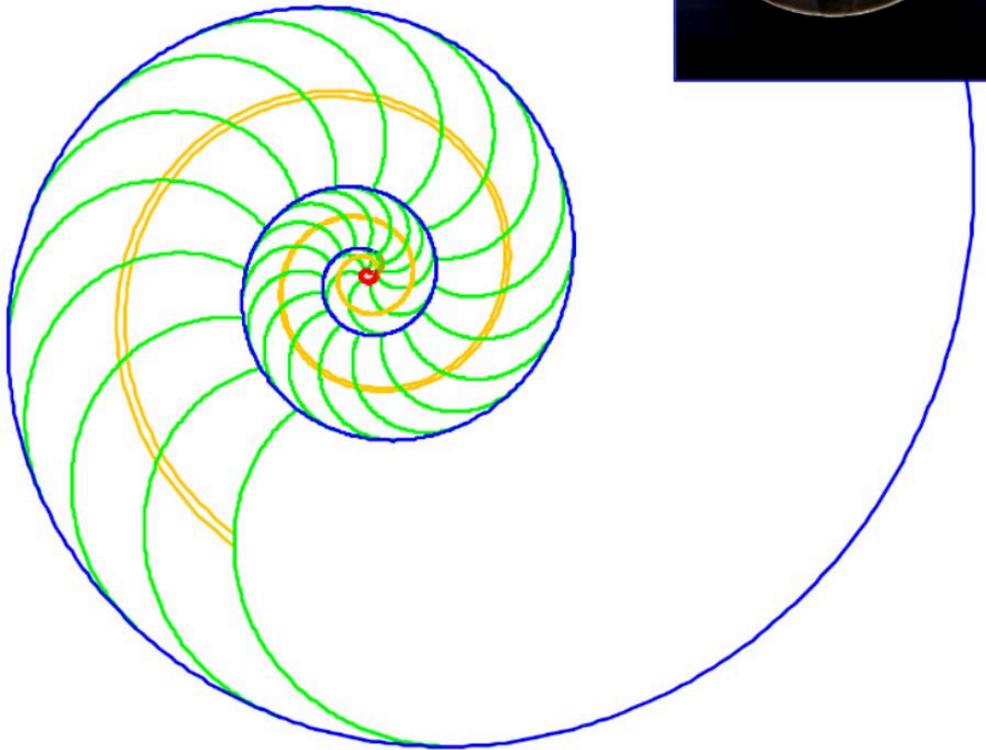


Figura 4.24. Modelo matemático del primer verticilo del Nautilus.

Llegados a este punto pienso que hemos logrado una modelación bastante completa de la sección sagital del Nautilus, si bien no seré yo quien excluya la posibilidad de que puedan surgir nuevas cuestiones, pues eso es lo que ha ido aconteciendo a lo largo de la investigación realizada y aquí expuesta. Pero, independientemente de que afloren nuevos aspectos o no, considero que para que los detalles no nos impidan o dificulten ver el modelo al que hemos llegado, es necesario completar este estudio adecuadamente y, por tanto, en el siguiente capítulo recopilaremos todo lo expuesto en una escena interactiva de Descartes y en una animación que muestre la

ontogenia matemática del Nautilus en un hilo temporal que recoja su crecimiento, si bien real y paradójicamente éste ha de ser atemporal porque en la literatura existente los datos relativos a los tiempos en el crecimiento de la concha son muy genéricos o yo no he logrado localizarlos.





# Capítulo V

## El modelo ontogénico matemático



Si bien el modelo uniforme del Nautilus, que sintetizamos en el capítulo primero de este libro (ver **Figura 1.12**) y que fue objeto de un encuadre contextual en el libro "[¡No!, ¡no soy áureo! ¡Soy cordobés!](#) [\[2\]](#), sirvió para enmarcar al Nautilus en el rectángulo adecuado, el cordobés, y también para identificar el carácter cordobés no sólo de la pared ventral, sino del sifúnculo y de los septos —lo cual supuso un avance que valoramos como importante en el conocimiento de la concha de este admirado animal—, también hemos puesto de manifiesto que como es habitual en todo ser vivo, la ontogenia de este animal presenta alometrías que quedan reflejadas en su concha y que pedían ser matemáticamente desentrañadas. Ahora, sí estamos en condición de poder mostrar **"El modelo ontogénico matemático del Nautilus**.

