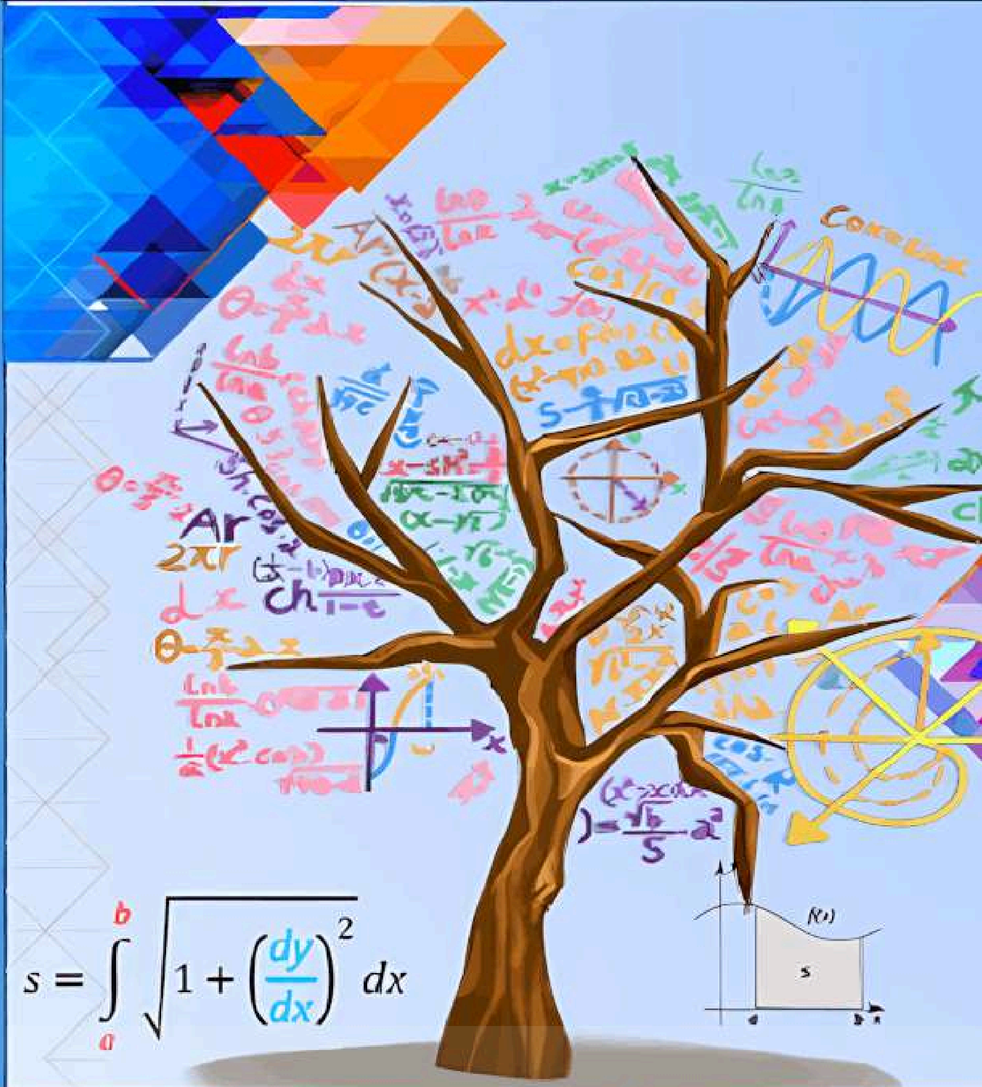
Segunda edición



RED educativa digital Descartes

Análisis matemático

Saberes básicos para Bachillerato LOMLOE

DESCARTES
matemáticas interactivas

Análisis matemático
Saberes básicos para Bachillerato LOMLOE

Segunda edición

José Román Galo Sánchez
María José García Cebrian

Red Educativa Digital Descartes, España

Fondo editorial

REDeducativa digital Descartes

Córdoba (España)
2025

Título de la obra:
Análisis matemático.
Saberes básicos para Bachillerato LOMLOE.

