

# Física Básica II

Luis M. Castellanos  
Roberto E. Lorduy

iCartesiLibri

# Física Básica II

**Luis M. Castellanos  
Roberto E. Lorduy**

Fondo Editorial RED Descartes



Córdoba (España)  
2025

## Física Básica II:

Autores:

Luis M. Castellanos

Roberto E. Lorduy

Código JavaScript para el libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.

Recursos interactivos: [DescartesJS](#), WebSim y Phet Colorado.

Fuentes: [Lato](#) y [UbuntuMono](#)

Imagen de portada: ilustración generada por [Ideogram AI](#)

Red Educativa Digital Descartes

Córdoba (España)

[descartes@proyectodescartes.org](mailto:descartes@proyectodescartes.org)

<https://proyectodescartes.org>

Proyecto iCartesiLibri

<https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm>

ISBN: 978-84-10368-36-1



Esta obra está bajo una licencia Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual.

# Tabla de contenido

Prefacio .....	5
<b>1. GRAVITACIÓN .....</b>	<b>9</b>
1.1 INTERACCIÓN GRAVITACIONAL .....	10
1.2 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL .....	12
1.3 EL CAMPO GRAVITACIONAL .....	18
1.4 EL CONCEPTO DE MASA Y CARGA DISTRIBUIDA .....	27
1.5 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL .....	32
1.5 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL .....	32
1.6 CUESTIONARIO CAPITULO1 .....	39
<b>2. INTERACCIÓN ELÉCTRICA .....</b>	<b>41</b>
2.1 LA CARGA ELÉCTRICA .....	42
2.2 FUERZA ENTRE DOS CARGAS ELÉCTRICAS .....	43
2.3 EL CAMPO ELÉCTRICO .....	46
2.4 FLUJO DE CAMPOS VECTORIALES .....	65
2.5 TEOREMA DE FLUJO Y LEY DE GAUSS .....	69
2.6 POTENCIAL ELÉCTRICO .....	79
2.7 CUESTIONARIO CAPITULO2 .....	87
<b>3. CONDENSADORES .....</b>	<b>89</b>
3.1 CONDENSADORES .....	90
3.2 CAPACITANCIA .....	92
3.3 ENERGÍA ALMACENADA POR UN CONDENSADOR .....	97
3.4 CONEXIONES ENTRE CONDENSADORES .....	98
3.5 CUESTIONARIO CAPITULO 3 .....	105

<b>4. CORRIENTE Y RESISTENCIA ELÉCTRICA .....</b>	<b>107</b>
4.1 CORRIENTE Y RESISTENCIA ELÉCTRICA .....	108
4.2 CUESTIONARIO CAPITULO4 .....	121
<b>5. CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA Y LEYES DE KIRCHHOFF .....</b>	<b>123</b>
5.1 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA Y LEYES DE KIRCHHOFF .....	124
5.2 CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR .....	130
5.3 CUESTIONARIO CAPITULO5 .....	137
<b>6. LA INTERACCIÓN MAGNÉTICA .....</b>	<b>139</b>
6.1 EL CAMPO MAGNÉTICO .....	140
6.2 LEY DE BIOT-SAVART .....	140
6.3 LEY DE AMPERE .....	148
6.4 LEY DE AMPERE -MAXWELL .....	154
6.5 MOVIMIENTOS DE CARGAS ELÉCTRICAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO .....	158
6.6 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CORRIENTES .....	163
6.7 TORQUE MAGNÉTICO .....	170
6.8 LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY .....	174
6.10 CUESTIONARIO CAPITULO 6 .....	189
<b>7. LAS ECUACIONES DE MAXWELL .....</b>	<b>191</b>
7.1 COMO SE OBTIENEN LAS ECUACIONES .....	192
7.2 LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL .....	197
7.3 SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE MAXWELL .....	200
7.4 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	203
7.5 CUESTIONARIO CAPITULO 7 .....	208

# Prefacio

Este libro, "Física Básica II", ha sido diseñado con un propósito claro: proporcionar una introducción rigurosa, estructurada y accesible a los principios físicos que gobiernan las interacciones fundamentales del universo, integrando la teoría clásica con las herramientas digitales del siglo XXI.

El estudio de la física en este nivel marca un punto de inflexión para el estudiante. Mientras que la mecánica clásica se ocupa de lo tangible y visible, la Física II nos invita a comprender fenómenos a menudo invisibles pero omnipresentes: los campos. Desde la fuerza invisible que mantiene a los planetas en órbita hasta las interacciones electromagnéticas que hacen posible nuestra tecnología moderna, este texto busca desmitificar lo abstracto mediante un enfoque visual y práctico.

## Estructura y Contenido

El contenido abarca los temas esenciales del currículo universitario estándar para cursos de ingeniería y ciencias. La obra se estructura en un viaje conceptual que comienza con la **interacción gravitacional**, sentando las bases de las fuerzas a distancia. Posteriormente, nos adentramos en el vasto mundo de la **interacción eléctrica y magnética**, analizando desde las cargas estáticas y los circuitos de corriente directa hasta la inducción electromagnética. El recorrido culmina con la síntesis magistral de las **ecuaciones de Maxwell**, la piedra angular sobre la que se edifica gran parte de la física moderna y las telecomunicaciones.

## Enfoque Pedagógico e Interactividad

Entendemos que la física no se aprende solo leyendo, sino haciendo y observando. Por ello, hemos trascendido el formato del libro de texto

tradicional. A lo largo de estas páginas, la precisión matemática se complementa con **ilustraciones dinámicas, simulaciones y ejercicios interactivos**.

Gracias a la colaboración con proyectos educativos de vanguardia como **DescartesJS, WebSim y PhET de Colorado**, y a la inclusión de código interactivo en JavaScript desarrollado por Joel Espinosa Longi (IMATE, UNAM), este libro se convierte en un laboratorio virtual. Estas herramientas permiten al estudiante modificar variables, visualizar líneas de campo y experimentar con circuitos en tiempo real, transformando conceptos teóricos complejos en experiencias de aprendizaje tangibles.

## **A quién va dirigido**

Este libro está dirigido principalmente a estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias que ya poseen fundamentos de mecánica y cálculo, y que inician su camino en el electromagnetismo. No obstante, su claridad expositiva lo hace igualmente valioso para cualquier persona interesada en comprender los principios que rigen la naturaleza.

## **Agradecimientos**

Finalmente, los autores deseamos expresar nuestra profunda gratitud al profesor Juan Guillermo Rivera Berrío por sus invaluables enseñanzas en el área de la inteligencia artificial y las herramientas digitales, sin las cuales la realización de este libro interactivo no hubiese sido posible.

**Luis M. Castellanos**  
**Roberto E. Lorduy**

# Introducción

## Interacciones fundamentales de la naturaleza

Es claro que dos cuerpos pueden influirse mutuamente solo si tienen algún contacto entre ellos. Este contacto implica la aplicación de una fuerza que puede ser directa o a distancia (ejerciendo alguna fuerza entre ellos). Cuando esto ocurre decimos que hay una interacción entre los cuerpos.

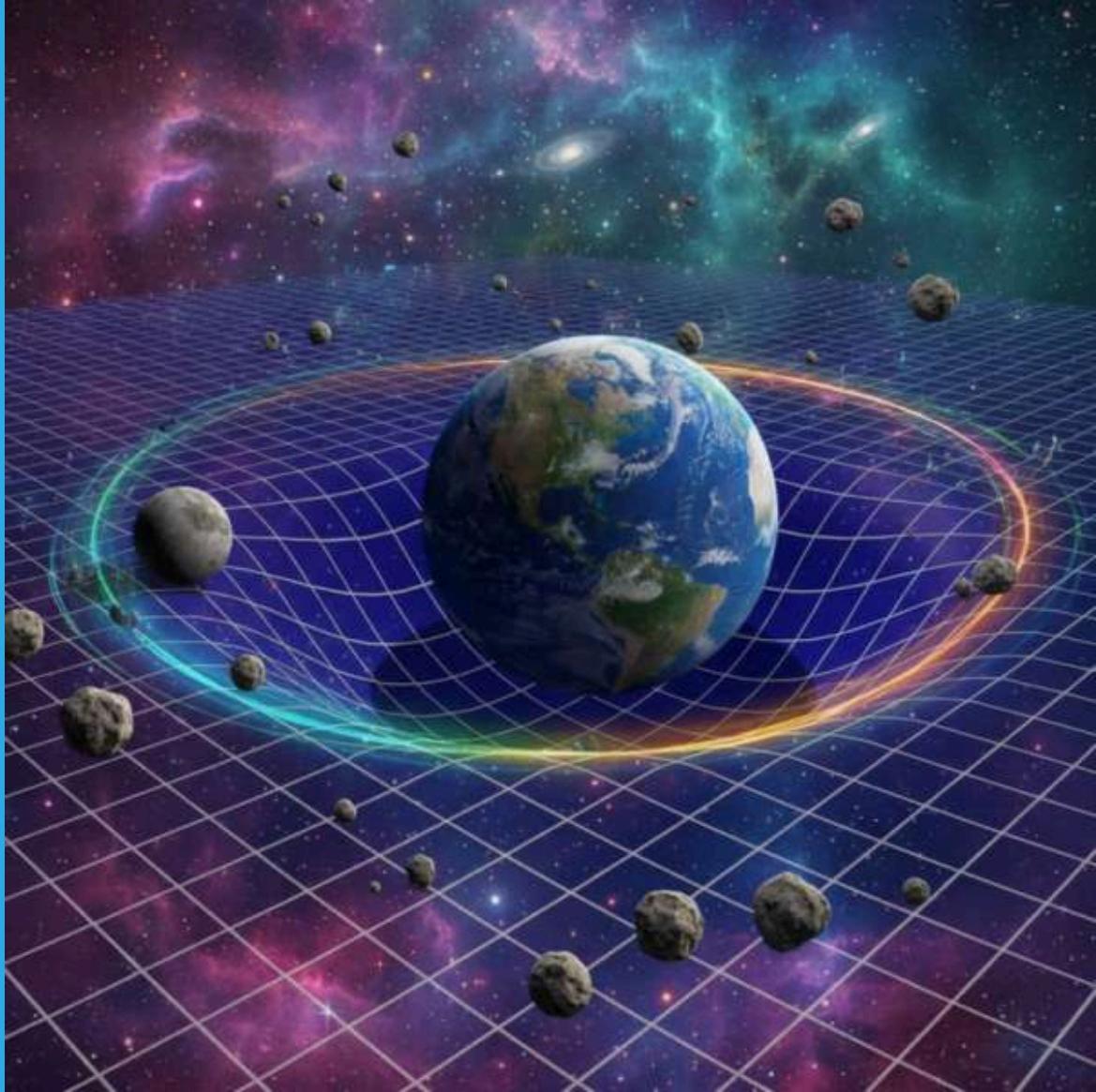
Los físicos han identificado cuatro interacciones (o fuerzas) fundamentales conocidas en la naturaleza según la fuente que las produce, ellas son :

- 1. La interacción gravitacional** (Fuerza de atracción universal de Newton) la cual es debida a la existencia de las masas (dos masas se atraen siempre sin importar la distancia entre ellas), si no existen masas, no existe fuerza gravitacional.
- 2. La interacción electromagnética** (La fuerza de Coulomb) la cual es debida a la existencia de las cargas eléctricas (dos cargas se atraen o se repelen sin importar la distancia entre ellas).
- 3. La interacción electrodébil** la cual es la responsable de los decaimientos radiactivos y ocurre en los núcleos densamente poblados (Los átomos más pesados).
- 4. La interacción fuerte** (La fuerza Nuclear) la cual se manifiesta entre partículas nucleares en el interior del núcleo de los átomos y solo existe o funciona a distancias muy cortas (nanómetros). Esta fuerza mantiene los protones (cargados positivamente) unidos en el interior de los núcleos atómicos; si no fuera por la fuerza nuclear no existiríamos.

En este curso estudiaremos detalladamente dos de estas interacciones: la interacción gravitacional y la interacción electromagnética.

Empezamos entonces con la interacción gravitacional.





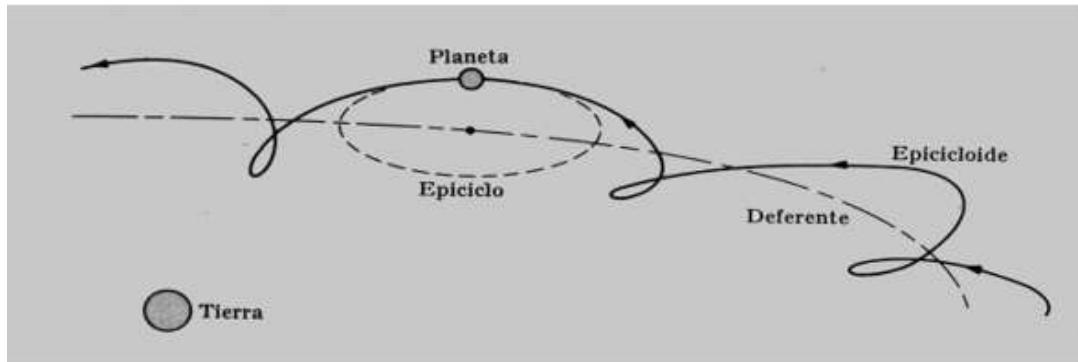
# Capítulo 1

## GRAVITACIÓN

## 1.1 INTERACCIÓN GRAVITACIONAL

Las primeras hipótesis y teorías relacionadas con el movimiento planetario se basaban en observaciones, especulaciones mentales y deducciones lógicas apoyadas en el sentido común de las cosas.

Entre los pueblos de la antigüedad fueron los griegos, entre ellos ARISTÓTELES, quienes consideraron la tierra como el centro geométrico del universo. A esta descripción se la conoce en las historias de las ciencias como TEORÍA GEOCÉNTRICA. Cerca del año 150 después de Cristo, el astrónomo PTOLOMEO de Alejandría desarrolla la teoría de las EPICICLOIDES para explicar el movimiento de los planetas alrededor de la tierra. En forma sencilla suponía que el planeta describía, con movimiento uniforme, un círculo denominado EPICICLO, cuyo centro a su vez se desplazaba en un círculo mayor, concéntrico con la tierra y llamado DEFERENTE. La trayectoria resultante del planeta es así una EPICICLOIDE.



*Modelo epicicloidal de Ptolomeo*

Figura 1.1.

La descripción geocéntrica de los griegos fue aceptada como correcta hasta que, en el siglo XVI, el monje polaco NICOLÁS COPÉRNICO propone el modelo HELIOCÉNTRICO en el que describe el movimiento de todos los planetas, incluyendo la tierra, alrededor del sol, el cual estaría en el centro.

El Modelo de COPÉRNICO y las mediciones astronómicas del sistema solar realizadas por el más grande observador de la época - TYCHO BRAHE - le permitieron a JOHANNES KEPLER, quien fue ayudante de Brahe, la formulación de sus tres leyes sobre el movimiento de los planetas, las tres leyes son una descripción cinemática del movimiento planetario, y establecen:

- I. La órbita de los planetas es una elipse, estando el sol en uno de sus focos.*
- II. El vector posición de cualquier planeta con respecto al sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.*
- III. Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de las distancias promedio al sol, ( $P^2 = kr^3$ ), donde k es una constante de proporcionalidad igual para todos los planetas.*

El sol, el cuerpo más grande de nuestro sistema planetario, coincide prácticamente con el CENTRO DE MASA DEL SISTEMA, y se mueve más lentamente que los planetas. Esto justifica el haberlo escogido como CENTRO DE REFERENCIA, ya que es prácticamente un sistema inercial.

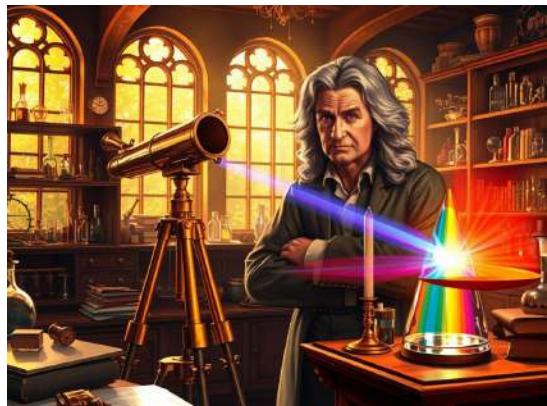
Las ideas de KEPLER constituyen la primera tentativa de unificar la física con la astronomía.

ISAAC NEWTON, en un esfuerzo por determinar la interacción responsable del movimiento de los planetas y con la ayuda de las leyes de KEPLER, realiza su contribución a la ciencia introduciendo la **Ley de Gravitación Universal**, formulada en 1666 y publicada en 1687, en un capítulo del texto "Principios Matemáticos de la filosofía Natural

## 1.2 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Sir Isaac Newton (1642-1727) Es autor de los *Philosophi Naturalis Principia Mathematica*, conocidos como los Principia, donde describe la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre.

Como dijimos antes, Newton estuvo bastante influenciado por los estudios previos realizados por Johannes Kepler y Nicolás Copérnico quienes fueron sus antecesores. La contribución de Newton, y quizá la más importante en el desarrollo de la mecánica, fue el descubrimiento de la LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL



Newton demuestra que, si un planeta obedece la primera ley de Kepler, la fuerza debe ser proporcional a  $\frac{1}{r^2}$ , siendo  $r$  la distancia entre dos cuerpos, que pueden ser dos planetas, sol y planeta, o dos partículas pequeñas. Por otra parte, la segunda ley de Kepler indica que la fuerza asociada con la Interacción Gravitacional es de tipo central, es decir la fuerza actúa a lo largo de la línea que une los dos cuerpos interactuantes. Si suponemos que la interacción gravitatoria es una propiedad universal de toda materia, la fuerza  $F$  asociada con la interacción debe ser proporcional a la cantidad de materia de cada cuerpo, luego si  $m_1$  y  $m_2$  son las masas que interactúan, podemos escribir:

$$F \propto \left( \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) \quad (1.1)$$

La proporcionalidad se puede convertir en una igualdad mediante la introducción de un factor constante  $G$

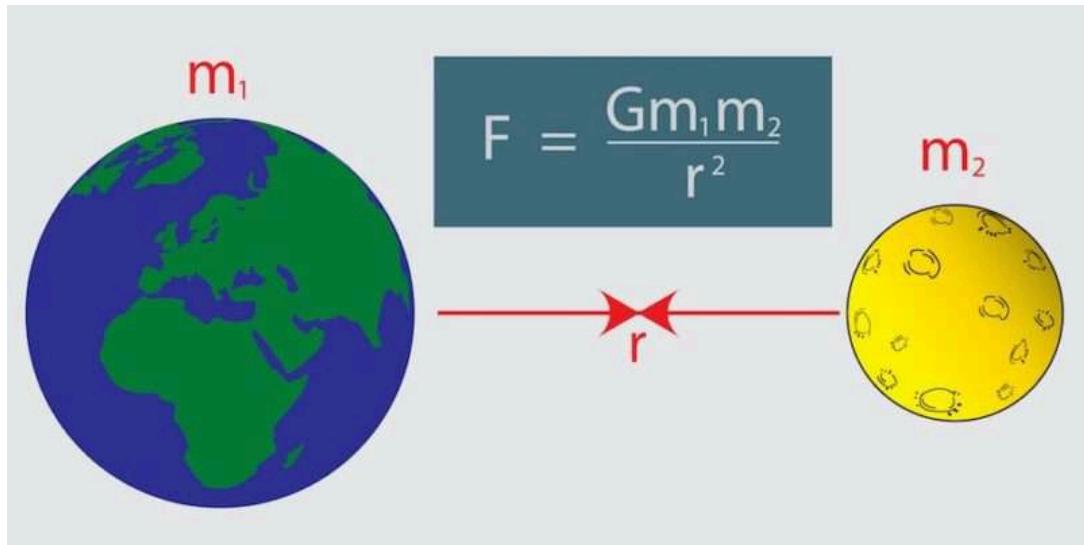


Figura 1.2.

$$F = G \left( \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) \quad (1.2)$$

$G$  se determina experimentalmente<sup>1</sup>, se llama constante de gravitación universal, y su valor medido en unidades MKSC es:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

La ecuación (1.2) puede expresarse en forma vectorial por medio de un vector unitario  $\hat{u}_r$ , dirigido de  $m_2$  a  $m_1$ , en este caso la fuerza gravitacional que actúa sobre  $m_2$  debido a  $m_1$  es:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.3)$$

El signo menos en la ecuación (1.3) indica que  $m_2$  es atraída por  $m_1$ . De la misma manera la fuerza sobre  $m_1$  debido a  $m_2$ , designada por  $\vec{F}_{21}$  es igual en magnitud a  $\vec{F}_{12}$  y en dirección opuesta, esto es, dichas fuerzas forman una pareja de acción - reacción:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

<sup>1</sup> Experimento de la balanza de torsión de CAVENDISH

La ecuación (1.3) es válida para un sistema aislado de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  (puntuales) separadas una distancia  $r$ . La ecuación se puede aplicar también a un sistema de varias masas puntuales, como se muestra en los siguientes ejemplos:

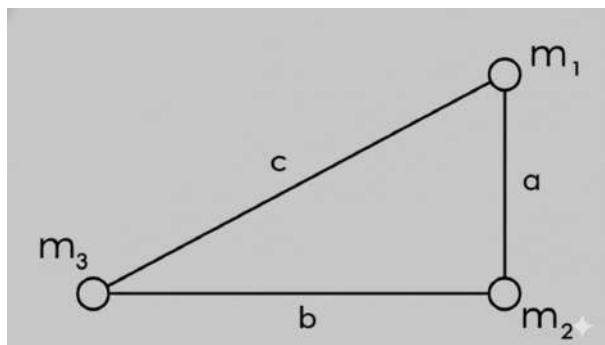


Figura 1.3.

**Ejemplo No. 1** Considere tres masas puntuales  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  localizadas en los vértices de un triángulo rectángulo como se muestra en la figura (1.3). Las distancias entre las masas están indicadas. Encontrar la fuerza gravitacional que actúa sobre  $m_3$  debido a  $m_1$  y  $m_2$ .

**Solución:**

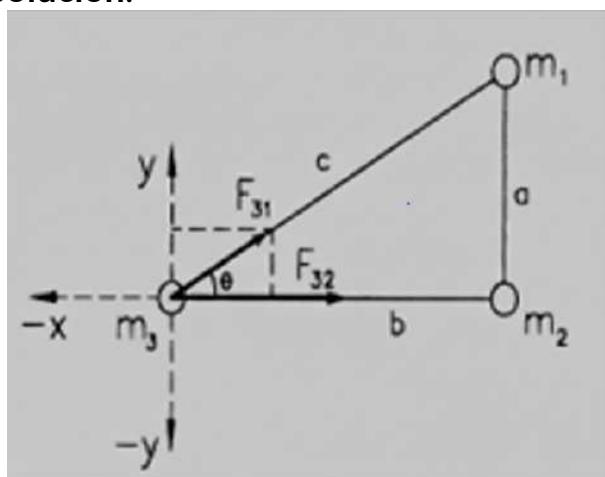


Figura 1.4.

Dibujando las interacciones gravitacionales entre  $m_3$  y  $m_1$  y entre  $m_3$  y  $m_2$ , vemos que la fuerza resultante, que actúa sobre  $m_3$  es:

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

Estos vectores se muestran en la figura de la izquierda (Fig1.4) Donde vemos que:

$$\vec{F}_{31} = F_{31} \hat{i} + F_{31} \hat{j}$$

y

$$\vec{F}_{32} = F_{32} \hat{i}$$

La magnitud de la fuerza resultante sobre  $m_3$  es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Además:

$$F_x = F_{32} + F_{31} \cos\theta; \quad F_y = F_{31} \sin\theta$$

De acuerdo con la ley de gravitación la intensidad o magnitud de la fuerza de atracción entre las dos masas puntuales  $m_3$  y  $m_2$  viene dada por:

$$F_{32} = G \left( \frac{m_3 m_2}{r^2} \right)$$

De la geometría de la figura (1.4):

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \quad y \quad \sin\theta = \frac{a}{c}$$

Reemplazando en  $F_x$  y  $F_y$  obtenemos:

$$F_x = G \frac{m_3 m_2}{b^2} + G \frac{m_3 m_1}{c^2} \frac{b}{c} = G m_3 \left( \frac{m_2}{b^2} + \frac{m_1 b}{c^3} \right)$$

$$F_y = G \left( \frac{m_3 m_1}{c^2} \right) \frac{a}{c} = G m_3 \left( \frac{m_1 a}{c^3} \right)$$

Luego reemplazando  $F_x$  y  $F_y$  en  $F$  tenemos:

$$F = G m_3 \sqrt{\left( \frac{m_2}{b^2} + \frac{m_1 b}{c^3} \right)^2 + \left( \frac{m_1 a}{c^3} \right)^2}$$

Este resultado lo podemos escribir en forma vectorial como :

$$\text{👉 } \vec{F} = Gm_3 \left( \frac{m_2}{b^2} + \frac{m_1 b}{c^3} \right) \hat{i} + Gm_3 \left( \frac{m_1 a}{c^3} \right) \hat{j}$$

## Ejemplo No.2

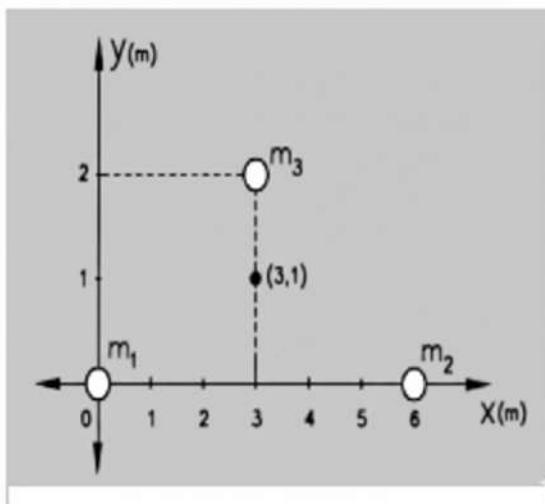


Figura 1.5.

Considere las cuatro masas idénticas  $m$  localizadas en los vértices de un cuadrado de lado  $a$ , como se muestra en la figura(1.5).

Encuentre la magnitud de la fuerza que actúa sobre una de las masas, debido a las otras tres

### Solución

De la ley de Gravitación tenemos que la magnitud de la fuerza sobre la masa seleccionada(ver figura 1.6)

es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Donde:

$$F_x = F_1 + F_3 \cos \theta$$

$$F_y = -(F_2 + F_3 \sin \theta)$$

$$F_3 = G \frac{m^2}{2a^2}$$

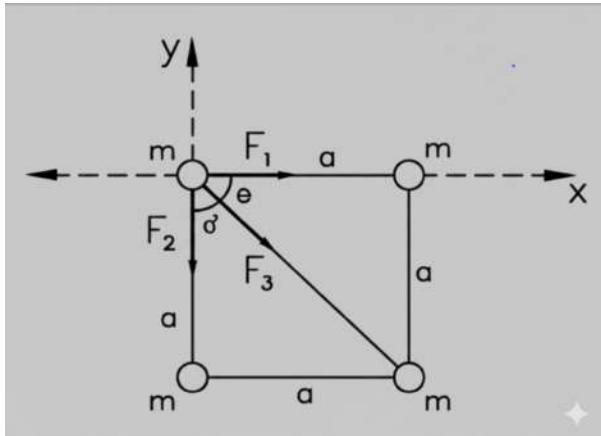


Figura 1.6.

$$F_x = F_y = G \frac{m^2}{a^2} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 1.35G \frac{m^2}{a^2}$$

Reemplazando en  $F$  finalmente obtenemos:

$$\text{👉 } F = \sqrt{2(1.35G \frac{m^2}{a^2})^2} = 1.35G \frac{m^2}{a^2} \sqrt{2}$$

### Ejercicios Complementarios

- Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre la masa localizada en el vértice inferior derecho del cuadrado.
- ¿Cuál sería la fuerza que actuaría sobre una quinta masa, idéntica a las demás, localizada en el centro del cuadrado?

### Estrategias y sugerencias para la solución de problemas

1. Dibuje las interacciones y tenga en cuenta sobre cual masa se realizan. Dibuje las fuerzas que actúan sobre la masa.
2. Escoja un sistema de referencia apropiado.
3. Realice las operaciones teniendo presente que la fuerza es un vector.

por otro lado, podemos notar de la figura 1.6 que:

$\theta = 45^\circ$  por lo tanto,

$$\operatorname{Sen}\theta = \operatorname{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Además  $F_x = F_y$ , tenemos entonces:

## 1.3 EL CAMPO GRAVITACIONAL

Este concepto permite salvar las dificultades que entraña aceptar que los cuerpos interaccionan a cierta distancia unos de otros: Cuando se empuja un carro varado no es difícil entender como tiene lugar la interacción entre las manos de la persona que empuja y el carro, puesto que las manos y el carro “Están en contacto”. Sin embargo, ¿Cómo podemos explicar la interacción entre el sol y la tierra, separados por una distancia de millones de kilómetros? ¿Son distintas la interacción entre las manos de la persona con el carro y la del sol y la tierra? Si analizamos rigurosamente el término “contacto” veremos que, en realidad, no hay diferencia entre uno y otro caso. El término “contacto”, entendido como distancia nula entre dos cuerpos, no existe, pues todas las interacciones que se producen en los cuerpos son interacciones a distancia. Quedan en pie las preguntas: ¿Cómo se transmite la interacción? ¿A qué velocidad se transmite? Estas inquietudes pueden discutirse para profundizar más el concepto que deseamos desarrollar, conocido como campo gravitacional. Describiremos ahora las interacciones gravitacionales entre masas puntuales<sup>2</sup> para ahondar en el concepto de Campo Gravitacional

### Intensidad de campo gravitacional

Supongamos que tenemos una masa  $M$  y que colocamos, en diferentes posiciones alrededor de  $M$ , otra masa  $m$  como se muestra en la Fig 1.7, observe que en cada posición la masa  $m$  experimenta una fuerza debida a su interacción gravitacional con  $M$  dada por la ecuación (1.3). De acuerdo con la Ley Gravitacional Universal, en cada posición de  $m$ , la masa  $M$ , experimenta también una fuerza igual y opuesta, pero por el momento estamos interesados en la fuerza que actúa sobre  $m$ .

---

<sup>2</sup> *Masas puntuales: aquellos cuerpos esféricos en los que se considera que su masa está concentrada en un punto llamado centro de masa.*

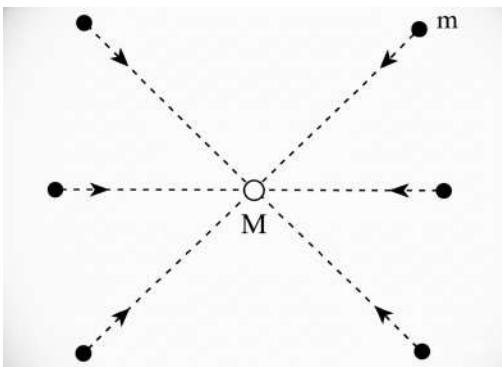


Figura 1.7.

Campo Gravitacional  $\vec{g}$  producida por una masa  $M$  en un punto  $P$  se define como la fuerza ejercida sobre la unidad de masa colocada en  $P$



Figura 1.8.

Es decir si

$$\vec{F} = -G \left( \frac{Mm}{r^2} \right) \hat{u}_r$$

Entonces

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.4)$$

En la figura (1.8),  $\vec{g}$  tiene la dirección opuesta al vector unitario  $\hat{u}_r$  o sea que  $\vec{g}$  señala siempre hacia la masa que lo produce. La ecuación. (1.4) expresa el campo gravitacional a una distancia  $r$  de una masa puntual  $M$ . Las unidades de  $g$  se miden en  $\frac{N}{Kg}$  o  $\frac{m}{s^2}$  y son dimensionalmente equivalentes a una aceleración. Esta aceleración es conocida como la aceleración de la gravedad  $\vec{g}$ .

La presencia de una masa en el espacio modifica este espacio, y a cada punto del espacio en el vecindario de la masa le asociamos un vector al cual denominamos intensidad de campo gravitacional  $\vec{g}$  mostrado en la figura (1.7), que se reconoce por la fuerza que actúa sobre  $m$ . Podemos decir que la Intensidad del

En consecuencia, si suponemos que nuestro planeta es esférico de radio  $R$  y masa  $M$ , la expresión para  $\vec{g}$  es:

$$\vec{g} = -G \frac{M}{R^2} \hat{u}_r = -9.8 \frac{m}{s^2} \hat{u}_r$$

Consideremos ahora varias masas  $m_1, m_2, m_3$ , colocadas discretamente en el espacio y a diferentes distancias  $r_1, r_2, r_3$ .. cada una produciendo su propio campo gravitacional  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ , ...respectivamente (Fig1.9)

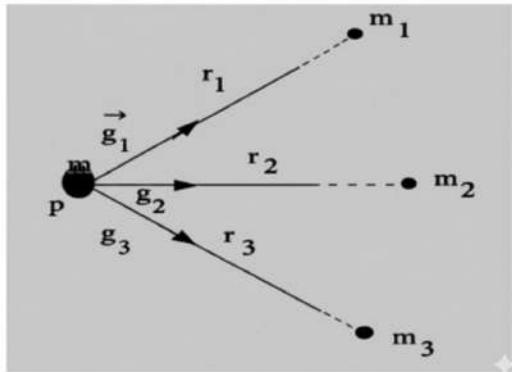


Figura 1.9.

La fuerza total sobre una partícula de masa  $m$  colocada en un punto  $P$  es:

$$\vec{F} = m\vec{g}_1 + m\vec{g}_2 + m\vec{g}_3..+$$

$$\vec{F} = m(\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + ..) = m\vec{g}$$

Donde

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 + \cdots$$

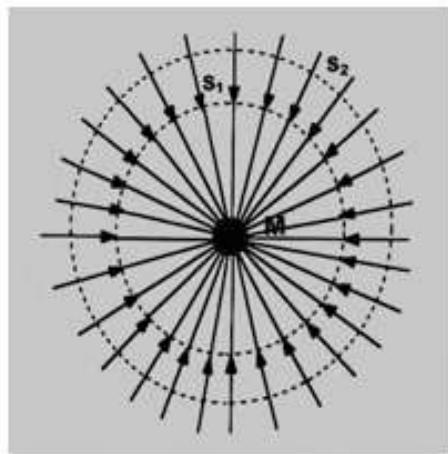
Es decir, la fuerza total debida al campo gravitacional producidas por las masas  $m_1, m_2, m_3, \dots$  en  $P$  viene dado por la suma vectorial de los campos producidos por cada masa en  $P$

Definido el campo gravitacional que crea una masa, vamos a intentar establecer una representación de éste.

Una masa puntual  $M$  crea un campo gravitacional radial, dirigido siempre hacia la masa que lo produce.

Supongamos que rodeamos la masa  $M$  que crea el campo con dos superficies esféricas, tal como se muestra en la figura 1.10. Vemos que en la superficie  $S_2$ , el número de líneas por unidad de superficie es menor que en la superficie  $S_1$ . Esta “densidad de líneas” disminuye con el cuadrado de la distancia, a medida que nos alejamos de  $M$ , de este modo, un campo gravitacional puede representarse figurativamente por **líneas de fuerza**. Se traza una línea de fuerza de modo que en cada punto la dirección del campo es tangente a la línea que pasa por el punto. Las líneas de fuerza se trazan de modo que su densidad sea proporcional a la **intensidad de campo**.

Si consideramos el campo creado por dos masas idénticas, separadas una distancia  $r$ , podemos representarlo como se aprecia en la figura 1.11, se puede observar cómo en cada punto el campo es tangente a la línea de fuerza. Así mismo, la región que existe entre las masas presenta una menor densidad de líneas de fuerza, ya que corresponde a una zona en la que el campo se debilita.



Líneas de Fuerza originadas por una masa puntual  $M$

Figura 1.10.

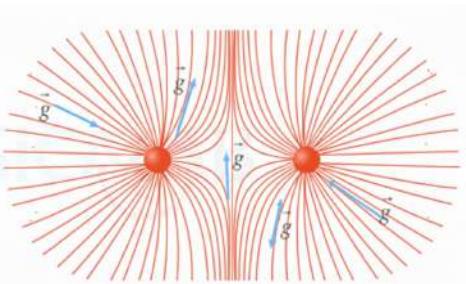


Figura 1.11.

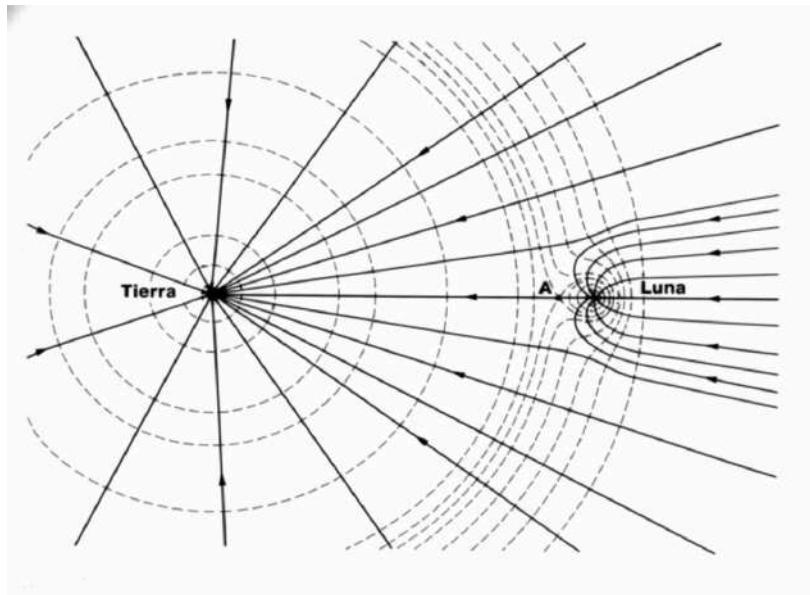


Figura 1.12.

La figura 1.12 muestra el campo alrededor de dos masas diferentes por ejemplo la Tierra y la Luna. Aquí las líneas no son radiales y en la vecindad del punto A, la intensidad del campo es muy débil. (En A es cero).

### Ejemplo No. 3

Considere que la Luna tiene una masa de  $7.36 \times 10^{22}$  Kg, un radio aproximado de  $1.74 \times 10^6$  m. Calcular la gravedad y el peso de un cuerpo de 80 Kg. En la superficie de la Luna.

### Solución:

$$\vec{g}_L = G \frac{m_L}{R_L^2} \hat{u} \quad \text{usando} \quad G = 6,672 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

$$\vec{g}_L = 6,72 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2} \times \frac{7,36 \times 10^{22} Kg}{(1,74 \times 10^6 m)^2} = 1.62 \frac{m}{s^2}$$

El cuerpo pesara

👉  $W_L = mg_L = 129,6 N$

### Ejemplo No. 4

Dos masas iguales  $m$ , están separadas una distancia  $2a$  (Fig 1.13). Calcular el campo gravitacional producido por estas dos masas en el punto  $P$

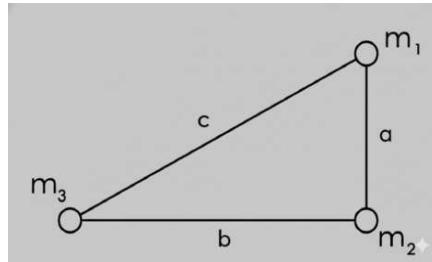


Figura 1.13.

**Solución:** La magnitud del campo gravitacional resultante en el punto  $P$  es:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

$$g_x = g_1 \cos \theta - g_2 \cos \theta$$

De la figura 1.14 podemos observar que  $|g_1| = |g_2|$ ,  
En consecuencia

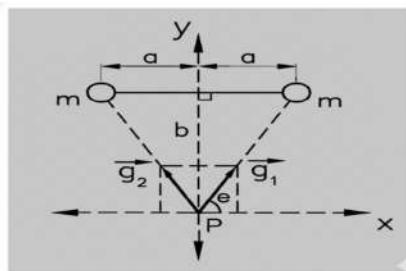


Figura 1.14.

$$g(x) = 0 \quad y \quad g_y = 2g_1 \operatorname{Sen} \theta$$

Donde

$$g_1 = G \frac{m}{a^2 + b^2} \quad y \quad \operatorname{Sen} \theta = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

$$\text{Por lo tanto: } g_y = 2G \frac{m \cdot b}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

Reemplazando en  $g$  obtenemos:

$$g = \sqrt{0^2 + (2G \frac{mb}{(a^2 + b^2)^{3/2}})^2}$$

$$\text{👉 } \vec{g} = 2G \frac{mb}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j}$$

## Ejercicio Complementario

Se tiene una masa  $m_3$  ubicada en el punto (Figura 1.15)  $P(3, 2)$

¿Cuál sería la fuerza gravitacional total que actuaría sobre la masa  $m_3$  situada en el punto  $P$ ?

(Mire el ejemplo

anterior)

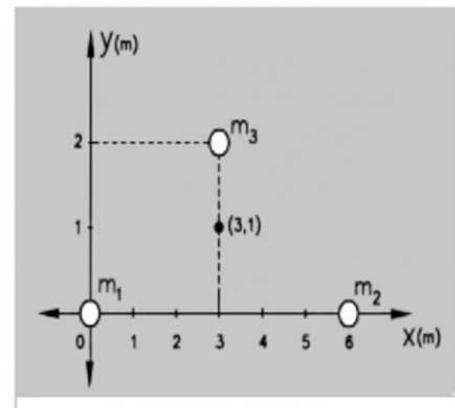


Figura 1.15.

## Ejemplo 5

Se colocan tres masas en las esquinas de un rectángulo, como se muestra en la figura 1.16

Determinar las componentes  $x$  y  $y$  del campo gravitacional en el punto  $P$ . (Otra esquina del rectángulo).

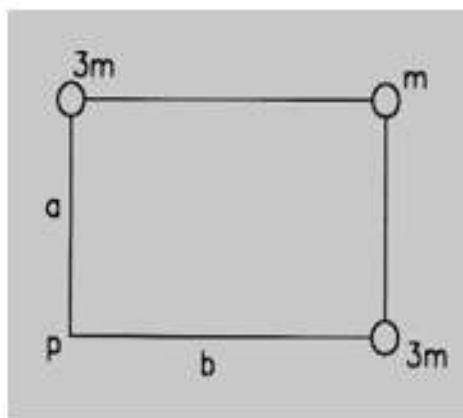


Figura 1.16.