## 5.1 Recurso interactivo

Para observar este modelo ontogénico, paso a paso y en detalle, podemos usar la **Escena interactiva 5.1** de la página siguiente. Este recurso se presenta por defecto como una animación, pero puede pasar a modo manual sin más que pulsar el botón inferior izquierda, que está representado con la imagen de una mano, y usar el control etiquetado como "paso".

En el objeto interactivo podemos distinguir cuatro zonas:

- Parte superior en la que muestra el título de la escena:

**Modelo ontogénico del Nautilus, paso interseptos  $2\pi/16$**

donde se refleja por defecto el modelo teórico de paso interseptos  $\frac{2\pi}{16}$ , pero también se puede optar por el modelo  $\frac{2\pi}{15}$  que se detecta en algunos ejemplares<sup>39</sup>.

---

<sup>39</sup> El paso radial interseptos en el segundo y tercer verticilo varía entre  $\frac{2\pi}{15}$  y  $\frac{2\pi}{16}$  según los ejemplares considerados y suele ser inferior en los últimos septos, en la etapa de madurez.

- Franja intermedia debajo del título que aporta la descripción del paso mostrado en cada momento en la escena, por ejemplo:

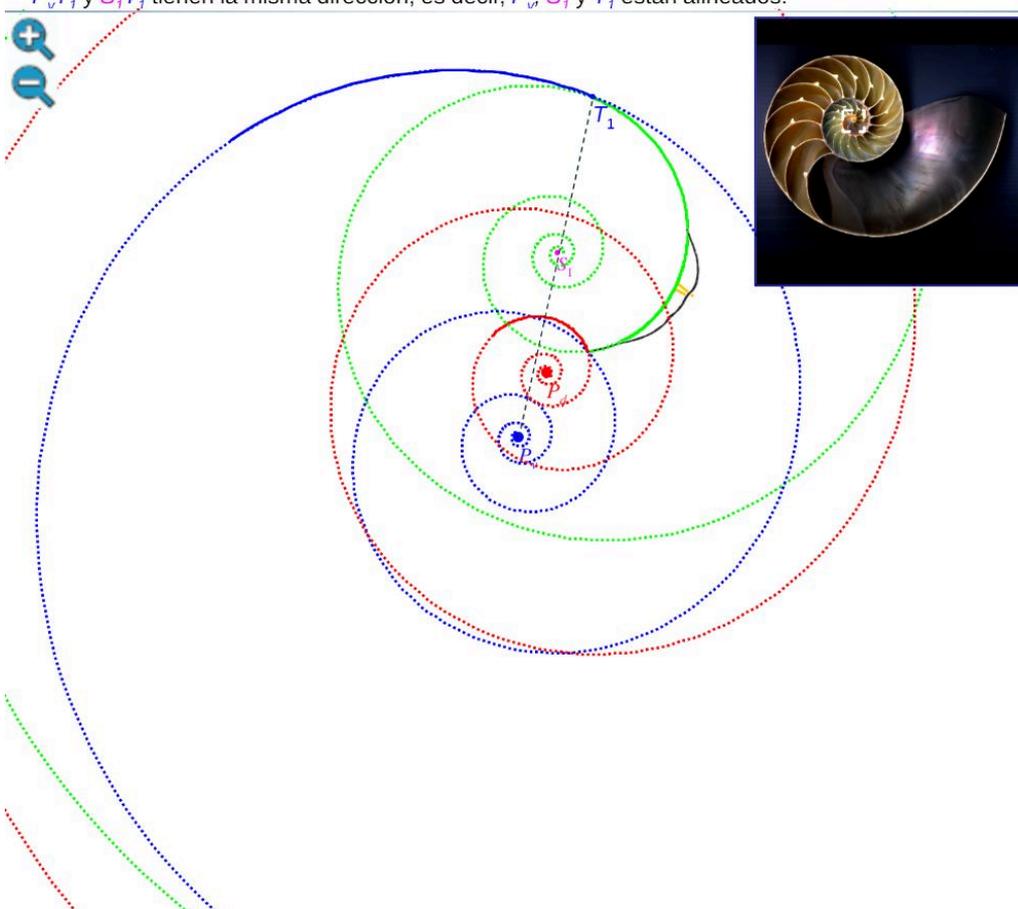
**El gnomon de un triángulo cordobés** aproxima a la concha embrionaria.

En ella se refleja una breve explicación de lo que se está mostrando en el espacio principal.

**Modelo ontogénico del Nautilus, paso interseptos  $2\pi/16$**

La espiral **septal** y la **ventral** son tangentes en  $T_1$ . Al ser ambas cordobesas los radios vectores  $P_v T_1$  y  $S_1 T_1$  tienen la misma dirección, es decir,  $P_v$ ,  $S_1$  y  $T_1$  están alineados.