Autores:
José R. Galo Sánchez
María José García Cebrian

Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Conversión de contenido: Joel Espinosa Longi
Recursos interactivos: DescartesJS
Diseño de cubierta: Margarita Patiño Jaramillo
Fuente: Amaranth
Fórmulas matemáticas: KaTeX

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm

ISBN: 978-84-10368-37-8

Tabla de contenido

Prólogo

Esta obra interactiva está dirigida al alumnado que cursa las materias de Matemáticas II o Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en las correspondientes modalidades del bachillerato de España (16-18 años) y, concretamente, para el bloque de contenidos dedicados al Análisis aunque, obviamente, puede emplearse en estudios equivalentes de otros sistemas educativos.

Nuestro alumnado, durante su proceso de aprendizaje en etapas anteriores, conoce e identifica distintas ramas de las matemáticas como la Aritmética, el Álgebra, la Geometría o la Estadística. Sin embargo, a pesar de haber tomado contacto con algunos conceptos funcionales básicos, se sorprende al saber de la existencia del Análisis, y más aún le lleva a realizar una interpretación errónea originada por la semántica. Por ello, a esta edad llega el momento de conocer una de las ramas más recientes de las Matemáticas, que tiene por objeto el estudio de las funciones, su clasificación y propiedades, el concepto de límite, la continuidad, la derivación de funciones, los métodos de integración y sus diversas aplicaciones en las ciencias de la naturaleza, las ciencias sociales, las ingenierías, las nuevas tecnologías y las distintas ramas del saber.

La obra se compone de cuatro capítulos o partes que abarcan el desarrollo curricular del bloque, a saber, funciones, límites y continuidad, derivadas, aplicaciones de las derivadas e integrales y concluye con un apéndice que contiene una selección de problemas de Análisis propuestos en la Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad. A su vez, cada capítulo dispone de un módulo final con ejercicios para practicar y consolidar los contenidos tratados y una autoevaluación, como elemento clave que permite al alumnado valorar sus logros y reflexionar sobre sus fortalezas y debilidades.

La interactividad permanente convierte la obra en un auténtico “laboratorio de matemáticas”, permitiendo al alumnado realizar de manera cómoda cuantos experimentos necesite en sus investigaciones, autónomas o dirigidas por el profesorado, anotar los resultados, cotejarlos, conjeturar en base a los mismos o encontrar contraejemplos para, finalmente, rechazar o aceptar que su conjetura se convierta en un descubrimiento, participando, en todo momento, de un aprendizaje activo.

Como docentes, sabemos de la importancia de seleccionar, elaborar, adaptar y utilizar recursos didácticos para facilitar el desarrollo de las actividades formativas, utilizando habitualmente recursos tecnológicos. Además, el profesorado y su alumnado, tienen acceso gratuito a esta obra a través de internet, obra publicada bajo licencia **Creative Commons**, con la posibilidad de descargar el archivo editable para su adaptación y reutilización en los términos establecidos en la licencia, es decir, una obra catalogada como recurso educativo abierto. Una obra pensada para cualquier modalidad de enseñanza y que presenta un valor añadido en las circunstancias actuales de semipresencialidad o confinamiento, donde nuestro alumnado, no solo requiere de atención inmediata para saber si su aprendizaje autónomo se produce en la vía correcta, sino que necesita de una retroalimentación in situ que le permita conocer la ejecución técnica o desarrollo de un ejercicio acompañado de su correspondiente planteamiento razonado.