De la figura 1.17 observamos que:

$$g_x = g_1 + g_2 \cos\theta \quad g_y = g_3 + g_2 \sin\theta$$

Donde:

$$g_1 = G \frac{3m}{b^2} \quad g_2 = G \frac{m}{(a^2+b^2)} \quad g_3 = G \frac{3m}{a^2} \quad \cos\theta = \frac{b}{(a^2+b^2)}$$

Remplazando obtenemos:

$$\text{👉 } g_x = G \frac{3m}{b^2} + G \frac{mb}{(a^2 + b^2)^{3/2}};$$

$$\text{👉 } g_y = G \frac{3m}{a^2} + G \frac{ma}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

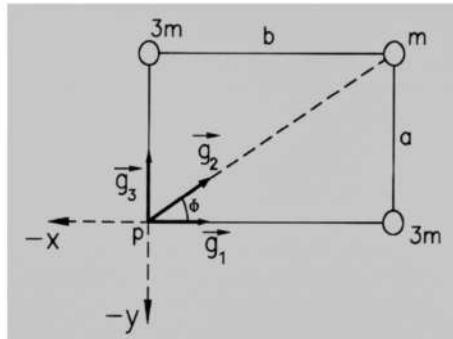


Figura 1.17.

### Problemas de Selectividad

1. Un planeta tiene la mitad del radio de la tierra, pero su masa es dos veces la masa de la tierra. ¿Cuál es la intensidad del campo gravitacional en la superficie de dicho planeta?

$$Rta : 78.4 \frac{m}{s^2}$$

2a. Calcule la intensidad del campo gravitacional  $\vec{g}$  producido por las masas que se indican en la figura 1.18 en el punto (3,1). Las distancias se miden en metros y los valores de las masas son  $m_1 = m_2 = m_3 = 100 \text{ Kg}$

2b. ¿Cuál será el valor de la fuerza resultante que actúa sobre una masa de 100kg colocada en dicho punto?

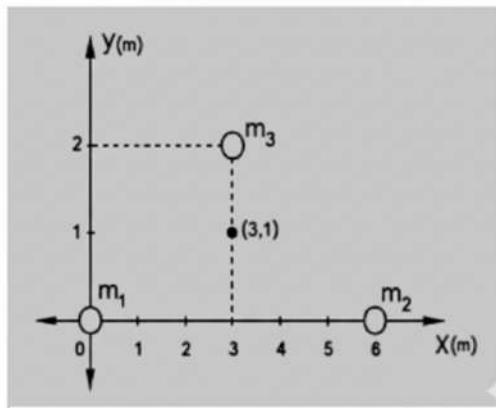


Figura 1.18.

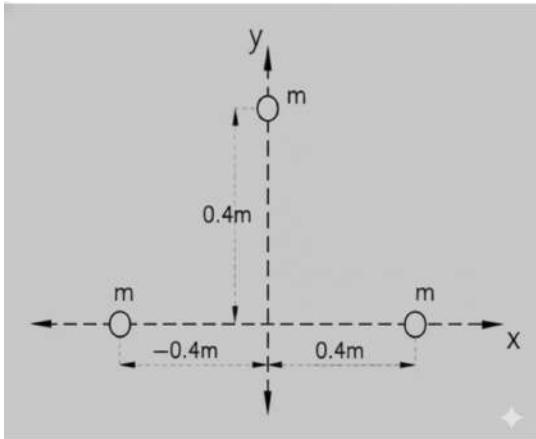


Figura 1.19.

plano XY como se muestra en la figura 1.19

i. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza resultante sobre la masa localizada en  $X = 0, Y = 0.4m$  debido a las otras masas?

Rta :  $7,36 \times 10^{-9} N$

ii. Calcular el campo gravitacional en el origen de coordenadas debido a las tres masas.

Rta  $2.08 \times 10^{-9} \frac{N}{Kg}$

4. Un hombre pesa  $70Kgf$ . Suponiendo que el radio de la tierra se duplicara, cuánto pesaría si:

i. La masa de tierra permaneciera constante

Rta :  $17.5Kgf$

ii. densidad promedio de la tierra permaneciera constante

Rta :  $140Kgf$

3. Dos cuerpos se encuentran separados una distancia de  $0.2m$  y se atraen uno al otro con una fuerza de  $1.0 \times 10^{-8} N$ .

Si la masa total de los dos cuerpos es de  $5.0kg$ . ¿Cuál es la masa de cada uno?

Rta :  $3Kg$  y  $2Kg$

4. Tres masa puntuales de  $5Kg$  están localizadas en un

## 1.4 EL CONCEPTO DE MASA Y CARGA DISTRIBUIDA

Ya hemos visto que la fuerza de atracción universal entre masas (dada por la ley de atracción universal de Newton) se formuló inicialmente usando el concepto de masa puntual. También hemos dicho antes que entendemos por masa o cargas puntuales cualquier masa o carga cuya ubicación está localizada de tal manera que su posición en el espacio es bien definida por un punto. Por el contrario *una masa o carga distribuida no es posible localizarla en un punto específico del espacio sino en alguna región de espacio* bien sea una longitud (una dimensión) una superficie (dos dimensiones) o un volumen (tres dimensiones). Las distribuciones de masa se caracterizan por sus densidades las cuales denotamos por las letras  $\lambda$  (densidad lineal),  $\sigma$  (densidad superficial) y  $\rho$  (densidad volumétrica).

A continuación describimos en detalle el significado de cada una de estas densidades:

**Densidad lineal  $\lambda$ :** Es la cantidad de masa -o carga- contenida en la unidad de longitud. Se define matemáticamente como

$$\lambda = \frac{dm}{dl}. \text{ Si la distribución es uniforme entonces } \lambda = \frac{m}{l}$$

**Densidad superficial  $\sigma$ :** Es la cantidad de masa -o carga- contenida en la unidad de superficie. Se define matemáticamente como

$$\sigma = \frac{dm}{ds}. \text{ Si la distribución es uniforme entonces } \sigma = \frac{m}{s}$$

**Densidad volumétrica  $\rho$ :** Es la cantidad de masa -o carga- contenida en la unidad de volumen. Se define matemáticamente como

$$\rho = \frac{dm}{dv}. \text{ Si la distribución es uniforme entonces } \rho = \frac{m}{v}$$



Una distribución lineal de masa, como un alambre delgado por ejemplo, se puede construir apilando pequeñas masas puntuales una a continuación de la otra. Cuando escogemos un  $dm$  este puede ser tan pequeño como una de las masas puntuales que construyen el alambre

cualquier distribución lineal de masa - o carga- se puede construir a partir de masas o cargas puntuales.

Así una **distribución lineal** es el resultado de unir consecutivamente una detrás de otra a muchas masas - o cargas-puntuales como se muestra en la figura de la izquierda. Se caracteriza esta distribución por la cantidad de masa contenida en la unidad de longitud que llamamos  $\lambda$  y *produce un campo gravitacional a cierta distancia  $r$  equivalente a la suma (integral) de todos los campos producidos por todas las masas que lo componen*

El campo gravitacional producido por una distribución lineal de masa se calcula encontrando primero el campo producido por una pequeña cantidad de masa  $dm$  contenida en un elemento de longitud  $dl$

$$d\vec{g} = G \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r$$

Pero  $dm = \lambda dl$

El campo total será entonces

$$\vec{g}_{lineal} = \int G \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.5)$$

Similarmente es posible considerar una superficie construida de muchos alambres paralelos. En este caso  $dm$  es la masa puntual " contenida" en la unidad de superficie es decir,  $dm = \sigma ds$

El campo total producido por la superficie será entonces

$$\vec{g}_{superficie} = \int G \frac{\sigma ds}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.6)$$

Igualmente, una distribución volumétrica cualquiera produce en general un campo total:

$$\vec{g}_{volumen} = \int G \frac{\rho dV}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.7)$$

### Ejemplo 6

Se tiene una distribución lineal de masa en forma de semi anillo de radio  $R$  con densidad lineal  $\lambda$  (Figura 1.20). Encontrar el campo gravitacional  $\vec{g}$  producido por esta distribución en el punto  $O$

### Solución

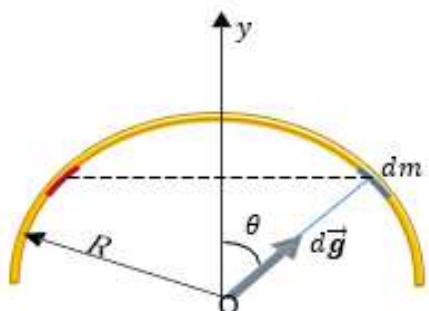


Figura 1.20.

Como podemos observar inmediatamente se trata de una distribución lineal de masa, por lo tanto, el campo gravitacional total producido por el semi anillo viene dado por la ecuación 1.5

$$\vec{g}_{lineal} = \int G \frac{dm}{r^2} \hat{u}_r = \int G \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{u}_r \quad (1.8)$$

Notemos que cada diferencial de masa  $dm$  en la figura 1.20 produce un vector  $dg$  en una dirección diferente que los demás  $dm$ , con lo cual, en la integral 1.8 (es decir la suma) quedaríamos sumando infinitos vectores en diferentes direcciones, esto dificulta muchísimo la ejecución de la integral, entonces como procedemos?. Como sabemos, cuando se trata de sumar muchos vectores la idea es buscar siempre la manera de sumar vectores paralelos, para lo cual recurrimos a sus componentes rectangulares, con este fin debemos realizar un análisis de las simetrías del problema

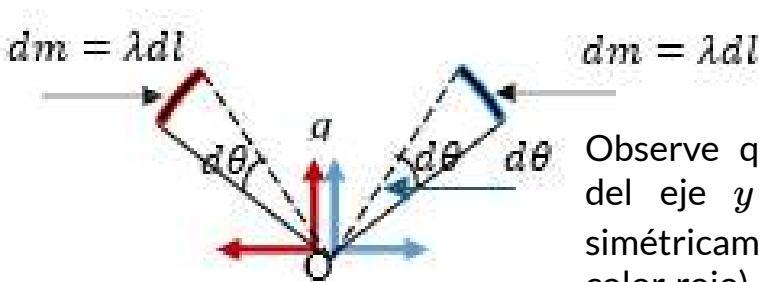


Figura 1.21.

$$dm = \lambda dl$$

$$dm = \lambda dl$$

Observe que a la izquierda del eje  $y$  existe otro  $dm$  simétricamente ubicado (en color rojo) el cual produce un  $dg$  igual en magnitud y en un ángulo  $\theta$  igual, pero a la izquierda del eje  $y$ . Cada uno

de estos vectores tiene componentes rectangulares en  $x$  y  $y$  como nos muestra figura 1.21 donde notamos que las componentes a lo largo del eje  $x$  se anulan, es decir, cuando recorremos todo el semi anillo solo tenemos que sumar las componentes  $d\vec{g}_y$  de los campos producidos por cada  $dm$  del semi anillo

$$d\vec{g} = \left( G \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta \right) \hat{j} \quad \vec{g}_{total} = \int \left( G \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \theta \right) \hat{j}$$

Para realizar la integral notamos que  $dl = R d\theta$  y hacemos la sustitución  $r \Rightarrow R$

De modo que los límites de integración sobre el ángulo  $\theta$  podrían ir desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , o también podríamos escoger desde  $\theta = 0$ , hasta  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y luego multiplicar por dos con el fin de cubrir todo el semicírculo

$$\vec{g}_{total} = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( G \frac{\lambda R d\theta}{R^2} \cos\theta \right) \hat{j} = 2 \times G \frac{\lambda R}{R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta d\theta) \hat{j}$$

$$\vec{g}_{Total} = -\frac{2\lambda G}{R} \left[ \left( \sin\theta \right)_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \hat{j} = -2G\lambda \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^0 \right]$$

👉  $\vec{g}_{Total} = \frac{2\lambda G}{R} \hat{j}$

**Ejemplo 7.** Una distribución lineal en forma de alambre delgado con densidad lineal  $\lambda$  y longitud  $L$  está recostado sobre el eje de las  $X$  tal y como se muestra en la figura 1.22. El extremo izquierdo del alambre está ubicado a una distancia  $d$  del origen de coordenadas.

Calcular el campo gravitacional  $\vec{g}$  producido por esta distribución lineal en el punto  $O$ .

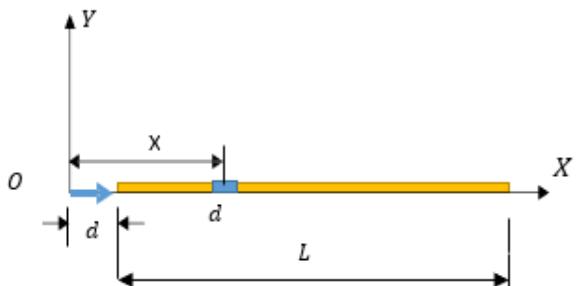


Figura 1.22.

**Solución** Escogemos un  $dm$  sobre cualquier parte del alambre y trazamos su distancia al punto donde queremos calcular el campo, en este caso el punto  $O$ . El  $dm$  produce en  $O$  un campo  $\vec{g}$  (flecha en color azul) dado por:

$$d\vec{g} = G \frac{dm}{x^2} \hat{i} = G \frac{\lambda dl}{x^2} \hat{i}$$

Nótese que cualquier  $dm$  del alambre produce campo en la misma dirección, es decir, la dirección positiva del eje  $X$  por lo tanto podemos sumar las contribuciones de todos los elementos  $dm$  contenidos en el alambre pues al hacerlo estamos sumando vectores paralelos.

De modo que

$$\vec{g}_{Total} = G\lambda \int_d^{d+L} \frac{dx}{x^2} \hat{i} = - \left[ G\lambda \left( \frac{1}{x} \right)_d^{d+L} \right] \hat{i}$$

👉  $\vec{g}_{Total} = G\lambda \left( \frac{L}{d(d+L)} \right) \hat{i}$

## 1.5 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

¿Que entendemos por energía potencial gravitacional?. En términos muy sencillos es el trabajo que debemos realizar para construir o fabricar cualquier configuración de masas ya sean masas puntuales o masas distribuidas.

Se define una configuración de masas como un arreglo particular con algún diseño geométrico, por ejemplo, dos masas separadas una distancia  $r$  entre ellas es una configuración (de hecho, es la mas sencilla que se conoce). Tres masas colocadas en los vértices de un triángulo isóceles de lado  $l$  es otra configuración (podría ser cualquier triángulo no necesariamente isóceles) lo mismo que cuatro masas en los vértices de un rectángulo, o pentágono, octágono etc

En la sección anterior hemos considerado que una masa distribuida está construida a partir de masas puntuales, siguiendo esta línea de pensamiento podemos pensar que cualquier distribución continua de masa, cualquiera sea su forma, requiere para su construcción la realización de un trabajo. En lo que sigue ilustramos esta idea calculando el trabajo requerido para construir la configuración mas

elemental que existe: dos masas separadas cierta distancia  $r$

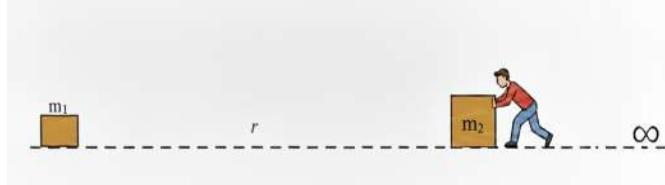


Figura 1.23.

Lo primero que debemos suponer es que las dos masas están separadas una distancia tan grande que no interactúan

entre ellas, esto sólo es posible si la distancia entre ellas es infinita, por lo tanto, para construir ésta configuración debemos "traer" la masa  $m_2$  desde el infinito y colocarla a una distancia  $r$  de la masa  $m_1$ , lo cual sólo es posible realizando un trabajo que llamaremos  $W$ . Este trabajo viene dado por:

$$W = \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.9)$$

Debido a que queremos traer la masa  $m_2$  con velocidad constante, la fuerza  $\vec{F}$  ejercida sobre la masa  $m_2$  debe ser una fuerza de contención en dirección contraria al desplazamiento (la ejerce el hombre de camisa roja en la figura 1.23) y es igual y contraria a la fuerza de atracción ejercida por  $m_1$  sobre  $m_2$ . Entonces

$$W = G \int_{\infty}^r \left( \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{i} \right) \cdot (-\hat{i} dr) = -G m_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2}$$

$$W = -G m_1 m_2 \left( -\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = \frac{G m_1 m_2}{r} \quad (1.10)$$

Una vez realizado el trabajo la configuración "almacena" esta energía (recuerde que el trabajo es energía) la cual podemos escribir

$$E_P = -\frac{G m_1 m_2}{r} \quad (1.11)$$

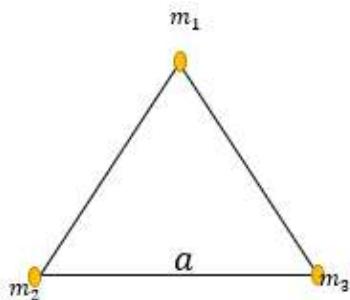


Figura 1.24.

### Ejemplo 8.

Encontrar la energía potencial almacenada, o el trabajo necesario para construir una configuración geométrica triangular de tres masas idénticamente iguales colocadas en los vértices de un triángulo equilátero (Fig 1.24)

### Solución

El procedimiento para construir una configuración cualquiera a partir de masas puntuales consiste en asumir siempre que hay una primera masa, la cual no necesitó de ningún trabajo pues antes que ella no había otras masas, esta es la masa primigenia.

Las otras masas deben ser atraídas a la configuración realizando trabajo contra las fuerzas de todas las masas que han sido traídas antes. Supongamos entonces que ya tenemos la primera masa  $m_1$  en el vértice superior, la segunda masa  $m_2$  la colocamos a una distancia  $a$  de modo que :

*El trabajo para "traer" la masa  $m_2$  contra  $m_1$  es:*

$$E_P = -G \frac{m_1 m_2}{a}$$

*El trabajo para "traer" la masa  $m_3$  contra  $m_2$  y  $m_1$  es:*

$$E_P = \left( -G \frac{m_1 m_3}{a} \right) + \left( -G \frac{m_2 m_3}{a} \right)$$

El trabajo para construir toda la configuración cuando las masas son iguales ( $m_1 = m_2 = m_3$ ) será entonces :

👉  $E_P = -3 \frac{G m^2}{a}$

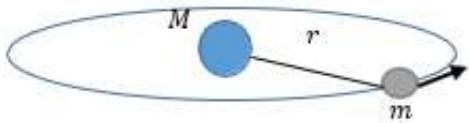


Figura 1.25.

otros cuerpos. En la figura 1.25 tenemos una masa  $m$  girando (orbitando) alrededor de otra masa  $M$  con velocidad  $\vec{v}$ . Ambas masas tienen velocidad de rotación vistas por un observador ubicado en un sistema coordenado externo al sistema de las dos masas, pero si  $M \gg m$  este mismo observador verá la masa  $M$  en reposo y la masa  $m$  orbitando alrededor de  $M$ .

La energía mecánica total del sistema viene dada por la suma de las energías cinéticas más potencial de la configuración

$$E_{mecánica} = E = E_k + E_p$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \quad (1.12)$$

El resultado (1.12) representa la energía total del sistema medida por un observador situado en la masa  $M$ . Analizando el sistema desde el punto de vista dinámico notaremos que la masa  $m$  está sometida a una fuerza centrípeta que la obliga a girar en círculos alrededor de  $M$

$$F_c = ma_c \quad (1.13)$$

Ahora bien, la única fuerza centrípeta posible que actúa sobre  $m$  es la fuerza de atracción universal dada por la ley de Newton:

**Movimiento Orbital.** Una aplicación inmediata y muy útil de las ideas estudiadas en la sección anterior tiene que ver con el movimiento de los cuerpos girando alrededor de

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (1.14)$$

$$\frac{GMm}{2r} = \frac{mv^2}{2} \quad (1.15)$$

La ecuación (1.15) es el resultado de simplificar  $r$  en el denominador de (1.14) y además multiplicar por  $1/2$ .

Ahora utilizamos el resultado (1.15) para sustituir el término de energía cinética en (1.12) y obtener para la energía mecánica total

$$\begin{aligned} E &= \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \\ E &= -\frac{GMm}{2r} \end{aligned} \quad (1.16)$$

La energía mecánica total negativa es característica de estos sistemas usualmente llamados "sistemas ligados" los cuales son además los sistemas dinámicos más estables conocidos, es por ello que los observamos con regularidad a nivel cósmico tanto a nivel macroscópico, como los sistemas planetarios, como a nivel subatómico (si aceptamos el modelo atómico planetario propuesto por Rutherford para el átomo)

Mientras la energía del sistema sea negativa la masa  $m$  es un satélite obligado a orbitar alrededor de  $M$ .

Se puede "liberar" la masa  $m$  haciendo que la energía mecánica en (1.12) sea positiva, es decir que la energía mínima no negativa sea cero, esto último se logra elevando el valor de la energía cinética hasta igualar el valor de la energía potencial gravitacional en (1.12)

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r} \implies v_e = \sqrt{2\frac{GM}{r}} \quad (1.17)$$

La velocidad (1.17) se llama velocidad de escape, es la velocidad mínima necesaria para liberar el satélite de su órbita. Algo muy interesante de la velocidad de escape es que no depende de la masa del satélite, es decir, es lo mismo liberar un satélite con masa de un gramo que uno con masa de una tonelada.

### Actividad de Simulación-Gravedad y Órbitas

*A través de la plataforma de simulación en ciencias Phet desarrollada por la universidad de colorado, se realizará una actividad didáctica orientada a aplicar los conceptos fundamentales de gravitación universal, tales como: análisis de fuerzas, ley de gravitación universal de Newton y leyes de kepler*

*Esta simulación tiene como propósito complementar el estudio de los fenómenos físicos mediante el uso de herramientas de simulación que permitan ilustrar de manera animada y divertida el movimiento de cuerpos que describen trayectorias periódicas en el espacio*

#### Actividades

1. Habilita las opciones de Trayectoria y cuadrícula, ¿que tipo de trayectoria describe el planeta tierra respecto al sol?
2. Habilita las opciones: fuerza de gravedad y velocidad lineal. ¿Como se modela esta fuerza gravitacional? que variables físicas influyen en dicho modelo?
3. ¿Que sucede con la trayectoria del planeta tierra sin presencia de la fuerza de gravedad?
4. ¿Se presentan cambios en a fuerza de gravedad cuando se duplica la masa del planeta tierra?
5. ¿Que sucede con la fuerza de gravedad cuando el planeta tierra está mas cerca del sol?



6. Agrega la Luna en el entorno de la simulación, ¿Como es el comportamiento de la Luna con respecto a la tierra? explica este fenómeno
7. El radio promedio de nuestro planeta es de 6371km. Calcule la velocidad de un punto cualquiera ubicado sobre el ecuador terrestre. ¿Puede afirmarse que todos los puntos sobre la superficie del planeta se mueven a la misma velocidad?

## 1.6 CUESTIONARIO CAPITULO1

1. ¿Qué modelo astronómico propuso Nicolás Copérnico en el siglo XVI?

El modelo Geocéntrico.

El modelo Epicicloidal.

El modelo Heliocéntrico.

El modelo Tolemaico.

Verificar



**Precaución:**  
**mente electrizante**



# Capítulo 2

## INTERACCIÓN ELÉCTRICA

## 2.1 LA CARGA ELÉCTRICA

La carga eléctrica es una propiedad intrínseca de la materia. No sabemos que es o porque se origina dicha carga, lo que sabemos con certeza es que **la materia ordinaria se compone de átomos** y éstos a su vez se componen de otras partículas llamadas protones ( $p^+$ ) y electrones ( $e^-$ ).

Los primeros se encuentran en lo que se denomina el núcleo del átomo y los segundos, en las capas exteriores del mismo girando alrededor del núcleo.

*La existencia de la carga eléctrica trae dos consecuencias inmediatas (Fig 2.1):*

1. Produce o genera el campo eléctrico  $\vec{E}$
2. Su movimiento ordenado o flujo dirigido genera corrientes eléctricas las cuales a su vez generan el campo magnético  $\vec{B}$

Podríamos entonces afirmar que la carga eléctrica es la responsable de todas las interacciones electromagnéticas. Existen dos tipos de carga eléctrica (positiva y negativa). Los electrones poseen carga negativa y los protones cargas positivas, aunque son iguales en valor absoluto. Robert Millikan, en 1909 pudo medir el valor de dicha carga, estableciendo que su valor es  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Coulombs}$ .

La carga eléctrica de cualquier cuerpo es siempre un múltiplo del valor  $e$ . En general todo cuerpo o sustancia está intrínsecamente construido de cargas eléctricas positivas y negativas, pero ésto no quiere decir que esté dotado de una carga neta, la carga eléctrica de un cuerpo puede ser :

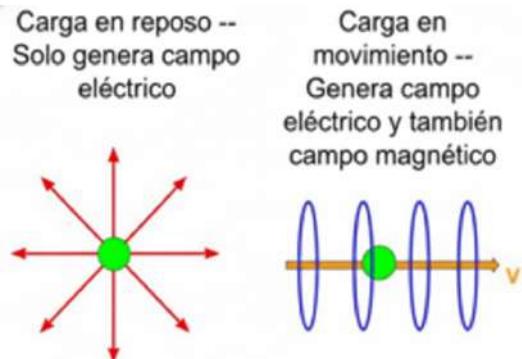


Figura 2.1.

1. Negativa cuando tiene menos protones que electrones
2. Positiva, cuando tiene menos electrones que protones
3. neutra, cuando tiene igual número de electrones que protones.

En una interacción la carga eléctrica de cualquier sistema físico es idéntica *antes* y *después* de la interacción, aunque se encuentre distribuida de otra forma. Esto se conoce como el principio de conservación de la carga:

*La carga eléctrica ni se crea ni se destruye ya que su valor permanece constante*

## 2.2 FUERZA ENTRE DOS CARGAS ELÉCTRICAS



**Charles Agustín Coulomb (1736-1806)** pudo describir exitosamente la fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales mediante lo que hoy se conoce como la Ley de Coulomb.

**La Ley de Coulomb** establece que: "La fuerza entre dos cargas eléctricas puntuales es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las

separa, y está en la dirección de la línea que las une"

*En la ley de coulomb la carga debe ser una carga puntual porque deben ser perfectamente localizadas ya que la distancia  $r$  entre las dos cargas debe ser definida con precisión,*

esto no sería posible si las cargas tienen alguna extensión distribuida en una longitud, superficie o volumen.

### Fuerzas electrostáticas



Cargas eléctricas iguales se repelen



Cargas eléctricas diferentes se atraen

Figura 2.2.

La expresión matemática de la ley de coulomb para la fuerza entre dos cargas eléctricas viene dada por

$$\vec{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2} \hat{u}_r \quad (2.1)$$

$k$  es la llamada constante dieléctrica,  $\hat{u}_r$  es un vector unitario en la dirección de la línea que une las dos cargas y su sentido específico dependerá de la acción sobre cada carga

**Actividad de Simulación.** La siguiente simulación permite familiarizarnos de manera cuantitativa con la fuerza de coulomb. La simulación trabaja con dos escalas diferentes: una escala macro y una escala atómica, al hacer click en cualquiera de las dos escalas el estudiante puede percibir la dependencia de la fuerza de coulomb con respecto al valor de las cargas y la distancia de separación entre ellas habilitando diferentes valores para ambos parámetros

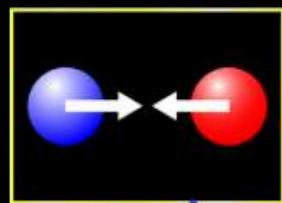
### Actividades

En el entorno de la simulación habilite las opciones para valores de carga y distancia de separación entre las cargas

1. Escoja dos cargas de  $4\mu C$  cada una separadas 8cm. Tome nota de la fuerza entre las cargas y verifique el resultado utilizando la ecuación (2.1)
2. Quitele un coulomb a una de las cargas y agrégueselo a la otra carga. Mida la fuerza entre la cargas. verifique el resultado utilizando la ecuación (2.1)
3. Escoja dos cargas iguales de signo contrario y sepárelas 4cm. Cada carga con un valor de  $2\mu C$ , con el sensor de medida de la simulación encuentre el punto donde una tercera carga  $Q$  cualquiera no experimenta fuerza. Verifique (2.1)



# Ley de Coulomb



Escala Macro



Escala Atómica

## 2.3 EL CAMPO ELÉCTRICO

La carga eléctrica altera el espacio que la rodea. Es decir, cualquier otra carga colocada en un punto cualquiera a cierta distancia  $r$  sentirá la presencia de la otra carga eléctrica, esto era de esperarse dado que la fuerza de coulomb definida antes actúa sin importar la distancia entre las cargas. Para manejar de manera sencilla la fuerza entre dos cargas puntuales de cualquier tamaño se introduce la idea de campo eléctrico. El campo eléctrico se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga y su dirección se toma como la dirección de la fuerza que ejercería sobre una carga positiva de prueba.

Esto puede verse mejor utilizando el concepto de líneas de campo (o líneas de fuerza) introducido por Michel Faraday (1791-1867). Las líneas de campo son líneas imaginarias que ayudan a visualizar cómo varía la dirección del campo eléctrico al pasar de un punto a otro del espacio e indican la trayectoria que seguiría la unidad de carga positiva (es decir las cargas de prueba) si se la abandonara libremente, por lo que las líneas de campo salen de las cargas positivas y llegan a las cargas negativas.

La figura 2.3 ilustra la acción del campo eléctrico sobre una carga de prueba. El campo producido por la carga positiva de la izquierda es representado por flechas saliendo de la carga, esto quiere decir que la carga de prueba (por definición positiva) es repelida. En cambio el campo producido por la carga negativa se representa por flechas entrando en la carga, esto quiere decir que la carga de prueba es atraída.

Matemáticamente se define el campo eléctrico  $\vec{E}$  creado por la carga puntual  $q_1$  en un punto cualquiera  $P$  como:

$$\vec{E} = k \frac{q_1}{r^2} \hat{u}_r \quad (2.2)$$

Donde  $q_1$  es la carga creadora del campo y puede ser positiva, 0 negativa  $k$  es la constante dieléctrica,  $r$  es la distancia desde la carga fuente al punto  $P$  y  $\hat{u}_r$  es un vector unitario dirigido desde la carga fuente hacia el punto donde se calcula el campo eléctrico. El campo eléctrico depende únicamente de la carga fuente y la distancia  $r$  al punto donde se quiere calcular el campo. En el sistema internacional se mide en  $\frac{N}{C}$  o  $\frac{V}{m}$

Note que la dirección del campo eléctrico en el punto  $P$  es un vector "saliendo" si lo produce una carga positiva (en la misma dirección de  $\hat{u}_r$ ) o "entrando" si lo produce una carga negativa (en la dirección opuesta de  $\hat{u}_r$ )

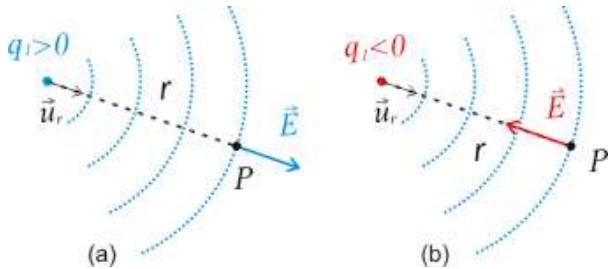


Figura 2.3.

**Actividad de Simulación -cargas Eléctricas y Campos-** En esta simulación complementamos el estudio de la interacción eléctrica ilustrando de manera gráfica y animada el comportamiento del campo eléctrico y su dependencia de los parámetros de carga y distancia. Note la barra en la parte inferior de la simulación .

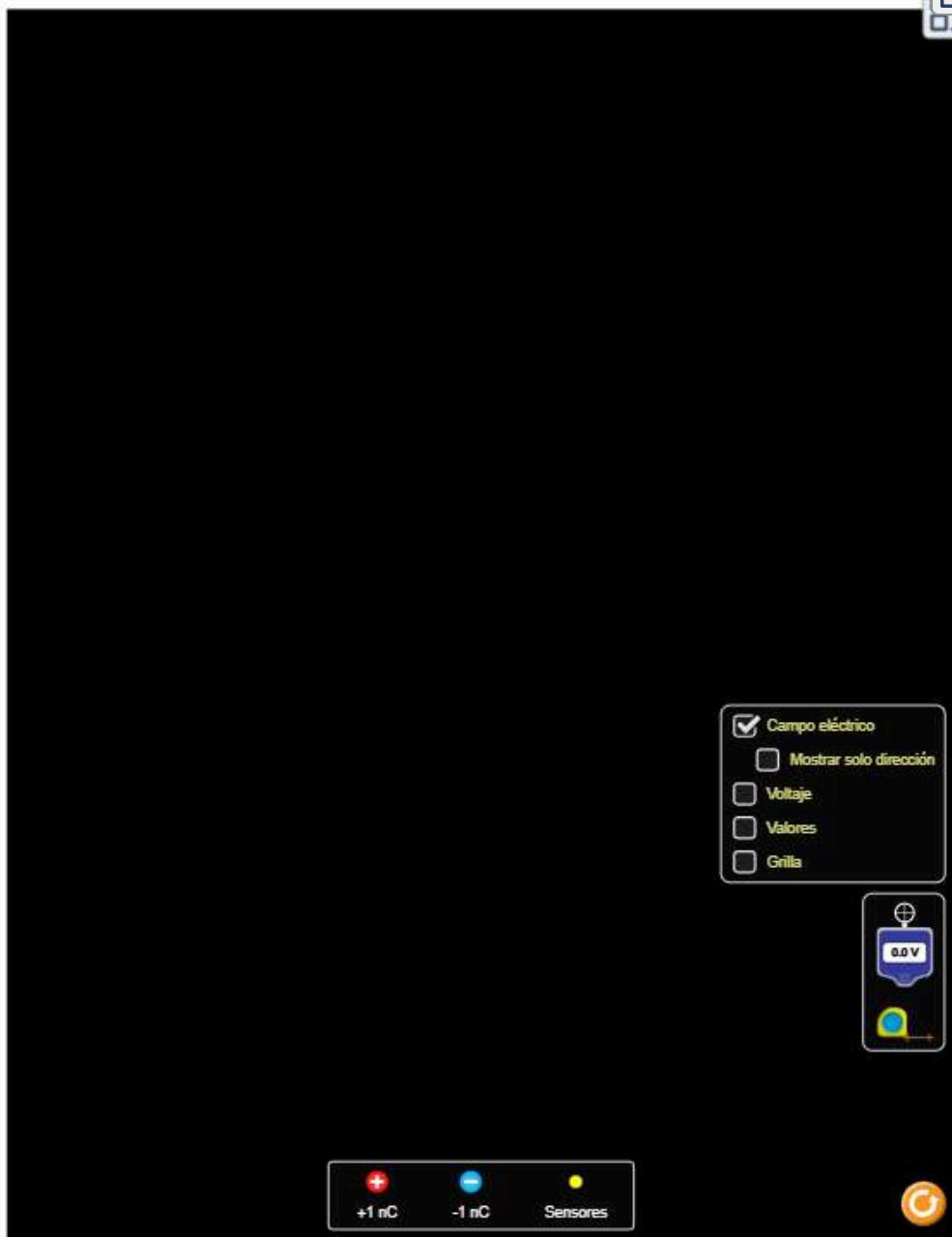
Note que existen tres iconos dentro de esta barra, uno para la carga positiva otro para la carga negativa y uno de color amarillo que representa un sensor de medida



Figura 2.4.

## Actividades

1. Haga click en cualquiera de los iconos de carga eléctrica y arrástrelo a la pantalla, habilite el indicador de campo eléctrico y haga una lectura de su valor con el sensor de medida (icono amarillo)



2. Escoja dos valores iguales de cargas positivas con una separación cualquiera, ¿cuánto vale la fuerza entre las cargas?

3. ¿Cambia la fuerza de coulomb cuando se cambia el valor de las cargas? Cuando se varía la distancia de separación?

4. Escoja dos valores de carga y simultáneamente una separación cualquiera entre ellas, verifique el valor de la fuerza de coulomb.

5. Cambie los valores de carga y separación (ambos) escogidos en el numeral anterior de tal manera que la fuerza de coulomb se duplique

6. Escoja dos cargas del mismo signo y de valor  $6\mu C$  cada una separadas 8cm. Verifique el valor numérico de la fuerza de coulomb.

7. Quítele  $2\mu C$  a una de las cargas y se los agrega a la otra carga sin cambiar la separación. Calcule el valor de la fuerza de Coulomb

8. Note en el numeral anterior que le valor total de las cargas involucradas ( $12\mu C$ ) y la distancia entre ellas no cambió ¿Que puede argumentar sobre el resultado obtenido en este numeral?

### Carga Distribuida

La ecuación (2.2) nos permite calcular el campo producido por una carga puntual a una distancia  $r$ . Para calcular el campo producido por una carga distribuida debemos primero caracterizar las distintas maneras posibles como se puede distribuir una carga eléctrica. Estas maneras son tres : **lineal , superficial y volumétrica**.

La distribución lineal la caracterizamos por la letra  $\lambda$ , y significa la cantidad de carga eléctrica contenida en la unidad de longitud. La distribución superficial la caracterizamos por la letra  $\sigma$ , y significa la cantidad de carga eléctrica contenida en la unidad de superficie.

La distribución volumétrica la caracterizamos por la letra  $\rho$ , y significa la cantidad de carga eléctrica contenida en la unidad de volumen.

A continuación, describimos en detalle el significado de cada una de estas densidades:

**Densidad lineal  $\lambda$ :** Es la cantidad de carga- contenida en la unidad de longitud. Si la distribución es uniforme se define matemáticamente como:

$$\lambda = \frac{q}{l}, \text{ Si la distribución NO es uniforme entonces } \lambda = \frac{dq}{dl}.$$

**Densidad superficial  $\sigma$ :** Es la cantidad de carga contenida en la unidad de superficie. Si la distribución es uniforme se define matemáticamente como:

$$\sigma = \frac{q}{s}, \text{ Si la distribución NO es uniforme entonces } \sigma = \frac{dq}{ds}.$$

**Densidad volumétrica  $\rho$ :** Es la cantidad de carga contenida en la unidad de volumen. Si la distribución es uniforme se define matemáticamente como:

$$\rho = \frac{q}{V}, \text{ Si la distribución NO es uniforme entonces } \rho = \frac{dq}{dV}.$$

En lo sigue presentaremos algunos ejemplos de cálculo de campo eléctrico producidos por distribuciones de carga.

### Ejemplo 1

Calcular el campo eléctrico producido por un anillo de radio  $u$  y densidad lineal de carga positiva  $\lambda$  en un punto cualquiera sobre el eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro

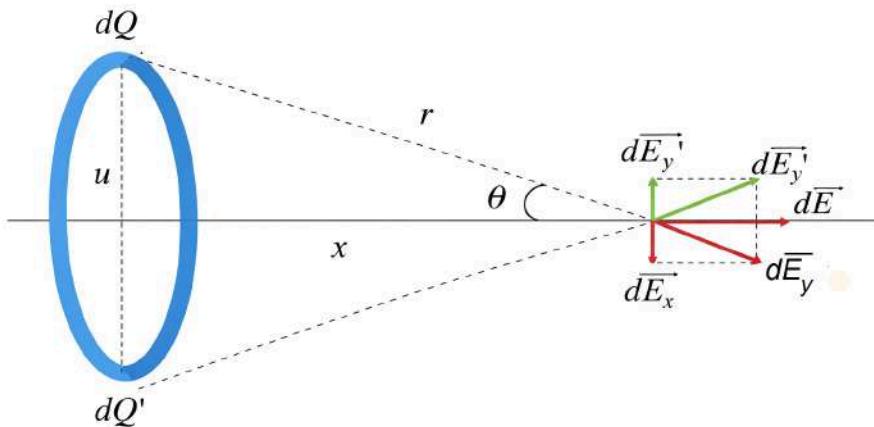


Figura 2.5.

## Solución

Para encontrar el campo total producido por el anillo procedemos a escoger un elemento de carga  $dQ$  sobre el anillo y trazamos la distancia  $r$  al punto. Dado que el elemento  $dQ$  es positivo, producirá un campo vectorial saliente en una dirección  $\theta$  como se muestra en la fig 2.5 (en color rojo).

Podemos escribir el elemento diferencial de carga  $dQ$  ubicado sobre un pequeño elemento  $dl$  en el anillo de radio  $u$ , el cual producirá en cualquier punto sobre el eje un campo eléctrico pequeño  $d\vec{E}$  dado por :

$$d\vec{E} = k \frac{dQ}{r^2} \hat{u}$$

El campo total en ese punto será entonces la suma de todas las contribuciones  $d\vec{E}$  producidas por todos los elementos diferenciales  $dQ$  sobre el anillo:

$$\vec{E} = \int k \frac{dQ}{r^2} \hat{u} \quad (2.3)$$

No existe ningún error ni de física o matemáticamente en escribir la ecuación (2.3), sin embargo, no es aconsejable usar esta ecuación por una razón muy sencilla: El integrando es un vector y quedaríamos sumando infinitos vectores *NO paralelos*

En este punto debemos recordar que los vectores son objetos que siguen reglas especiales de suma, resta ó multiplicación por lo cual una integral no es apropiada para sumar infinitos vectores a diferentes ángulos (es decir no paralelos) de manera directa como lo establece el cálculo de integrales. por lo tanto, debemos buscar la manera de reducir el problema a una suma de vectores paralelos, es decir, los vectores que constituyen el integrando de la ecuación (2.3) deben ser paralelos. Para conseguir esto notemos que en el anillo de la figura 2.5 existe un elemento de carga  $dQ'$  simétricamente opuesto a  $dQ$ , el cual crea un campo eléctrico  $d\vec{E}'$  (color verde).

Tanto  $d\vec{E}$  como  $d\vec{E}'$  se pueden descomponer en componentes rectangulares  $d\vec{E}_x$  y  $d\vec{E}_y$  para el vector  $\vec{E}$  (rojo) e igualmente  $d\vec{E}'_x$  y  $d\vec{E}'_y$  para el vector  $d\vec{E}'$  (verde).

Las componentes verticales en la dirección  $y$  se cancelan y sólo quedamos con las componentes horizontales de ambos vectores  $d\vec{E}_x$  y  $d\vec{E}'_x$ , de modo que la contribución al campo de las dos cargas  $dQ$  y  $dQ'$  es la suma de las componentes horizontales de los campos. Claramente cada elemento de carga  $dQ$  en el anillo tiene un simétrico opuesto  $dQ'$ . De modo que el campo total  $\vec{E}$  en el punto  $P$  será debido solamente a la suma de las componentes horizontales

Podemos entonces escribir:

$$\vec{E} = \int (E_x dx) \hat{i} \quad (2.4)$$

Dado que estamos sumando vectores paralelos podemos "soltar" las flechas de vectores y escribir simplemente (ver Figura 2.5):

$$E = \int dE \cos \theta = k \int \frac{dQ}{r^2} \cos \theta = k \int \frac{dQ}{r^2} \frac{x}{r}$$

Notemos que  $r$  y  $x$  son constantes de integración (ver Figura 2.5), por lo tanto:

$$E = \frac{k}{r^3} x \int dQ = xQ \frac{k}{r^3}$$

$Q$  es la carga total del anillo la cual en términos de  $\lambda$  (que es conocida) y de la longitud total  $l$  del anillo viene dada por:

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{Q}{2\pi u} \implies Q = \lambda 2\pi u$$

Por otro lado la longitud total del anillo es :  $l = 2\pi u$ , así que reemplazando los valores de  $Q$  y  $r$  en la expresión para  $E$  obtenemos:

$$E = \frac{kx\lambda 2\pi u}{(u^2 + x^2)^{3/2}}$$

vectorialmente

$$\vec{E} = \frac{kx\lambda 2\pi u}{(u^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (2.5)$$

## Ejemplo 2

calcular el campo eléctrico producido por un disco de radio  $R$  y densidad superficial de carga positiva  $\sigma$  en un punto cualquiera sobre el eje perpendicular al plano del disco (Figura 2.6)

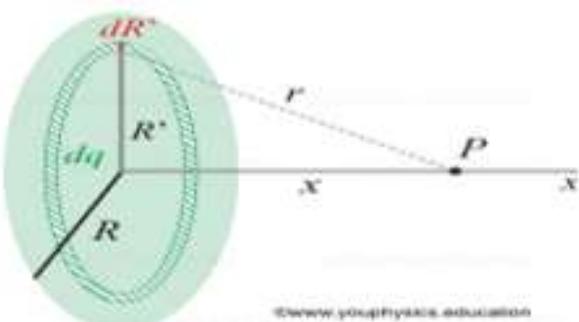


Figura 2.6.