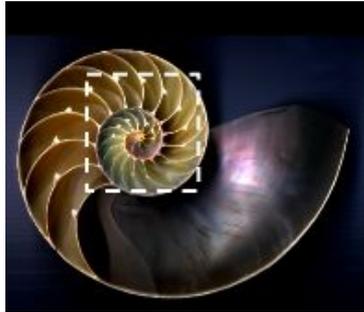
+
-

paso

Escena interactiva 5.1. Recurso interactivo donde se describe el modelo ontogénico matemático del Nautilus. [Indicaciones](#).

176

- Espacio principal donde se muestra el modelo ontogénico. En él se incluyen:
  - Dos botones:  , que permiten ampliar o disminuir la zona que está representada.
  - Un espacio con la sección de Nautilus y un recuadro en color blanco que identifica la zona que se está mostrando en el espacio principal.



- Zona inferior con varios botones que activan y desactivan la presentación de diversos objetos matemáticos que modelan las diferentes partes y características de la concha del Nautilus.



De izquierda a derecha los botones disponibles son:

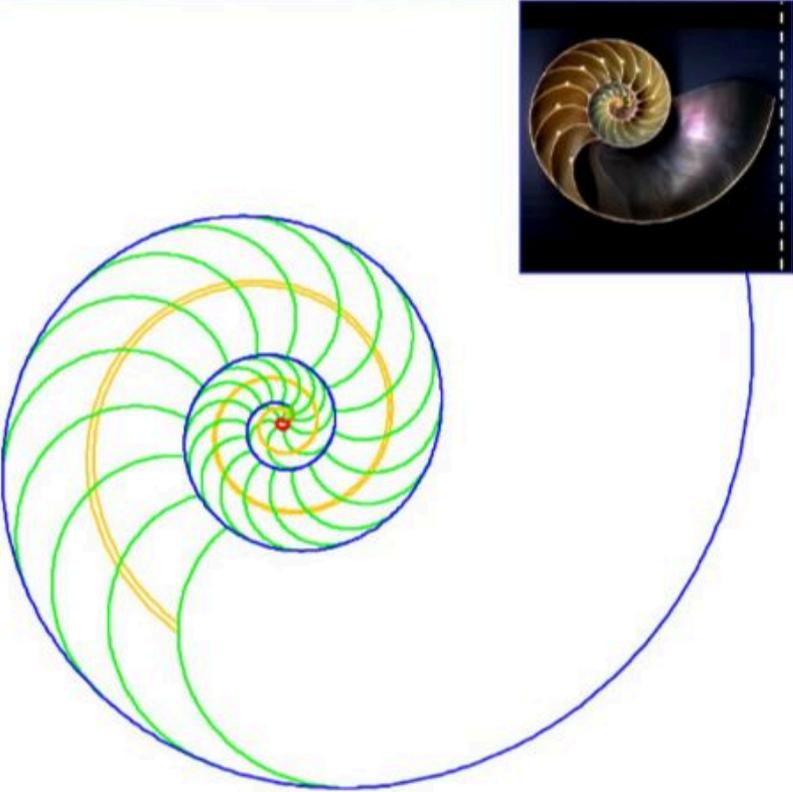
- Cambio a control de la escena manual  o automático . Cuando está en automático a la derecha se dispone de un control de desaceleración o aceleración de la animación . Por defecto se inicia la escena con el control automático.
-  Selección del paso a mostrar en el espacio principal. Al cambiar su valor muestra una etapa o característica diferente, desde la concha embrionaria hasta el último septo. Cuando el control es automático este control está inhabilitado y ha de pasarse a control manual para poder usarlo.

-  Muestra u oculta el cuerpo del Nautilus. Es meramente una ubicación y tamaño aproximado, una simple referencia gráfica orientadora, sin valor biológico.
-  3 Fase de los tres septos.
-  2 Fase de los dos septos.
-  1 Fase del primer septo.
-  0 Concha embrionaria preseptal.
-  Sección de la concha del Nautilus con paso  $\frac{2\pi}{15}$  (segundo y tercer verticilo).
-  Modelo de la concha del Nautilus con paso  $\frac{2\pi}{15}$  (segundo y tercer verticilo).
-  Sección de la concha del Nautilus del "[D'Arcy Thompson Zoology Museum \(Museo Dundee\)](#)" con paso  $\frac{2\pi}{16}$  (segundo y tercer verticilo).
-  Modelo de la concha del Nautilus con paso  $\frac{2\pi}{16}$  (segundo y tercer verticilo).
-  Primer verticilo del Nautilus del Museo Dundee.
-  Muestra u oculta la concha del Nautilus que se usa para ubicar cuál es la zona del modelo que se está visualizando en el espacio principal.

Como alternativa, puede consultar la siguiente presentación construida a partir de las imágenes de dicha **Escena interactiva 5.1**, la cual está disponible en diferentes formatos (Google Slides, PowerPoint o pdf).

**Modelo ontogénico del Nautilus, paso interseptos  $2\pi/16$**

Y crece gnomónicamente... **Septo número 34**. Tercer verticilo.



The diagram illustrates the growth of a nautilus shell, showing a spiral of colored lines (blue, green, yellow) and a red dot at the center. An inset image shows a real nautilus shell with a dashed line indicating a cross-section.

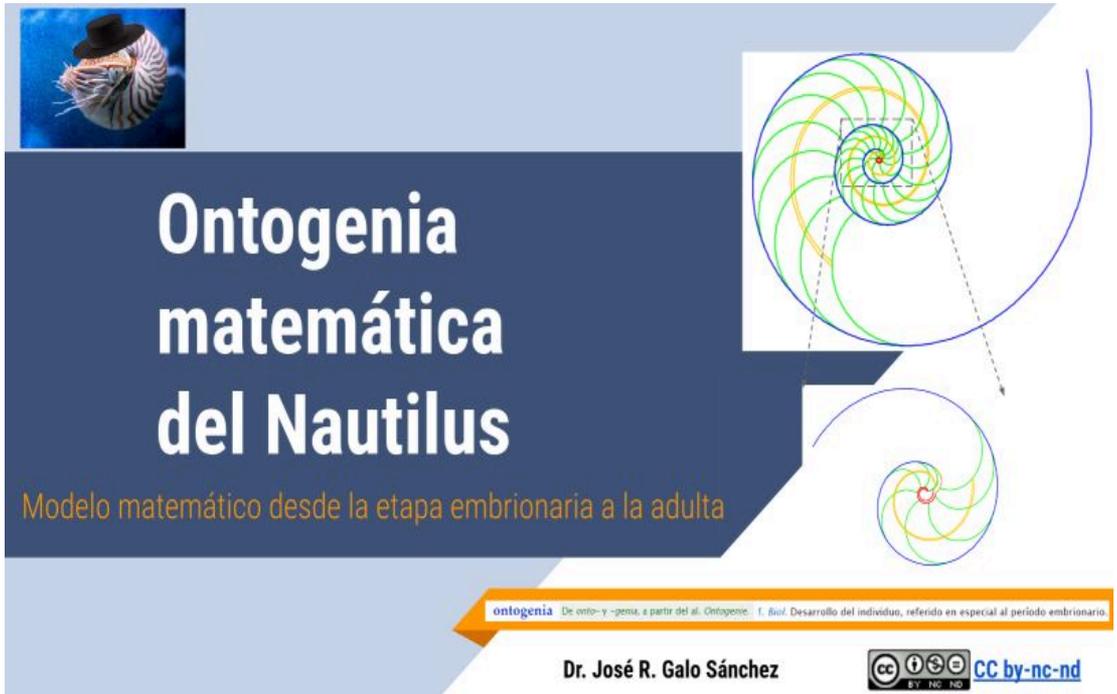
67 Google Slides

En la barra de herramientas inferior puede gestionar manualmente el paso de las diapositivas y pulsando el icono : se tiene acceso a las notas del conferenciante.

[Presentación con Google Slides](#). [Versión en pdf](#) y [versión en PowerPoint](#).

## 5.2 Síntesis descriptiva del modelo ontogénico

En la siguiente presentación podemos hacer un recorrido en el que se ha sintetizado y descrito el modelo ontogénico construido.



# Ontogenia matemática del Nautilus

Modelo matemático desde la etapa embrionaria a la adulta

**ontogenia** De onto- y -genia, a partir del al. Ontogénesis: f. Biol. Desarrollo del individuo, referido en especial al período embrionario.

Dr. José R. Galo Sánchez



CC BY-NC-ND

En la barra de herramientas inferior puede gestionar manualmente el paso de las diapositivas y pulsando el icono : se tiene acceso a las notas del conferenciante.