**Solución** Conocido el campo eléctrico debido a un anillo de carga y dado por el resultado (2.5) podemos calcular el campo del disco imaginando que éste se construye a partir de una cantidad infinita de anillos consecutivos cada uno de radio (variable)  $R'$ . El anillo más pequeño tiene un radio de  $R' = 0$  y el más grande (borde del disco) un radio de  $R' = R$ .

El campo eléctrico producido por el disco será entonces:

$$\vec{E}_{Disco} = \int \vec{E}_{Anillos} = \int \frac{kx\lambda 2\pi u}{(u^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (2.6)$$

Debemos advertir dos cosas en la ecuación (2.6):

1. El radio  $u$  del anillo era una constante en el ejercicio anterior pues se trataba de un sólo anillo. Ahora es una variable pues tenemos infinitos anillos cuyos campos pretendemos sumar para obtener el campo del disco, por lo tanto, debemos sustituir a  $u$  por la variable  $R'$ , es decir,  $u \rightarrow R'$
2. Note que no aparece la variable de integración en (2.6). Ello se debe a que está escondida en la densidad superficial definida como:  $\sigma = \frac{dq}{ds}$ . Recordemos que  $ds$  es un pequeño elemento superficial en la cual está contenida la carga  $dq$ .

El valor de este pequeño elemento de superficie para un disco de radio  $R'$  viene dado por  $ds = dl dR'$  donde  $dl$  es un diferencial de longitud o diferencial de arco sobre el círculo de radio  $R'$ , por lo tanto:

$$\sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{dl dR'} = \frac{\lambda}{dR'}$$

Hemos usado la definición de la densidad lineal de carga:  $\lambda = \frac{dq}{dl}$   
De modo que:

$$\sigma dR' = \lambda \quad (2.7)$$

Reemplazando (2.7) en (2.6) obtenemos:

$$\vec{E}_{Disco} = k\pi x \sigma \int \frac{2R' dR'}{(R'^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \quad (2.8)$$

Esta integral se resuelve fácilmente por sustitución trigonométrica haciendo:

$$U = R'^2 + x^2 \implies dU = 2R' dR'$$

Reemplazando en (2.8)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{Disco} &= k\pi x \sigma \int_0^{R'=R} \frac{dU}{U^{3/2}} \hat{i} = \left[ k\pi x \sigma \left( \frac{-2}{\sqrt{U}} \right) \right]_{R'=0}^{R'=R} \hat{i} \\ \vec{E}_{Disco} &= - \left[ 2k\pi x \sigma \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} - \frac{x}{x} \right) \right] \hat{i} \\ \text{👉 } \vec{E}_{Disco} &= \left[ 2k\pi x \sigma \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \right] \hat{i} \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Comentario.** utilizar el resultado del anillo nos permitió ahorrar el trabajo de cálculo detallado que implica calcular el campo producido por un elemento diferencial del disco y luego considerar el análisis de simetría par los componentes vectoriales, este paso previo ya está realizado con el cálculo del anillo donde se han realizado las consideraciones de simetría necesarias que nos llevan a escribir la ecuación (2.9). Esta metodología de trabajo es muy usada en distintas situaciones, por ejemplo, podemos calcular el campo producido por un cilindro hueco de longitud  $L$  utilizando el resultado del campo creado por un anillo, también podemos calcular el campo producido por un cilindro sólido utilizando el resultado de un disco.

### Ejemplo 3

Considere un cilindro sólido de longitud  $L$  y radio  $R$  (Figura 2.7). Calcular el campo eléctrico producido en cualquier punto de su eje coaxial y a una distancia  $h$  de su cara superior.

### Solución

dado que el cilindro es macizo podemos usar el resultado (2.9) obtenido para el disco, simplemente cambiamos la variable  $x$  por  $z$  y escribimos:

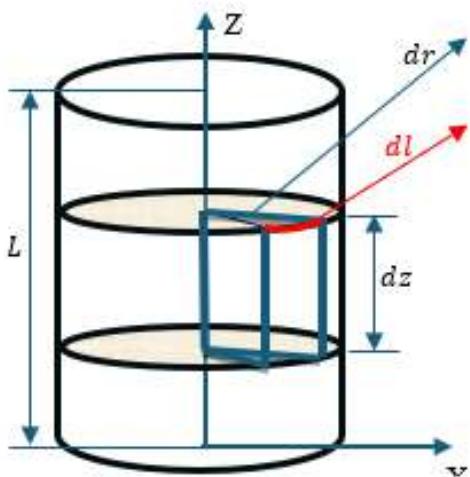


Figura 2.7.

$$\vec{E}_{Cilindro} = \int \vec{E}_{Disco} = \int [2k\pi x\sigma(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}})]\hat{k}$$

Igual que en el caso del disco, no aparece la variable de integración. Ello se debe a que está escondida en la densidad superficial  $\sigma$ .

Veamos:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{drdl dz}$$

Note que  $drdl = dA$  Por lo tanto:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{dzdA} = \frac{\sigma}{dz}$$

De modo que  $\rho dz = \sigma$

La integral nos queda entonces:

👉  $\vec{E}_{Cilindro} = 2k\pi\rho \int_{z=0}^{z=L} [zdz(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}})]\hat{k}$  (2.10)

#### Ejemplo4

Hallar el campo eléctrico creado por un alambre delgado muy largo (infinito) con una densidad lineal de carga negativa  $\lambda$  en un punto alejado una distancia  $R$  (Figura 2.8)

#### Solución

El alambre infinito es una distribución lineal. Para calcular el campo eléctrico en el punto  $P$  procedemos a escoger un diferencial  $dq$  en cualquier punto del alambre y trazar la distancia de este elemento al punto de cálculo. Una vez hecho ésto dibujamos el campo creado en  $P$  por el elemento de carga  $dq$ . Nótese que es un vector dirigido Hacia  $dq$  debido a que  $dq$  es negativo y los campos creados por cargas negativas llegan a las cargas

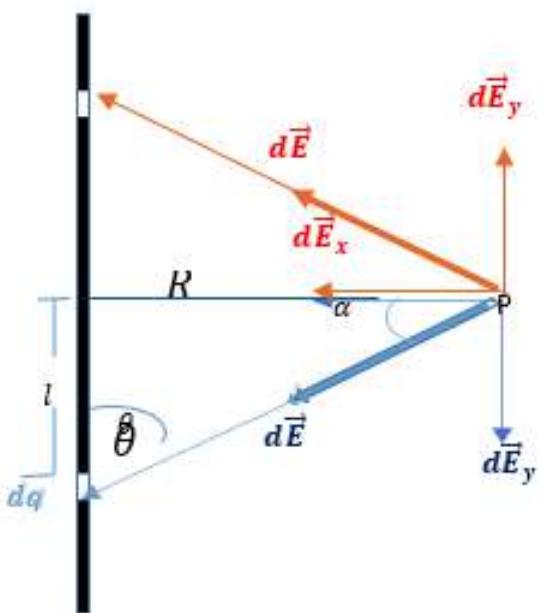


Figura 2.8.

Este elemento de carga crea entonces un campo eléctrico dado por .

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{u} \quad (2.11)$$

Se trata entonces de sumar todas las contribuciones de campo eléctrico  $d\vec{E}$  producidas por cada uno de los elementos  $dq$  que componen el alambre infinito. Esto implica integrar la expresión (2.11) y en consecuencia quedaríamos sumando infinitos vectores NO paralelos lo cual es sumamente incómodo por decir lo menos.

Éste es el mismo problema que tuvimos que enfrentar en el caso del anillo, por lo cual usamos un análisis de simetría similar, para ello notemos que por cada elemento de carga  $dq$  situado a una distancia  $l$  en la parte inferior al punto  $O$  produciendo un campo pequeño  $d\vec{E}$ , existe un  $dq$  en la parte superior al punto  $O$  a la misma distancia  $l$  del punto  $O$  que produce otro  $d\vec{E}$  en un ángulo idéntico pero opuesto con respecto a la horizontal, tal y como se muestra en la figura(2.8). Podemos descomponer cada uno de éstos vectores en sus componentes rectangulares con lo cual notamos que las componentes en la dirección vertical (dirección  $y$ ) se cancelan quedando solamente las componentes horizontales (dirección  $x$ ).

En resumen : En el proceso de sumar todas las contribuciones de todos los elementos de carga a lo largo del alambre quedamos sumando solamente vectores paralelos a lo largo de la dirección  $x$

$$d\vec{E}_x = -\left(k \frac{dq}{r^2} \cos\alpha\right) \hat{i} \quad (2.12)$$

El signo menos se debe al hecho que el vector total  $\vec{E}$  en (2.12) tiene dirección opuesta al vector unitario  $\hat{i}$

Nótese además que los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  son complementarios, por lo tanto podemos realizar el reemplazo  $\cos\alpha = \sin\theta$ , de modo que (2.12) nos queda:

$$d\vec{E}_x = -\left(k \frac{\lambda dl}{r^2} \sin\theta\right) \hat{i} \quad (2.13)$$

Hemos usado  $dq = \lambda dl$ , note sin embargo que, aunque  $dl$ , aparece como variable de integración aún no hemos definido los límites de integración. Para definir estos límites analizamos primero qué variables tenemos en (2.13) y después cuál de ellas es la más apropiada o conveniente para establecer los límites.

Existen tres variables :  $r$ ,  $l$  y  $\theta$ . La variable más apropiada o conveniente resulta ser el ángulo  $\theta$  ya que nos permite tomar como límite inferior  $\theta = 0$  (en  $-\infty$ ) y  $\theta = \pi$  (en  $+\infty$ ) ó el caso equivalente  $\theta = 0$  como límite inferior y  $\theta = \frac{\pi}{2}$  como límite superior y luego multiplicar por dos. La multiplicación por dos es obvia: se debe a que dada la simetría del problema, la contribución al campo eléctrico desde el punto  $O$  hacia arriba es la misma que desde el punto  $O$  hacia abajo.

Una vez que escogemos el ángulo  $\theta$  como variable de integración procedemos a escribir las otras dos variables  $r$  y  $l$  como función del ángulo  $\theta$ :

$$\sin\theta = \frac{R}{r} \implies r = R \csc\theta \\ r^2 = R^2 \csc^2\theta \quad (2.14)$$

$$\cot\theta = \frac{l}{R} \implies l = R \cot\theta \\ dl = R \csc^2\theta d\theta \quad (2.15)$$

reemplazando (2.14) y (2.15) en (2.13) obtenemos :

$$d\vec{E}_x = -k\lambda \left( \frac{RCosc^2\theta d\theta Sen\theta}{R^2Cosc^2\theta} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}_x = \vec{E}_{Total} = -2 \times \left( \frac{k\lambda}{R} \int_0^{\pi/2} d\theta Sen\theta \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}_{Total} = -2 \times \left( \frac{k\lambda}{R} Cos\theta \right)_0^{\pi/2} \hat{i}$$

  $\vec{E}_{Total} = -2 \frac{k\lambda}{R} \hat{i}$

### Ejemplo 5

Hallar el campo eléctrico creado por una lámina infinita uniformemente cargada y densidad superficial de carga  $\sigma$  de ancho  $W$  en un punto coplanar con la lámina y alejado una distancia  $b$  del borde de la lámina

### Solución

Nuevamente utilizaremos el resultado de un cálculo anterior (en este caso el resultado del alambre infinito). Imaginaremos que la lámina está construida a partir de muchos alambres uno al lado de otro de manera continua hasta formar una lámina de ancho  $W$ .

$$\vec{E} = \int \vec{E}_{Alambre}$$

$$\vec{E} = \int 2 \frac{k\lambda}{R} \hat{i} = \int 2 \frac{k\lambda}{x} \hat{i} \quad (2.16)$$

Note que no está explícita la variable de integración, para encontrarla recordamos que la lámina es una superficie, por lo tanto, en vez de la densidad lineal *lambda* deberíamos tener *sigma* en (2.16) sabemos que:

$$\sigma = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{dxdy} \quad (2.17)$$

En este punto podríamos usar  $\lambda = \frac{dq}{dx}$  o  $\lambda = \frac{dq}{dy}$ . debemos escoger ésta última porque queremos integrar sobre la variable  $x$  dado que estamos sumando todas las contribuciones al campo de todos los alambres infinitos alineados uno a continuación del otro a lo largo de la dirección  $x$ .

Si escogemos  $\lambda = \frac{dq}{dy}$  y reemplazamos en (2.17) obtenemos  $\sigma = \frac{\lambda}{dx}$  podemos entonces reescribir (2.17) en la forma

$$\vec{E}_{Lamina} = 2k \int \frac{\sigma}{d} x x \hat{i} = 2k\sigma \int_{x=b}^{x=b+W} \frac{dx}{x} \hat{i}$$

$$\vec{E} = \frac{2k\sigma \ln(b+w)}{b} \hat{i} \quad (2.18)$$

### Ejercicios Propuestos

Responder a cada una de las preguntas del siguiente cuestionario señalando la opción correcta según su criterio

1. En la figura de la derecha se muestran las líneas de campo eléctrico que provienen de dos cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ . Para éste dibujo podemos concluir que:

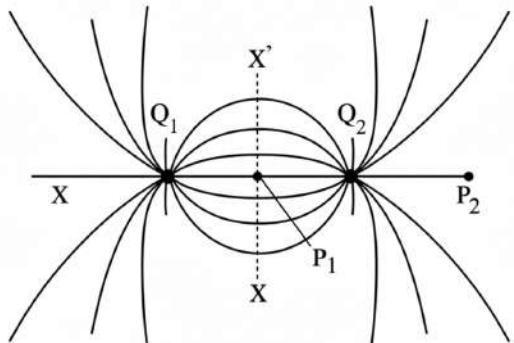


Figura 2.9.

- A.  $Q_1 > Q_2$
- B. Tanto  $Q_1$  como  $Q_2$  tienen el mismo signo
- C. El campo podría ser cero en el punto  $P_2$
- D. El campo podría ser cero en el punto  $P_1$
- E. NDA

2. Dos cargas eléctricas positivas de valores  $q$  y  $2q$  se hallan separadas una distancia  $2r$ .

Puede afirmarse que el campo eléctrico es cero en :

A. En algún punto a la izquierda de  $q$

B. En algún punto a la derecha de  $q$

C. En algún punto entre  $q$  y  $2q$

D. En algún punto a la izquierda de  $q$

E. NDA

3. Considere las dos cargas del ejercicio anterior. El campo eléctrico total en un punto ubicado a la mitad de las dos cargas es:

A.  $\frac{kq}{r^2}$  dirigido hacia la carga  $q$

B.  $2\frac{kq}{r^2}$  dirigido hacia la carga  $q$

C.  $\frac{kq}{r^2}$  dirigido hacia la carga  $2q$

D.  $2\frac{kq}{r^2}$  dirigido hacia la carga  $2q$

E. NDA

4. Una carga de prueba de  $5 \times 10^{-7} C$  recibe una fuerza horizontal hacia la derecha de  $3 \times 10^{-4} N$ . Determine la magnitud e intensidad del campo eléctrico en el punto donde está colocada la carga.

5. Tres cargas positivas iguales están en los vértices de un triángulo equilátero de lado  $a$ .

Determine el punto (diferente del infinito) donde el campo eléctrico vale cero

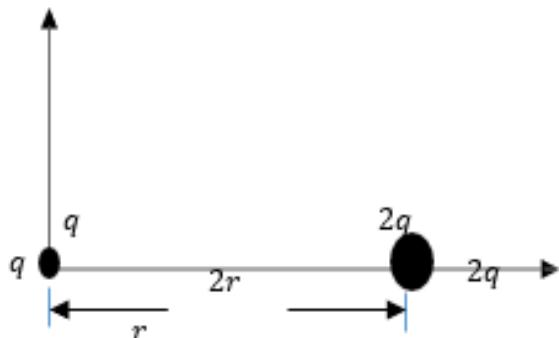


Figura 2.10.

6. La varilla de la derecha tiene una longitud  $l$  y densidad lineal de carga uniforme (constante)  $\lambda$

Calcule:

- las componentes  $E_x$  y  $E_y$  del campo eléctrico en el punto  $P$ , el cual se encuentra a una altura  $d$  como se muestra en la figura
- El campo total resultante en el punto  $P$

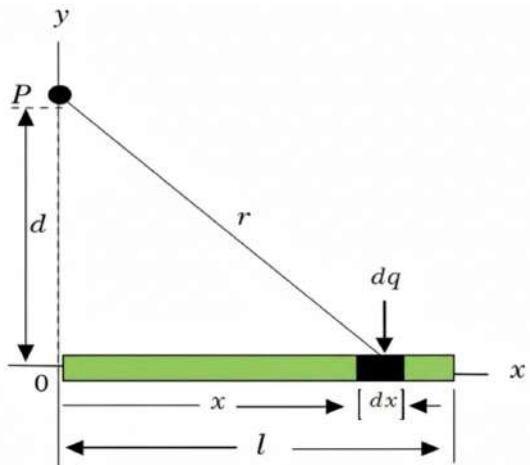


Figura 2.11.

7. La arandela de la figura presenta una densidad de carga superficial  $\sigma$  y tiene un radio interno  $a$  y externo  $b$ . Calcule el campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto  $P$  ubicado sobre el eje perpendicular al plano de la arandela y a una altura  $z$  del mismo.

**Sugerencia:** primero calcule el campo creado por un anillo de carga de radio  $R$  en el punto  $P$  y utilice este resultado para calcular el campo eléctrico creado por la arandela

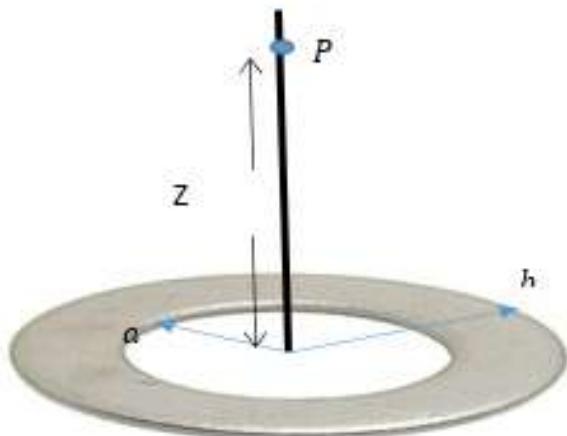


Figura 2.12.

8. Un casquete semiesférico de radio  $a$  tiene densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en un punto  $P$  sobre el eje  $z$  a una distancia  $R$  de la base del casquete tal que  $R > a$

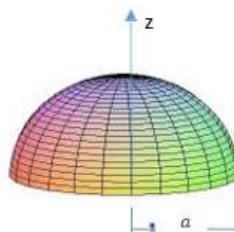


Figura 2.13.

9. Considere un cono de altura  $h$  y base de radio  $r$ . La superficie del cono está cargada uniformemente con una densidad superficial de carga uniforme  $\sigma$ . Calcule el campo eléctrico en el centro de la base del cono

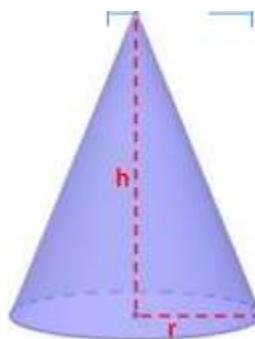


Figura 2.14.

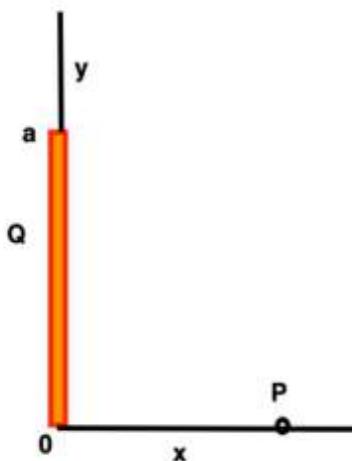


Figura 2.15.

10. Una carga positiva  $Q$  está distribuida de manera uniforme a lo largo del eje  $y$  positivo sobre una barra delgada homogénea de longitud  $a$  entre  $y = 0$  y  $y = a$ .

Determine las componentes horizontal y vertical del campo eléctrico debido a la barra en el punto  $P$  ubicado sobre el eje horizontal una distancia  $x$  de la barra

## 2.4 FLUJO DE CAMPOS VECTORIALES

La palabra flujo la asociamos con la idea de "algo" que se mueve (por lo general algún fluido o gas). Esta idea sin embargo no corresponde con exactitud a la realidad ya que un vector de campo tal como los campos eléctricos o magnéticos pueden "fluir" sin que ello implique que estos campos se estén moviendo. Esto se debe a que cuando queremos medir el flujo (es decir cuantificarlo) debemos involucrar la superficie a través de la cual se realiza el flujo. Debemos tener claro entonces que el "concepto" de flujo contiene necesariamente dos protagonistas: lo que fluye y la superficie a través de la cual fluye.

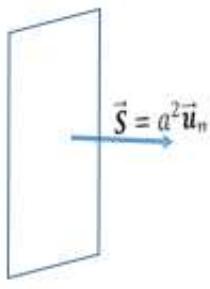


Figura 2.16.

Recordemos que una superficie es técnicamente hablando un vector perpendicular al plano geométrico de la superficie y cuya magnitud o valor absoluto es el área geométrica de la superficie en cuestión. Por ejemplo, el cuadrado en la figura de lado  $a$  figura (2.16) es un vector cuya magnitud es  $a^2$ .

La dirección de este vector como se ve en la figura viene dada por el vector unitario  $\vec{u}_n$  normal (perpendicular) a la superficie

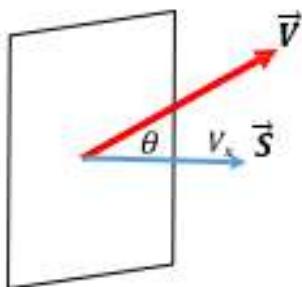


Figura 2.17.

El flujo de cualquier vector  $\vec{V}$  a través del área o plano geométrico de éste cuadrado debe necesariamente atravesar el plano, es decir, debe existir un ángulo diferente de  $\pi/2$  entre el vector de superficie  $\vec{S}$  y el vector que fluye  $\vec{V}$  tal y como lo vemos en la figura (2.17). Debido al carácter vectorial de  $\vec{V}$ , solo una parte del vector atraviesa la superficie  $\vec{S}$

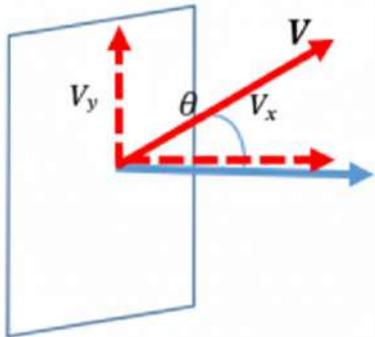


Figura 2.18.

¿Como medimos el flujo de cualquier vector  $\vec{V}$ ?

Refiriéndonos a la figura (2.18), notamos que la componente  $V_y$  no fluye a través de la superficie  $\vec{S}$  (avanza paralelo al plano geométrico) su flujo entonces vale cero, mientras que la componente  $V_x$  fluye totalmente a través de  $\vec{S}$  (avanza perpendicular al plano geométrico), ¿Como medimos éste flujo?

LLamaremos al flujo de cualquier vector

$\vec{V}$  a través de una superficie  $\vec{S}$  con el nombre  $\Phi_{\vec{V}}$ . Se puede ver claramente que éste flujo dependerá de la cantidad que fluye multiplicada por el área geométrica de la superficie a través de la cual fluye

$$\Phi_{\vec{V}} = V_x S = (V \cos \theta) S = V S \cos \theta \quad (2.19)$$

Notemos que la ecuación (2.19) tiene la forma de un producto escalar y la podemos escribir:

$$\Phi_{\vec{V}} = \vec{V} \cdot \vec{S} \quad (2.20)$$

Los vectores  $\vec{V}$  y  $d\vec{S}$  en la ecuación(2.19) son constantes. Para el caso en que ambos vectores sean variables (ver figura 2.19) simplemente procedemos a sumar las contribuciones  $d\Phi$  en todos los pequeños elementos de superficie  $d\vec{S}$  es decir el flujo total a través de toda la superficie será:

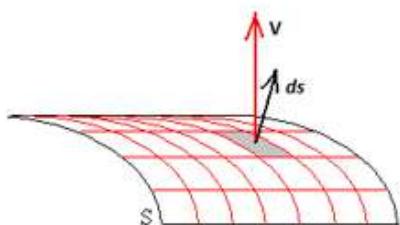


Figura 2.19.

$$\Phi_{\vec{V}} = \int \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (2.21)$$

**Comentario.** La ecuación (2.21) es la expresión más general que se tiene para calcular flujos pues se está asumiendo que es válida para cualquier campo vectorial  $\vec{V}$  y cualquier superficie  $\vec{S}$ . También asumimos que el tamaño del elemento  $d\vec{S}$  es lo suficientemente pequeño como para que el vector  $\vec{V}$  tenga el mismo valor en cada punto en el interior de  $d\vec{S}$

## Flujo a Través de una Superficie Cerrada

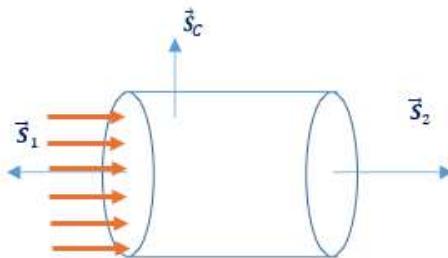


Figura 2.20.

A continuación examinamos el caso de un vector fluyendo a través de una superficie cilíndrica cerrada. Podemos imaginar para el caso que nos ocupa que fluye agua a través de una tubería y la representamos por las flechas color ladrillo dirigidas de izquierda a derecha en la figura (2.20).

Note que debemos considerar el flujo de agua a través de tres superficies que forman el cilindro:

$\vec{S}_1$  dibujada como una flecha en color azul saliendo hacia la izquierda del volumen cilíndrico.

$\vec{S}_2$  dibujada como una flecha en color azul saliendo hacia la derecha del volumen cilíndrico.

$\vec{S}_C$  dibujada como una flecha en color azul saliendo perpendicular desde cualquier punto sobre la superficie geométrica del cilindro.

El flujo del agua será entonces la suma de tres flujos a través de las tres superficies mencionadas, entonces llamando  $\vec{V}$  el vector que representa el agua tendremos :

$$\Phi_{\vec{V}} = \oint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

Hemos utilizado el símbolo  $\oint$  de integral cerrada para indicar que debemos encontrar el flujo a través de todas las superficies que rodean o delimitan el volumen cilíndrico, la ecuación (2.22) se convierte entonces en:

$$\Phi_{\vec{V}} = \int \vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{V}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int \vec{V}_C \cdot d\vec{S}_C \quad (2.23)$$

Notemos que de la figura (2.20) el vector  $\vec{V}$  hace un ángulo de  $\pi$  con la superficie  $\vec{S}_1$  y de cero grados con la superficie  $\vec{S}_2$ , mientras que hace un ángulo de  $\pi/2$  con el vector  $\vec{S}_C$ , es decir, el último término de la ecuación (2.23) es cero debido al producto punto (o producto escalar) entre los vectores  $\vec{V}_C$  y  $d\vec{S}_C$ .

La ecuación (2.23) se reduce entonces a

$$\Phi_{\vec{V}} = - \int V_1 dS_1 + \int V_2 dS_2 \quad (2.24)$$

El primer término de la ecuación (2.24) representa la cantidad de agua que entra al cilindro atravesando toda la superficie  $S_1$  (el área geométrica circular de esa cara) igualmente el segundo término en (2.24), representa el agua que sale del cilindro atravesando la superficie  $S_2$ , es claro que si  $S_1 = S_2$ , entonces *la cantidad de agua que entra en determinado tiempo es igual a la que sale y por lo tanto el flujo total debe ser cero*.

Es decir:

$$\Phi_{\vec{V}} = - \int V_1 dS_1 + \int V_2 dS_2 = 0 \quad (2.25)$$

Este resultado (2.25) se cumple siempre y cuando no exista ninguna clase de filtración del agua a través de las paredes del cilindro tales como pequeños agujeros (llamados también sumideros) o incluso alguna intervención externa como una fuente que agregue agua (una llave, por ejemplo). Éste resultado se expresa comúnmente en la afirmación:

**El flujo a través de una superficie cerrada cualquiera es cero si y sólo si no existen fuentes ni sumideros de lo que fluye**

## 2.5 TEOREMA DE FLUJO Y LEY DE GAUSS



**Johann Carl Fiedrich Gauss** (1777-1855). Un excelente físico, matemático y astrónomo alemán se percató que el resultado anterior podía utilizarse para calcular campos eléctricos. Inicialmente Gauss calculó el flujo del campo eléctrico producido por una carga eléctrica puntual a través de una superficie cualquiera. En éstas notas reproducimos ese cálculo realizado por Gauss pero lo faremos a través de una superficie esférica no sólo por

facilidad de cálculo sino también por razones pedagógicas, ello sin embargo no le quita validez alguna al resultado el cual podemos considerar válido para cualquier superficie

Consideremos entonces una carga puntual positiva  $q$ , rodeada de una superficie esférica de radio  $R$  como se muestra en la figura (2.21). El campo eléctrico producido está representado por flechas que salen de la carga en forma radial. El flujo del campo a través de la superficie esférica será entonces :

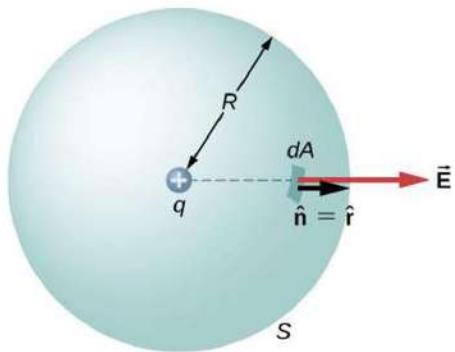


Figura 2.21.

obtenemos:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint k \frac{q}{R^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{S} = \frac{kq}{R^2} \oint dS = \frac{kq}{R^2} S$$

$S$  es la superficie de la esfera de radio  $R$ , es decir,  $S = 4\pi R^2$  y además  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Reemplazando estos valores en la expresión anterior obtenemos finalmente:

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

Éste es el denominado teorema del flujo que enunciamos formalmente de la siguiente manera:

**El flujo del vector de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al valor de la carga neta encerrada dividida por  $\epsilon_0$ ,**

Es decir :

$$\Phi_{\vec{E}} = 0$$

Si no hay cargas en su interior(fuentes de campo eléctrico)

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

en el caso que exista una fuente en su interior(la carga eléctrica en éste caso)

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.26)$$

Ahora bien, el campo eléctrico producido por una carga puntual positiva cualquiera a una distancia  $r$  viene dada por

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$$

reemplazando en (2.26) para el caso de la esfera en la figura 2.21

obtenemos:

$$\Phi_{\vec{E}} = \oint k \frac{q}{R^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{S} = \frac{kq}{R^2} \oint dS = \frac{kq}{R^2} S$$

$S$  es la superficie de la esfera de radio  $R$ , es decir,  $S = 4\pi R^2$  y además  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ . Reemplazando estos valores en la expresión anterior obtenemos finalmente:

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.27)$$

Éste es el denominado teorema del flujo que enunciamos formalmente de la siguiente manera:

**El flujo del vector de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al valor de la carga neta encerrada dividida por  $\epsilon_0$ ,**

Es decir :

$$\Phi_{\vec{E}} = 0$$

Si no hay cargas en su interior(fuentes de campo eléctrico)

$$\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

en el caso que exista una fuente en su interior(la carga eléctrica en éste caso)

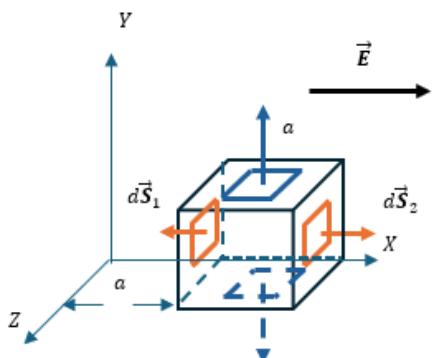


Figura 2.22.

### Ejemplo Ilustrativo Sobre Flujo de Campo Eléctrico

Un cubo de lado  $a$  se halla inmerso en un campo eléctrico variable dado por la expresión  $\vec{E} = 4x^2\hat{i}$  en un sistema coordenado  $XYZ$ . La distancia de la primera cara al eje  $z$  también vale  $a$  (ver figura 2.22).

#### Calcular

1. El flujo del campo  $\vec{E}$  a través de toda la superficie cúbica cerrada
2. La carga neta encerrada (si la hay)

#### Solución.

Dado que el campo eléctrico es paralelo al eje  $X$  no fluye a través de cuatro caras: La cara de arriba, la de abajo y las dos caras laterales. El flujo del campo será entonces la suma de los flujos en dos caras: La cara anterior  $\vec{S}_1$  y la cara posterior  $\vec{S}_2$  del cubo

$$\Phi_{\vec{E}} = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2$$

$$\Phi_{\vec{E}} = - \int E_1 \cdot dS_1 + \int E_2 \cdot dS_2$$

De modo que:

$$\Phi_{\vec{E}} = - \int 4a^2 dS_1 + \int 16a^2 dS_2 = -4a^2 \times a^2 + 16a^2 \times a^2$$

$$\Phi_{\vec{E}} = 12a^4 \quad (2.28)$$

El resultado obtenido en la ecuación (2.28) nos dice que el flujo a través de la superficie cerrada cónica es diferente de cero y por lo tanto debe existir alguna carga positiva en el interior de la superficie. Ésta carga la encontramos aplicando directamente el teorema de flujo, es decir la ecuación (2.28)

$$\Phi_{\vec{E}} = 12a^4 = \frac{q_{\text{neta encerrada}}}{\epsilon_0}$$

👉  $q_{\text{neta encerrada}} = \epsilon_0 12a^4$

### Ejemplo Ilustrativo Sobre cálculo del Campo eléctrico Usando la ley de Gauss

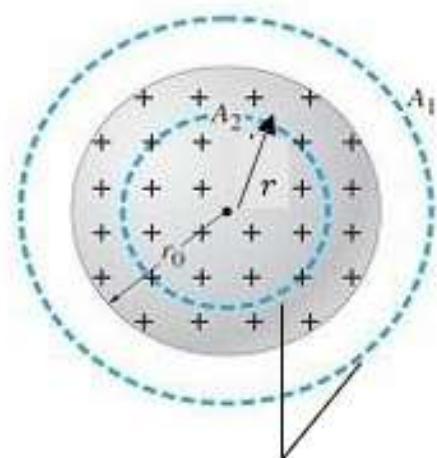


Figura 2.23.

Una esfera de radio  $r_0$  (Figura 2.23) presenta una distribución volumétrica de carga uniforme positiva  $\rho$ .

Calcular

- 1 El campo eléctrico en el interior de la esfera ( $r < r_0$ )
- 2 El campo eléctrico en el exterior de la esfera ( $r > r_0$ )

**Solución** En todo ejercicio de aplicación de la ley de Gauss empezamos por identificar la región donde queremos calcular el

campo, en éste caso identificamos dos regiones: dentro y fuera de la esfera, comenzaremos por calcular el campo eléctrico en el interior de la esfera ( $r < r_0$ ), para ello marcamos un punto en el interior de la esfera y por ese punto trazamos una superficie con la simetría del problema, en este caso una esfera la cual hemos dibujado en color azul. A esta superficie

Se le llama superficie gaussiana y le asignamos un radio  $r$ . Una vez trazada la superficie gaussiana notamos que la carga encerrada es la que queda dentro de la gaussiana.

Escribimos la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{neto encerrada}}}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

Dada la simetría del problema y puesto que la distribución de carga es positiva, el ángulo entre el elemento de superficie  $d\vec{S}$  y el campo  $\vec{E}$  es de cero grados, (mire la figura 2.23), entonces la ecuación (2.29) se convierte en

$$E 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad r < r_0 \quad (2.30)$$

De manera similar procedemos para  $r > r_0$ . El lector puede verificar siguiendo el procedimiento anterior que en este caso

$$\Rightarrow E = \rho \frac{r_0^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad r > r_0 \quad (2.31)$$

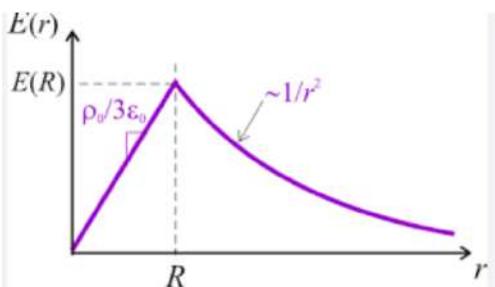


Figura 2.24.

proporciona una idea clara de este comportamiento

Es interesante notar que la magnitud del campo eléctrico en el interior de la esfera ( $r < r_0$ ), es directamente proporcional a  $r$ , pero en el exterior de la esfera ( $r > r_0$ ), la magnitud del campo eléctrico  $E$  es inversamente proporcional a  $r^2$ , la gráfica que mostramos a la izquierda nos

## Ejercicios Propuestos Sobre Flujo de Campo Eléctrico

1 si a una superficie cerrada llegan más líneas de las que salen entonces puede decirse que el flujo de campo eléctrico es:

- A. Positivo B. Negativo C. infinito D. cero E. NDA

2.

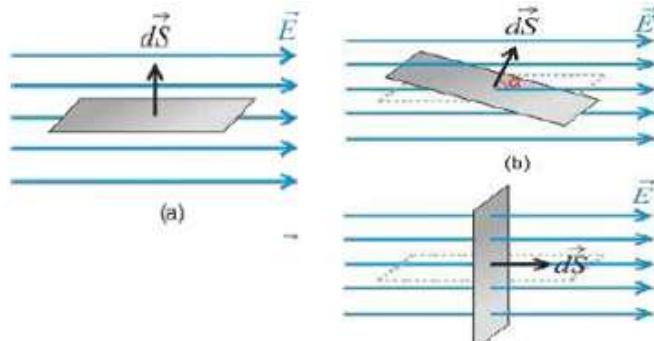


Figura 2.25.

Una superficie cuadrada de lado  $a$  se encuentra en un campo eléctrico constante de  $5 \text{ volt/m}$ .

Calcule el flujo del campo eléctrico a través de la superficie en todos los casos mostrados en la figura, considere que el ángulo  $\alpha$  vale  $60^\circ$

3. Se tiene una superficie esférica cargada con una carga total  $Q$  (Figura 2.26). Describa que sucede con el flujo (aumenta, disminuye, no cambia) a través de la superficie si :

- A. La carga se triplica
- B. El radio de la esfera se duplica
- C. La superficie se cambia a un cubo
- D. La carga se coloca en otra posición dentro de la superficie
- E. ¿Podría utilizar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico a una distancia  $2R$  del centro de la esfera?

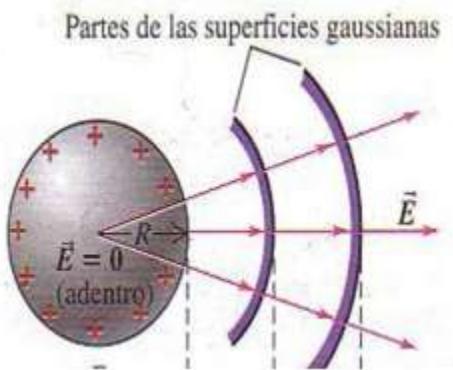


Figura 2.26.

**4A.** Una carga puntual  $Q$  se encuentra en el centro de un cubo de lado  $a$  como se muestra en la figura (2.27) . Determine el flujo

1. través de una de sus caras
2. través de toda la superficie cúbica cerrada

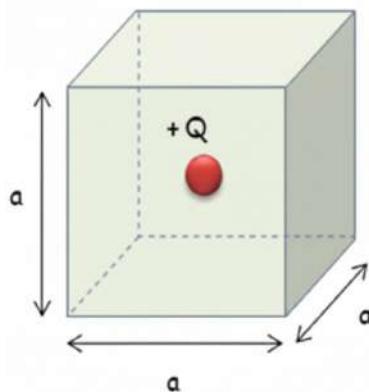


Figura 2.27.

**4B.** Si se duplica el lado del cubo (es decir  $2a$ ) determine el flujo:

1. través de una de sus caras
2. través de toda la superficie cúbica cerrada

**5.** Una línea de carga muy larga (infinita) con densidad lineal uniforme  $\lambda$  ( $C/m$ ) atraviesa un cubo de lado  $a$  perpendicularmente a dos de sus caras y por su centro.

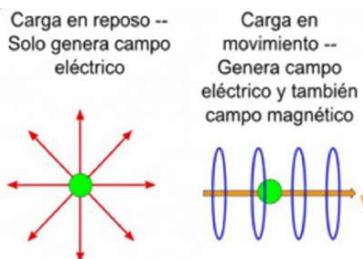


Figura 2.28.

**1.** ¿Cuál es el flujo de campo eléctrico que atraviesa cada una de las caras del cubo?

**2.** ¿Si duplicamos el lado del cubo cuánto es ahora el flujo?

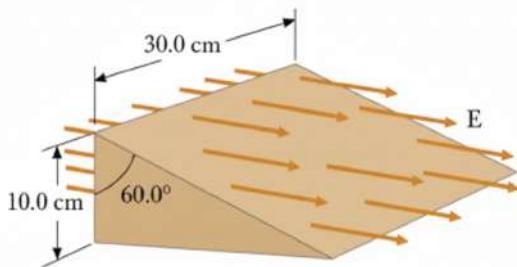


Figura 2.29.

través de toda la superficie cerrada.

2i. La carga eléctrica encerrada (si la hay)

### Ejercicios Propuestos Sobre la ley de Gauss

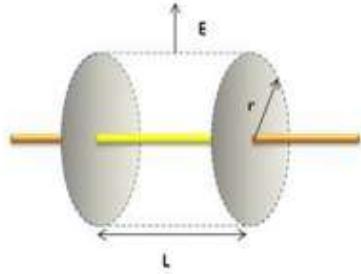


Figura 2.30.