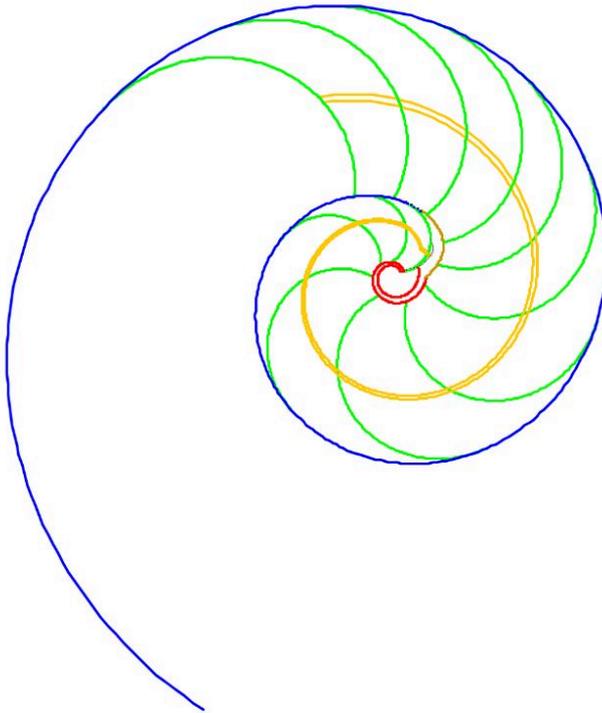
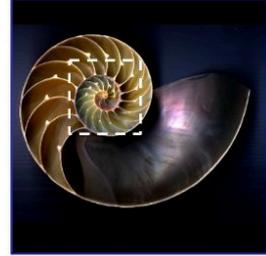
[Presentación con Google Slides](#), [Versión en pdf](#) y [versión en PowerPoint](#).

## 5.3 El modelo paso a paso

Omitiendo la parte descriptiva en la **Escena interactiva 5.1** obtenemos la **Escena interactiva 5.2** que refleja el modelo ontogénico en sí. Todos los botones y funcionalidades siguen siendo las mismas, salvo en el control "paso" que si se fija observará saltos, omisiones, en aquellos pasos descriptivos que se dejan de mostrar.

## Modelo ontogénico del Nautilus, paso interseptos $2\pi/16$

Duodécima cámara septal. Duodécimo septo y sifúnculo.



Escena interactiva 5.2. Recurso interactivo donde se muestra el modelo ontogénico matemático del Nautilus .

Y de manera análoga a la escena anterior tenemos como alternativa el uso de una [presentación Google Slides](#), un [pdf](#) o una [presentación en PowerPoint](#).

## 5.4 Animación del modelo ontogénico

Finalmente ese modelo lo hemos recogido en la animación incluida en la **Figura 5.1**, pero al no tener datos sobre la temporalización real del crecimiento del Nautilus hemos tenido que asignar el mismo tiempo a cada septo. Sirva ésta como colofón de la investigación realizada y que ha quedado detallada en este libro.

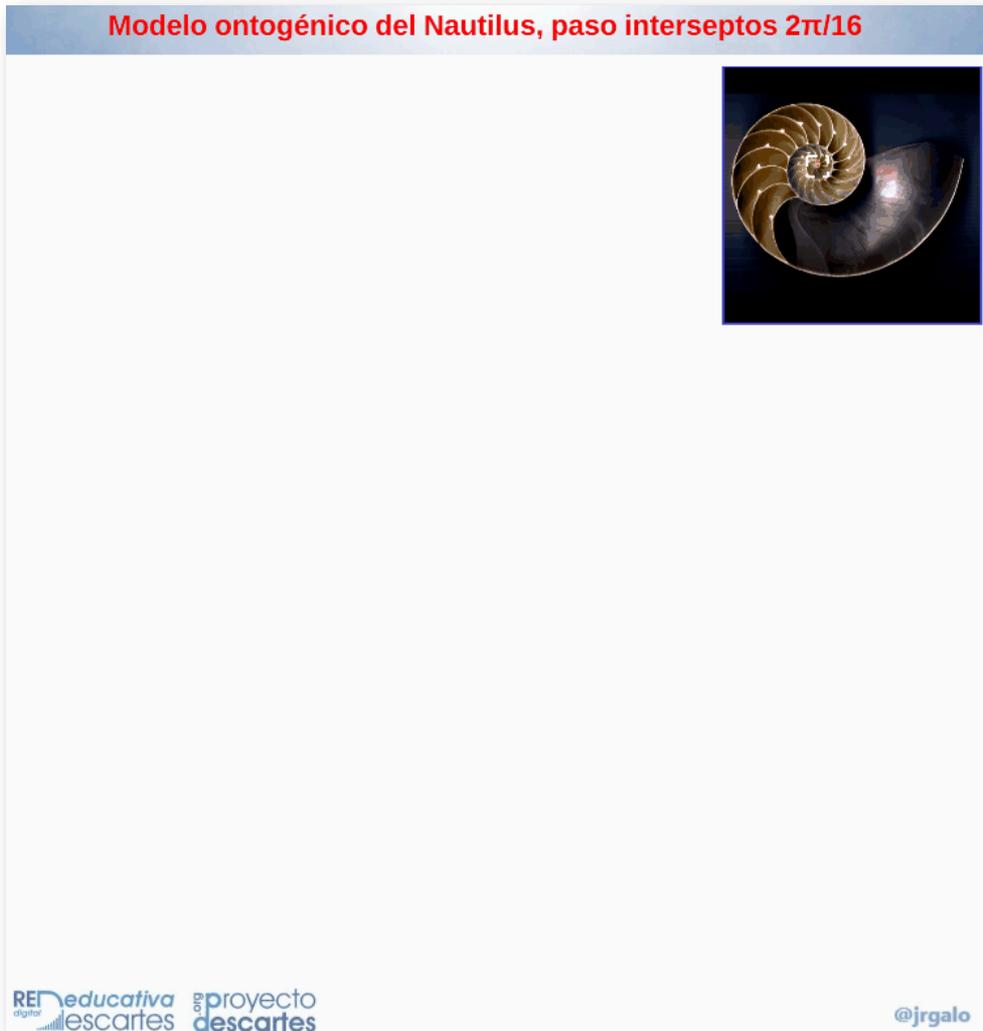


Figura 5.1. Imagen animada del modelo ontogénico matemático del Nautilus.

## 5.5 En camino hacia el modelo tridimensional

Pero el Nautilus no es un habitante de Planilandia, aunque hasta ahora nos hayamos limitado a tratarlo de esa manera, seccionándolo y restringiendo su ser a un mero plano medio representativo de su concha. Así pues, siguiendo a Aristóteles que nos enseñó que "El todo es mayor que la suma de sus partes", es necesario y obligado que consideremos la tridimensionalidad de la concha del Nautilus, que la estudiemos y la analicemos. Para ello, una vez más, hemos de tratar de escuchar los nuevos susurros que éste nos quiera transmitir y que, a su vez, nuestros sentidos sean capaces de captar. Así, quizás podamos interpretar la matemática que implícita y explícitamente se manifiesta en su rastro calcáreo global. Sí, hemos de abordar ese salto espacial y lo haremos, pero sea algo paciente ya que éste será el contenido que podrá consultar en un tercer libro titulado "Modelo matemático tridimensional uniforme del Nautilus" (Galo, 2024-b) [\[3\]](#).

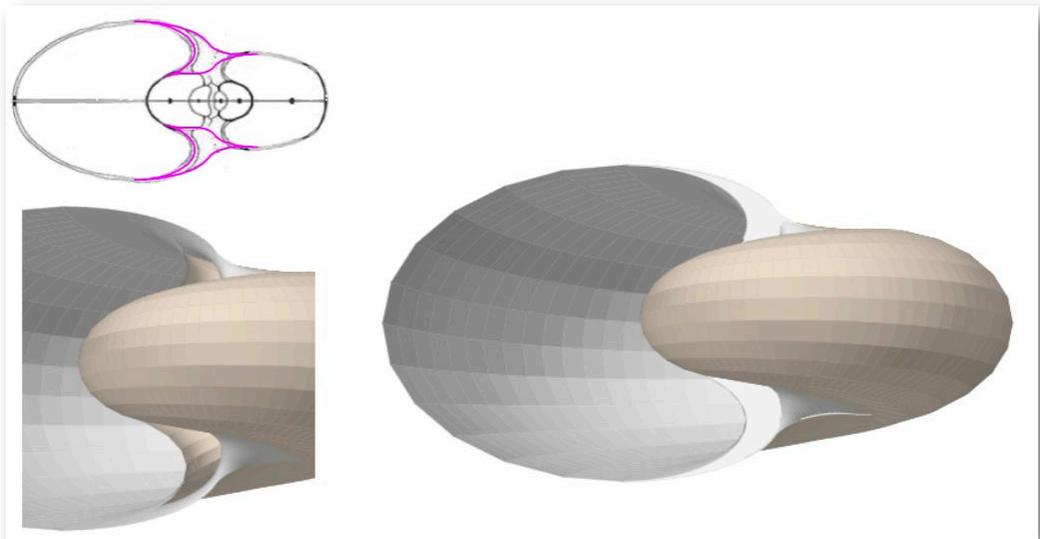


Figura 5.2. Modelo matemático tridimensional uniforme del Nautilus.