8. Una esfera no conductora de radio  $a$  tiene una densidad de carga por unidad de volumen uniforme. Determine el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera

6.

Una superficie cerrada en forma de cuña (ver figura 2.29) se halla inmersa en un campo eléctrico constante  $\vec{E}$ . Las dimensiones de la superficie aparecen señaladas en la figura.

Encontrar:

i. El flujo del campo eléctrico a

7.

Se tiene una línea infinita con densidad de carga lineal uniforme. Determine el campo eléctrico una distancia  $r$  de la línea

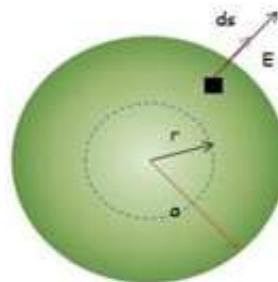


Figura 2.31.

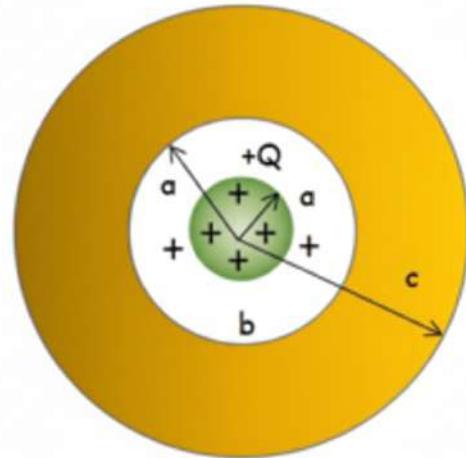


Figura 2.32.

- y la conductora
- Dentro de la esfera no conductora
  - Entre la esfera no conductora
  - Dentro de la esfera conductora
  - Fuera de las esferas
  - ¿Cuáles son las densidades de cargas inducidas en las superficies interna y externa de la esfera conductora?

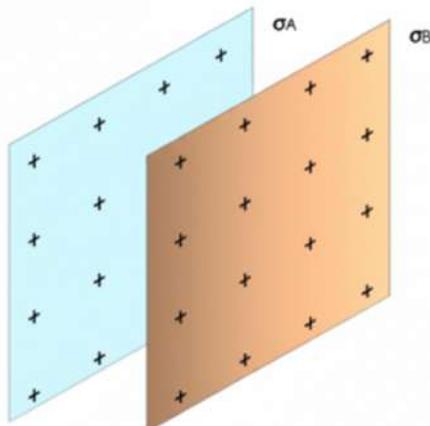


Figura 2.33.

9. Una esfera no conductora sólida de radio  $a$  y carga uniforme  $Q$  está ubicada en el centro de un cascarón esférico conductor de radio interior  $b$  y exterior  $c$ . Calcule el campo eléctrico en las siguientes regiones:

- Dentro de la esfera no conductora
- Entre la esfera no conductora

10. Dos láminas de extensión infinita, uniformemente cargadas están enfrentadas como se muestra en la figura. La de la izquierda tiene una densidad superficial de carga  $\sigma_A$  y la de la derecha  $\sigma_B$ . Halle el campo eléctrico en todas las regiones para la siguiente configuración:

$$\sigma_A = \sigma_0 \text{ y } \sigma_B = -\sigma_0$$

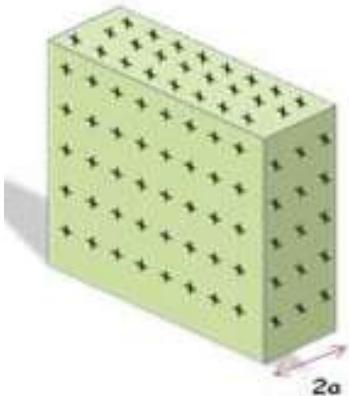


Figura 2.34.

*E* en función de *x*

11.

Considere una lámina infinita de espesor  $2a$  no conductora con una carga uniforme con densidad volumétrica  $\rho$ . Calcule el campo eléctrico en términos de la distancia  $x$ , medida desde el plano medio de la lámina en las siguientes regiones:

- A. En el interior de la lámina
- B. En el exterior de la lámina
- C. Grafique el módulo(magnitud) de

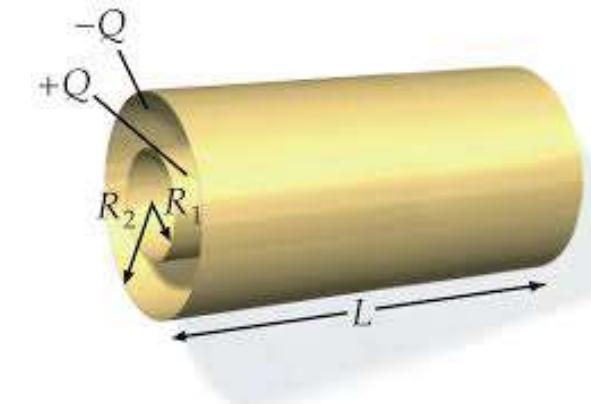


Figura 2.35.

- a. El campo eléctrico en la región  $r < R_1$
- b. El campo eléctrico en la región  $R_1 < r < R_2$
- c. la densidad de carga en cada una de las superficies conductoras



## 2.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

**Alejandro Volta** (1745 - 1827) Químico y físico italiano, famoso por el descubrimiento del metano en 1776 y la invención y desarrollo de la pila eléctrica en 1799, fue además el primero en definir apropiadamente el concepto de potencial eléctrico.

Se define el **potencial eléctrico** como la energía potencial eléctrica ( $E_{Pe}$ )

por unidad de carga, se denota por  $V$  y sus unidades en el sistema internacional de medida son voltios en honor a Alejandro Volta. Empezaremos aquí definiendo el potencial eléctrico  $V$  producido por una carga eléctrica puntual  $q$  como:

$$V = \frac{E_{Pe}}{q} \implies V = \frac{k \frac{Qq}{r}}{q} \quad (2.32)$$

$$V = k \frac{Q}{r} \quad (2.33)$$

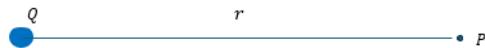


Figura 2.36.

**¿Qué significa Realmente V?**  
la ecuación (2.33) se puede leer de la siguiente manera: "El

potencial eléctrico creado por la carga  $Q$  en el punto  $P$  es igual a la constante eléctrica  $k$  multiplicada por la carga eléctrica que produce el campo eléctrico a una distancia  $r$  de donde está la carga"

Debido a la definición en términos de energía potencial eléctrica, dada para el potencial eléctrico en (2.32), este potencial es en realidad una diferencia de potencial entre el punto  $P$  y el infinito.

Esto se entiende mejor si recordamos que la  $E_{Pe}$  de configuración es el trabajo realizado para ubicar dos cargas eléctricas una frente a otra cierta distancia  $r$ . Éste trabajo se realiza suponiendo que una de las dos cargas está en el infinito y debemos "traerla" con velocidad constante (sin aceleración) hasta colocarla en punto  $P$  a una distancia  $r$  de la otra carga. El trabajo realizado entre  $r = \infty$  y  $r = r$  queda "almacenado" en la configuración en forma de energía potencial. Cuando se aplica la definición (2.33) obtenemos la energía que quedó almacenada por unidad de carga, es decir, el trabajo que se realizó por unidad de carga entre  $r = \infty$  y  $r = r$ , lo cual establece que el potencial eléctrico  $V$  dado por (2.33) es una diferencia de potencial entre el infinito y el punto  $P$

El argumento anterior implica tomar el infinito como nivel de referencia cero para el potencial eléctrico. En la práctica ésto no es apropiado, en realidad el nivel de referencia cero puede ser cualquier punto siempre que todas las medidas de potencial eléctrico se realicen con respecto a ese punto. Usualmente ese punto o nivel de referencia cero se escoge según la situación que se esté considerando, por ejemplo, en un automóvil se mide el potencial eléctrico de cualquier punto en su interior con respecto al chasis del automóvil, es decir, conectaríamos una de las terminales del voltímetro en cualquier punto del chasis (nivel de referencia cero) y la otra terminal en el punto donde queremos medir el potencial. En una casa el nivel de referencia cero para el potencial es la Tierra, de modo que todos los aparatos eléctricos trabajan con un potencial medido respecto a la tierra.

## Diferencia de Potencial Entre Dos Puntos

Nos proponemos ahora responder a la siguiente pregunta: ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos separados una distancia  $r$ ? Note que ahora no se trata de la diferencia de potencial entre un punto y el infinito. Para responder esta pregunta consideremos la figura 2.37

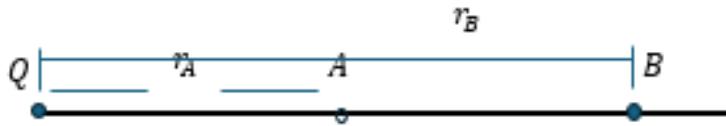


Figura 2.37.

El potencial producido por  $Q$  en los puntos  $A$  y  $B$  será :

$$V_A = k \frac{Q}{r_A} \quad V_B = k \frac{Q}{r_B}$$

Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los dos puntos es :

$$V_A - V_B = k \frac{Q}{r_A} - k \frac{Q}{r_B} \quad (2.34)$$

Notemos que por ser  $Q$  positiva el potencial en el punto  $A$  es mayor que en el punto  $B$ , por el contrario , si la carga  $Q$  tuviese signo negativo el potencial en  $B$  sería mayor que en  $A$ . Que sucedería si colocamos una carga de prueba entre los puntos  $A$  y  $B$ ? **¿Que es una carga de prueba?** Es una herramienta muy útil definida como una *carga positiva muy pequeña, tan pequeña que el campo producido por ella es despreciable*

Es claro que si  $Q$  es positiva entonces una carga de prueba colocada entre  $A$  y  $B$  se movería hacia la derecha ( $V_A > V_B$ ), pero si  $Q$  es negativa se movería hacia la izquierda ( $V_B > V_A$ ), en cualquier caso, ya sea que  $Q$  sea positiva o negativa siempre se mueve de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial. podemos establecer entonces el siguiente enunciado :

**Las cargas eléctricas positivas se mueven de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial**

Este resultado es de gran importancia en la teoría de circuitos cuando

Acordamos o convenimos lo siguiente : En un circuito eléctrico la corriente eléctrica es debida a los portadores de carga positiva, con lo cual podemos generalizar la afirmación escrita antes y decir:

***En un circuito eléctrico las corrientes se mueven de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial***

### **Potencial Eléctrico de Cargas Distribuidas**

el potencial eléctrico en un punto cualquiera  $P$  debido a una carga puntual  $Q$  está definido en la ecuación (2.33).

Para el caso de una carga distribuida aplicamos la misma técnica que hemos venido utilizando en otras partes del curso tales como masas distribuidas o cálculo de campos eléctricos producidos por cargas distribuidas. En el caso del potencial eléctrico el cálculo matemático se facilita mucho debido a que el potencial eléctrico es una cantidad escalar y no vectorial, esto nos ahorra mucho trabajo al no tener que lidiar con vectores. Podemos entonces escribir:

$$V = \int k \frac{dq}{r} \quad (2.35)$$

La aplicación de la ecuación (2.35) está muy bien ilustrada en los ejercicios sobre carga distribuida desarrollados anteriormente y por lo tanto no consideramos necesario insistir más en el tema. Consideramos más interesante investigar **cómo se calcula la diferencia de potencial en una región donde existe campo eléctrico**, para ello empezamos por escribir la expresión correspondiente al trabajo realizado para trasladar entre dos puntos  $A$  y  $B$  a una carga eléctrica que se halla inmersa en el interior de un campo eléctrico

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}_E \cdot d\vec{r} \quad (2.36)$$

En la expresión (2.36),  $W_A^B$  es el trabajo realizado por la fuerza eléctrica  $\vec{F}_E$  debida al campo eléctrico presente en la región. Debemos recordar que el trabajo es lo mismo que la energía, es decir,  $W_A^B = E_{PA}^B$  con lo cual podemos deletrear la ecuación (2.36) como : **"Es la energía potencial que se genera y almacena cuando trasladamos una carga eléctrica entre dos puntos A y B donde existe un campo eléctrico"** Dividiendo por la carga  $q$  ambos lados de la ecuación (2.36) obtenemos:

$$\frac{W_A^B}{q} = \int_A^B \left( \frac{\vec{F}_E}{q} \right) \cdot d\vec{r}$$

Note que  $\frac{W_A^B}{q}$ , es la definición de la energía potencial eléctrica  $E_{Pe}$  y  $\left( \frac{\vec{F}_E}{q} \right)$  es la definición de campo eléctrico, podemos escribir entonces

$$V_A^B = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.37)$$

**Ejemplo ilustrativo** En una región del espacio plano existe un campo eléctrico variable definido por  $\vec{E} = 4x^2 \hat{i}$ . Calcular la diferencia de potencial entre los puntos  $P_1(2, 4)$  y  $P_2(6, 2)$  (ver figura 2.38)

**Solución.** Lo primero que debemos notar es la infinita cantidad de trayectorias posibles para ir desde el punto  $P_1$  hasta el punto  $P_2$ . La más fácil y cómoda de todas las posibles resulta ser

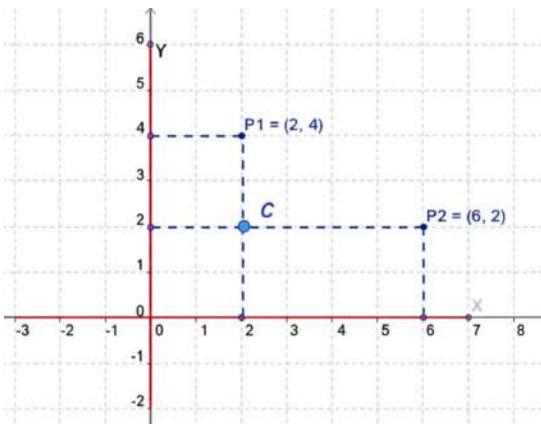


Figura 2.38.

La que va desde  $P_1(2, 4)$  hasta el punto intermedio  $C(2, 2)$  y luego desde  $C(2, 2)$  hasta  $P_2(6, 2)$

Escribimos entonces:

$$V_{P_1}^{P_2} = - \left( \int_{P_1}^C \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_C^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right)$$

La primera integral nos dice que caminemos desde  $P_1$  hasta el punto  $C$  sin importar que trayectoria escojamos, pero es evidente que el camino más conveniente y directo es la línea recta que une estos dos puntos. La segunda integral nos dice que debemos caminar desde el punto  $C$  al punto  $P_2$ , claramente el camino más conveniente en éste caso es la línea que une estos dos puntos.

Ahora bien: Cuando caminamos de  $P_1$  a  $C$  el desplazamiento  $d\vec{r}$  se realiza únicamente a lo largo del eje  $y$ , por lo tanto,  $d\vec{r}$  se convierte en  $\hat{j}dy$ , igualmente cuando caminamos desde  $C$  al punto  $P_2$ ,  $d\vec{r}$  se convierte en  $\hat{i}dx$  entonces:

$$V_{P_1}^{P_2} = - \left( \int_{P_1}^C \vec{E} \cdot \hat{j}dy + \int_C^{P_2} \vec{E} \cdot \hat{i}dx \right)$$

$$V_{P_1}^{P_2} = - \left( 0 + \int_C^{P_2} 4x^2 dx \right)$$

$$V_{P_1}^{P_2} = 0 - \left[ \frac{4x^3}{3} \right]_{x=2}^{x=6}$$

👉  $V_{P_1}^{P_2} = -61.4 \text{ Volts}$

**Campo Eléctrico Derivado de un Potencial** La ecuación (2.37) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_A^B dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Recordemos del cálculo integral que, en una igualdad entre dos integrales con los mismos límites, podemos igualar los integrandos, por lo tanto:

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{E} \cdot d\vec{r} \\ dV &= -(\hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z) \cdot (i dx + j dy + k dz) \\ dV &= -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Podemos dividir ambos lados de la ecuación (2.38) por cualquiera de los diferenciales de desplazamiento  $dx$ ,  $dy$  ó  $dz$ , teniendo presente que el potencial eléctrico puede ser función de las tres variables  $(x,y,z)$  y obtenemos las tres ecuaciones :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x \quad (2.39a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y \quad (2.39b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z \quad (2.39c)$$

Las ecuaciones (2.39a),(2.39b),(2.39c) establecen que si conocemos la forma del potencial eléctrico en cierta región del espacio podemos obtener el campo eléctrico.

A continuación, presentamos un ejercicio de aplicación

## Ejemplo ilustrativo

En cierta región del espacio tridimensional existe un potencial eléctrico definido por  $V(x, y, z) = 3xy^2 + x^3 + x^2y$ . Encuentre el campo eléctrico en el punto  $P$  de coordenadas  $P(1, 2, 1)$

### Solución

La magnitud del campo eléctrico en el punto  $P$  será de acuerdo con el teorema de Pitágoras

$$E(121) = \sqrt{E_x^2(121) + E_y^2(121) + E_z^2(121)} \quad (2.40)$$

Necesitamos entonces encontrar las componentes  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  y evaluar a cada una de estas componentes en  $P(121)$ . Entonces

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} = 3y^2 + 3x^2 + 2xy \implies E_x(121) = 12 + 3 + 4 = 19$$

$$E_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 6xy + 0 + x^2 \implies E_y(121) = 12 + 0 + 1 = 13$$

$$E_z = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 + 0 + 0 \implies E_z(121) = 0$$

Reemplazando en la ecuación (2.40)

$$E(121) = \sqrt{(19)^2 + (13^2) + (0^2)}$$

$$E(121) = \sqrt{361 + 169 + 0} = \sqrt{530}$$

👉  $E(121) = 23 \text{ Voltios/metro}$

## 2.7 CUESTIONARIO CAPITULO2

1. ¿Cuál es la propiedad intrínseca de la materia responsable de todas las interacciones electromagnéticas?

Masa inercial.

Carga eléctrica.

Densidad volumétrica.

Gravedad.

Verificar

Soy pequeño,  
pero almaceno poder



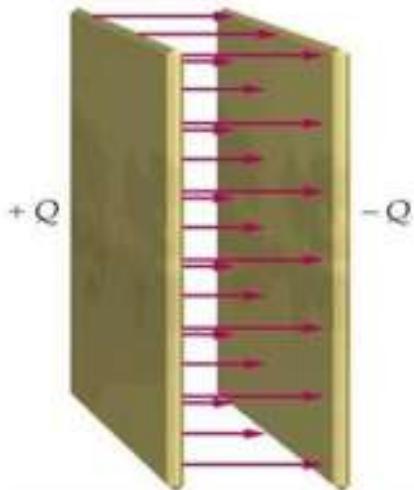


# Capítulo 3

## CONDENSADORES

### 3.1 CONDENSADORES

#### 1. ¿Qué es un condensador?



*Condensador de placas planas paralelas (PPP)*

Figura 3.1.

*Se define un condensador, también llamado capacitor, como una estructura formada por dos conductores separados una distancia  $d$  ambos cargados con la misma cantidad de cargas pero de signo contrario.* Considerando su forma geométrica existen diferentes tipos de condensadores, en éste curso estudiaremos los tres más comunes: el condensador de placas planas paralelas PPP (Figura 3.1), el condensador esférico y el condensador cilíndrico.

*Nótese que no hemos impuesto ninguna condición en relación a la forma geométrica que puedan tener los conductores que conforman el condensador,* sin embargo, para usos

prácticos ésta forma dependerá de los requerimientos tecnológicos exigidos. Por otra parte, al tener los conductores cargas de signos opuestos existirá una fuerza atractiva entre ellos que tiende a juntarlos por lo cual se introduce un medio no conductor o dieléctrico con el fin de evitar esta juntura que sin duda causaría un corto circuito. Resulta interesante que estos dieléctricos aumentan la capacidad de almacenamiento de energía eléctrica del condensador mejorando sus prestaciones y optimizando así su rendimiento. Finalmente señalemos que al conectar uno de los conductores a un generador éste se carga e induce una carga de signo opuesto en el otro conductor del condensador.

## 2. ¿Cuál es la función de un condensador?

La función principal de un condensador es almacenar cargas eléctricas y en consecuencia según veremos más tarde energía eléctrica. En la industria son utilizados para suministrar intensas pulsaciones eléctricas de láser, como también para desviar cargas eléctricas en movimiento, en los circuitos electrónicos los capacitores se usan para manipular voltajes y corrientes variables con el tiempo.

Queremos ahora explicar el mecanismo de almacenamiento de cargas en un condensador y sobre todo cuanta carga puede almacenar. Para este fin utilizaremos un condensador PPP (Placas Planas Paralelas) en la que una de las placas va a contener carga positiva y la otra negativa (Figura 3.2).

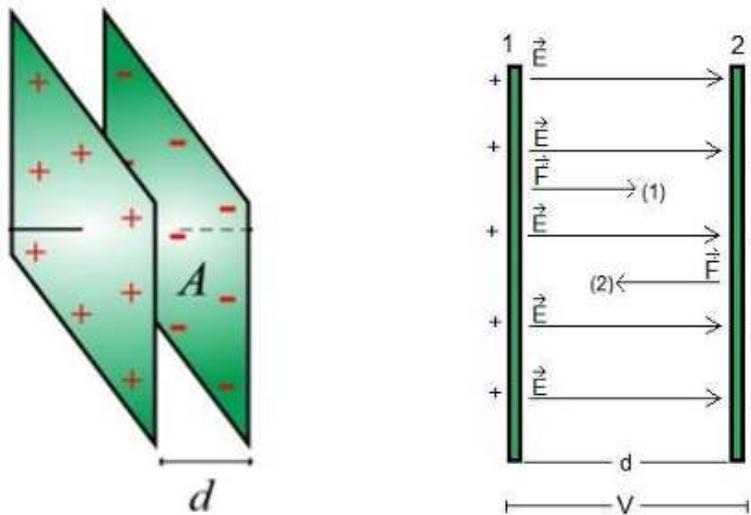


Figura 3.2.

Imaginemos que empezamos por "traer y colocar" una pequeña cantidad de carga positiva y la depositamos en la placa de la izquierda, cada electrón en la placa de la derecha se halla sometido a una fuerza dada por

$$\vec{F} = -q\vec{E} \quad (3.1)$$

Debido al signo de la carga la fuerza está en el sentido opuesto al campo eléctrico  $\vec{E}$ , si la fuerza es lo suficientemente intensa, los electrones pueden ser arrancados de la placa, lo cual ocurre cuando aumenta el campo eléctrico entre las placas, y esto a su vez ocurre cada vez que aumentamos la cantidad de carga que colocamos en las placas

*Resulta claro entonces que un condensador no puede soportar una cantidad ilimitada de cargas ya que mientras más cargas coloquemos en las placas mayor será el campo eléctrico entre ellas y por consiguiente mayor será la fuerza que el campo ejerce sobre las cargas en las placas.*

Lo anterior implica que debe existir un límite para la cantidad de carga que puede almacenar un condensador para evitar que los electrones sean arrancados de las placas, éste límite se conoce como **capacitancia** cuya función es cuantificar o medir la cantidad de carga que puede aguantar el condensador sin que se destruya. Más adelante comprobaremos que medir esto es lo mismo que medir cuanta energía puede almacenar el condensador entre sus placas

## 3.2 CAPACITANCIA

La capacitancia se mide en Faradios en honor a Michel Faraday, Físico y Químico Inglés (en sus principios totalmente empírico) quien dedicó su vida al estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos

La capacidad máxima de almacenar carga eléctrica que tiene un condensador sin que se destruya viene dada por

$$C = \frac{Q}{V} \quad (3.2)$$

En la expresión (3.2)  $Q$  es la carga absoluta (sin signo) depositada en uno de los conductores que conforman el condensador y  $V$  es la diferencia de potencial entre ellos.

Esta definición, aunque correcta es poco práctica para propósitos tecnológicos ya que calcular la capacitancia implicaría medir para cada ocasión cuánta carga tiene el condensador en una de las placas y esto dependería de cada situación particular, como por ejemplo el tipo de circuito en que se halla conectado el condensador, esto nos llevaría a concluir que la capacitancia de un condensador depende del circuito donde esté conectado lo cual es falso. *La capacitancia de un condensador es constante y bien definida.* En lo que sigue nos proponemos particularizar la definición (3.2) para cada uno de los tres condensadores mencionados al principio de este capítulo

### Condensador de Placas Planas Paralelas (PPP)

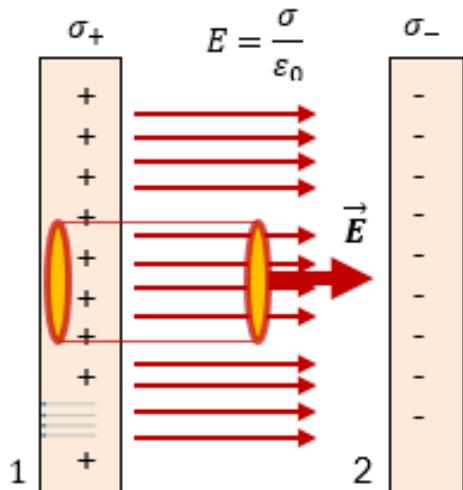


Figura 3.3.

Empezamos por notar que la diferencia de potencial eléctrico entre las placas del condensador *PPP* no se conoce, por lo tanto debemos calcularla:

$$V_1^2 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.3)$$

Recordemos que  $\vec{E}$  es el campo eléctrico entre las dos placas etiquetadas con los números 1 y 2.

Dado que no conocemos  $\vec{E}$  lo debemos calcular usando la ley de Gauss para lo cual escogemos un cilindro recto de longitud cualquiera con superficies circulares de valor  $S$  (círculos sombreados) en ambos extremos del cilindro. Nótese que la Superficie de la cara anterior del cilindro la hemos dibujado en el interior de la lámina 1 para aprovecharnos del hecho que el campo eléctrico en el interior de un conductor es cero.

Escribimos la ley de gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad (3.4)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{E}_C \cdot d\vec{s}_C = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Notemos que la primera y la última integral se anulan. la primera por estar la superficie  $\vec{S}_1$  en el interior de la lámina donde el campo es cero en su interior, la última se anula por existir un ángulo de  $\pi/2$  entre  $\vec{S}_C$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ , por otro lado, el campo eléctrico  $\vec{E}$  en cada punto de la superficie  $S_2$  es el mismo, por último, notemos que  $S_1 = S_2 = S$

Entonces (3.4) nos queda:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

Debido a que la distribución superficial es uniforme en la superficie de la lámina, la magnitud del campo eléctrico  $\vec{E}$  entre las láminas también lo será. Ahora podemos reemplazar (3.5) en (3.3) y obtener:

$$V_1^2 = - \int_1^2 \frac{\sigma dr}{\epsilon_0} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0} (r_2 - r_1)$$

$$V_1^2 = - \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

Notemos que  $V_1^2 = V_2 - V_1$  es negativo ya que  $V_1 > V_2$ . Esto se debe a que el potencial en la lámina 1 es mayor que en la lámina 2, (recuerde que las corrientes se mueven de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial). Esto lo podemos verificar con una carga de prueba, si soltáramos una carga de prueba entre las dos placas ésta se movería hacia la derecha, es decir hacia la lámina 2 y por lo tanto concluiríamos que la lámina 1 está a mayor potencial que la lámina 2. Entonces escribimos:

$$V_1^2 = V_2 - V_1 = -V = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$V_1^2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.7) en (3.2) y teniendo en cuenta que la carga total  $Q$  en la lámina es  $Q = \sigma A$ , donde  $A$  es el área total de la lámina obtenemos

$$C_{PPP} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (3.8)$$

### Condensador Esférico

Básicamente un condensador esférico está formado por dos esferas huecas concéntricas (Figura 3.4). Para encontrar la capacitancia de este condensador cargamos las esferas con cargas iguales y opuestas. Debemos hacer esto con el fin de realizar el procedimiento de cálculo similar al que hicimos para el condensador *PPP*.

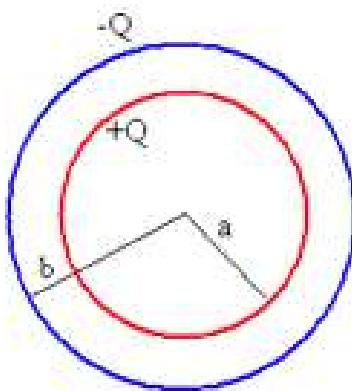


Figura 3.4.

Empezamos por escribir:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (3.9)$$

Seguidamente calculamos la diferencia de potencial entre las dos esferas huecas. En la figura (3.4) hemos colocado la carga positiva en la esfera interior de modo que el campo eléctrico estará dirigido de adentro hacia afuera. Escribimos:

$$V_a^b = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.10)$$

Los límites de la integral imponen que caminemos desde la esfera de radio  $a$  hasta la esfera de radio  $b$ . Dado que no conocemos la magnitud del campo eléctrico  $E$  debemos calcularlo, para ello usamos la ley de Gauss.

En referencia a la figura (3.5) trazamos una superficie gaussiana (circulo en negrilla) y escribimos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

Note que la carga neta encerrada por la gaussiana resulta ser la carga total  $Q$ . Después de ejecutar el producto punto (o producto escalar) entre  $\vec{E}$  y  $d\vec{S}$  (ángulo  $0^0$ ) realizamos el álgebra y obtenemos al despejar la magnitud del campo eléctrico

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.11)$$

(3.11) en (3.9) obtenemos:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a} \quad (3.12)$$

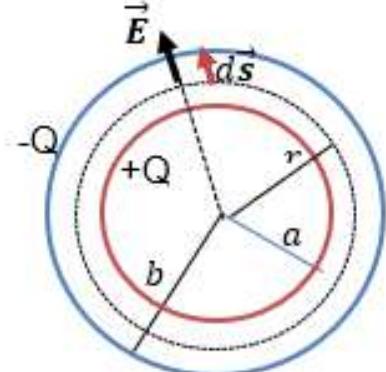


Figura 3.5.

### 3.3 ENERGÍA ALMACENADA POR UN CONDENSADOR

Queremos ahora calcular cuanta energía potencial eléctrica es almacenada entre las placas de un condensador cualquiera, para ello debemos relacionar cantidades como la energía potencial eléctrica  $E_P$ , la diferencia de potencial eléctrico  $V$  entre las placas y la carga  $q$  que almacena el condensador.

Recordemos la definición de potencial eléctrico

$$V = \frac{E_p}{q}$$

Ésta ecuación es válida cualquiera sea la cantidad de carga  $q$  depositada en cualquiera de las placas (dentro del límite que puede soportar un condensador) es decir :

$$E_P = Vq \implies dE_P = Vdq$$

A partir de aquí podemos encontrar cuanta energía se almacena entre los conductores que conforman el condensador según la carga que se acumula en ellos. Integrando ambos lados de ésta ecuación y teniendo en cuenta la ecuación (3.9) escribimos:

$$\int_0^{E_p} dE_P = \int_{q=0}^q \frac{q}{C} dq$$

Es claro que para los límites se debe cumplir que cuando las placas no tienen cargas ( $q = 0$ ) no existe ninguna energía potencial almacenada en el condensador ( $E_P = 0$ ), en cambio cuando existe alguna carga  $q$  en las placas entonces la energía potencial almacenada tendrá algún valor  $E_P$  por lo tanto :

$$E_P = \int_{q=0}^q \frac{q}{C} dq \implies E_P = \frac{q^2}{2C} \quad (3.13)$$

Con el resultado (3.13) podemos observar la relación directa entre carga eléctrica y la energía potencial eléctrica, para un modo más práctico hemos sustituido la carga  $q$  en (3.13) por  $q = VC$ , quedando entonces la energía potencial eléctrica en términos de la carga eléctrica y la capacitancia del condensador. Sin embargo, el resultado (3.13) es de muy poca utilidad práctica para calcular la energía potencial almacenada en el condensador, ello se debe a la dificultad de averiguar la carga que se almacena en el condensador por ello resulta conveniente usar  $q = VC$  en (3.13) y reescribir :

$$E_P = \frac{V^2 C^2}{2C} \implies E_P = \frac{V^2 C}{2} \quad (3.14)$$

esta ecuación (3.14) resulta muy práctica a la hora de hallar la energía potencial eléctrica almacenada por un condensador. Note que ésta depende del circuito al cual esté conectado el condensador, así por ejemplo un circuito de baja energía nos dará una medida pequeña de  $V$  y por tanto almacenará poca energía  $E_P$ , mientras que en uno de altas energías el voltímetro medidor arrojará altos valores de  $V$  y por lo tanto almacenará mayor energía potencial  $E_P$ . Debemos tener claro en todo momento un condensador tiene un límite de energía que puede almacenar , más allá de ese límite el condensador se destruye

### 3.4 CONEXIONES ENTRE CONDENSADORES

Existen dos maneras básicas de conectar condensadores en un circuito: **Serie y Paralelo**, hay que decir sin embargo que en ocasiones no están conectados en ninguna de las dos formas, esto puede ocurrir cuando se tienen circuitos construidos con dos o mas mallas

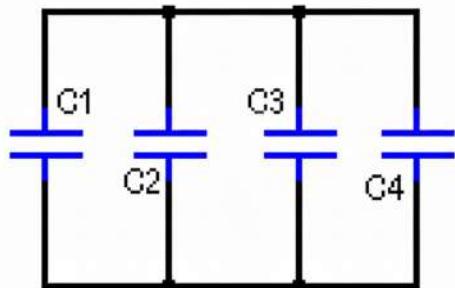


Figura 3.6.

de los cuatro anteriores, por eso recibe el nombre de "equivalente" y al circuito lo llamamos "circuito equivalente".

*Toda conexión de dos o más condensadores en paralelo se puede reducir a un circuito equivalente con un solo condensador*



En La figura (3.6) podemos ver cuatro condensadores conectados en paralelo en lado izquierdo de la pagina. En la figura de la derecha los cuatro condensadores se han reemplazado por un sólo condensador (en color rojo) que cumple la función

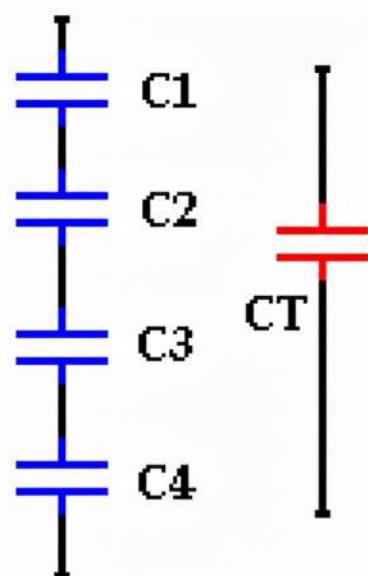


Figura 3.7.

En la figura (3.7) podemos observar la otra conexión básica entre condensadores llamada conexión en serie. Note que los cuatro condensadores conectados se pueden reemplazar por un solo condensador (color rojo) también llamado "equivalente" el cual realiza la misma tarea que los cuatro anteriores. Esto nos permite concluir:

*Toda conexión de dos o más condensadores en serie se puede reducir a un circuito equivalente con un solo condensador*

En lo que sigue estudiamos que caracteriza una conexión en serie y una conexión en paralelo entre condensadores

### Conexiones en Serie Entre Condensadores

Dos condensadores de un circuito están conectados en serie si por ellos pasa la misma corriente eléctrica. Esta afirmación expresa la conservación de la carga eléctrica ya que no sería posible justificar una diferencia de cargas eléctricas entre dos condensadores por los cuales circula la misma corriente eléctrica. Note que en la conexión mostrada en la figura (3.7) la corriente que pasa por los cuatro condensadores es la misma y por lo tanto cada uno de ellos acumula la misma carga en sus placas, una diferencia entre las cargas acumuladas en las placas no se puede dar porque las cargas se conservan y en una placa de cualquiera de los condensadores no pueden faltar o sobrar cargas con respecto a las demás placas pues la corriente que llega a cada una de las placas de los condensadores es la misma.

### Capacitancia Equivalente de Condensadores Conectados en Serie

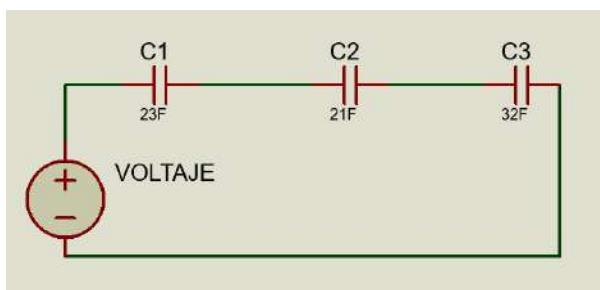


Figura 3.8.

Un circuito eléctrico con condensadores conectados en serie como se muestra en la figura (3.8) puede reducirse a un circuito con un solo condensador que realice la misma tarea que los conectados en el circuito original. El condensador resultante debe tener entonces una capacitancia equivalente a los condensadores del circuito original (Tres en el caso de la figura 3.8) cuyo valor se encuentra de la siguiente manera

valente a los condensadores del circuito original (Tres en el caso de la figura 3.8) cuyo valor se encuentra de la siguiente manera

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \implies C_{eq} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}$$

En general para un número cualquiera  $N$  de condensadores conectados en serie la capacitancia equivalente es :

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \\ \implies \frac{1}{C_{eq}} &= \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{C_n} \end{aligned} \quad (3.15)$$

### Conexiones en Paralelo

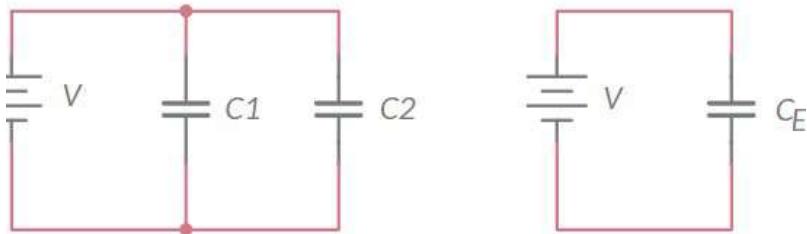


Figura 3.9.

Dos condensadores de un circuito están conectados en paralelo cuando la "caída o diferencia de potencial" entre los extremos de los condensadores es la misma para todos, para que esto ocurra, la conexión en paralelo de dos elementos de un circuito (condensadores en este caso) requiere que no exista ningún elemento entre los extremos de los condensadores. En la figura (3.9) podemos observar en la imagen de la izquierda una típica conexión en paralelo que involucra dos condensadores, note que este circuito se reduce al circuito elemental de la derecha con un solo condensador equivalente, este condensador equivalente debe tener entonces una

**capacitancia equivalente** a los condensadores del circuito original cuyo valor es la suma directa de los condensadores conectados:  $C_{eq} = C_1 + C_2$ . En general para  $N$  condensadores conectados en paralelo la capacitancia del condensador equivalente viene dada por

$$C_{eq} = \sum_{n=1}^{n=N} C_n \quad (3.16)$$

Observemos que la conexión en paralelo es más eficiente para almacenar energía que la conexión en serie, para comprobarlo usemos dos condensadores idénticos de capacitancia  $C$  cada uno y miremos que sucede para cada conexión:

### 1. Conectados en Serie

La capacitancia equivalente es:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C} \implies C_{eq} = \frac{C}{2}$$

La energía potencial eléctrica almacenada según (3.14) será entonces:

$$E_P = \frac{V^2 C_{eq}}{2} = \frac{V^2}{2} \left( \frac{C}{2} \right) \implies E_P = \frac{V^2 C}{4}$$

### 2. Conectados en Paralelo

la capacitancia equivalente es :

$$C_{eq} = C + C = 2C$$

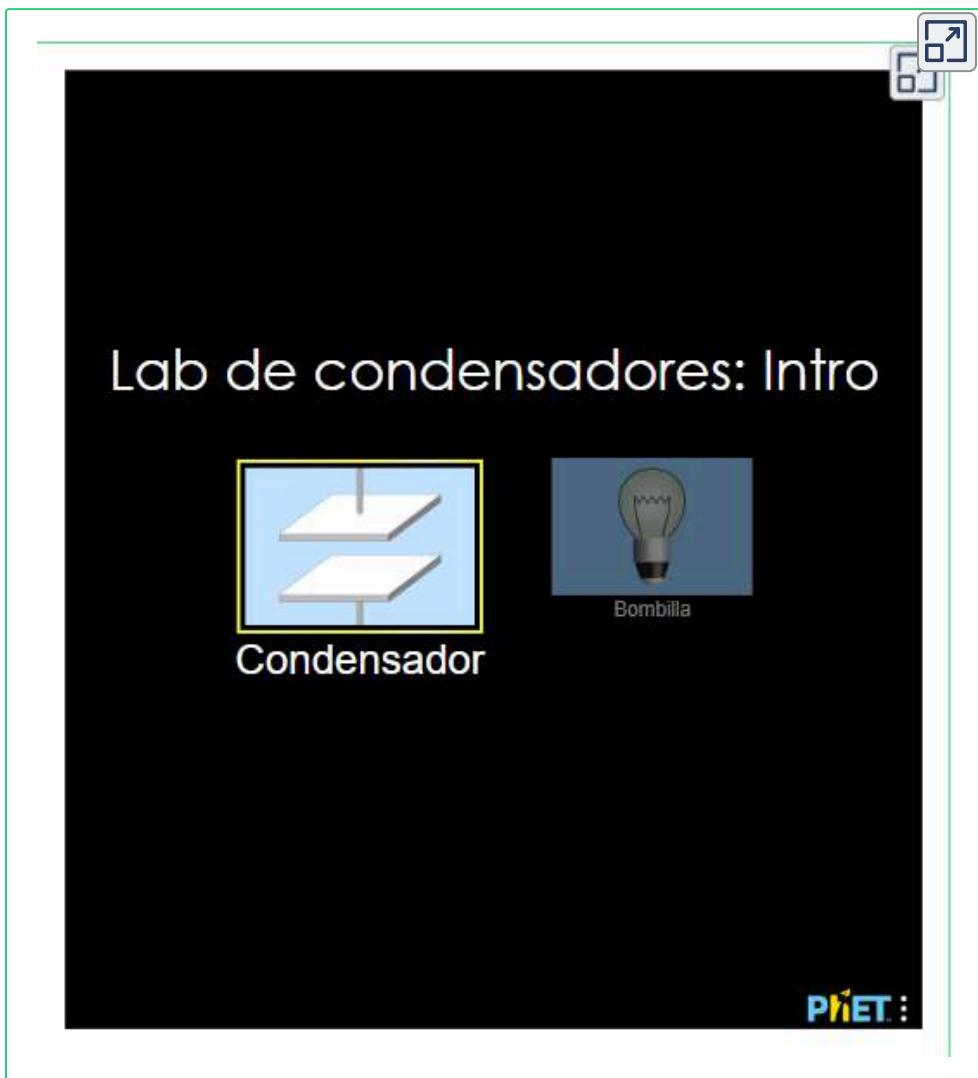
La energía potencial eléctrica almacenada según (3.14) será entonces:

$$E_P = \frac{V^2 C_{eq}}{2} = \frac{V^2}{2} (2C) \implies E_P = V^2 C$$

 **La conexión en paralelo almacena cuatro veces más energía que la conexión en serie**

## Actividad de Simulación - Condensadores

A través de la plataforma de simulación en ciencias Phet desarrollada por la universidad de colorado, se realizará una actividad didáctica orientada a entender e ilustrar el manejo de condensadores y los conceptos asociados a éstos, tales como: capacitancia y energía almacenada. observamos la simulación con dos ventanas : **Condensador** y **Bombilla**



Lab de condensadores: Intro

Condensador

Bombilla

PHET

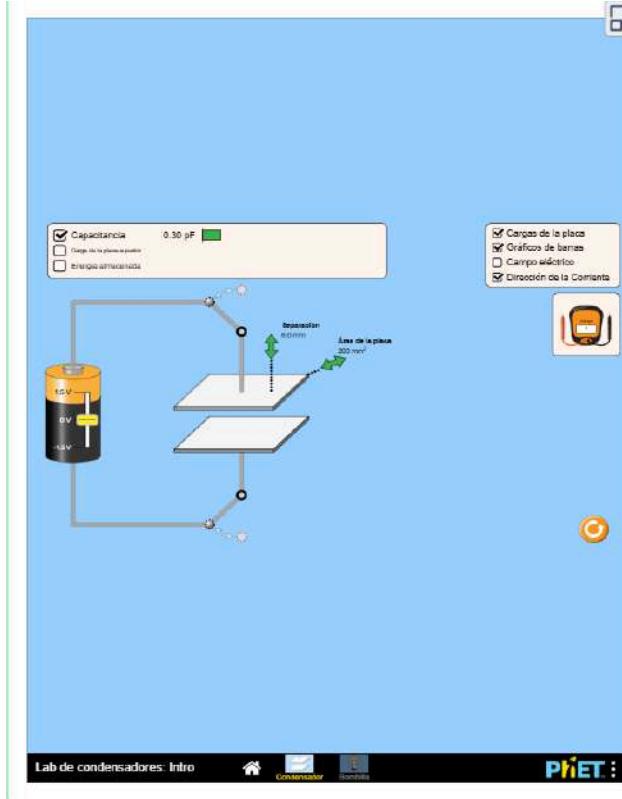


Figura 3.10.

utilizar para medir la diferencia de potencial entre las placas

## Actividades

1. Manipulando las flechas verdes construya un condensador con 0.2 pF(picó Faradios) de capacidad
2. Utilice el capacitor construido en el paso anterior y suministre un Voltaje de 0.8 Voltios, mida la capacitancia, la energía almacenada y la carga en las placas
3. suministre un voltaje de -1.2 voltios y mida la capacitancia, la energía almacenada y la carga en las placas. ¿Qué elementos cambian su valor? (la capacitancia, la energía almacenada y la carga )

## Clic en la Ventana del Condensador.

Cuando hace Click en esta ventana se despliega el cuadro de la figura 3.10. Note que esta figura NO es interactiva (No es la simulación), en ella puede observar un condensador del tipo *PPP* conectado a una batería de 1.5 Voltios y dos flechas verdes con las cuales puede cambiar sus dimensiones (tamaño de las placas y distancia entre ellas). Los cuadros de la parte superior permiten cambiar los parámetros de la simulación. Observe la existencia de un voltímetro el cual puede arrastrar y

## 3.5 CUESTIONARIO CAPITULO 3

1. ¿Cuál es la función principal de un condensador (capacitor)?