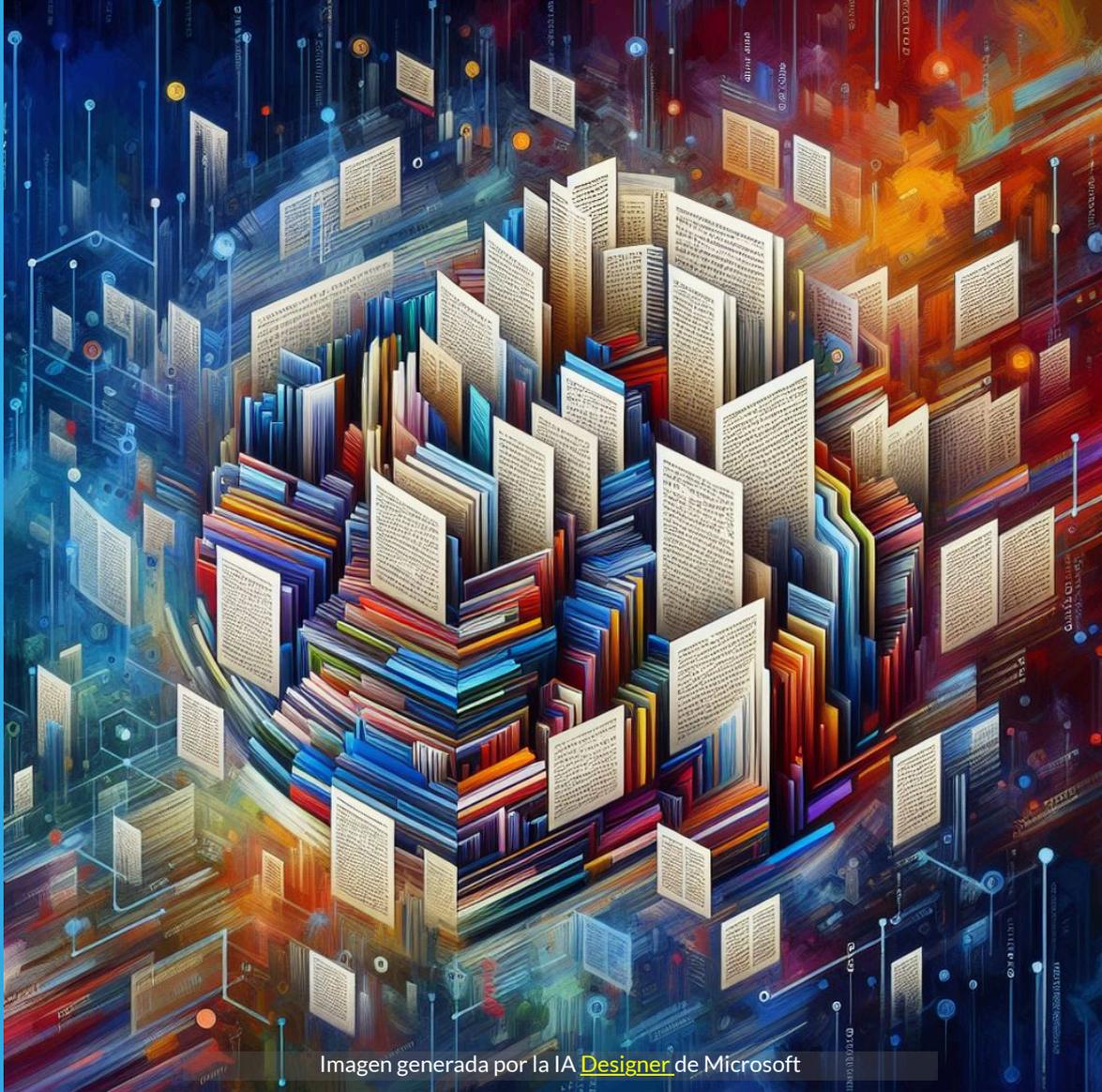


Imagen generada por la IA [Designer](#) de Microsoft

# Bibliografía



# Referencias bibliográficas

- [1] Barroso-Barcenilla F. (2008). **Revisión de la terminología aplicada a los nautiloideos y ammonoideos postríasicos en español.** *Bol. R. Soc. Esp. Hist. Nat. Sec. Geol.*, 102 (1-4), 121-145.  
[Consulta en línea](#)
- [2] Galo Sánchez, J.R. (2024) **¡No!, ¡no soy áureo! ¡Soy cordobés! Firmado: Nautilus.** Ed. Red Educativa Digital Descartes. Córdoba. ISBN: 978-84-18834-89-9.  
[Consulta en línea](#)
- [3] Galo Sánchez, J.R. (2024-b) **Modelo matemático tridimensional uniforme del Nautilus.** Ed. Red Educativa Digital Descartes. Córdoba. (En fase de publicación).
- [4] Galo J.R., Cabezudo A. y Fernández I. (2016) **Sobre la forma y crecimiento cordobés del Nautilus Pompilius.** *Epsilon*, 2016, Vol. 34 (3), nº 94.  
[Consulta en línea](#)
- [5] Ghyca, M. (1977) **Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.** Segunda edición. Barcelona: Poseidon.
- [6] González-Restrepo, F. (2019) **Cortes del Nautilus a partir de la digitalización 3D del museo Dundee.** *Red Descartes Colombia.*  
[Cortes parasagitales](#) y [Cortes frontales](#)
- [7] Greenwald L., Ward P.D. (2010) **Buoyancy in Nautilus** In: *Saunders W.B., Landman N.H. (eds) Nautilus. Topics in Geobiology, vol 6.* Springer, Dordrecht..  
[Consulta en línea](#)
- [8] Joyce, D. E. (2013) **Euclid's Elements.** Worcester: Clark University.  
[Consulta en línea](#)

- [9] Landman, N. H., Arnold, J. M. and Mutvei, H. (1989) **Description of the embryonic shell of *Nautilus belauensis***. *American Museum Novitates*, no. 2960, p. 1-16.  
[Consulta en línea](#)
- [10] MolluscaBase eds. (2024). MolluscaBase. *Patella vulgata*. Linnaeus, 1758.  
Accessed through: [World Register of Marine Species](#) on 2024-05-13.