Generar campo magnético.

Oponerse al paso de la corriente.

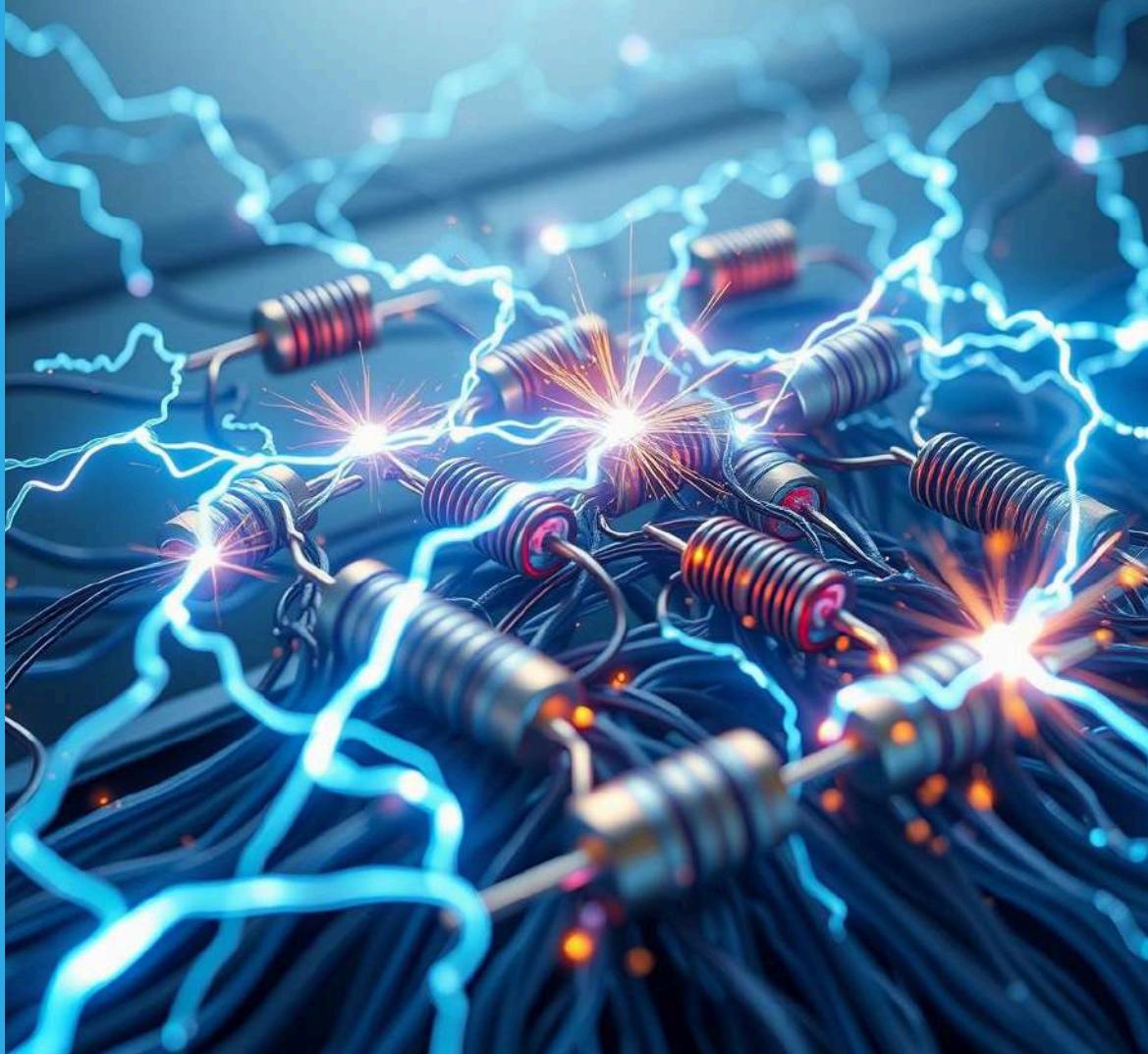
Almacenar cargas y energía eléctrica.

Convertir energía potencial en cinética.

Verificar

**MENOS  
RESISTENCIA,  
MÁS FLUJO**





# Capítulo 4

## CORRIENTE Y RESISTENCIA ELÉCTRICA

## 4.1 CORRIENTE Y RESISTENCIA ELÉCTRICA

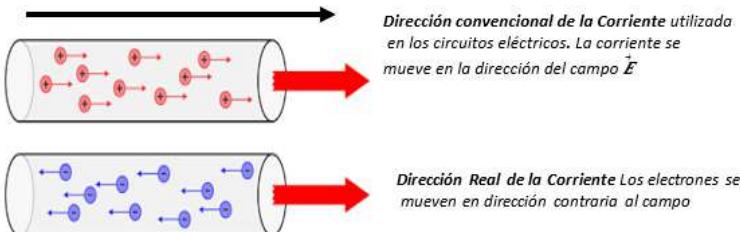


Figura 4.1.

En términos generales y cualitativos, *La corriente eléctrica es carga por unidad de tiempo*, pero debido a que estamos hablando de corrientes eléctricas debemos ser más específicos. Una mejor manera de pensar y entender la corriente eléctrica es imaginar la unidad de carga eléctrica (un Coulomb) como una pequeña esferita. La corriente consiste entonces en contar cuantas esferitas pasan por un punto determinado en un segundo

Cuando se aplica un campo eléctrico  $\vec{E}$  como se muestra en la figura 4.1 los electrones se mueven a la izquierda (flechas azules) al hacerlo, los huecos dejados por los electrones los cuales son positivos por defecto, (flechas rojas) se mueven hacia la derecha.

*El movimiento de los electrones es la dirección real de la corriente*, sin embargo, para poder decir que las corrientes van de los puntos de mayor potencial a los de menor potencial adoptamos la convención según la cual la dirección de la corriente la llevan los portadores de carga positivos (los huecos) tal y como se muestra en la figura (4.1).

Para construir una definición de corriente eléctrica empezamos por escribir en términos matemáticos la idea de lo que es corriente eléctrica (carga por unidad de tiempo)

$$I = \frac{\text{carga}}{\text{tiempo}} = \frac{Q}{t} \quad (4.1)$$

El acto físico de medir la corriente  $I$  consiste en ubicarnos en un punto cualquiera de la longitud del conductor provistos con un cronómetro o cualquier otro medidor de tiempo y contar cuantas esferitas pasan por ese punto en cierto intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Por ejemplo, si en un intervalo de tiempo  $\Delta t = 10$  segundos pasaron 100 esferitas, entonces al aplicar la ecuación (4.1) observamos que :

$$I = \frac{100 \text{coulombs}}{10 \text{segundos}} = 10 \text{Amperios}$$

hemos introducido la unidad de medida llamada Amperio, que se representa con la letra  $A$ . Note que *Un Amperio es igual a un coulomb por segundo*. Esta definición de corriente es apropiada y completa siempre y cuando el número de esferitas que pasen sea el mismo cada segundo, de lo contrario la ecuación (4.1) no es aplicable, en estas situaciones cuando el número de esferitas que pasan es diferente cada segundo (por ejemplo, en el caso de la corriente alterna) definimos la corriente eléctrica como :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (4.2)$$

### Densidad de Corriente Eléctrica

La sección transversal de un condensador puede ser muy grande y por lo tanto existe la posibilidad de tener una corriente distinta para diferentes puntos de la sección transversal del conductor, por ésta razón nos proponemos ahora investigar el comportamiento de la corriente eléctrica a nivel microscópico, para ello debemos calcular la corriente eléctrica que pasa por la unidad de área de una sección transversal del conductor. Consideremos la figura (4.2) donde hemos

Dibujado la sección transversal circular  $\Delta s$  de un cilindro en la parte izquierda de la figura y una sección de longitud  $l$  del mismo cilindro

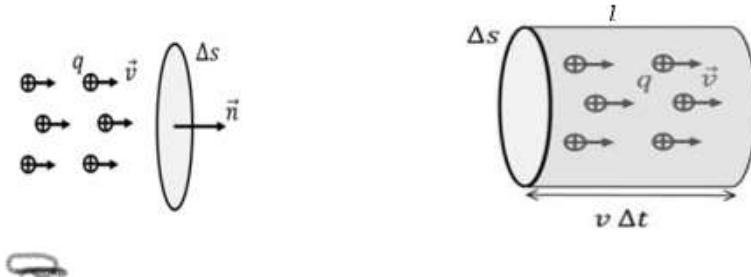


Figura 4.2.

El propósito es contar cuantas esferitas atraviesan  $\Delta S$  en un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Después del intervalo  $\Delta t$  la primera esferita que atravesó  $\Delta S$  ha recorrido una distancia  $l$  con velocidad constante  $v$  y junto con las demás esferitas que vienen detrás forman un cilindro de lado  $l$  como se muestra en lado derecho de la figura (4.2). Si conocemos la densidad volumétrica de las esféricas, es decir, el número de esferitas en la unidad de volumen, podemos calcular la cantidad total de carga  $Q$  contenida en el cilindro de lado  $l$ .

Esta cantidad de carga  $Q$  vendrá dada por

$$Q = nqV$$

Donde  $n$  es el número de esferitas en la unidad de volumen,  $q$  es la carga de cada esferita (hemos dicho que es un coulomb), y  $V$  es el volumen del cilindro, esta expresión la podemos escribir en la forma

$$Q = nqv\Delta t\Delta S \quad (4.3)$$

$\Delta S$  es el área de la sección transversal del cilindro y  $v$  es la llamada *velocidad de arrastre* de las cargas, esta *velocidad de arrastre* es la velocidad promedio común de los electrones en el interior del conductor con la que responden cuando se aplica un campo eléctrico externo.

Hay que decir que  $n$  es un número típico que depende de la naturaleza del conductor, no es el mismo en el metal hierro que en el metal plata o el oro o el cobre etc.

Dividiendo ambos lados de la ecuación (4.3) por  $\Delta t$  obtenemos:

$$I = nqv\Delta S \quad (4.4)$$

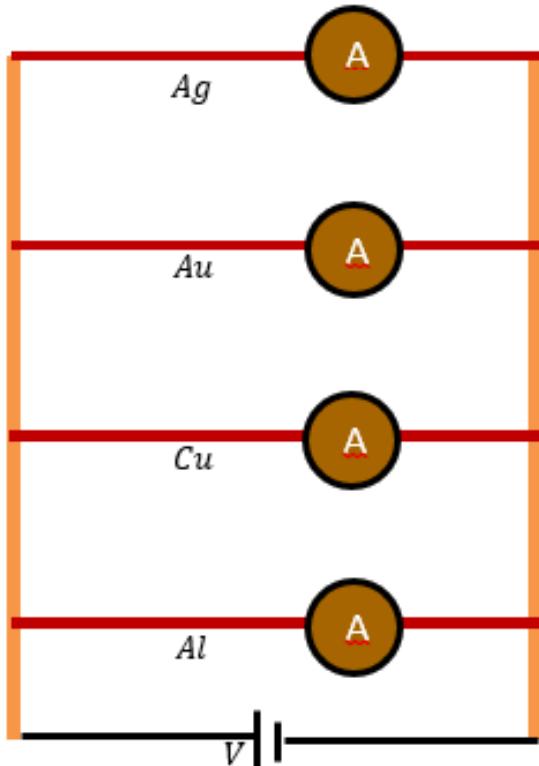


Figura 4.3.

La ecuación (4.4) nos permite introducir una nueva cantidad denominada *densidad de corriente* la cual se acostumbra a representar por la letra  $\vec{J}$ , note que es un vector cuya magnitud la escribimos así:

$$J = nqv \quad (4.5)$$

dado que la definición de  $J$  está en términos de la velocidad de arrastre  $v$ , en general  $\vec{J}$  es un vector que debiéramos escribir:  
 $\vec{J} = nq\vec{v}$ .

La ecuación (4.4) nos proporciona la magnitud de  $\vec{J}$

en términos de las propiedades del medio tales como  $n$ ,  $q$  y  $v$ .

Sustituyendo (4.4) en (4.5) obtenemos una expresión muy significativa para  $I$ :

$$I = J\Delta S \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) nos muestra que  $J$  significa corriente por unidad de área y puesto que el área es un vector como lo es  $\vec{J}$ , podemos escribir (4.6) como:

$$\int dI = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \implies I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (4.7)$$

Lo cual nos dice que *la corriente eléctrica  $I$  es el flujo de la densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$* . Además, si tomamos en cuenta la ecuación (4.5) debemos concluir que  $\vec{J}$  depende del conductor que estemos usando, esto se puede ver conectando en paralelo como en la figura (4.3) varios conductores (por ejemplo, Ag, Au, Cu, Al), los cuatro alambres presentan diferentes densidades volumétricas de esferitas, es decir diferentes valores de  $n$  (Y quizás diferentes velocidades de arrastre  $v$ ). Dado que la conexión es en paralelo, los alambres se hallan conectados al mismo potencial, sin embargo, los amperímetros no miden la misma corriente a través de los cuatro conductores por lo cual debemos concluir que esto se debe a que la densidad de corriente  $J$  es distinta en cada uno dada su dependencia de  $n$  y  $v$  mostrada en la ecuación (4.5).

Las diferentes respuestas observadas para cada alambre se resumen en la ecuación:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (4.8)$$

Donde  $\sigma$  es la conductividad del medio y es una cantidad típica, es decir, *cada conductor tiene un  $\sigma$  característico*

**Ejemplo 1** Suponga que la corriente que pasa por un conductor es una función exponencial del tiempo de la forma  $I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ , donde  $I_0$  es la corriente inicial (en  $t = 0$ ),  $\tau$  es una constante con dimensiones de tiempo. Considere un punto de observación fijo dentro del conductor.

- Cuanta carga  $Q$  pasa por este punto entre  $t = 0$  y  $t = \tau$
- Cuanta carga  $Q$  pasa por este punto entre  $t = 0$  y  $t = \infty$

### Solución

a) Sabemos según la ecuación (4.2) que

$$I = \frac{dq}{dt} \implies dq = Idt \implies dq = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$\int_{q=0}^Q dq = \int_{t=0}^{\tau} I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt$$

$$Q = \tau I_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} - \tau I_0 e^{-\frac{0}{\tau}} \implies \text{👉} Q = \tau I_0 (e - 1)$$

b) La solución aquí tiene el mismo procedimiento que la parte anterior, sólo cambian los límites de integración así que podemos escribir:

$$\text{👉} Q = (\tau I_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}}) \approx I_0 \tau$$

### Ejemplo 2

La figura (4.4) representa un conductor de sección transversal circular no uniforme por el cual se transporta una corriente de 5 amperios. El radio de la sección transversal  $A_1$  es 0.4 cm.

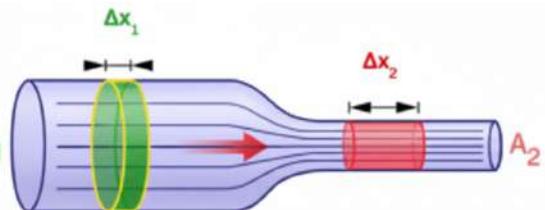


Figura 4.4.

Encuentre :

- a) La magnitud de la densidad de corriente a través de  $S_1$   
 b) Suponga que la densidad de corriente eléctrica a través de  $S_1$  es 4 veces mayor que en  $S_2$ , encuentre el radio de  $S_2$

### Solución

a) De acuerdo con la ecuación (4.7) la corriente eléctrica  $I$  es el flujo de la densidad de corriente  $\vec{J}$ , este flujo es constante a través de cualquier sección transversal, esto lo podemos ver gráficamente en la figura (4.4) en las secciones transversales de color verde y rojo, note que el flujo en la sección transversal verde de área  $A_1$  y longitud  $\Delta x_1$  debe ser el mismo que en la sección transversal roja de área  $A_2$  y longitud  $\Delta x_2$ , es decir, la cantidad de esferitas que atraviesan el área  $A_1$  en la unidad de tiempo con velocidad  $v_1$  es la misma que atraviesan el área  $A_2$  en la unidad de tiempo con velocidad  $v_2$  (Por supuesto que  $v_2 > v_1$ )

En conclusión

$$I_1 = I_2$$

Es decir:

$$J_1 A_1 = J_2 A_2$$

Reemplazando valores y despejando  $J_1$  obtenemos

$$\text{👉 } J_1 = \frac{5}{\pi(4 \times 10^{-3})^2} \quad A/m^2$$

b) Sabemos que

$$J_1 A_1 = J_2 A_2$$

Y dado que nos dicen que

$$J_1 = 4J_2 \implies 4J_2 S_1 = J_2 S_2 \implies 4S_1 = S_2$$

$$4\pi r_1^2 = \pi r_2^2 \implies \text{👉 } r_2 = 2r_1$$

## Resistencia Eléctrica



Figura 4.5.

Usualmente trabajamos en el laboratorio con resistencias predeterminadas, las cuales consisten en un pequeño cilindro hecho de cerámica y dos alambres conductores en los extremos.

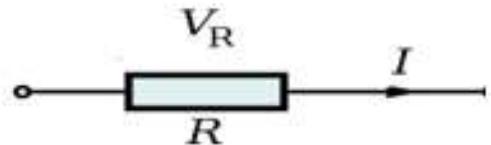
Algunas de éstas resistencias vienen con un código de colores que permiten conocer el valor de la resistencia y que tanto deterioro presenta. Este tipo de resistencia se conectan en un circuito sin importar el orden de los extremos, por ello el valor medio de la resistencia es siempre el mismo pues sólo hay una manera posible de conexión.

En esta sección aprenderemos que *la resistencia eléctrica depende de la geometría del conductor y de cómo se conecta el circuito*, para ello deduciremos primero una expresión matemática general que nos permitirá calcular la resistencia, en cualquier caso



Alambre delgado por el cual fluye una Corriente  $I$ . A la derecha mostramos la sección transversal amplificada del alambre

Figura 4.6.



Consideremos una resistencia conectada por sus extremos a una fuente como se muestra en la figura 4.7, existe una relación entre la corriente  $I$  que atraviesa la resistencia  $R$  y la diferencia de potencial  $V$  medida entre los extremos de la resistencia. Esta relación se llama Ley de Ohm y se escribe

$$V = IR \quad (4.9)$$

Queremos calcular la resistencia eléctrica de la pequeña sección  $dl$  en la figura (4.6) para ello usamos la definición de la densidad de corriente eléctrica por unidad de área

$$J = \frac{I}{A} \quad (4.10)$$

Usando la ecuación (4.8) podemos reescribir (4.10) como

$$\sigma E = \frac{I}{A} \quad (4.11)$$

hemos dejado de lado los símbolos vectoriales para  $E$  y  $A$  porque de acuerdo con la figura (4.6) éstos dos vectores son paralelos. Note que entre los extremos  $a$  y  $b$  del pequeño elemento  $dl$  el campo eléctrico es constante (por ser  $dl$  muy pequeño). Se cumple entonces

$$V_a^b = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b E dl = -El$$

Ahora bien :

$$V_a^b = V_a - V_b = -V \quad (\text{Recuerde que } V_b > V_a)$$

Por lo tanto

$$V_a^b = -V = -El \implies V = El \quad (4.12)$$

La diferencia de potencial  $V$  entre los extremos  $a$  y  $b$  es tan pequeña como lo es  $dl$  de modo que podemos escribir :  $V \rightarrow dV$ . Cuando reescribimos la ecuación (4.12) para el pequeño segmento  $dl$  tenemos

$$dV = Edl \implies E = \frac{dV}{dl} \quad (4.13)$$

reemplazando la ecuación (4.13) en (4.11) tenemos :

$$\sigma \frac{dV}{dl} = \frac{I}{A} \implies dV = I \left( \frac{dl}{\sigma A} \right)$$

Cuando comparamos este resultado con la ecuación (4.9) observamos que la cantidad entre paréntesis debe ser la pequeña resistencia  $dR$  entre los extremos  $ab$  del segmento  $dl$  del alambre, podemos escribir entonces

$$dR = \left( \frac{dl}{\sigma A} \right)$$

Por lo tanto, la resistencia total del alambre entre los extremos 1 y 2 es :

$$R = \int_1^2 \frac{dl}{\sigma A} \quad (4.14)$$

Para el caso particular en que  $A = cte$  obtenemos

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (4.15)$$

Donde  $\rho$  es la llamada resistividad del medio definida como  $\rho = 1/\sigma$

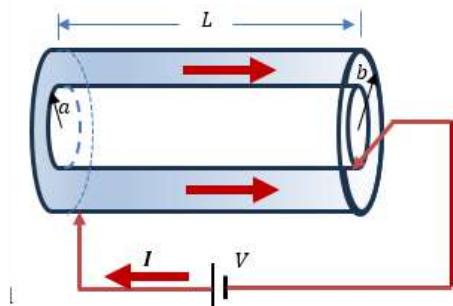


Figura 4.8.

### Ejemplo 1

Considere un cilindro hueco como el de la figura (4.8), de longitud  $L$  con radio interior  $a$  y exterior  $b$ .

Los extremos del cilindro están conectados a una fuente de voltaje  $V$  tal y como se muestra en la figura, es decir, la corriente fluye paralela al eje del cilindro

### Solución

Observando la figura(4.8) notamos que la corriente eléctrica fluye a través de la sección transversal hueca constante de valor  $\pi(b^2 - a^2)$ , por lo tanto, podemos aplicar directamente la ecuación (4.15)

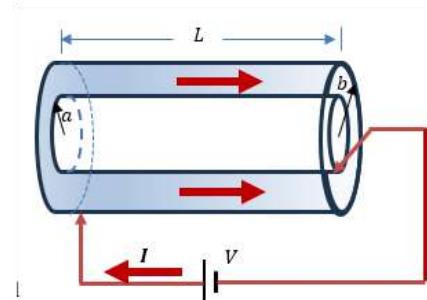
$$\text{👉 } R = \rho \frac{L}{\pi(b^2 - a^2)}$$

### Ejemplo 2

Considere el mismo cilindro anterior, pero con *diferente conexión a la fuente*. Uno de los extremos de la fuente se conecta a la superficie interior del cilindro y el otro extremo a la superficie exterior como se ve en la figura (4.9). Encuentre la resistencia  $R$  para esta conexión

## Solución

Notemos que la conexión ahora genera corrientes eléctricas radiales de adentro hacia afuera, por lo tanto, en la integral (4.14) sustituimos  $dl \rightarrow dr$  y notamos que la corriente atraviesa ahora superficies cilíndricas en su camino hacia la superficie empezando en un cilindro de radio  $a$  y terminando en un cilindro de radio  $b$ , escribimos entonces:



$$R = \int_a^b \frac{dr}{\sigma A} = \frac{1}{\sigma} \int_a^b \frac{dr}{2\pi r L}$$

  $R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Nótese que la resistencia, como se dijo al principio, depende de la conexión con la fuente. El mismo cilindro presenta dos resistencias diferentes según como esté conectado a la fuente

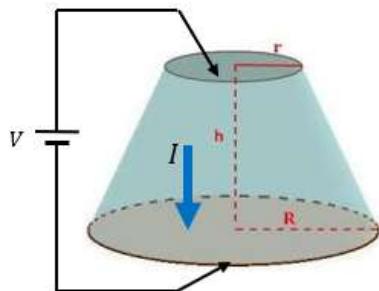


Figura 4.10.

## Ejemplo 3

Se tiene un cono truncado de altura  $h$  y radios  $r$  y  $R$ . El cono se conecta a una fuente de potencia como se muestra en la figura 4.10.

Calcular la resistencia eléctrica del cono dada la conexión mostrada

## Solución

Debido a la conexión con la fuente, la corriente atravesará el cono de arriba hacia abajo como lo muestra la flecha de color azul en la figura (4.10), por lo tanto, nuestro diferencial  $dl$  en la ecuación (4.14) es un incremento diferencial dirigido hacia abajo.

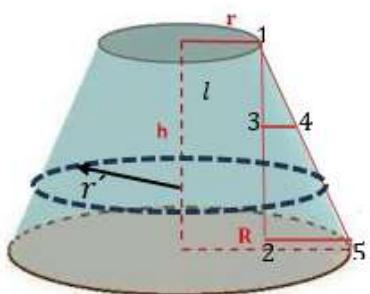


Figura 4.11.

Por otro lado el área que atraviesa la corriente cuando avanza de arriba hacia abajo son círculos de área cada vez mayor, por lo tanto,  $A$  no es una constante y en consecuencia no puede salir de la integral en (4.14) y debemos buscar una relación entre  $dl$  y el radio  $r$ . Para encontrar esta relación dibujamos la línea 1-2 y notamos que los triángulos 134 y 125 son triángulos semejantes (ver Figura 4.11), lo cual nos permite escribir la siguientes relaciones válidas entre los lados de dos triángulos semejantes:

$$\frac{\text{lado}13}{\text{lado}12} = \frac{\text{lado}34}{\text{lado}25} \implies \frac{l}{h} = \frac{r' - r}{R - r} \implies dl = \frac{h dr'}{R - r}$$

Observe que la variable de integración es ahora  $r$ . Usando la relación  $\rho = 1/\sigma$  escribimos :

$$R = \rho \int_R^r \frac{dl}{A} = \rho \int_R^r \frac{1}{\pi r'^2} \times \frac{h dr'}{R - r} = \frac{\rho h}{\pi(R - r)} \int_R^r \frac{dr'}{r'^2}$$

$$R = -\frac{\rho h}{\pi(R - r)} \left( \frac{1}{r'} \right)_R^r = \frac{\rho h}{\pi(R - r)} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) R = \frac{\rho h}{\pi} \left( \frac{1}{rR} \right)$$

👉  $R = \frac{\rho h}{\pi} \left( \frac{1}{rR} \right)$

## 4.2 CUESTIONARIO CAPITULO4

1. ¿Cuál es la definición general y cualitativa de la corriente eléctrica ( $I$ )?

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie.

Carga por unidad de volumen.

Carga por unidad de tiempo.

La diferencia de potencial entre dos puntos.

Verificar





# Capítulo 5

**CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA Y  
LEYES DE KIRCHHOFF**

## 5.1 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA Y LEYES DE KIRCHHOFF

Los circuitos de corriente directa están construidos casi siempre de varias mallas en las cuales se distribuyen resistencias y condensadores de algún tipo, además de otros elementos tales como baterías, inductancias, diodos etc.



Gustav Kirchhoff

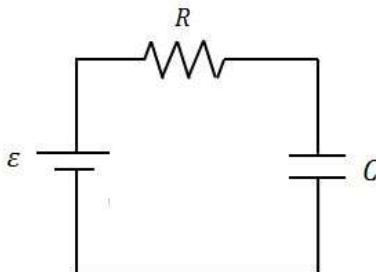


Figura 5.1.

**una malla simple** con solamente una resistencia y un condensador, mientras la figura (5.2) nos muestra un **circuito con varias mallas** en las cuales podemos ver fuentes, resistencias, corrientes e incluso un amperímetro

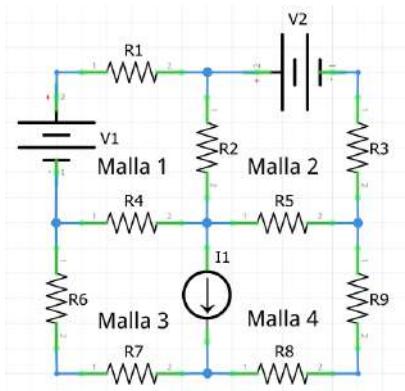


Figura 5.2.

**Que es una malla en circuitos eléctricos ?**  
En circuitos eléctricos, una malla es un bucle cerrado que no contiene otros bucles dentro de sí mismo. Es decir, es un camino continuo y cerrado que puede seguir la corriente, sin cruzar o dividirse en otros caminos cerrados. Una malla es el circuito eléctrico más elemental posible La figura (5.1) nos muestra

**¿Qué significa resolver un circuito?**

Por lo general un circuito se construye con valores conocidos de las resistencias y las fuentes, el problema consiste entonces en calcular las corrientes en el circuito, esto se realiza utilizando dos leyes muy conocidas llamadas las **leyes de Kirchhoff**:

## Leyes de Kirchhoff

1. En un nodo las corrientes que entran son iguales a las corrientes que salen:

$$I_i = I_0 \quad (5.1)$$

2. La suma de las caídas de potencial eléctrico en los elementos de una malla es igual a cero. Es decir

$$\sum_{n=1}^{n=N} V_n = 0 \quad (5.2)$$

Donde  $N$  es el número máximo de elementos del circuito. El siguiente es un procedimiento recomendado – no es el único-para resolver un circuito:

1. Una vez dado el circuito con los elementos que lo componen, buscamos una fuente de izquierda a derecha con el fin de hallar la dirección de la corriente.

2. Conocida la dirección de la corriente la dibujamos sobre todos y cada uno de los elementos del circuito

3. Para cada nodo encontrado escribimos la primera ley de Kirchhoff

4. Contamos el número de mallas que forman el circuito y las etiquetamos, en este curso acostumbramos a utilizar números romanos

5. Dibujamos el sentido en el cual vamos a recorrer o “caminar” la malla y escribimos la segunda ley de Kirchhoff para cada malla.

Este último paso del procedimiento (paso 5) es de suma importancia porque cada término escrito puede ser negativo o positivo lo cual se determina recordando que las corrientes van de los puntos de mayor potencial a los puntos de menor potencial, es decir, cuando estamos caminando una malla y pasamos una resistencia por la cual viene

una corriente en sentido contrario al signo de ese término es positiva, por el contrario, si tiene el mismo sentido es negativo

## Actividad de Simulación – Circuitos

A través de la plataforma de simulación en ciencias Phet desarrollada por la Universidad de Colorado, se realizará una actividad didáctica orientada a la construcción y manipulación de circuitos de corriente directa.

Esta simulación permite construir cualquier circuito de corriente directa para lo cual se dispone de todos los elementos necesarios en la margen izquierda: alambres de conexión, batería, bombilla, interruptor resistencia. Para construir un circuito basta con hacer clic y arrastrar al centro de la pantalla cualquiera de los elementos requeridos y luego unir los extremos de los elementos entre sí.

La opción de desunir la juntura se realiza haciendo clic en la juntura de interés y cortando con la tijera que se despliega en la misma.

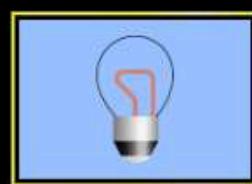
Note que los instrumentos de medida usados en un circuito tales como voltímetro y amperímetro se encuentran en la margen derecha y se activan al hacer clic sobre ellos.

otras lecturas de interés como las resistencias de la batería y los cables usados para conectar los elementos también pueden habilitarse en la margen derecha. Los valores específicos de las resistencias y baterías pueden ser asignados al hacer clic sobre ellos cuando están en el circuito armado (no antes), mediante la manipulación de la barra que aparece en la parte inferior la cual se despliega cuando se hace clic sobre el elemento respectivo

En lo que sigue se realizan varias actividades con las cuales se pretende que el lector adquiera un conocimiento adecuado de circuitos y habilidad y destreza en el manejo de los mismos



## Kit de Construcción de Circuitos: CD



Introducción



Laboratorio

## Actividades

1. Construya un circuito con tres resistencias en serie y mida la resistencia equivalente. Compare el valor mostrado en la simulación con el teórico calculado por usted
2. Construya un circuito con tres resistencias en paralelo y mida la resistencia equivalente. Compare el valor mostrado en la simulación con el teórico calculado por usted
3. Construya el circuito mostrado en la figura (5.3) con los siguientes valores:  $V_0 = 20$  voltios,  $V_1 = 30$  voltios,  $R_1 = 10$  ohmios,  $R_2 = R_3 = 20$  ohmios. Mida los valores para las corrientes eléctricas utilizando la simulación y compare con los valores encontrados por usted. ¿La dirección de las corrientes mostradas por la simulación coincide con las dibujadas?

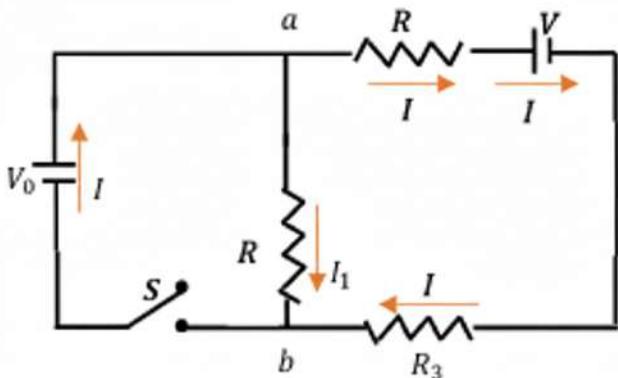


Figura 5.3.

4. Asigne un valor de 200 ohmios a la resistencia  $R_1$ . ¿Qué cambios se observan? Explique
5. Utilizando el circuito construido usando los parámetros del numeral 3, instale una bombilla entre los nodos  $a$  y  $b$  antes o después de  $R_1$  y observe su intensidad
6. Utilizando el circuito construido con los parámetros del numeral 4, instale una bombilla entre los nodos  $a$  y  $b$  antes o después de  $R_1$  y observe su intensidad Explique los cambios observados entre los numerales

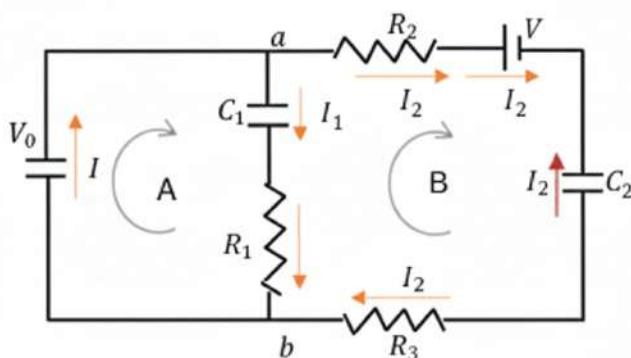


Figura 5.4.

### Ejemplo 1.

El circuito de la figura (5.4) está compuesto por dos mallas, el valor de los potenciales, resistencias y condensadores del circuito se suponen conocidos. Calcular las corrientes eléctricas  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$

### Solución

Procedemos a ubicar la primera fuente que encontramos de izquierda a derecha, es decir,  $V_0$  y luego dibujamos las corrientes, además, nombramos las mallas con las Letras  $A$  y  $B$  el sentido del recorrido en las mallas tal y como lo exige el punto 5 del procedimiento, en este caso hemos escogido el sentido horario a las agujas del reloj. Escribimos entonces las leyes de Kirchhoff  
En el nodo  $a$  se debe cumplir:

$$I = I_1 + I_2 \quad (5.3)$$

En la malla  $A$ :

$$V_0 - \frac{q_1}{C_1} - R_1 I_1 = 0 \quad (5.4)$$

En la malla  $B$

$$-R_2 I_2 - V - \frac{q_2}{C_2} + R_1 I_1 + \frac{q_1}{C_1} - I_2 R_3 = 0 \quad (5.5)$$

Las Ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5) son un sistema de tres ecuaciones algebraicas simultáneas suficientes para encontrar las tres incógnitas  $I$ ,  $I_1$ ,  $I_2$

## 5.2 CARGA Y DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Como ya hemos visto todo condensador en un circuito recibe carga hasta completar su capacidad, es decir hasta quedar totalmente cargado.

Queremos ahora conocer su carga en cualquier instante de tiempo antes de llegar al límite de carga, es decir,

cuando se cierra  $S$  y se establece la corriente, podemos aplicar la segunda de las leyes de Kirchhoff

$$\sum_{n=1}^{n=N} V_n \quad (5.6)$$

Caminando en sentido horario y recordando que  $I = dq/dt$ , escribimos para la malla de la figura (5.5)

$$V - \frac{q}{C} - R \frac{dq}{dt} = 0$$

$$V - \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt}$$

Multiplicando por  $1/R$  y reordenando término obtenemos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{VC}{RC} - \frac{q}{RC}$$

por lo tanto:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{VC}{RC} - \frac{q}{RC}$$

Reorganizando términos:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{RC} (VC - q)$$

Arreglando términos obtenemos finalmente la ecuación diferencial

$$\frac{dq}{(VC - q)} = \frac{dt}{RC} \quad (5.7)$$

Debemos integrar (5.7) teniendo presente que al momento de cerrar el interruptor  $S$  no hay carga en el condensador ( $q = 0$ ) y transcurrido cierto tiempo  $t$  antes de que se complete la carga total en el condensador existirá cierta carga  $q$ .

$$\begin{aligned} \int_0^q \frac{dq}{(VC - q)} &= \int_0^t \frac{dt}{RC} \\ \ln \frac{VC - q}{VC} &= -\frac{t}{RC} \\ \frac{VC - q}{VC} &= e^{-t/RC} \\ \mathbf{\checkmark} q(t) &= VC(1 - e^{-t/RC}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

El producto  $RC$  se llama constante de relajación y tiene unidades de tiempo.

Note que esta ecuación satisface las condiciones físicas de frontera, es decir cuando evaluamos (5.8), En  $t = 0 \Rightarrow q(0) = 0$ , y para  $t \rightarrow \infty$  (o muy grande),  $q(\infty) = VC$ .

Debemos recordar siempre que (5.8) nos permite hallar  $q(t)$  solo durante el tiempo que demora el proceso de carga del condensador

**Descarga de un Condensador** Una vez cargado el condensador en el caso anterior ,abrimos  $S$  y quitamos la fuente, el condensador quedó completamente cargado. Para descargarlo cerramos  $S$  (Fig.5.6). Ahora se establece una corriente a través de la resistencia  $R$ . La ley de mallas de Kirchhoff queda ahora

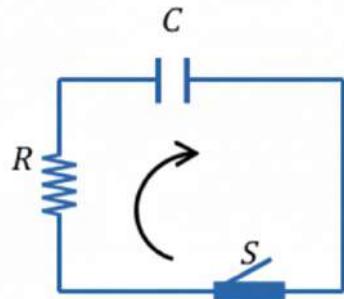


Figura 5.6.

$$-\frac{q}{C} - R \frac{dq}{dt} = 0 \implies \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \implies \int_{VC}^q \frac{dq}{q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

## Actividad de Simulación – Carga y Descarga de un Condensador

Se realizará una actividad didáctica orientada a entender la carga y descarga de un condensador. Este es el mismo entorno mostrado en la simulación de condensadores anterior (Capítulo 4). Note que ahora cuenta con dos interruptores con los cuales puede cargar el condensador (Conectando el condensador a la batería) o descargar el condensador moviendo los interruptores a los terminales de las bombillas. Al igual que en la actividad anterior usted puede medir la diferencia de potencial entre las placas habilitando el voltímetro que aparece en el recuadro a la derecha

## Actividades

1. Manipulando las flechas verdes, construya un condensador con la mínima capacitancia posible permitida por la simulación y conéctelo a la batería.
  2. Descargue el condensador anterior y mida el tiempo que demora la bombilla en apagarse.

3. Manipulando las flechas verdes, construya un condensador con la máxima capacitancia posible permitida por la simulación y conéctelo a la batería

4. Descargue el condensador anterior y mida el tiempo que demora la bombilla en apagarse.

5. Compare los dos tiempos medidos y comente el resultado.

Lab de condensadores: Intro

Condensador

Bombilla

PhET

## Ejercicio

En el circuito de la figura 5.7 el interruptor  $S$ , que ha estado abierto durante mucho tiempo, ( $t \rightarrow \infty$ ) se cierra repentinamente. Determine la constante de tiempo

- a) antes de que el interruptor se cierre
- b) después de que el interruptor ha cerrado.
- c) suponga que el interruptor se cierra en  $t=0$ . Determine la corriente que pasa por el interruptor como una función del tiempo.