- [11] Moseley, H. (1838) **On the geometrical forms of turbinates and discoids shells**. Roy. Soc. London, Philos. Trans. for 1838, pp 351-370.  
[Consulta en línea](#)
- [12] Mutvei, H. and Doguzhaeva, L. (1997) **Shell ultrastructure and ontogenetic growth in *Nautilus pompilius* L. (Mollusca: Cephalopoda)**. *Palaeontographica Abteilung A Palaeozoologie-Stratigraphie*, vol. 246, p. 33-52.  
[Consulta en línea](#)
- [13] Pacioli, L. (1509) **Divina proportione**. República de Venecia: Paganini.  
[Consulta en línea](#)
- [14] Sachs, J. (1995) **Aristotle's Physics: A Guided Study**. New Brunswick, N.J.: Rutgers University Press.
- [15] Sasaki, T., Shigeno S. & Tanabe K. (2010) **Anatomy of living *Nautilus*: Reevaluation of primitiveness and comparison with Coleoidea** in Tanabe, K., Shigeta, Y., Sasaki, T. & Hirano, H. (eds.) 2010. *Cephalopods - Present and Past*, Tokai University Press, Tokyo, p. 35-66.  
[Consulta en línea](#)

- [16] Saunders, W. B., and N. H. Landman (eds.) (2010) ***Nautilus: the biology and paleobiology of a living fossil*** (Springer. First edition New Y 1987) Plenum Press, New York.  
[Consulta en línea](#)
- [17] Tanabe K. & Uchiyama, K. (1997) **Development of the Embryonic Shell Structure in Nautilus** *The Veliger* 40(3): 203-215.  
[Consulta en línea](#)
- [18] Thompson, D'A. W. (1917) *On growth and Form*. Cam. Univ. Press.  
[Consulta en línea](#)
- [19] Underwood Dudley (1999) *Die Macht der Zahl: Was die Numerologie uns weismachen will*. Springer
- [20] Ward P. (1979) **Cameral liquid in Nautilus and ammonites**. *Paleobiology* 5(1), pp. 40-49.  
[Consulta en línea](#)
- [21] Ward P. (1984) **Is Nautilus a Living Fossil?**. In: Eldredge N., Stanley S.M. (eds) *Living Fossils*. Casebooks in Earth Sciences. Springer, New York, NY.  
[Consulta en línea](#)
- [22] Ward, P., Greenwald, L., & Magnier, Y. (1981) **The chamber formation cycle in Nautilus macromphalus**. *Paleobiology* 7(4), pp. 481-493.  
[Consulta en línea](#)