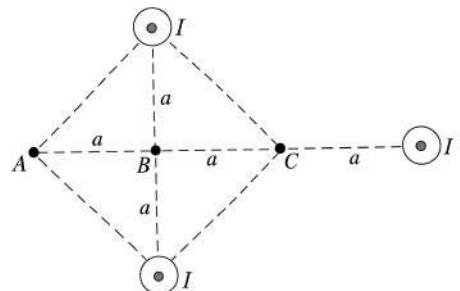


Figura 5.7.

## Solución

a) Puede verse que antes de cerrar  $S$ , las resistencias de  $50\text{k}\Omega$  y  $100\text{K}\Omega$  están conectadas en serie, por lo tanto, su resistencia equivalente será

$$R_e = 50\text{k}\Omega + 100\text{k}\Omega = 150\text{k}\Omega$$

La constante  $\tau = RC$  Será:

$$\tau = (150 \times 10^3 \Omega) \times (10 \times 10^{-6} F) = 1500 \times 10^{-3} S$$

👉  $\tau = 1.5S$

b) Despues de cerrar el  $S$ , las resistencias del circuito quedan en paralelo, entonces la resistencia equivalente del circuito será

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{100} + \frac{1}{50} \implies R_e = 33.33\text{K}\Omega$$

Por lo tanto, la constante de relajación será

$$\tau = R_e C = 33.33 \times 10^3 \times 10^{-6} S = 33.3 \text{ milisegundos}$$

c) Aplicando Kirchhoff en la primera malla obtenemos

$$10 - 50\text{K}\Omega \times I = 0 \implies I = \frac{10}{50 \times 10^3} A$$

## Ejemplo 2

El circuito de la figura (5.8) se ha conectado durante mucho tiempo.

a) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través del capacitor?

b) Si se desconecta la batería, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse hasta la décima parte de su voltaje inicial?

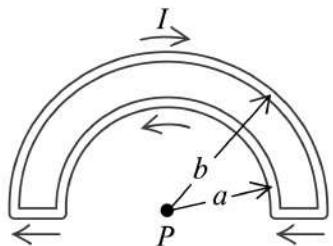


Figura 5.8.

### Solución.

Dado que el circuito ha estado funcionando por largo rato ( $t \rightarrow \infty$ ) debemos suponer que el condensador se cargó completamente. Esto significa que no existe corriente a través del condensador, por lo tanto, lo podemos eliminar del circuito, con lo cual quedan en serie las resistencias de  $1\ \Omega$  y  $4\ \Omega$  (ver figura 5.9), igualmente quedan en serie las de  $8\ \Omega$  y  $2\ \Omega$ .

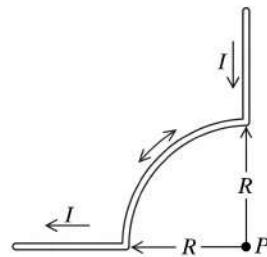


Figura 5.9.

Una vez que el condensador se ha cargado totalmente no cumple ninguna función ya que no permite el paso de corriente, entonces la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$  la podemos encontrar siguiendo cualquiera de los dos caminos  $acb$  o bien  $adb$ . Siguiendo el camino  $adb$  en la figura 5.9 escribimos la segunda de ley de Kirchhoff caminando la celda en el sentido antihorario

$$V_{ab} - 4i_1 + 2i_2 = 0 \quad (5.10)$$

Pero no conocemos  $i_1$ , ni tampoco  $i_2$ , debemos encontrarlas y para eso utilizamos la malla  $ecadf$  y la malla  $ecbdf$

$$\text{Malla } ecadf: 10 - i_1 1 - 4i_1 = 0 \implies i_1 = 2A$$

$$\text{Malla } ecbdf: 10 - 8i_2 - 2i_2 = 0 \implies i_2 = 1A$$

Remplazando estos valores en (5.10) y despejando  $V_{ab}$  obtenemos:

$$V_{ab} = 4 \times 2 - 2 \times 1 \implies V_{ab} = 6V$$

El lector puede verificar que siguiendo el camino  $acb$ , se obtiene el mismo resultado

c)

$$q(t) = CV e^{-t/RC}$$

$$\frac{CV}{10} = CV e^{-t/RC} \implies \frac{1}{10} = e^{-t/RC}$$

$$\ln \frac{1}{10} = \ln(e^{-t/RC}) \implies \ln 1 - \ln 10 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = RC \times (2, 3) \text{ segundos}$$

Para encontrar cuánto vale el producto  $RC$  hallamos la resistencia equivalente de las 4 resistencias que componen el circuito, como se desprecia el capacitor entonces las resistencias de 1 y 4 ohmios nos quedan en serie. Su resistencia equivalente es 5 ohmios. Las resistencias de 8 y 2 ohmios en serie presentan una equivalente de 10 ohmios, entonces el circuito de la figura 5.9 se reduce a la figura 5.10. La resistencia equivalente es 3.3 ohmios, por lo tanto

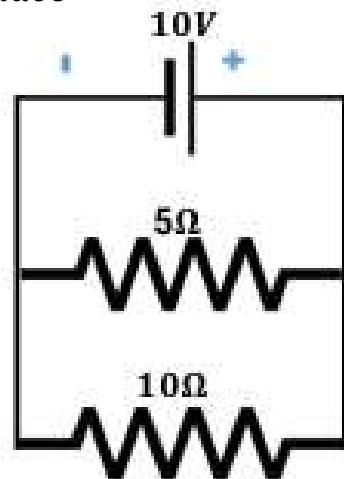


Figura 5.10.

$$\tau = RC_e = 3.3\Omega \times 1\mu F = 33 \times 10^{-7} \text{ segundos}$$

## 5.3 CUESTIONARIO CAPITULO5

1. ¿Qué se entiende por una \*\*malla\*\* en el contexto de los circuitos eléctricos?

Cualquier camino que la corriente pueda tomar.

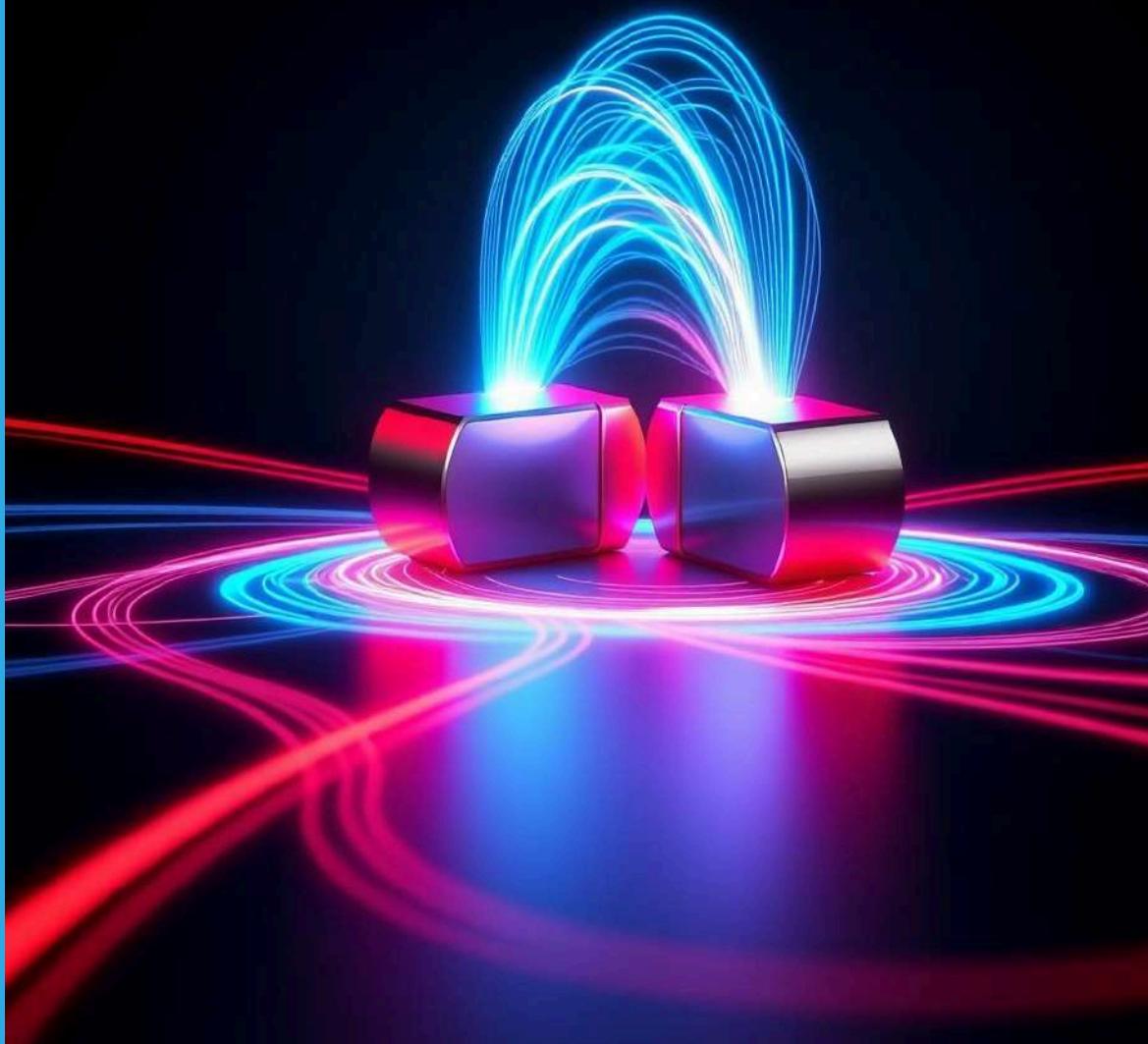
Un bucle cerrado que contiene otros bucles dentro de sí mismo.

Un punto de unión donde se unen dos o más elementos.

Un bucle cerrado que no contiene otros bucles dentro de sí mismo.

Verificar





# Capítulo 6

## LA INTERACCIÓN MAGNÉTICA

## 6.1 EL CAMPO MAGNÉTICO

Queremos investigar en lo que sigue sobre el otro campo presente en la teoría electromagnética, es el llamado campo magnético denominado por la letra  $\vec{B}$ . Tenemos claro que la causa directa de su existencia es el movimiento de las cargas eléctricas, es decir, las corrientes eléctricas. A diferencia del campo eléctrico  $\vec{E}$ , cuya existencia es debida a la carga eléctrica, el campo magnético requiere que la carga se ponga en movimiento para poder existir

*resumiendo, diremos entonces que la fuente de los campos magnéticos son las corrientes eléctricas y por lo tanto donde quiera que hay corriente eléctrica, hay campo magnético.* Cuál es la dirección del vector campo  $\vec{B}$ ? La dirección del campo magnético se establece apuntando el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección que avanza la corriente y cerrando los dedos. El campo  $\vec{B}$  serán círculos concéntricos en la dirección que apuntan los dedos de la mano derecha como se ve en la figura 6.1. En lo que sigue nos proponemos calcular el campo magnético producido por una corriente eléctrica.

## 6.2 LEY DE BIOT-SAVART

Consideremos un alambre cualquiera que transporta una corriente  $I$ . El propósito es hallar el campo magnético  $\vec{B}$  en el punto  $P$  creado por la corriente  $I$  que lleva el alambre de longitud  $AB$ . Procedemos a escoger un pequeño elemento de longitud del alambre el cual denotamos por  $dl$  (ver figura 6.2) y desde aquí trazamos la distancia  $r$  al punto  $P$ , luego dibujamos el vector unitario  $\hat{u}_T$  tangente al elemento  $dl$  y el vector unitario  $\hat{u}_r$  a lo largo de la distancia  $r$  y dirigido hacia el punto  $P$ .

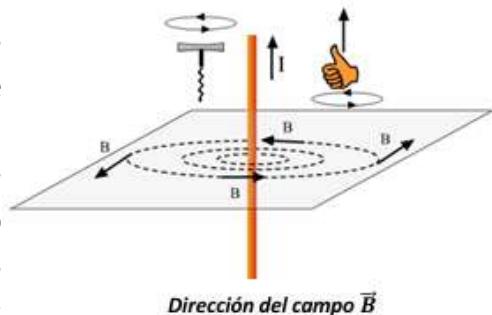
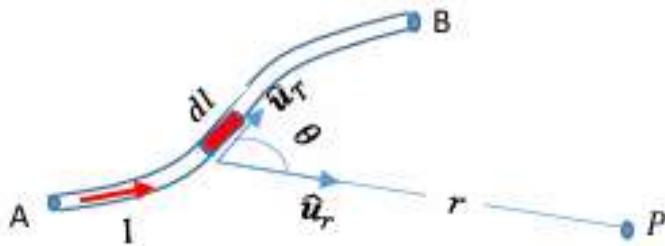


Figura 6.1.



*El campo magnético producido en P por el alambre AB. Las unidades de B son Teslas*

Figura 6.2.

Escribimos la ley de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_t \times \hat{u}_r}{r^2} dl \quad (6.1)$$

La ecuación (6.1) nos dice que la corriente contenida en el elemento  $dl$  produce en  $P$  un campo muy pequeño dado por (6.1) y entrando al plano de la hoja según las reglas de la mano derecha. El campo total producido en  $P$  será entonces la suma de todos los campos producidos por todos los elementos de corriente  $Idl$ , es decir,

$$\vec{B} = \int_A^B \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_t \times \hat{u}_r}{r^2} dl \quad (6.2)$$

Las unidades del campo magnético en el Sistema internacional de medidas es el Tesla (T) y  $\mu_0$  es la permitividad del espacio libre vacío cuyo valor exacto es  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} T/mA$ . Note algo interesante y curioso: *debido al producto vectorial  $\hat{u}_t \times \hat{u}_r$ , no se genera campo magnético en la dirección de avance de la corriente ( $\theta=0$ )*

### Ejemplo 1.

Considere un alambre muy largo que lleva una corriente  $I$ . Calcule El campo magnético en un punto ubicado a una distancia  $R$  del alambre

**Solución.** Escogemos el elemento diferencial  $dl$  y trazamos la distancia  $r$  al punto  $P$  donde vamos a calcular el campo  $\vec{B}$  dado por

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_t \times \hat{u}_r}{r^2} dl$$

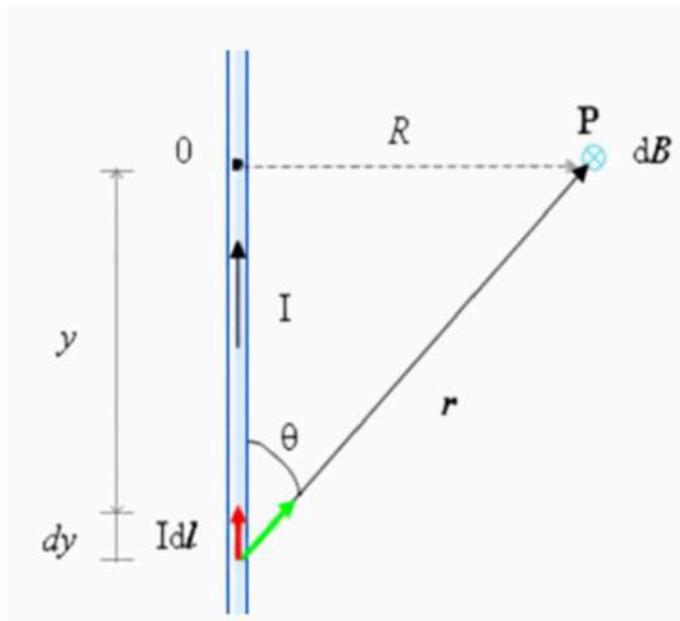


Figura 6.3.

(6.3)

Note que en la figura 6.3 hemos dibujado los vectores unitarios con colores diferentes: rojo ( $\hat{u}_t$ ) para el vector unitario tangente y verde para ( $\hat{u}_r$ ) para el vector unitario en la dirección de  $r$ . Desarrollando el producto vectorial entre estos dos vectores (6.3) nos queda

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\sin\theta)\hat{u}_e}{r^2} dl \quad (6.4)$$

$\hat{u}_e$ , es el vector unitario entrando que resulta de ejecutar el producto vectorial  $\hat{u}_t \times \hat{u}_r$  y  $\theta$  es el ángulo entre ellos, notemos además que todo elemento de corriente  $Idl$  del alambre crea un campo  $d\vec{B}$  entrando en el plano de la hoja en el punto  $P$ . La integral en (6.4) no

tiene límites de integración todavía, ello se debe a que el integrando se halla en términos de tres variables:  $r, \theta$  y  $l$ , para poder integrar debemos escoger la variable más conveniente.

El criterio de conveniencia más utilizado son los límites de integración, si escogemos  $r$  ó  $l$  nos resultarían integrales con límites entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , estas integrales llamadas impropias son a veces muy laboriosas para calcular, en cambio sí escogemos la variable  $\theta$ , los límites van desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi$ , o bien podemos ir desde  $\theta = 0$  hasta  $\theta = \pi/2$  y multiplicamos por 2

Una vez que hemos escogido la variable  $\theta$ , debemos escribir a  $r$  y  $l$  como función de  $\theta$ . Note de la figura (6.3) que  $dl \rightarrow dy$  y además

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{R}{r} \implies r = R \csc\theta \\ \implies r^2 &= R^2 (\csc^2\theta) \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cot}\theta &= \frac{y}{R} \implies y = R \operatorname{cot}\theta \\ \implies dy &= R \csc^2\theta d\theta \end{aligned} \tag{6.6}$$

Remplazando (5) y (6) en (4) obtenemos -dejando de lado la etiqueta vectorial-

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\operatorname{sen}\theta) \hat{u}_e R \csc^2\theta d\theta}{R^2 (\csc^2\theta)} dl \times 2$$

$$\frac{2\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\cos\theta)_0^{\pi/2}$$

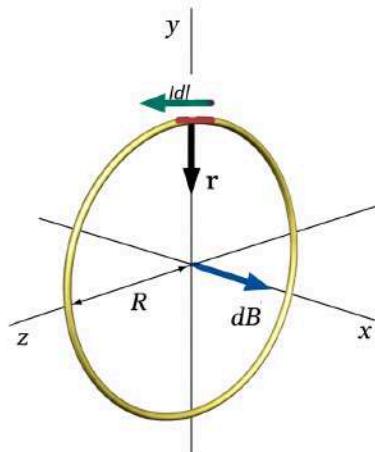
$$\text{👉 } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} R$$

## Ejemplo 2.

Se tiene una corriente eléctrica  $I$  circulando en el anillo de radio  $R$ . Calcular el campo magnético que produce la corriente  $I$  en el centro del círculo de radio  $R$

### Solución

Podemos notar del enunciado y la figura (6.4) que los vectores unitarios  $\hat{u}_t$  y  $\hat{u}_r$  son perpendiculares, entonces el producto vectorial  $\hat{u}_t \times \hat{u}_r = \hat{u}_x$  nos queda



El producto de los vectores unitarios unitarios  $\hat{u}_t$  y  $\hat{u}_r$ , producen  $\hat{u}_x$ , note que en este caso  $r \rightarrow R$

Figura 6.4.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\hat{u}_x}{r^2} dl \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \times 2\pi R \hat{u}_x$$

👉  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{u}_x$

## Ejemplo 3.

Calcular el campo magnético producido por una corriente  $I$  que fluye por un círculo de radio  $R$  en un punto  $P$  ubicado a una distancia  $z$  del centro del círculo.

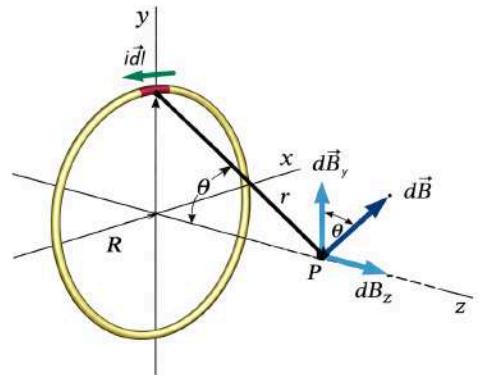
**Solución.** Escogemos el elemento de corriente  $Idl$  y trazamos la distancia  $r$  del elemento al punto  $P$ . El vector  $\vec{B}$  creado en  $P$  por este pequeño elemento  $Idl$  es inclinado en un ángulo  $\theta$  con respecto a

una perpendicular al eje  $z$  y lo mismo ocurre con todo los  $\vec{B}$  creados por cualquier otro elemento de corriente del círculo (ver figura 6.5), por lo tanto debemos tener cuidado cuando queremos sumar todas las contribuciones  $d\vec{B}$  producidas en  $P$  porque no son paralelas y como ya sabemos sumar (o sea integrar) infinitos vectores no paralelos es algo tedioso y puede llegar a ser muy complicado.

El campo  $d\vec{B}$  producido en  $P$  tiene dos componentes rectangulares  $dB_y$  y  $dB_z$ .

Notemos además que simétricamente opuesto en la parte inferior del círculo existe un elemento  $Idl$  idéntico que crea en  $P$  un campo  $d\vec{B}$  el cual tiene también dos componentes rectangulares  $d\vec{B}_y$  y  $d\vec{B}_z$  (ver fig 6.6).

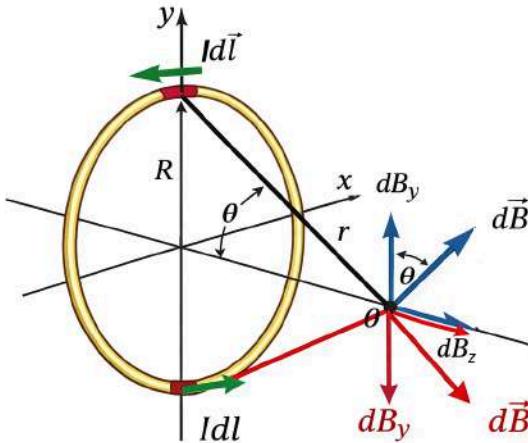
Las componentes verticales  $d\vec{B}_y$  y  $d\vec{B}_y$  se anulan de modo que la suma de las contribuciones de los elementos  $Idl$  simétricamente opuestos es simplemente la suma de las componentes  $dB_z$ , este análisis se puede aplicar a todos los elementos de corriente  $Idl$  del círculo con lo cual concluimos que



El vector  $d\vec{B}$  mostrado es el resultado del producto vectorial  $\hat{\mathbf{u}}_T \times \hat{\mathbf{u}}_r$  y tiene dos componentes rectangulares  $dB_y$ , perpendiculares al eje  $z$  y  $dB_z$  paralelo al mismo

Figura 6.5.

$$\vec{B} = \int dB_z \quad (6.7)$$



Las componentes perpendiculares al eje  $z$  se anulan

pero note que:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_t \times \hat{u}_r}{r^2} dl \\ &= \frac{\mu_0 I (1)(1) \operatorname{sen}\pi/2}{4\pi} \frac{\hat{u}_z}{r^2} dl \\ &= \frac{\mu_0 I (1)(1)(1)}{4\pi} \frac{\hat{u}_z}{r^2} dl \end{aligned}$$

Figura 6.6.

por lo tanto, para hallar el campo total producido en el punto  $P$  sumamos la magnitud de todas las componentes  $z$  del campo encontradas antes. Note que la distancia  $r$  y el ángulo  $\theta$  son constantes y pueden salir de la integral. Reemplazando en (6.7) obtenemos:

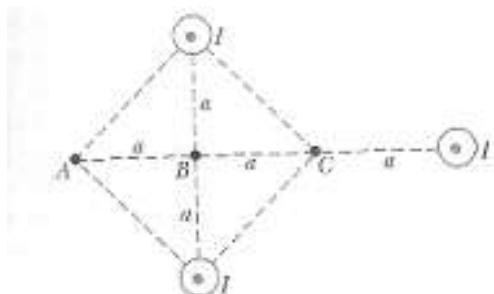
$$\vec{B} = \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2} \int dl$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2} 2\pi R$$

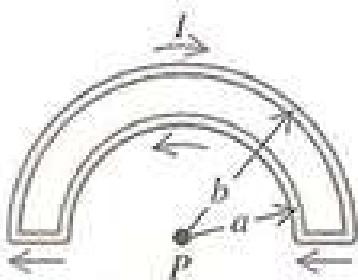
Observando de la figura que  $r^2 = R^2 + z^2$  y además  $\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{r}$  podemos finalmente escribir :

👉  $B = \frac{\mu_0 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$

## Ejercicios propuestos



1. Tres conductores muy largos portando cada uno una corriente de  $2A$  salen perpendicularmente al plano de la página. Asumiendo que  $a = 1\text{cm}$ , encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en los puntos  $A, B, C$



2. Un alambre en forma de semicírculo doble lleva una corriente de 4 amperios. El radio interior es  $a$  y el exterior es  $b$ .  
Calcular: El campo magnético producido por la corriente en el punto  $P$



3. La Corriente eléctrica en la figura de izquierda es de 5 amperios. Calcule el campo magnético producido por esta corriente en el punto  $P$ .

## 6.3 LEY DE AMPERE

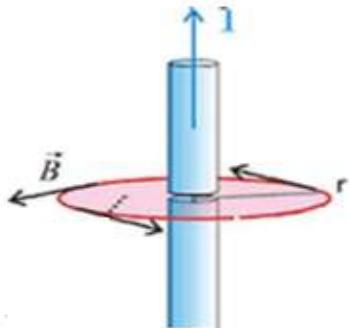


Figura 6.7.

André-Marie Ampere un excelente físico y matemático Francés encontró en 1831, otra manera de calcular el campo magnético la cual es hoy conocida como la ley de ampere.

Esta ley es el equivalente a la ley de Gauss para calcular campo eléctrico y aunque es una ley válida en cualquier situación sólo es de gran utilidad si existe simetría en el problema. Matemáticamente

se enuncia de la siguiente manera

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n \quad (6.8)$$

Ocurre algo interesante en la aplicación de la ley de Ampere y es que tenemos la libertad para escoger la dirección del diferencial  $d\vec{l}$  por ello escogemos siempre a  $d\vec{l}$  paralelo al campo  $\vec{B}$  de modo que (6.8) también se puede escribir:

$$B 2\pi r = \mu_0 I_n \quad (6.9)$$

Como podemos ver La ley de Ampere sirve para medir el campo magnético para cualquier ruta de circuito cerrado siempre que haya simetría. La simetría nos garantiza el mismo valor de magnitud para  $\vec{B}$  en todos los puntos del circuito para que podamos sacar la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$  debajo de la integral, notemos que

podemos leer la ley de Ampere de la siguiente manera: “**la suma de los productos en la dirección del elemento de longitud es igual a la permeabilidad magnética  $\mu_0$  por la corriente neta  $I$  que atraviesa el área encerrada por la trayectoria cerrada**” Nótese que el enunciado describe trayectorias cerradas no necesariamente circulares

## Ejemplo 1

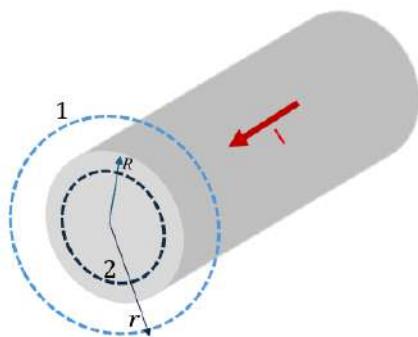


Figura 6.8.

El cilindro de la figura (6.8) tiene radio  $R$  y lleva una corriente  $I$ , calcular el campo magnético  $\vec{B}$  en las regiones  $r < R$  y  $r > R$

**Solución.**

1.  $r < R$

dibujamos un círculo (círculo 2 negro) como se muestra en la figura (6.8) y escribimos

$$B2\pi r = \mu_0 I_n \quad (6.10)$$

No debemos olvidar que la corriente neta  $I_n$  es la corriente que atraviesa el área del círculo 2, el cual tiene un radio cualquiera  $r < R$ , esta corriente es distinta a la corriente total  $I$  que va por el alambre. La corriente neta  $I_n = J\Delta S$ , donde  $J$  es la densidad de corriente eléctrica está definida por la ecuación (4.6) del capítulo 4 y  $\Delta S$  es el área atravesada por la corriente en este caso el área del círculo 2. Debemos entonces encontrar  $J$

$$J = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{I_n}{\pi r^2} \implies I_n = \frac{r^2}{R^2} \quad (6.11)$$

Reemplazando (6.11) en (6.10) obtenemos para la magnitud de  $B$ :

$$B = \frac{\mu_0 r^2}{R^2} I \quad r < R \quad (6.12)$$

## 2. Para $r > R$

Dibujamos ahora el círculo 1 (color azul) de radio  $r$  y notamos que la corriente atravesando el área del círculo 1 es la corriente total  $I$ .

$$B 2\pi r = \mu_0 I_n \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad R > r \quad (6.13)$$

## Ejemplo 2

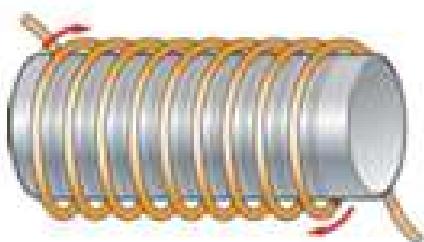


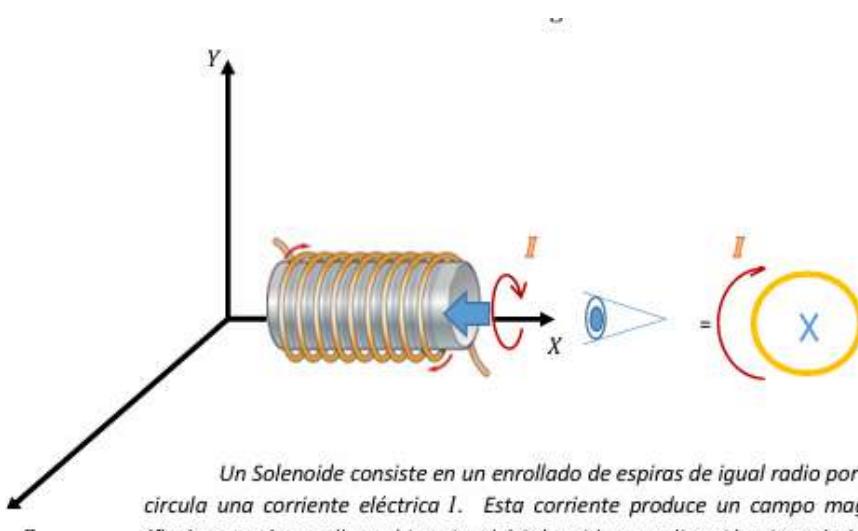
Figura 6.9.

Se tiene un solenoide (o bobina) muy largo de longitud  $L$  y diámetro  $D$  como el que se muestra en la figura. La bobina tiene  $N$  vueltas (o espiras) y por ella circula una corriente  $I$  como se muestra en la figura (6.9). Utilice la ley de ampere para:

- Calcular el campo magnético dentro y fuera de la espira.
- ¿Qué dirección tiene el campo creado por la bobina?

### Solución

Las espiras que componen el solenoide llevan una corriente eléctrica en el sentido horario como se muestra en la figura (6.10). Esta corriente produce un campo magnético paralelo al eje  $X$  que va de derecha a izquierda (ver figura 6.10)



Un Solenoide consiste en un enrollado de espiras de igual radio por el cual circula una corriente eléctrica  $I$ . Esta corriente produce un campo magnético (flecha en color azul) en el interior del Solenoide cuya dirección viene dada por la regla de la mano derecha (coloque el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección que avanza la corriente y cierre los dedos)

Figura 6.10.

Esta corriente produce un campo magnético paralelo al eje  $X$  que va de derecha a izquierda.

Dividimos ahora el solenoide en dos secciones longitudinales a lo largo del eje de las  $X$ . Las dos mitades separadas se ven a la derecha. Escogemos la mitad izquierda del solenoide (los semi aros a la izquierda del plano) y notemos que la corriente que circula en el sentido horario se observa saliendo por el extremo superior del semianillo y entrando por la parte inferior (Figura 6.11). Utilizamos ahora esta mitad izquierda para calcular el campo magnético mediante la ley de Ampere. Primero calculamos el campo magnético fuera del solenoide, Escribimos:

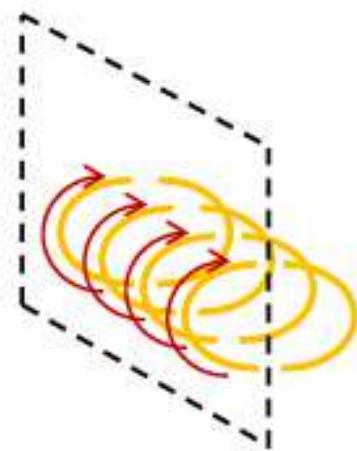
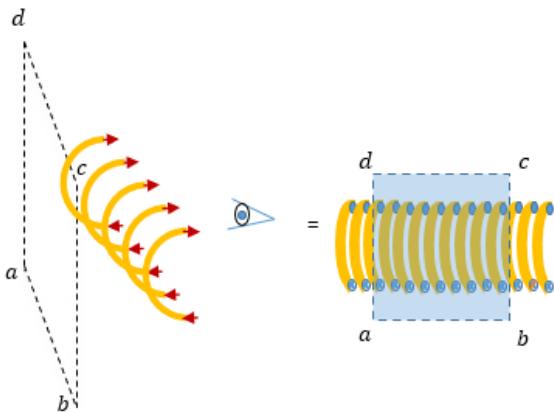


Figura 6.11.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n \quad (6.14)$$



Vista frontal de La mitad izquierda del solenoide la corriente sale del plano de la hoja por la parte superior de las espiras y entra por la parte inferior, el "número de medias espiras" encerradas por la amperiana abcd es  $N$

La corriente neta que aparece en la ecuación (6.14) vale cero pues la corriente que atraviesa el área saliendo del plano (sale del plano de la hoja hacia nuestros ojos) es igual a la que entra al plano de la hoja. La ecuación (6.14) nos queda entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Figura 6.12.

$$B = 0 \quad (6.15)$$

**Es decir, el campo magnético en el exterior de un solenoide vale cero**

**Campo en el interior del Solenoide.** Ahora escogemos nuestra amperiana como se muestra en la figura (6.12), escribimos:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n$ , nuestra trayectoria tiene cuatro segmentos, pero ya hemos demostrado antes que el campo en el exterior vale cero por lo tanto escribimos solo tres integrales

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n$$

Las dos últimas integrales valen cero porque la dirección del campo  $\vec{B}$  y la dirección  $d\vec{l}$  son perpendiculares, entonces

$$Bl = \mu_0 NI \implies \boxed{B = \mu_0 nI} \quad (6.16)$$

Donde  $n=N/l$  es la densidad de espiras por unidad de longitud

**Resumen y conclusiones** Existen dos modos de calcular el campo magnético, **la ley de Biot – Savart** y **la ley de ampere**, la ley de Biot-Savart es una simple integral. Cualquier estudiante que pueda realizar una integral y conozca el producto vectorial entre dos vectores puede calcular el campo magnético producido por una corriente, esta es una ley general sin restricción alguna que siempre se puede aplicar. La ley de Ampere en cambio es un camino corto para encontrar el campo magnético, pero requiere de simetría (por lo general simetrías cilíndricas), puede afirmarse que es el *equivalente de la ley de gauss* que nos resultó muy práctica para calcular campos eléctricos

**Ejercicios Propuestos 1.** En la figura de la derecha se tiene un cable coaxial, el alambre interno tiene radio  $a$  y lleva una corriente  $i$  hacia la derecha. El cable externo tiene radio interior  $b$  y exterior  $c$ , y lleva Una corriente  $2i$  hacia la izquierda. Dibuje y calcule el campo magnético creado por las corrientes en las regiones:

- i)  $r < a$       2i).  $b < r < c$       3i).  $r > c$

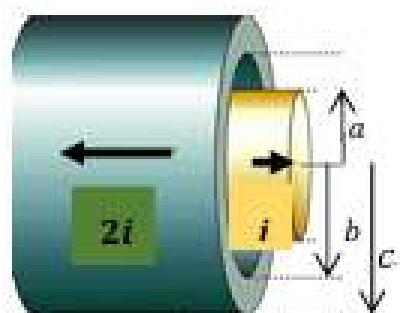


Figura 6.13.

**Nota:** recuerde que la densidad de corriente eléctrica viene dada por  $\vec{J} = i/A$

**2.** Una corriente de 10 amperios viaja por un alambre cilíndrico muy largo de radio  $R = 0.5m$ . Calcular el flujo del campo magnético creado por la corriente a través de la superficie rectangular mostrada (sombreada)

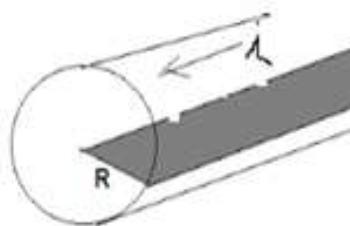


Figura 6.14.

## 6.4 LEY DE AMPERE -MAXWELL

La ley de Ampere expresada por la ecuación 6.8 o equivalentemente la 6.9 es válida para cualquier trayectoria cerrada alrededor de la corriente sin importar su forma geométrica específica siempre y cuando la corriente eléctrica sea constante en el tiempo.

Hemos dicho sin embargo que si queremos utilizar esta ley para calcular campos magnéticos debemos escoger la simetría apropiada según sea el caso. La condición de corrientes constantes limita la aplicación y utilización de la ley de Ampere a situaciones estacionarias excluyendo por lo tanto los campos dependientes del tiempo  $\vec{E}(t)$  y  $\vec{B}(t)$ . Esta limitación permaneció sin resolver durante casi 20 años y no sabemos con certeza si Ampere, quien murió en 1836, abordó o intentó resolver el problema, en todo caso solo hasta 1855 Maxwell propone la solución cuando publica un artículo titulado "On Faraday Lines of Force" basado en una analogía con la hidrodinámica donde relaciona campos magnéticos con las corrientes eléctricas que los producen. En lo que sigue a continuación trataremos de explicar en detalle la limitación de la ley original de ampere y la propuesta de Maxwell para resolver esta limitación

Placas del Condensador

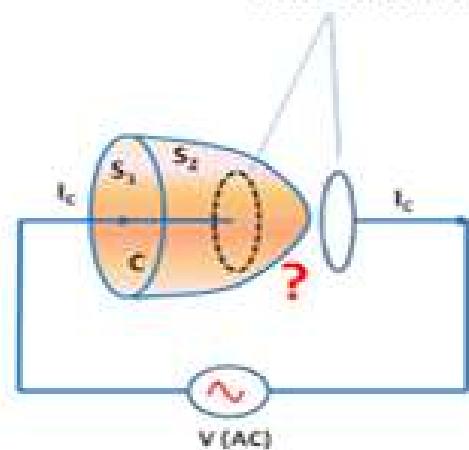


Figura 6.15.

1. El problema que presenta la ley original de Ampere.

Empezaremos por escribir la ley de Ampere en su forma original

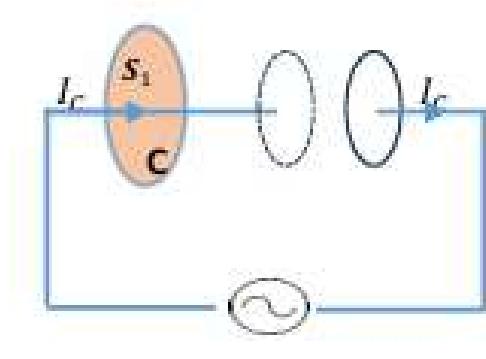
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_n$$

La cual podemos deletrear del siguiente modo : " **La integral o suma a lo largo de una línea cerrada de los productos  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  tiene siempre el valor  $\mu_0 I_n$** "

$I_n$  es la corriente neta que atraviesa el **área limitada por la línea cerrada**. En esta última frase que hemos escrito en color rojo hemos señalado donde está el problema

veamos: la línea cerrada o en forma de circulo (que llamaremos **C**) de color azul (No la que corresponde al circuito) puede limitar dos superficies distintas según decidamos: La superficie  $\vec{S}_1$  o la superficie  $\vec{S}_2$ , esto puede verse claramente si notamos que cualquier superficie está limitada por una línea cerrada -que en nuestro caso es la línea circular **C**- la cual puede contener la superficie coplanar es decir la superficie circular contenida o limitada por **C** que hemos llamado  $\vec{S}_1$  o la superficie en forma de obloide que hemos llamado  $\vec{S}_2$ . En general la línea **C** puede limitar infinito número de superficies, aquí nos enfocaremos sólo en las dos superficies dibujadas : $\vec{S}_1$  (el circulo) y  $\vec{S}_2$  (el obloide)

### Caso1



**C** limita la superficie  $\vec{S}_1$ , entonces la corriente de conducción  $I_C$  atraviesa la superficie  $\vec{S}_1$  y la ley de Ampere se escribe

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C$$

Figura 6.16.  
Por lo tanto, existe un campo magnético  $B$  alrededor del alambre con valor de

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Donde  $r$  es el radio del círculo definido por la línea que encierra o limita la superficie  $\vec{S}_2$

## Caso2

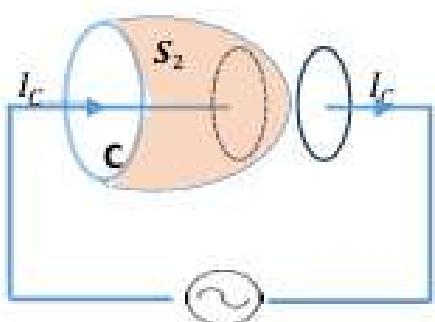


Figura 6.17.

$C$  limita la superficie  $\vec{S}_2$ , entonces la corriente de conducción  $I_C$  **NO atraviesa la superficie  $\vec{S}_2$  porque no existe corriente de conducción entre las placas de un condensador**. En éste caso la ley de Ampere se escribe

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Esto nos dice que no existe campo magnético alrededor del alambre, por lo tanto, tenemos una contradicción: aunque se trata del mismo circuito, estamos obteniendo dos resultados diferentes. Esto no ocurre con una fuente de corriente directa porque las corrientes generadas por estas fuentes son constantes y se detienen una vez que el condensador se carga completamente ( $I = 0 \Rightarrow B = 0$ ), mientras que las fuentes de corriente alterna cargan y descargan el condensador continuamente y, por lo tanto, la corriente  $I(t)$  nunca deja de existir ni tampoco el campo magnético  $\vec{B}$

**La propuesta de Maxwell.** Maxwell resuelve este problema postulando un término adicional al lado derecho de la ley de Ampere, que incluye un factor llamado corriente de desplazamiento  $I_D$  definido como:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (6.17)$$

La ley de Ampere Modificada por Maxwell (ley de Ampere-Maxwell) se escribe entonces :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_C + I_D) \quad (6.18)$$

Recordemos que  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del espacio libre y  $\Phi_E$  es el conocido flujo eléctrico a través de la superficie limitada por la trayectoria de integración (la línea cerrada  $C$ )

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (6.19)$$

Conforme el capacitor se carga (o descarga), el campo eléctrico cambiante entre las placas puede considerarse equivalente a una corriente que actúa como una continuación de la corriente de conducción en el alambre, veámoslo:

La ecuación (6.17) se puede escribir:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

Note que la superficie  $S$  es el área de la placa del condensador, es decir,  $\vec{S} = \vec{A}$  porque es allí donde existe el campo eléctrico  $E$  (ver figura 6.18) y el ángulo  $\theta$  es cero grados, podemos escribir entonces:

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (EA) \quad (6.20)$$

Pero el campo eléctrico entre las placas de un condensador de placas planas paralelas (PPP) viene dado por  $E = \sigma/\epsilon_0$  por lo tanto (6.20) nos queda

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d}{dt} (EA) = \frac{d}{dt} (\sigma A) = \frac{d}{dt} (q) = I_C \quad (6.21)$$

Es decir, La corriente de desplazamiento resulta ser la misma que la corriente de conducción. La ley de Ampere-Maxwell se escribe

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_C + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_E \quad (6.22)$$

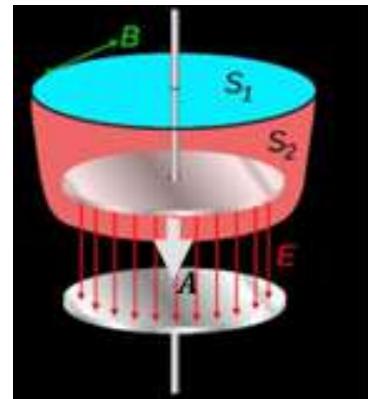


Figura 6.18.

## 6.5 MOVIMIENTOS DE CARGAS ELÉCTRICAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO

### La Fuerza de Lorentz

Las cargas eléctricas reaccionan a los campos magnéticos según la velocidad con que ingresen al campo magnético, debemos aclarar que solo hay reacción o respuesta si la carga está en movimiento en el interior del campo, es decir, cualquier carga eléctrica en reposo en el interior del campo no experimenta ninguna fuerza sobre ella, en cambio toda carga  $q$  en movimiento experimentará una fuerza según sea la dirección relativa entre la velocidad  $\vec{v}_q$  de la carga con el campo magnético  $\vec{B}$ .

A continuación describimos lo afirmado antes:

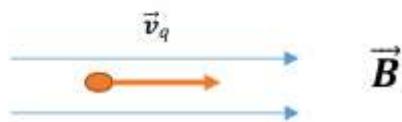


Figura 6.19.

#### Escenario 1:

La carga  $q$  se mueve con velocidad *paralela o antiparalela* al campo  $\vec{B}$ . La fuerza sobre la carga es cero, de modo que la carga no altera su trayectoria

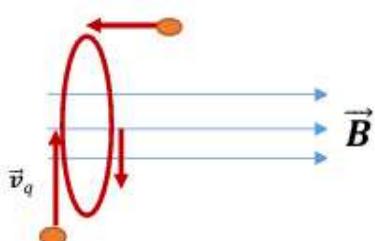


Figura 6.20.

#### Escenario 2:

La carga  $q$  se mueve con velocidad  $\vec{v}_q$  *perpendicular* al campo  $\vec{B}$ , la carga describe una órbita circular, de modo que la fuerza que actúa sobre la carga es centrípeta.

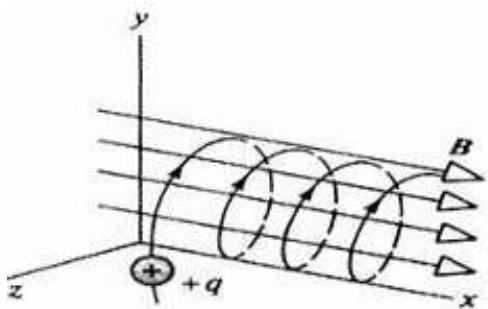


Figura 6.21.

Escenario 3:  
 La carga  $q$  ingresa con velocidad  $v_q$  formando un ángulo  $\theta$  con la dirección del campo  $\vec{B}$ , la carga describe una órbita circular y además deriva a lo largo de la dirección de entrada. La fuerza sobre la carga es una fuerza centrípeta debido a la componente perpendicular  $\vec{v}_p$  al campo, pero la carga deriva a la derecha debido a la componente de velocidad longitudinal  $\vec{v}_l$  paralela al campo. Necesitamos una expresión matemática para la fuerza sobre la carga capaz de explicar cada uno de los tres escenarios mostrados arriba. La expresión matemática más adecuada resultó ser un producto vectorial entre la velocidad de la carga y el campo magnético, fue encontrada y propuesta por el físico Holandés Hendrick Antón Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.23)$$

Esta expresión es válida para la fuerza que un campo magnético ejerce sobre una sola carga, nótese que reproduce todos los escenarios mostrados, incluyendo el caso cuando  $\vec{v} = 0$ . Cuando la velocidad no es cero, la carga ingresa a la región de campo magnético como un vector cualquiera, podemos entonces descomponerla en sus dos componentes rectangulares, una de las componentes en la dirección del campo que llamaremos componente longitudinal y la otra en la dirección perpendicular a la dirección del campo magnético, que llamaremos la componente perpendicular, la fuerza magnética sobre la carga será entonces

$$\vec{F} = q(\vec{v}_p + \vec{v}_l) \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q(\vec{v}_p \times \vec{B} + \vec{v}_l \times \vec{B})$$

El segundo término dentro del paréntesis se anula porque el ángulo entre  $\vec{v}_l$  Y el campo magnético  $\vec{B}$  es cero, es decir no existe fuerza alguna actuando en la dirección del campo magnético. La ecuación nos queda entonces

$$\vec{F} = q(\vec{v}_p \times \vec{B}) \quad (6.24)$$

De modo que no importa el ángulo de entrada que tenga la velocidad con que la carga ingrese al campo, la fuerza sobre la carga siempre será centrípeta. Consideremos ahora la situación particular en la cual la carga entra en dirección perpendicular a la dirección del campo magnético y desarrollemos el producto vectorial dado en (6.24)

$$\vec{F} = (qv_p B \operatorname{sen}\pi/2) \hat{u}_c$$

Donde  $\hat{u}_c$  es un vector unitario en la dirección centrípeta, es decir, la dirección radial del círculo descrito por la carga. Tomando solo la magnitud de la fuerza y conociendo que  $\operatorname{sen}\pi/2 = 1$  obtenemos

$$F = qv_p B \quad (6.25)$$

Queremos ahora describir el movimiento de la carga eléctrica en el interior del campo desde el punto de vista dinámico es decir utilizando la segunda ley de Newton  $F=ma$ , para un movimiento circular la segunda ley de Newton queda

$$F_c = ma_c \quad (6.26)$$

Donde  $F_c$  es la Fuerza centrípeta dada por (6.25) y  $a_c$  es la aceleración centrípeta, recordemos que en un movimiento circular la aceleración centrípeta y la velocidad tangencial (en este caso  $v_p = v_{tangencial}$ ) están relacionadas mediante la ecuación  $a_c = v^2/r$

Entonces:

$$qv_p B = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (6.27)$$

Esta ecuación describe el movimiento de una partícula cargada en una región donde existe un campo magnético y nos sirve para observar más de cerca las características de este movimiento, queremos despejar de (6.27) el radio  $r$  y la velocidad tangencial de la órbita en términos de los parámetros  $m, q, B$ , para ello tengamos en cuenta que  $v_p = v$

1. Encontremos el radio de la órbita  $r$ :

$$\begin{aligned} qB &= m \frac{v}{r} \\ r &= \frac{mv}{qB} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Notemos que  $r$  y  $B$  son inversamente proporcionales, es decir a mayor intensidad de campo magnético menor es el radio de la órbita

2. Encontremos la velocidad angular  $\omega$ :

$$\begin{aligned} qB &= m \frac{\omega r}{r} \\ \omega &= \frac{qB}{m} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Recordemos que la velocidad tangencial  $v = \omega r$ , es decir, si encontramos  $\omega$  encontramos  $v$ . observe que la velocidad y el campo son directamente proporcionales. En una región donde exista un campo magnético las partículas giraran más rápido y con menor radio en las regiones donde el campo sea más intenso, al revés giraran más lento y con radio mayor donde el campo sea menos intenso

## Ejemplo

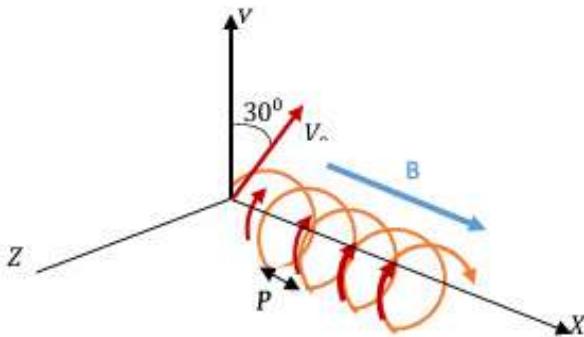


Figura 6.22.

Se tiene un campo magnético  $\vec{B} = 10\hat{i}$  Teslas y una masa de 0.1 gramo que está cargada positivamente con una carga de  $2\mu C$  que se mueve con una velocidad de  $5m/s$  que entra a un campo magnético siguiendo una dirección de  $30^\circ$  grados con el eje de las  $Y$  (Figura 6.22). calcule

- a) el paso de rosca  $P$  del helicoide que describe la carga
- b) el radio del círculo descrito

**Solución.** Se llama paso de rosca  $P$  la distancia que un tornillo avanza cuando gira una vuelta completa, en este caso sería la distancia recorrida a lo largo del eje  $X$  con velocidad constante  $v_x$  mientras la carga completa una vuelta, es decir,

$$P = v_x T \quad (6.30)$$

$T$  es el período del movimiento circular y  $v_x$  es la componente de la velocidad paralela al campo dada por

$$v_x = V_0 \sin 30^\circ \quad (6.31)$$

similarmente

$$v_y = V_0 \cos 30^\circ \quad (6.32)$$

El radio viene dado por la ecuación (6.28)

$$r = \frac{mv}{qB}$$

Necesitamos por lo tanto hallar el periodo  $T$  del movimiento circular, para ello recordamos que  $T = 2\pi/\omega$ , por lo tanto, si encontramos  $\omega$  encontramos  $T$ . En un movimiento circular la velocidad tangencial (en este caso  $v_y$ ) está relacionada con la velocidad angular  $\omega$  mediante la formula  $v = \omega r$

Es decir:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v_y}{r} \quad (6.33)$$

Reemplazando (6.28) y (6.29) en (6.33) obtenemos

$$\omega = \frac{qB\cos30^0}{m} \quad (6.34)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.36 \times 10^2 s \quad (6.35)$$

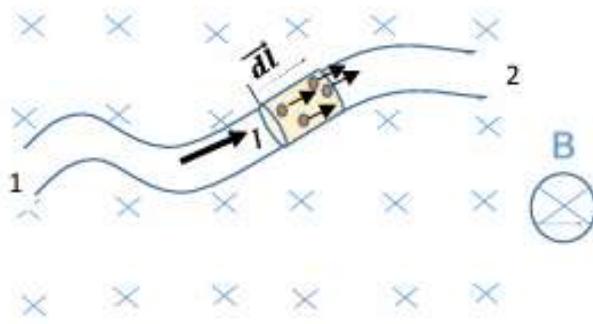
Reemplazando (6.34) y (6.35) en (6.30) obtenemos finalmente:

👉  $P = 90 \times 10^{-3} s$

## 6.6 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CORRIENTES

Dado que el campo magnético ejerce fuerza sobre una sola carga eléctrica, es lógico suponer que hace fuerza sobre las corrientes eléctricas puesto que estas no son otra cosa que muchas cargas individuales moviéndose ordenadamente en el interior de algún conductor. Para encontrar la fuerza sobre un conductor necesitamos conocer cuántas cargas  $n$  tiene el conductor en la unidad de volumen, la longitud  $L$  del conductor y por supuesto la fuerza sobre cada carga, es decir, la ecuación (6.23).

Consideraremos la figura 6.23, donde un alambre que lleva una corriente  $I$ , se halla en el interior de un campo magnético  $\vec{B}$  entrando al plano de la hoja. Hemos dibujado un elemento diferencial  $d\vec{l}$  en el



sentido que marcha la corriente cuya magnitud es  $dl$ . El pequeño cilindro amarillo de sección transversal  $A$  tiene entonces un volumen  $dV = A dl$  y la cantidad de carga en su interior será

$$Q = nqdV \quad (6.36)$$

Figura 6.23.

Donde  $n$  es el número de esferitas y  $q$  es la carga de cada esferita,  $nq$  es entonces la carga en la unidad de volumen. Es claro que la fuerza magnética sobre ese elemento de volumen será:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.37)$$

Hemos considerado que todas las esferitas llevan en promedio la misma velocidad  $\vec{v}$ . Si ahora sustituimos (6.36) en (6.37) obtenemos la fuerza magnética en la unidad de volumen

$$d\vec{F} = nqdV(\vec{v} \times \vec{B})$$

Teniendo en cuenta que el elemento diferencial de volumen  $dV = Adl$ , la fuerza sobre todo el conductor será entonces:

$$\vec{F} = \int_1^2 nqA(\vec{v} \times \vec{B})dl \quad (6.38)$$

Debido a que la velocidad  $\vec{v}$  es siempre tangente al alambre en cualquier punto del alambre la podemos escribir  $\vec{v} = \hat{u}_T v$  por otro lado  $\vec{dl} = \hat{u}_T dl$  con estas sustituciones la ecuación (6.38) nos queda

$$\vec{F} = \int_1^2 nqvA(\vec{dl} \times \vec{B}) \quad (6.39)$$

Recordemos ahora que la densidad de corriente eléctrica la definimos en el capítulo IV (ecuación 4.5) como  $J=nqv$  de modo que (6.39) nos queda

$$\vec{F} = \int_1^2 JA(\vec{dl} \times \vec{B}) \quad (6.39)$$

Teniendo en cuenta que además  $I = JA$  finalmente obtenemos

$$\vec{F} = I \int_1^2 (\vec{dl} \times \vec{B}) \quad (6.39)$$

Esta ecuación debe considerarse la expresión general, correcta y apropiada para calcular la fuerza ejercida por el campo magnético sobre un alambre de corriente cualquiera sea el campo magnético y sin importar la forma que tenga el conductor, por eso en la situación más general posible resolver la integral en (6.39) puede llegar a ser muy complicado. Afortunadamente la inmensa mayoría de situaciones comunes de aplicaciones tecnológicas solo requieren de campos magnéticos constantes en cuyo caso lo podemos sacar de la Integral y escribir (6.39) como:

$$\vec{F} = I \left[ \int_1^2 \vec{dl} \right] \times \vec{B} \quad (6.40)$$

Debido a que  $\vec{B}$  es parte de un producto vectorial lo hemos sacado de la integral respetando el orden de posición que tenía dentro de la integral, es decir por la derecha. Existen dos situaciones posibles en la integral (6.40).

1. Se trata de un alambre cualquiera **no cerrado** en cuyo caso obtenemos

$$\vec{F} = I \left[ \int_1^2 \vec{dl} \right] \times \vec{B} \implies \vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad (6.41)$$

2. Se trata de un alambre cualquiera ***cerrado (espira de corriente)*** en cuyo caso obtenemos

$$\vec{F} = I \left[ \int_1^2 \vec{dl} \right] \times \vec{B} \implies \vec{F} = 0 \quad (6.42)$$

Nótese que en la ecuación (6.41)

la integral  $[\int_1^2 \vec{dl}] = \vec{L}$ .

Recordemos que toda integral es una suma, por lo tanto, estamos sumando pequeños vectores  $\vec{dl}$  desde el extremo 1 del alambre al extremo 2 lo cual se realiza uniendo con una recta la cola del primer  $\vec{dl}$  con la cabeza del ultimo



Figura 6.24.

$$\int_1^2 \vec{dl} = \oint \vec{dl} = \vec{R}$$

Podemos concluir entonces que la fuerza ejercida por un campo magnético sobre una corriente cuando  $\vec{B} = \text{constante}$  es:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \quad \text{corrientes abiertas} \quad (642a)$$

$$\vec{F} = 0 \quad \text{corrientes cerradas} \quad (642b)$$

## Resumen y Conclusiones

El lector no debe olvidar que la ecuación general para calcular la fuerza sobre un alambre conductor cualquiera en el interior de un campo magnético es la ecuación (6.39), las ecuaciones (6.42a) y (6.42b) son el resultado de considerar el campo magnético  $\vec{B}$  constante, aunque estos dos resultados (ecuaciones 6.42) son la consecuencia más importante. El estudio de las espiras de corriente cerradas constituye la base de muchas aplicaciones tecnológicas siendo la primera de ellas el motor eléctrico.

La ecuación 6.42b) nos dice: Si un alambre conductor en forma de espira cerrada de cualquier forma geométrica se halla inmersa en un campo magnético constante, pero sin llevar corriente permanece quieta sin movimiento alguno, pero si le suministramos corriente eléctrica inmediatamente comienza a rotar sin trasladarse. Nos formulamos la siguiente pregunta: ¿qué sucede si la espira permanece sin corriente y la ponemos en rotación por algún medio? La respuesta a esta pregunta da lugar a uno de los fenómenos más trascendentales en la historia de la física: la ley de inducción de Faraday, que básicamente dice:

**“cualquier espira que rote en un campo magnético produce o genera corriente eléctrica”.**

### Ejemplo 1

Un alambre con densidad lineal de masa uniforme  $\lambda = 0.6 \text{ g/cm}$  transporta una corriente eléctrica de 4 amperios horizontalmente hacia la derecha y se halla inmerso en una región donde existe un campo magnético. Hallar la dirección y magnitud mínima del campo magnético necesario para levantar este alambre verticalmente hacia arriba.

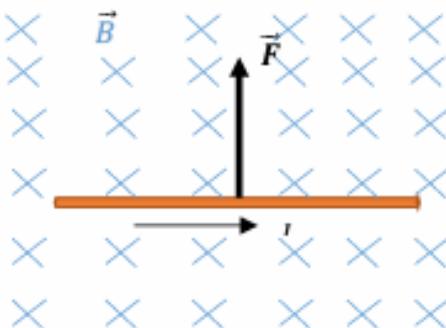


Figura 6.25.

### Solución

Cuando queremos hallar la fuerza magnética sobre una corriente abierta debemos tener en cuenta que hay tres vectores involucrados, relacionados entre ellos por el producto vectorial dado en la ecuación (6.41). Como la fuerza debe estar hacia arriba y la corriente va hacia la derecha, es claro que por regla de mano derecha el campo magnético debe entrar perpendicular al plano de la hoja, por lo tanto

Para levantar mínimamente el alambre debemos equilibrar su peso, es decir, la fuerza hacia arriba que debe generar el campo magnético sobre la corriente que lleva el alambre debe ser  $F = mg$ , donde  $m$  es la masa total del alambre.

Usando (6.42a) podemos escribir la **magnitud** de la fuerza magnética sobre el alambre:

$$F = ILB$$

$$ILB = \lambda Lg$$

Usando  $m = \lambda L$  obtenemos

👉  $B = \frac{\lambda g}{I}$

### Ejemplo 2.

Un alambre que conduce una corriente  $I$  va del punto  $A$  al punto  $B$  siguiendo un camino muy irregular, se halla inmerso en una región de campo magnético  $\vec{B}$  entrando al plano de la hoja. Calcule la fuerza magnética sobre el alambre.

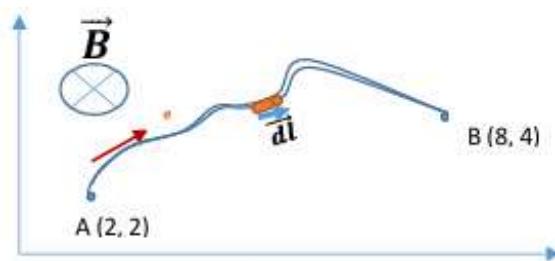


Figura 6.26.

**Solución.** Partiendo de la ecuación (4.37) tenemos poniendo límites entre  $A$  y  $B$

$$\vec{F} = I \left[ \int_A^B \vec{dl} \right] \times \vec{B}$$

Pero la integral o sea la suma de todos los pequeños vectores  $\vec{dl}$  entre los extremos  $A$  y  $B$  Nos produce

$$\vec{R} = \int_A^B \vec{dl}$$

Por lo tanto, la fuerza sobre el alambre será

$$\vec{F} = I\vec{R} \times \vec{B}$$

cuya magnitud es:

$$F = IRB$$

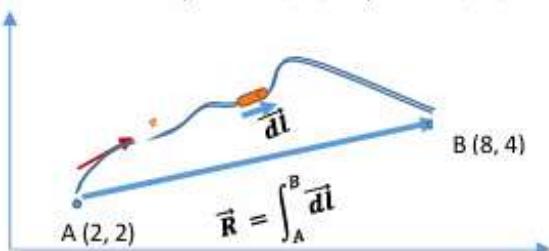


Figura 6.27.

Hemos usado el hecho de que el ángulo entre los vectores  $\vec{R}$  y  $\vec{B}$  es  $\pi/2$ . Debemos encontrar la magnitud  $R$ , para ello usamos el Teorema de Pitágoras:

$$R = \sqrt{(8-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{40}$$

Sustituyendo éste resultado en la expresión anterior para  $F$  obtenemos

👉  $F = IRB = \sqrt{40}IB$

### Ejemplo 3.

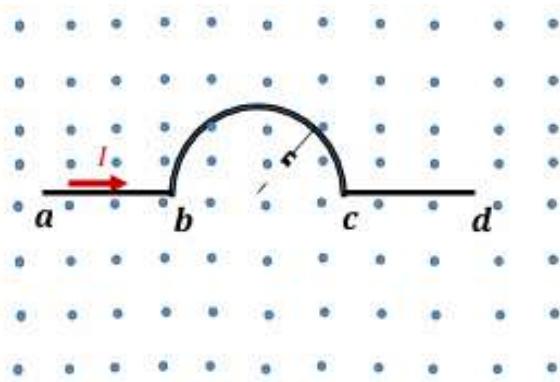


Figura 6.28.

En un alambre inmerso en un campo magnético  $\vec{B}$ , fluye una corriente  $I$  desde la izquierda como se muestra en la figura. El campo magnético sale del plano de la hoja. Hallar la fuerza total que actúa sobre éste alambre

### Solución

Acostumbramos a escribir  $\vec{L}$  en la dirección que lleva la corriente. Calcularemos la fuerza total sobre el alambre como la suma de tres fuerzas ejercidas sobre cada uno de los tres segmentos.  $ab$ ,  $bc$ , y  $cd$

$$\vec{F}_{Total} = \vec{F}_{ab} + \vec{F}_{bc} + \vec{F}_{cd} \quad (6.43)$$

La fuerza sobre el segmento *ab* será

$$\vec{F}_{ab} = I\vec{L}_{ab} \times \vec{B} \implies \vec{F}_{ab} = (IL_{ab}B)\hat{u}_d = (IabB)\hat{u}_d$$

La fuerza sobre el segmento *bc* será

$$\vec{F}_{bc} = I\vec{L}_{bc} \times \vec{B} \implies \vec{F}_{bc} = (IL_{bc}B)\hat{u}_d = (I2RB)\hat{u}_d$$

La fuerza sobre el segmento *cd* será

$$\vec{F}_{cd} = I\vec{L}_{cd} \times \vec{B} \implies \vec{F}_{cd} = (IL_{cd}B)\hat{u}_d = (IcdB)\hat{u}_d$$

$\hat{u}_d$  es el vector unitario que resulta del producto vectorial cada vez que aplicamos la ecuación (4.39) para cada uno de los tres segmentos, la fuerza total será entonces

$$\vec{F}_{Total} = (IabB)\hat{u}_d + (I2RB)\hat{u}_d + (IcdB)\hat{u}_d$$

$$\vec{F}_{Total} = IB(ab + 2R + cd)\hat{u}_d$$

## 6.7 TORQUE MAGNÉTICO

Hemos dicho antes que una corriente cerrada inmersa en un campo magnético experimenta fuerza cero, esto quedó establecido en la ecuación (6.42b). De acuerdo con la segunda ley de Newton cualquier cuerpo sobre el cual no actúa ninguna fuerza, tiende a mantener su estado físico de reposo ( $v=0$ ) o de movimiento con velocidad constante (sin aceleración), en consecuencia, si una espira de corriente cerrada de cualquier forma geométrica se halla en reposo en el interior de un campo magnético constante seguirá en reposo en el interior del campo. Se observa sin embargo que la espira gira

alrededor de su eje de rotación, con lo cual tenemos entonces un escenario en el cual la espira rota sin trasladarse, este es el principio del motor eléctrico. Es importante señalar que **el campo magnético debe ser constante** pues de lo contrario la espira tratará de trasladarse. Nos preguntamos ¿qué tanto rota la espira?. Sabemos de la física 1 que la cantidad de rotación de un cuerpo conocida como torque  $\tau$  se calcula mediante la expresión:

$$\tau = \vec{b} \times \vec{F}$$

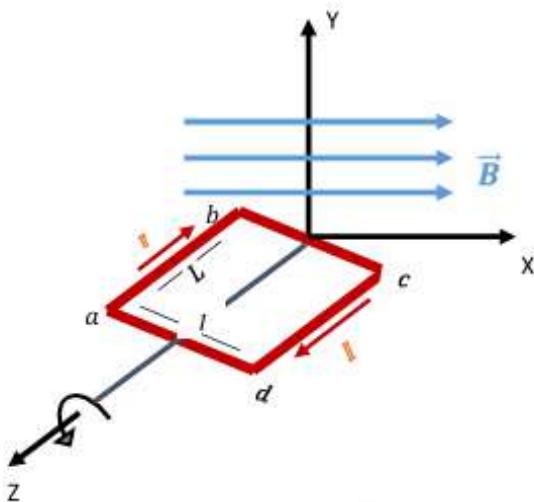


Figura 6.29.

Donde  $\vec{b}$  se le llama el brazo y  $\vec{F}$  es la fuerza aplicada.

Se define la magnitud del brazo  $b$ , como la distancia perpendicular trazada desde el punto o eje de giro a la línea de acción de la fuerza aplicada, debido a que la rotación de la espira es producida por el campo magnético, a este torque

se le llama **torque magnético**.

En la figura 6.29 tenemos un campo magnético constante  $\vec{B}$  en la dirección del eje  $X$  y una espira rectangular  $abcd$  con corriente  $I$  circulando en la dirección mostrada

Queremos calcular el torque de esta espira con respecto al eje  $z$  como se muestra en la figura, el cual será la suma de los torques producidos por cada una de las fuerzas  $\vec{F}_{ab}$  y  $\vec{F}_{dc}$ . Para visualizar mejor la situación alineamos nuestro ojo a lo largo del eje  $Z$ , así las cosas, veríamos la línea frontal de la espira  $ad$  tal como se ve en la figura 4.16b y las fuerzas que el campo magnético produce sobre los lados  $ab$  y  $cd$  encontradas mediante las ecuaciones (6.42a) y (6.42b)

$$\tau_{total} = \tau_{ab} + \tau_{cd} \quad (6.44)$$

$\tau_{ab}$  significa torque producido por la fuerza  $\vec{F}_{ab}$  y  $\tau_{cd}$  significa torque producido por la fuerza  $\vec{F}_{cd}$

$$\tau_{total} = bF_{ab} + bF_{cd}$$

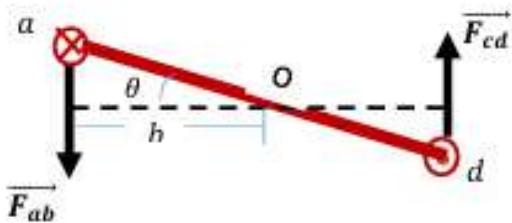


Figura 6.30.

$$(6.45)$$

Debemos encontrar las fuerzas  $F_{ab}$ ,  $F_{cd}$  y el brazo  $b$ .

Hallemos  $F_{ab}$

$$\vec{F}_{ab} = I\vec{L} \times \vec{B} = (ILB)\hat{u}_d$$

$$F_{ab} = ILB \quad (6.46)$$

Hallemos  $F_{cd}$

$$\vec{F}_{cd} = I\vec{L} \times \vec{B} = (ILB)\hat{u}_d$$

$$F_{cd} = ILB \quad (6.47)$$

De la figura (6.30) notamos que:

$$b = \left( l/2\cos\theta \right) \quad (6.48)$$

Reemplazando (6.46) (6.47) y (6.48) en (6.45) obtenemos:

$$\tau_{total} = (l/2\cos\theta)ILB + (l/2\cos\theta)ILB$$

$$\tau_{total} = (\cos\theta)lILB \quad (6.49)$$

Notemos que el producto  $lL$  es el área de la espira entonces

$$\tau_{total} = (\cos\theta)IAB \quad (6.50)$$

Definimos ahora la cantidad conocida como momento magnético  $\vec{m} = IA\hat{u}$ .

La dirección del vector unitario  $\hat{u}$  está determinada por la misma regla de la mano derecha como se puede ver en el dibujo de la derecha (Figura 6.31). En el caso de la espira  $abcd$  mostrada en la figura (6.29) la corriente está en dirección opuesta, entonces su momento magnético está hacia abajo.

Un dibujo de  $\vec{m}$  para la espira rectangular  $abcd$  nos presenta la situación mostrada abajo en base a lo cual podemos reescribir la ecuación (6.50)

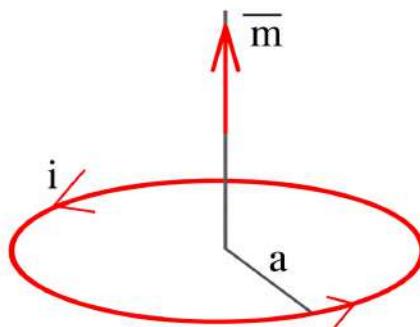


Figura 6.31.

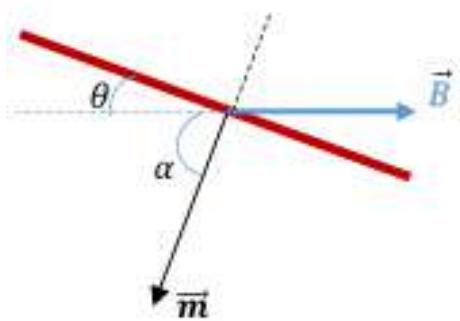


Figura 6.32.

De la figura (6.32) podemos notar que por ser complementarios los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  entonces  $\cos\theta = \operatorname{sen}\alpha$  y la ecuación (6.50) se puede escribir entonces como

$$\tau_{total} = (\operatorname{sen}\alpha)mB \quad (6.51)$$

Esta es la magnitud del producto vectorial

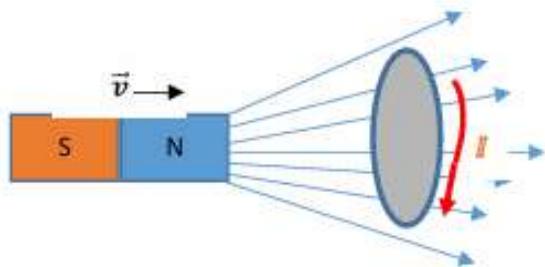
$$\tau = \vec{m} \times \vec{B} \quad (6.52)$$

## 6.8 LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

Los trabajos de Ampere que lo llevaron a descubrir y a proponer luego su famosa Ley tuvieron mucha difusión, causando gran impacto entre los investigadores de la época. Un joven investigador inglés, Michael Faraday (1791-1867) repitió en su laboratorio los experimentos de Ampere y de otro gran físico el Danés Hans Christian Ørsted (1777-1831). Una vez que entendió a fondo la física de estos fenómenos, se planteó la siguiente cuestión: Se puede obtener magnetismo de la electricidad, ¿será posible que se obtenga electricidad del magnetismo? De inmediato inició una serie de experimentos para dar respuesta a esta pregunta.

Faraday fue uno de los más ilustres científicos experimentales del siglo XIX. Hijo de un herrero y con estudios de educación elemental, ya que no tuvo oportunidad de enseñanza de mayor nivel, empezó a trabajar como aprendiz de librero en 1808, dedicándose a la encuadernación. Como pasatiempo leía los libros que le traían los clientes, en particular los de química y electricidad, lo que abrió ante sus ojos un nuevo mundo, despertándose en él un gran interés por aumentar sus conocimientos. Así empezó a estudiar cursos nocturnos que ofrecía en la Royal Institución (Institución Real para el Desarrollo de las Ciencias) el científico Humphry Davy. Esta institución había sido fundada en 1799 y desde 1801 su director era Davy, uno de los científicos más prestigiados de Inglaterra. Faraday escribió notas del curso que llevó con Davy. En 1812 Davy recibió una solicitud de trabajo de Faraday, cuyo empleo de aprendiz como encuadernador estaba por concluir. Mandó al profesor, como prueba de su capacidad, las notas que había escrito en el curso que el mismo Davy había dictado. Faraday fue contratado como asistente de laboratorio en 1813, comenzando así una ilustre carrera en la Royal Institución, que duró hasta su retiro, en 1861. De asistente pasó a reemplazante temporal de Davy, y finalmente fue su sucesor. Faraday publicó su primer trabajo científico en 1816 y fue elegido miembro de la Royal Instituto en 1827.

## Ley de Inducción



*El movimiento del imán hacia la derecha aumenta el número de líneas de campo  $\vec{B}$  que atraviesan el área de la espira y aparece una corriente  $I$ . Si el imán se detiene el número de líneas atravesando el área no cambia y la corriente desaparece.*

Figura 6.33.

la derecha aumenta el número de líneas atravesando el área de la espira, es decir, *aumenta el flujo del campo*, el movimiento hacia la izquierda disminuye el número de líneas que la atraviesan el campo, es decir, *disminuye el flujo*, si el imán no se mueve el número de líneas atravesando el área no cambia y el flujo permanece constante por tanto no hay efecto Faraday. Recordemos que el flujo del campo magnético  $\vec{B}$  se escribe como

$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6.53)$$

El flujo de campo magnético cambia si ocurren cualquiera de las siguientes tres situaciones:

- cambia el área y el campo se mantiene constante
- El área se mantiene constante y cambia el campo magnético
- Cambian simultáneamente los dos, el área y el campo

La ley de inducción de Faraday afirma: *“El cambio del flujo magnético a través de una espira de alambre da lugar a una corriente eléctrica circulando en la espira”*.

La ley exige que el flujo a través de la espira cambie, en otras palabras, si el flujo a través de una espira es constante, No hay efecto Faraday, es fácil observar este fenómeno; para ello basta un imán y una espira como se muestra en la figura.

El movimiento del imán hacia

Escoger cuál de las tres situaciones enumeradas antes es la mejor, o la más adecuada, es el gran compromiso de la tarea tecnológica, por lo general la tercera opción (opción c) es descartada. En el diseño y construcción de turbinas o generadores para generar electricidad pueden usarse indistintamente las dos primeras situaciones. Para encontrar el potencial eléctrico inducido (algunos libros llaman f.e.m) en la espira primero hallamos el flujo de campo magnético a partir de la ecuación (6.53), sabemos que el potencial inducido se manifiesta cada vez que el flujo cambia por lo tanto derivamos el flujo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (6.54)$$

La razón por la cual utilizamos derivadas parciales es que el flujo puede ser función de varias variables y no solamente de una variable, al derivar parcialmente en el tiempo estamos considerando esa posibilidad. Hemos dicho antes que para la gran mayoría de las aplicaciones el campo magnético lo asumiremos constante, por lo tanto, la ecuación (6.54) la podemos escribir Para  $\vec{B} = \text{Constante}$

$$V_i = \frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{S}) \quad (6.55)$$

Una vez conocido el potencial inducido en la espira usamos la ley de Ohm  $V = IR$  para encontrar la corriente  $I$  (si conocemos  $R$ ), o bien para encontrar  $R$  (si conocemos la corriente  $I$ )

Es una práctica común representar la  $V_i$  por el símbolo de una fuente normal, por ejemplo, si el imán de la figura 6.33 se mantiene moviendo únicamente a la derecha la corriente no cambia de dirección y usamos el símbolo de fuente para corriente directa, es decir:

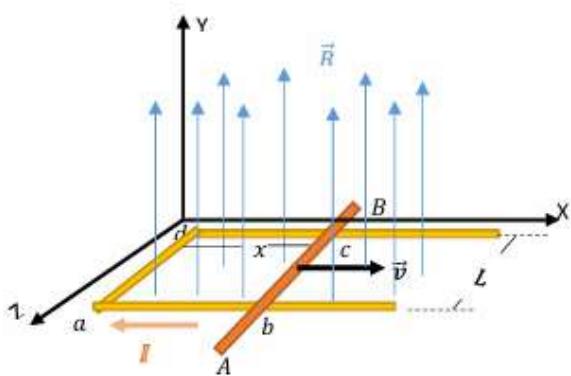


Si el imán se mueve a la derecha y a la izquierda La corriente cambia de dirección continuamente, este es el caso de corriente alterna y usamos para la fuente el símbolo:



### Ley de Lenz

Fue formulada por Heinrich Lenz en 1833. Esta ley nos dice en qué dirección fluye la corriente inducida, y establece que la dirección de la corriente inducida por el efecto Faraday siempre es tal que el campo magnético producido por ella se opone al cambio de flujo que la produce. Por ejemplo, suponga el campo magnético de un imán fluyendo por una espira circular de área constante, cuando el imán se acerca a la espira, el flujo a través de la espira aumenta porque más líneas de campo atraviesan el área de la espira, Lenz nos dice que el campo producido por la corriente inducida debe tener la dirección opuesta al campo del imán



Cuando la varilla AB se mueve a la derecha el número de flechas de campo que atraviesan la espira abcd aumenta. La corriente inducida debe tener una dirección tal que el campo magnético producido por ella contrarreste este aumento

Figura 6.34.

2. Si la resistencia eléctrica de la espira se considera  $R$ , encuentre la corriente inducida

### Ejemplo 1.

En una región del espacio existe un campo magnético vertical constante  $\vec{B}$ , en la dirección positiva del eje  $Y$ . La varilla conductora  $AB$  se desliza sobre un riel conductor que tiene forma de U como se muestra en la figura 6.34. La varilla se mueve con velocidad  $\vec{v}$  hacia la derecha, encuentre

:

1. El potencial eléctrico inducido

**Solución 1.** Para encontrar el potencial inducido  $V_i$ , Primero debemos hallar el flujo

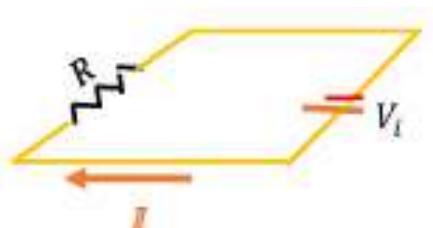
$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \quad (6.53)$$

Debido al movimiento de la varilla el área  $S$  de la espira varía continuamente,  $S$  viene dado por  $S = Lx$ , Por lo tanto, el potencial inducido será

$$V_i = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\vec{B}} = \frac{\partial}{\partial t} (BLx) = BL \frac{\partial x}{\partial t}$$

👉  $V_i = BLv$

Nótese que hemos dibujado la corriente inducida en el sentido horario para satisfacer la Ley de Lenz como puede verse fácilmente usando la regla de la mano derecha, el campo magnético que produce esta corriente está dirigido hacia abajo tratando así de disminuir el campo externo entrando a la espira desde abajo y por ende disminuir el aumento del flujo magnético



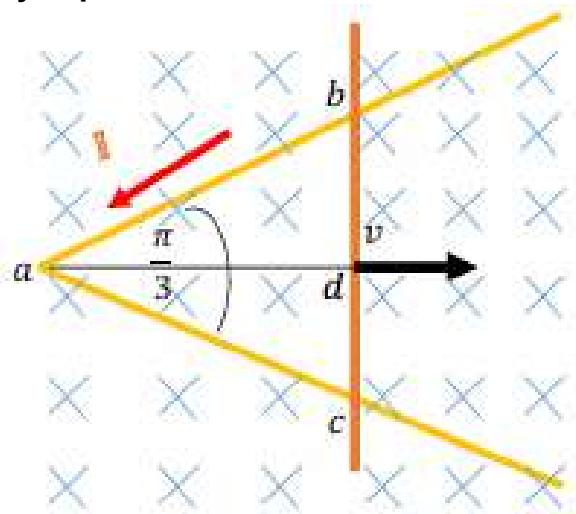
*Representación circuital de la inducción producida por el movimiento hacia la derecha de la barra AB*

Figura 6.35.

2. Tenemos ahora una espira con resistencia  $R$  por la cual circula corriente causada por un potencial eléctrico inducido  $V_i$ , situación que se puede plantear como un circuito normal en cuya resistencia se cumple la ley de ohm

$$V = RI \implies I = \frac{V}{R}$$

## Ejemplo 2



*La Corriente inducida en la espira abc en sentido antihorario debido al movimiento hacia la derecha de la barra*

Figura 6.36.

efecto la espira de corriente es el triángulo  $abc$ , el movimiento de la barra hacia la derecha permite que más líneas de campo entren al plano de la hoja atravesando el área de la espira aumentando así el flujo e induciendo por lo tanto corriente eléctrica. La dirección de esta corriente inducida debe ser tal que el campo creado por ella deberá salir del plano de la hoja para contrarrestar el campo entrando, nos hemos apoyado en la regla de mano derecha para dibujar esta corriente inducida en la figura 6.36

Encontremos el flujo del campo magnético  $\vec{B}$

Una barra conductora vertical se desliza en contacto con un riel triangular también conductor el cual está inmerso en un campo magnético constante que entra al plano de la hoja. La barra avanza con velocidad  $v$ , encontrar el valor y el sentido de la corriente inducida en la espira suponiendo que toda la resistencia de la espira  $abc$  tiene valor  $R$

## Solución

Este es un ejercicio similar al anterior, pero con diferente geometría, en

$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{\vec{B}} \cdot d\vec{S} = BS_{abc} \implies V_i = \frac{\partial (BS_{abc})}{\partial t} \quad (1)$$

Ahora note que el área  $S$  de la espira  $abc$  es dos veces el área del triángulo  $abd$ , es decir,  $S_{abc} = 2S_{abd}$  debemos entonces encontrar el área del triángulo  $abd$

$$S_{abd} = \frac{1}{2}(base) \times (altura) = XY \quad (2)$$

Donde  $X = ad$  y  $Y = bd$ . Ahora note que el triángulo  $abd$  (o el triángulo  $adc$ ) presentan un ángulo de  $\pi/6$ , (30 grados) entonces de la figura 6.36 vemos que  $\tan\theta = Y/X$ .

por lo tanto,

$$Y = X\tan\theta \quad (3)$$

reemplazando en (2) obtenemos:

$$S_{abd} = X \cdot (X\tan\theta) = X^2\tan\theta \quad (4)$$

Entonces

$$S_{abc} = 2S_{abd} = 2X^2\tan\theta \quad (5)$$

Ahora (4) en (1)

$$V_i = \frac{\partial(B2X^2\tan\theta)}{\partial t} = (2B\tan\theta) \frac{\partial X^2}{\partial t}$$

De modo que:

$$V_i = (4BX\tan\theta)v$$

Finalmente

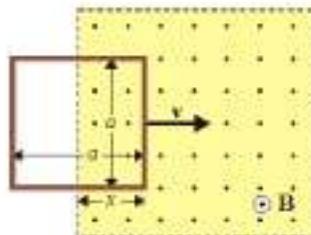
$$\text{👉 } I = \frac{V_i}{R} = \frac{4BX\tan\theta}{R}v$$

## Conclusiones y comentarios

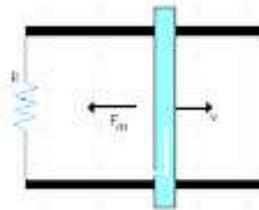
Cuando practicamos ejercicios sobre la Ley de Faraday nos damos cuenta de que podemos generar energía eléctrica cambiando el área de flujo y manteniendo el campo magnético constante en la región de espacio donde gira la espira, claro que también se puede generar al revés, es decir manteniendo el área constante y poniendo a variar el campo magnético esto último sin embargo implica una mayor dificultad y es poco práctico desde el punto de vista tecnológico, la razón es la siguiente: si el campo  $\vec{B}$  no es espacialmente constante entonces la fuerza  $\vec{F}$  sobre la espira no es cero y la espira trata de trasladarse haciendo presión a los soportes de los ejes de la espira lo cual con el tiempo se refleja en daños que deben repararse. El campo magnético si puede variar en el tiempo y la fuerza sobre la espira valer cero, sin embargo, esto tampoco es muy práctico por el incremento de los costos económicos que ello implica.

## Ejercicios Propuestos

1. Una espira rectangular de lado  $a$  entra a una región de campo magnético rectangular de lado  $2a$ . Haga una gráfica del voltaje inducido en la espira en función de la posición.

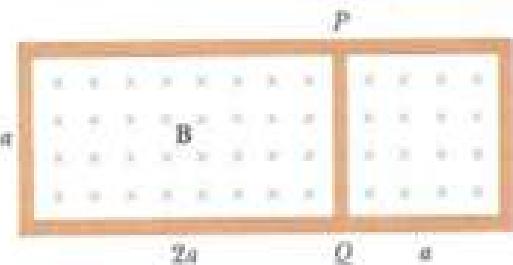


2. En la figura de la derecha se tiene un campo magnético de 4 teslas entrando perpendicular al plano de la página. La barra mostrada se mueve hacia la derecha sobre dos rieles conectados mediante una la resistencia eléctrica de 2 ohm la velocidad de la barra es  $v = 2\text{m/s}$ .

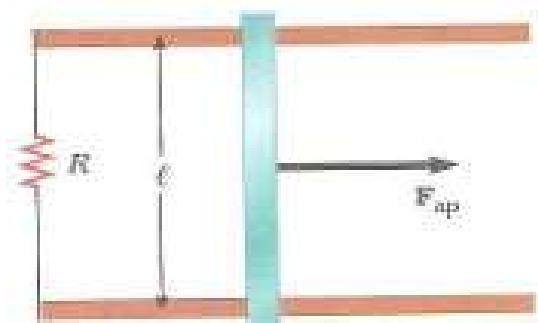


a). Calcule la corriente inducida a través de la resistencia  
b). Cuando se induce una corriente sobre la barra el campo magnético presente ejercerá una fuerza magnética, cuál es su valor

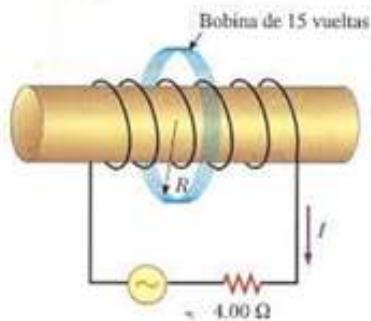
3. En la figura de la derecha encuentre la corriente y su dirección a través de la sección PQ de longitud  $a = 65\text{cm}$ . Todo el circuito está inmerso en un campo magnético cuya magnitud varia con el tiempo según la expresión  $B = 10^{-3t}$  teslas. Suponga que la resistencia unitaria del alambre es de  $0.1\Omega/\text{m}$



4. En la figura de la derecha existe un campo magnético de 2.5 teslas entrando al plano de la página. La resistencia mostrada es  $R$ , tiene un valor de 6 ohms, y  $l = 1.2\text{m}$ . A qué velocidad deberá moverse la barra para producir una corriente de 0.5 Amp en el resistor?



5. Un alambre es enrollado alrededor de un cilindro hecho de material aislante y además es conectado a una fuente de corriente alterna y a una resistencia de 4 ohmios como se muestra en la figura. Una bobina de radio  $R$  tiene 15 vueltas y rodea sin tocar el enrollado. El voltaje en voltios suministrado por la fuente tiene la forma  $V = 8 \operatorname{sen}(wt)$  y la frecuencia de oscilación es de 5 Hz. Responda las siguientes preguntas :



- ¿Cuánto vale el campo magnético creado por el enrollado?
- ¿Se induce corriente en la bobina de 15 vueltas?
- Si se induce corriente calcule su valor

## 6.9 GENERACIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA

Principio Básico de los Generadores o Turbinas. Hemos visto antes que se puede generar corriente eléctrica si hacemos variar el flujo de campo magnético a través del área de una espira y esto se consigue como ya dijimos antes en tres situaciones posibles

- A) cambiando el área y manteniendo el campo constante
- B) El área se mantiene constante y cambia el campo magnético
- C) Cambian simultáneamente los dos, el área y el campo.

Por razones que explicamos a continuación la opción A es la más aceptada y por ende la más utilizada, veamos porque:

En la opción B se permite la variación del campo magnético, si esto ocurre entonces la fuerza  $\vec{F}$  que actúa sobre la espira es diferente de cero (Ecuación 6.42a) y por lo tanto la espira trataría de moverse en alguna dirección haciendo presión sobre los soportes que sostienen los ejes, esto deriva en un continuo “golpeteo” sobre los soportes lo cual termina deteriorando y finalmente dañándolos (generalmente son las llamadas “balineras”) cuando esto ocurre se deben cambiar los soportes, es decir detener la turbina y desmontarla para poder sustituir los soportes con las consecuentes pérdidas económicas que esto representa. Las opciones B y C no son recomendables por el argumento dado anteriormente, conviene aclarar que la tecnología para crear o producir campos magnéticos constantes no es fácil de conseguir.

### Mecanismo Básico de un Generador de corriente Eléctrica

Una corriente eléctrica se genera cuando una espira (generalmente rectangular) rota en el interior de un campo magnético, en adelante cuando digamos la palabra generador, nos referimos siempre a una espira rotando en el interior de un campo magnético. Queremos calcular la corriente producida. En la parte izquierda de la figura 6.37 tenemos una vista general de la espira rotando (el generador más básico posible), a la derecha tenemos una vista de la espira desde la parte superior, asumimos campo magnético constante. Al rotar la espira el área atravesada por las líneas de campo magnético

es diferente, por ejemplo, cuando la barra en la figura de la derecha está en posición vertical, el área de la espira atravesada por el campo es máxima pero cuando la barra está en posición horizontal el área es cero, en su rotación la espira le “presenta” diferentes áreas de flujo al campo magnético induciendo por lo tanto corriente eléctrica, calculemos ese flujo

$$\Phi_{\vec{B}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta \quad (6.54)$$

El ángulo  $\theta$  comprendido entre el campo magnético  $\vec{B}$  y el vector de superficie  $\vec{S}$  está cambiando continuamente debido a la rotación de la espira la cual rota con velocidad angular  $w$ , el ángulo  $\theta$  es entonces el espacio angular recorrido con velocidad angular  $w$  y viene dado por  $\theta = wt$ .

La ecuación (6.54) nos queda

$$\Phi_{\vec{B}} = BS \cos \omega t \quad (6.55)$$

El voltaje inducido es entonces

$$V_i = \frac{\partial (BS \cos \omega t)}{\partial t} = -BS \omega \sin \omega t \quad (6.56)$$

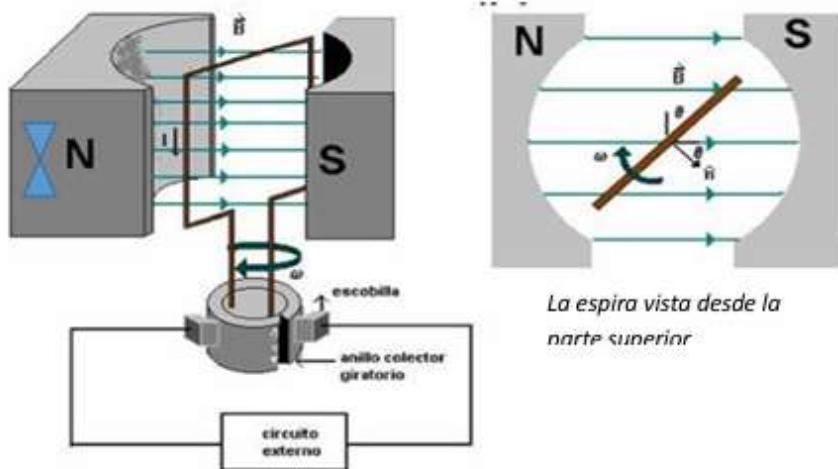
La corriente inducida es :

$$I_i = -\frac{BS \omega \sin \omega t}{R}$$

La cual podemos escribir:

$$I_i = I_0 \sin \omega t \quad (6.57)$$

$$I_0 = \frac{BS\omega}{R}$$



*El principio básico de cualquier generador de corriente es una espira rotando en un campo magnético. El problema adjunto es el mecanismo utilizado para hacer rotar la espira.*

Figura 6.37.

Abajo hemos dibujado 3 mecanismos para lograr la rotación de la espira. Todos ellos son acoplados al eje del generador sobre el cual se han montado un número N de espiras. Estos mecanismos están diseñados para aprovechar la fuerza direccional de los fluidos (líquidos o gases)

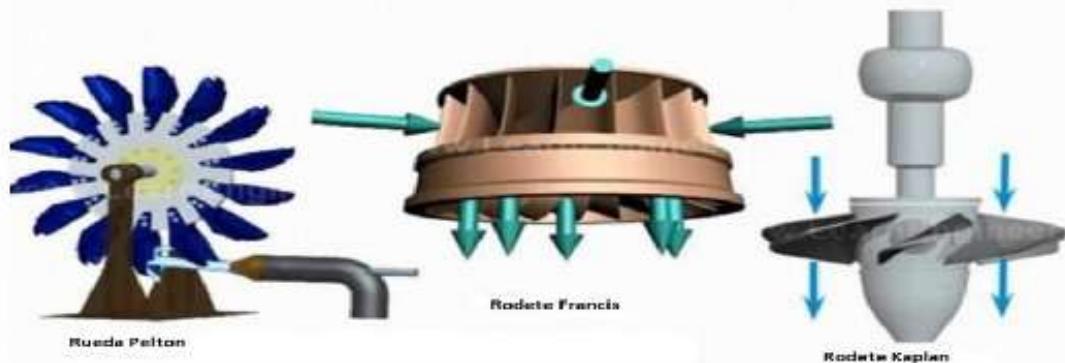


Figura 6.38.

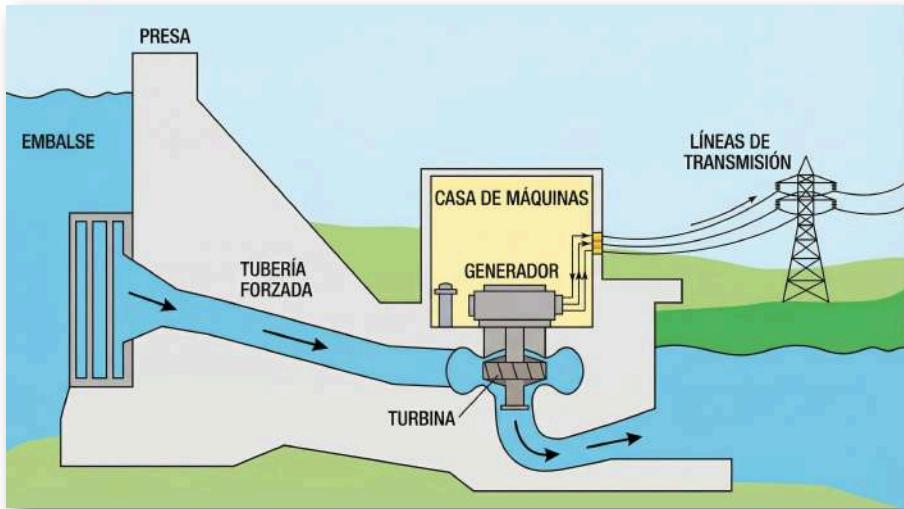


Figura 6.39.

### Esquema general de una Termo Eléctrica

En una Hidroeléctrica se utiliza una “caída controlada” de agua desde cierta altura en cambio una termo eléctrica utiliza vapor de agua cuya presión es utilizada para mover una rueda acoplada al eje de la espira, en este dibujo el acoplamiento es mediante una correa. Las diferentes maneras de obtener el vapor de agua clasifican a las diferentes termo eléctricas. El procedimiento básico es muy sencillo: El agua es calentada por algún medio que puede ser cualquiera como la quema de carbón, gasolina o por un proceso nuclear en el cual se controla una reacción en cadena de átomos enriquecidos como uranio o plutonio, estas son las plantas nucleares, las cuales son muy eficientes, pero requieren de un manejo sumamente cuidadoso

### ESQUEMA GENERAL DE UNA TERMOELÉCTRICA

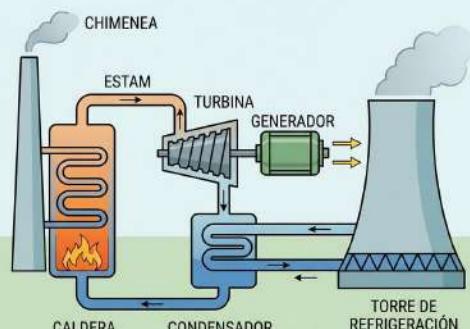


Figura 6.40.

**Ejercicios Propuestos:** Las tres figuras mostradas abajo a la izquierda consisten de un alambre muy largo que lleva una corriente  $I$  constante y una espira rectangular, de lados  $a$  y  $b$ . El lado más cercano a la varilla se encuentra a una distancia  $c$  de la misma. En todas las preguntas que siguen se debe responder dos cosas (antes de empezar la solución de cada ejercicio):

- Cuál es el concepto que se utilizará
- ¿No existe otro concepto que también se pueda utilizar para responder la misma Pregunta

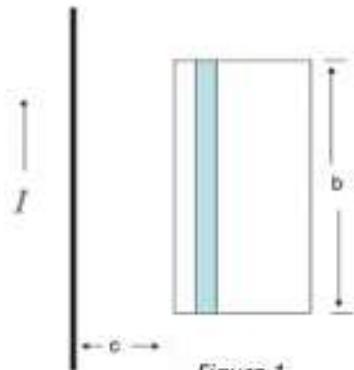


Figura 1

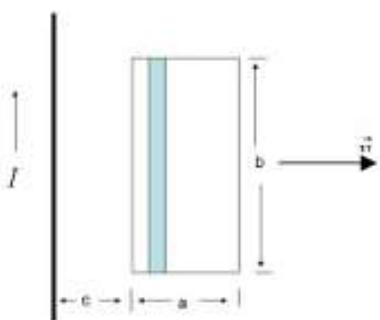


Figura 2

espira? Explique su respuesta

**Figura 1: Espira en reposo** En la situación de la figura 1 mostrada a la derecha, la espira está en reposo, es decir su velocidad es cero y además tampoco está rotando A). Encontrar el campo magnético producido por la corriente  $I$  de la varilla en cualquier punto a una distancia  $r$  de la varilla B). Hallar el flujo  $\Phi_B$  del campo magnético a través de la espira ¿Existe corriente inducida en la espira? Explique su respuesta

**Figura 2: Espira en movimiento** En la situación de la figura 2, la espira se mueve con velocidad  $\vec{v}$

**A).** Encontrar el campo magnético producido por la corriente  $I$  de la varilla en cualquier punto a una distancia  $r$  de la varilla

**B).** Hallar el flujo del campo magnético a través de la espira ¿Existe corriente inducida en la

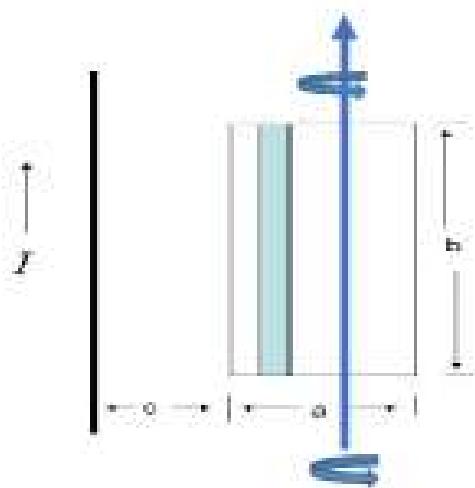


Figura 3

**Figura 3: espira en Rotación**

En la situación mostrada en la figura 3 la espira no se traslada, pero si puede rotar con velocidad angular  $w$

**A).** Encontrar el campo magnético producido por la corriente  $I$  de la varilla en cualquier punto a una distancia  $r$  de la varilla

**B).** Hallar el flujo del campo magnético a través de la espira  
¿Existe corriente inducida en la espira? Explique su respuesta

## 6.10 CUESTIONARIO CAPITULO 6

1. ¿Cuál es la fuente fundamental del campo magnético según el capítulo 6?

Las cargas eléctricas estáticas

Las corrientes eléctricas (cargas en movimiento)

Los imanes permanentes exclusivamente

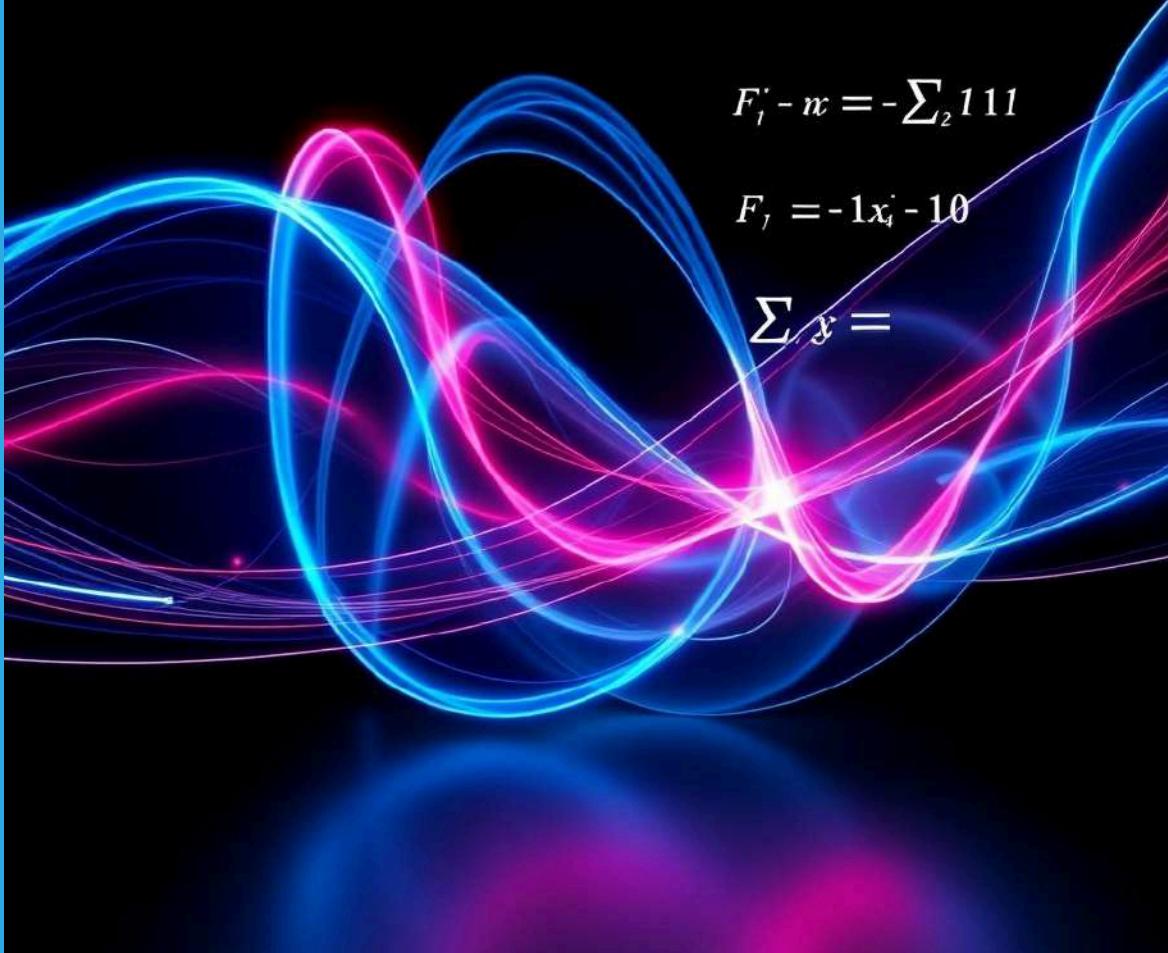
Los campos eléctricos variables

Verificar

# TODO ES CAMPO...



# Y MAXWELL LO SABÍA


$$F_t \cdot n = -\sum_2 111$$

$$F_t = -1x_t - 10$$

$$\sum x =$$

# Capítulo 7

## LAS ECUACIONES DE MAXWELL

**1. ¿Que son las Ecuaciones Maxwell?** Las así llamadas ecuaciones de Maxwell son un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales propuestas en 1865 por El físico escoces James Clerk Maxwell asociadas con los campos eléctricos  $\vec{E}(r, t)$ , magnéticos  $\vec{B}(r, t)$  y las fuentes que los producen es decir las cargas eléctricas  $q$ , y las Corrientes eléctricas  $\vec{J}$ . Aunque hoy sabemos que Maxwell había descubierto las ecuaciones en 1861 solamente hasta el año 1865, Maxwell publicó un artículo titulado '**Una teoría dinámica del campo electromagnético**' donde aparecen por primera vez.

**2. ¿Qué función desempeñan las Ecuaciones de Maxwell? ¿Para qué sirven?** Estas ecuaciones describen el comportamiento espaciotemporal de los campos electromagnéticos al interior de la materia, y también en el vacío. ¿Las ecuaciones de Maxwell y su posterior solución fueron la base para dar respuesta a las preguntas más importantes de la época como por ejemplo que es la luz? que relación existe entre el campo eléctrico y el campo magnético? En esta sección abordaremos estas inquietudes y trataremos de darles respuesta para lo cual empezaremos por responder la siguiente pregunta: ¿de dónde vienen las ecuaciones de Maxwell?

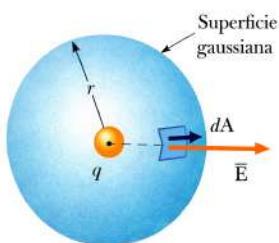


Figura 7.1.

## 7.1 COMO SE OBTIENEN LAS ECUACIONES

Empecemos por decir que las ecuaciones no son en realidad de Maxwell, es cierto que Maxwell fue el primero en escribir estas ecuaciones en forma diferencial. En realidad contribuyó parcialmente en una

de ellas: La llamada ley de Ampere-Maxwell, las otras

ecuaciones se originan en:

## 1. Ley de Gauss para el Campo Eléctrico

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad (7.1)$$

Donde  $\rho$  es la densidad volumétrica de carga eléctrica (carga por unidad de volumen), en el interior de la supereficie cerrada. La ley de gauss para el campo eléctrico nos indica que debemos encerrar la fuente del campo eléctrico (es decir la carga eléctrica) por una superficie que llamamos “superficie gaussiana”. Esta superficie puede tener cualquier forma geométrica, pero si queremos usar la ley de gauss para calcular campos eléctricos la superficie debe escogerse de acuerdo con la simetría del problema, para el caso de una carga puntual como el mostrado en la figura 7.1 escogemos una superficie esférica, sin embargo, esto no compromete la validez de la ley de gauss.

## 2. Ley de Gauss para el Campo Magnético

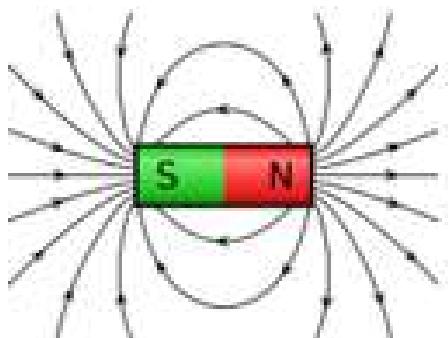


Figura 7.2.

Las fuentes de los campos magnéticos son los imanes. Un imán siempre tiene un polo norte del cual salen las líneas de campo y un polo sur al cual llegan las líneas de campo como se ve en la figura 7.2. Cuando aplicamos la ley de gauss debemos encerrar la fuente de campo (es decir el imán) por la superficie Gaussiana (ver figura 7.3)

Note que el número de líneas que salen del polo norte y fluyen hacia afuera a través de la superficie gaussiana (círculo en color morado) es el mismo número de líneas que fluyen hacia el interior de la superficie

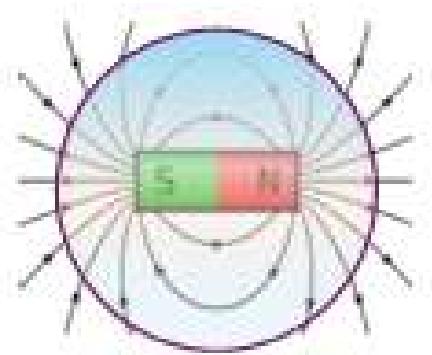


Figura 7.3.

conductor inducía una diferencia de potencial entre los extremos del alambre , algo que podemos escribir matemáticamente

$$V_{inducido} = \frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t} = \frac{\partial (\int \vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} \quad (7.3)$$

Usamos ahora el resultado dado en (2.37) el cual establece que la diferencia de potencial entre dos puntos se puede escribir :

$$V_a^b = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para una espira cerrada :

$$V_{inducido} = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7.4)$$

reemplazando (7.4) en (7.3) obtenemos

$$- \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial (\int \vec{B} \cdot d\vec{S})}{\partial t} \quad (7.5)$$

## Ley de Ampere-Maxwell.

La ley de Ampere *modificada por Maxwell* establece que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{\vec{E}}$$

Recordemos de (4.7) que  $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$  y además de (2.26)  $\Phi_{\vec{E}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ , podemos escribir la ley de Ampere-Maxwell en la forma:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (7.6)$$

**Forma diferencial de las Ecuaciones de Maxwell.** El gran mérito de Maxwell consistió en escribir las ecuaciones (7.1),(7.2), (7.3) y (7.4) en forma diferencial para lo cual utilizó dos teoremas matemáticos importantes: **Teorema de la Divergencia y Teorema de Stokes**; No entraremos en detalles rigurosos y mucho menos demostraremos estos teoremas en estas notas, para el lector inquieto sobre el tema lo invitamos a leer la literatura apropiada. El teorema de la divergencia, también conocido como teorema de Gauss o teorema de Gauss Ostrogradski, es un teorema que relaciona el flujo de un campo vectorial cualquiera a través de una superficie cerrada con la del campo en el volumen delimitado por dicha superficie. La divergencia mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial (en este caso  $\vec{E}$ ) sobre la superficie, por tanto, si el campo tiene "fuentes" al interior de la superficie la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros" será negativa. Notemos que este teorema convierte una integral de superficie en una integral de volumen, para el caso del campo eléctrico  $\vec{E}$  escribiríamos :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV \quad (7.7)$$

El símbolo  $\vec{\nabla}$  se le conoce como “nabla”, es un operador vectorial que recibe distintos nombres de acuerdo a la operación que realiza veamos:

**i).** Cuando actúa sobre un vector solo puede hallar dos cosas: la divergencia o su rotacional, por ejemplo, al operar sobre el vector  $\vec{E}$  puede encontrar la divergencia de ese vector :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  (divergencia) o bien el rotacional de ese vector:  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  (rotacional)

**2i).** Cuando actúa sobre una función escalar cualquiera, por ejemplo  $f(r)$  solo puede encontrar el gradiente de esa función, es decir:  $\vec{\nabla}f(r)$

El operador nabla puede expresarse en diferentes tipos de coordenadas siendo las más utilizadas las cartesianas, cilíndricas y esféricas:

Cartesianas (x,y,z):

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A1})$$

Cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ :

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{u}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{A2})$$

Esféricas  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\vec{\nabla} = \hat{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{u}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{A3})$$

Note que:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$\nabla^2$  es conocido como Laplaciano y es costumbre escribirlo como :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A4})$$

**Teorema de Stokes.** El teorema de Stokes establece que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial  $\vec{F}$  sobre una superficie  $\vec{S}$  es igual a la integral de la componente tangencial de  $\vec{F}$  alrededor de la frontera C de  $\vec{S}$ . Se nombra así por George Gabriel Stokes (1819–1903), a pesar de que la primera formulación conocida del teorema fue realizada por William Thomson y aparece en una correspondencia que él mantuvo con Stokes fechada el 2 de julio de 1850.

Notemos que este teorema convierte una integral de línea en una integral de superficie, por ejemplo, para el caso del campo eléctrico  $\vec{E}$  escribiríamos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (7.8)$$

## 7.2 LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL

Las 4 ecuaciones de Maxwell en forma diferencial resultan de aplicar el teorema de la divergencia (T.D) a las ecuaciones (7.1) y (7.2) y aplicar el teorema de Stokes (T.S) a las ecuaciones (7.5) y (7.6), con éste fin escribiremos a la izquierda éstas ecuaciones y las mismas ecuaciones al lado derecho DESPUES de aplicar los mencionados teoremas

1.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \implies \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

2

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \implies \int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0$$

3

$$-\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \implies \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

4

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \implies \\ \int (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \frac{d}{dt} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

Notemos que en las ecuaciones de la derecha (después de la flecha) podemos igualar los integrando a ambos lados de las igualdades para obtener finalmente las famosas cuatro ecuaciones de maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \tag{7.9}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.10}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \tag{7.11}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{7.12}$$

Las ecuaciones De Maxwell descritas anteriormente describen los campos Electromagnéticos en una región del espacio vacío donde pueden existir cargas eléctricas. Para entender esto imagine una habitación cerrada vacía. Podemos introducir en esta habitación

algunas cargas eléctricas las cuales estarían separadas entre sí por regiones totalmente vacías de materia. El campo electromagnético creado por las cargas en el interior de esta habitación estará descrito por las ecuaciones de maxwell en varios escenarios posibles:

**Escenario 1.** Las cargas en el interior de la habitación están en reposo ( $\vec{v} = 0$ ) En este caso no existe corriente eléctrica  $\vec{J} = 0$ , y  $\vec{B} = 0$  (Recuerde que los campos magnéticos son creados por las corrientes eléctricas ) además el campo  $\vec{E}$  no depende del tiempo, es decir,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$ , las ecuaciones de maxwell nos quedan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

*Es decir, obtenemos las ecuaciones que describen la electrostática*

**Escenario 2.** Las cargas en el interior de la habitación están en movimiento uniforme ( $\vec{v} \neq 0$ ) en este caso existe  $\vec{J}$  y por tanto  $\vec{B}$ , las ecuaciones de maxwell nos quedan

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

*Es decir, obtenemos las ecuaciones que describen la Electrostática y la Magnetostática*

**Escenario 3.** Las cargas en el interior de la habitación están en movimiento no uniforme ( $\vec{a} \neq 0$ ). Este es el caso más general posible para el cual utilizaríamos las ecuaciones de Maxwell completas dadas

## 7.3 SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Resolver las ecuaciones de maxwell es encontrar los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en cualquiera de los tres escenarios posibles señalados anteriormente.

### Solución a las Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Para el propósito de estas notas queremos tomar en consideración el escenario numero 3 el cual resulta ser el caso más general posible en el vacío, para ello imaginamos que nos encontramos en una región de la habitación donde no hay cargas(y por lo tanto tampoco corrientes), los campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en esta región son producidos por las cargas y corrientes que se encuentran en el otro lado de la habitación, por lo tanto, en la región donde nos encontramos no hay presencia de cargas ni corrientes con lo cual  $\rho=0$  y  $\vec{J}=0$  Las ecuaciones (7.9) → (7.12) nos quedan:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7.9a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.10a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (7.11a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.12a)$$

Ahora tomamos el rotacional a ambos lados de la ecuación (7.11a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (7.13)$$

Usamos ahora la identidad vectorial que establece que para cualquier vector  $\vec{f}(r, t)$  se cumple que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) - \nabla^2 \vec{f} \quad (A5)$$

de manera que si  $\vec{f}(r, t)$  es ahora el campo eléctrico  $\vec{E}$  y usamos la identidad (A5) obtenemos:

$$\vec{\nabla} (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

Pero hemos dicho que estamos en el vacío, es decir,  $\rho = 0$ , de modo que la ecuación (7.9a) se convierte en  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  y podemos escribir para la expresión anterior:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

si ahora usamos la ecuación (7.12a) podemos escribir:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

la cual escribimos como :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0 \quad (7.14)$$

*El Campo eléctrico  $\vec{E}$  satisface una Ecuación de Onda*

Si en vez de tomar el rotacional a ambos lados de (7.11a), tomamos el rotacional a ambos lados de (7.12a) y seguimos los mismos pasos del procedimiento anterior descubrimos que también **El Campo Magnético  $\vec{B}$  satisface una Ecuación de Onda**

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial^2 t} \vec{B} = 0 \quad (7.15)$$

Las ecuaciones de Maxwell constituyen el máximo logro en el estudio de la interacción electromagnética ya que describe la electrostática y la magnetostática como casos particulares del caso general en que los campos son dependientes del tiempo. En resumen:

### **1. Si $q$ se encuentra en reposo :**

Genera el campo electrostático  $\vec{E}(x, y, z)$ , existen dos maneras de calcularlo:

- i. usando la ecuación (2.2) si es una carga puntual o (2.3) si es una distribución
- ii. usando la ley de gauss, ecuación (2.29)  $\Rightarrow$  (se requiere simetría)

### **2. Si $q$ se encuentra en movimiento con velocidad constante**

genera campo electrostático  $\vec{E}(x, y, z)$  y magnetostático  $\vec{B}(x, y, z)$ .

El campo  $\vec{B}(x, y, z)$  se calcula

- i.. usando la ley de Biot-Savart, ecuación (6.2)
- ii. usando la ley de Ampere, ecuación (6.8)  $\Rightarrow$  (se requiere simetría)

### **3. Si $q$ se encuentra en movimiento con aceleración**

genera campos dependientes del tiempo  $\vec{E}(x, y, z, t)$  y  $\vec{B}(x, y, z, t)$  los cuales se calculan usando las ecuaciones de Maxwell, llegando al interesante resultado:

**“En cualquier región del espacio donde no haya cargas ni corrientes, los campos electromagnéticos dependientes del tiempo solo pueden existir como ondas”**

## 7.4 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

**¿Qué es una Onda?** En física, se utiliza la palabra “onda” para designar la trasmisión de energía sin desplazamiento de materia. Se trata de una perturbación o agitación que se desplaza en un ambiente determinado y que, después pasar, lo deja en su estado inicial. La altura (amplitud), la distancia (longitud o ancho) de la perturbación y la duración de la perturbación depende de la energía suministrada inicialmente. En algunos casos estas oscilaciones (u “ondulaciones”) pueden verse de manera simple y directa. Sin embargo, existen muchos otros tipos de oscilaciones que no son visibles a simple vista, tal es el caso de los vectores de los campos eléctrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Note que hemos adoptado la escritura  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  en vez de  $\vec{E}(x, y, z, t)$  y  $\vec{B}(x, y, z, t)$ .

### ¿Cuántas Clases de Ondas Existen?

**Ondas Mecánicas.** Son las que necesitan un medio material para propagarse y pueden ser longitudinales cuando la perturbación oscila en la misma dirección que se propaga, o transversales, cuando la perturbación oscila en dirección transversal a la que se propaga

**Ondas Electromagnéticas.** NO necesitan de ningún medio material para propagarse y siempre son transversales

**Características fundamentales.** Se pueden describir todas las ondas mediante tres características:

**Amplitud** que corresponde a la altura de las oscilaciones (la perturbación);

**Longitud de Onda** que mide la distancia entre dos oscilaciones (o perturbaciones)

**Frecuencia** que refleja el número de oscilaciones por segundo (expresado en hercios e inversamente proporcional a la longitud de onda); Las ondas mecánicas se describen con una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - \frac{1}{v^2} f(x) = 0 \quad (7.16)$$

Donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda y  $f(x)$  es la perturbación que se propaga. En las ondas mecánicas esta perturbación es visible y la velocidad de propagación depende del medio material en que se propaga.

Ahora queremos saber si las ondas que satisfacen las ecuaciones (7.14) y (7.15) son longitudinales o transversales y además ¿Qué relación satisfacen  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ? que velocidad tienen las OEM? En lo que sigue responderemos estas preguntas.

Para empezar, notemos que comparando (7.14) y (7.15) con (7.16) resulta obvio que la velocidad de la onda eléctrica es :

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \implies v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{((4\pi \times 10^{-7}) \times 8,854 \times 10^{-12})}} \\ v = 2.997 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (7.17)$$

Esta es la velocidad de la luz !!! 😊 😊

Podemos afirmar entonces que el vector de onda eléctrica  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  viaja con una velocidad igual a la velocidad de la luz  $c$  (También vale para el magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ). A continuación, proponemos una solución para las ecuaciones diferenciales (7.14) y (7.15).

Para ello definamos primero la fase  $\Phi$  como:

$$\rightarrow \Phi = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (7.18)$$

Las soluciones propuestas para (7.14) y (7.15) son

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}\Phi \quad (7.19)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{B}_0 \operatorname{sen}\Phi \quad (7.20)$$

$\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  son las amplitudes constantes de las perturbaciones eléctricas y magnéticas respectivamente.

$\vec{k}$  es el vector de propagación de la onda, es decir, la dirección en que se propaga la perturbación.

$\vec{r}$  es la posición donde medimos el valor de la perturbación, esta posición es medida con respecto a algún origen de coordenadas.  $\omega$  es la frecuencia de oscilación de la perturbación, es decir, cuantas veces en un segundo alcanza su valor máximo (o mínimo).

Notemos que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (\hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z) \cdot (\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z \quad (7.21)$$

 ¡¡Atención!! Note que  $\vec{k}$  , el vector de propagación de la onda(también llamado número de onda ) es diferente al vector unitario  $\vec{k}$ .

Ahora debemos tener presente que las ecuaciones (7.19) y (7.20) deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell en el vacío o sea las ecuaciones. Empezamos con la primera de las ecuaciones de maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}).(\hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies \left( \frac{\partial}{\partial x}E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z \right) \quad (7.22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (E_{0x}k_x + E_{0y}k_y + E_{0z}k_z)Cos\Phi = 0$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}_0)Cos\Phi = 0$$

Esta ecuación tiene que ser válida para cualquier valor del coseno, esto solo es posible si se cumple

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (7.23)$$

Siguiendo el mismo procedimiento matemático para las ondas de campo magnético encontramos que

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (7.24)$$

Es decir, La amplitud de la onda y la dirección de la propagación son perpendiculares Por lo tanto, LAS OEM SON TRANSVERSALES

Ahora exigimos que la solución de onda que hemos propuesto satisfaga la tercera de las ecuaciones de Maxwell en el vacío (ecuación 7.11a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \omega \vec{B}$$

Notemos que el rotacional es un producto vectorial. Usando las soluciones propuestas (7.19) y (7.20) obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \omega \vec{B}$$

Desarrollando el determinante con los valores para  $\vec{E}$  obtenemos :

$$\hat{i}(k_y E_z - k_z E_y) - \hat{j}(k_z E_x - k_x E_z) + \hat{k}(k_x E_y - k_y E_x) = w \vec{B}$$

Esto es lo mismo que :

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \implies \vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad (7.25)$$

Sabemos que la magnitud  $k$  del vector de propagación de cualquier onda se relaciona con la frecuencia  $w$  de la onda y su velocidad  $v$  mediante la relación  $k = w/v$ , pero en el vacío las OEM tienen la misma velocidad que la luz  $v = c$  de modo que debe cumplirse (para el vacío)  $k = w/c$ , luego podemos escribir  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{k}$  y reemplazar en (7.25) con lo cual obtenemos la importantísima relación

$$\vec{B} = \frac{1}{c}(\hat{k} \times \vec{E}) \quad (7.26)$$

Dado que la onda es transversal  $\vec{k}$  y  $\vec{E}$  son perpendiculares y obtenemos

$$B = \frac{E}{c} \quad (7.27)$$

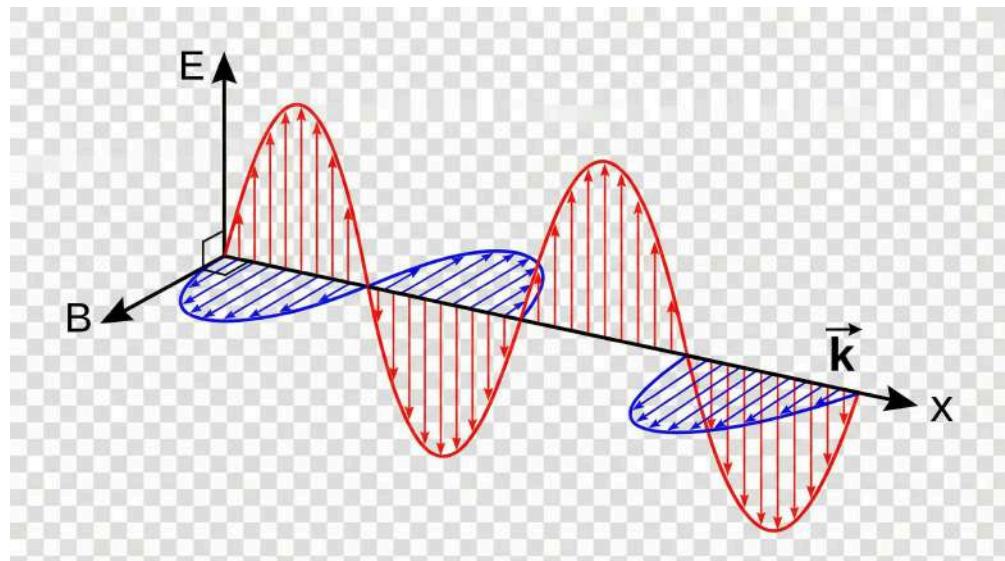


Figura 7.4.

## 7.5 CUESTIONARIO CAPITULO 7

1. ¿Qué característica fundamental define a una onda electromagnética?

Requieren un medio material para propagarse

Son transversales y no necesitan medio material

Son longitudinales y requieren aire

Solo se propagan en sólidos

Verificar



Pregunta 5 de 20



¿Qué dispositivo se utiliza para almacenar energía en un campo eléctrico?

**A** Capacitor

**B** Inductor

**C** Resistencia