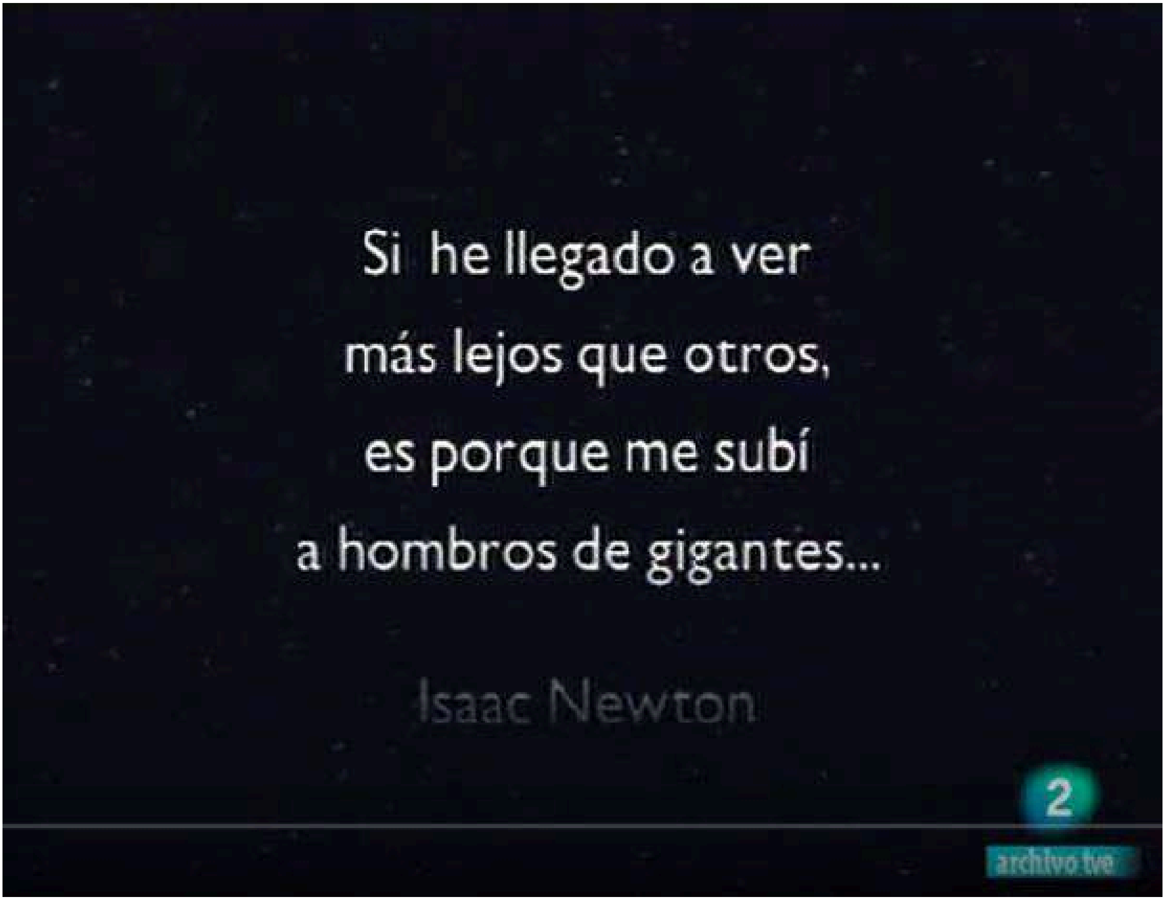
La autora y el autor de la obra son docentes con más de treinta años de experiencia impartiendo estas materias y expertos en el diseño y generación de recursos educativos interactivos con la herramienta de autor DescartesJS.

Para finalizar, no podemos olvidar que la historia de las Matemáticas es un recurso fundamental para conocer y comprender la evolución de los conceptos que deben aprender nuestros alumnos y alumnas. Así, los fundamentos modernos del Análisis Matemático, se establecen en Europa en el s. XVII con la invención o descubrimiento del cálculo diferencial y cálculo integral, precisamente en una época de confinamiento social. Por ello, recomendamos el vídeo titulado "Sobre hombros de gigantes; Newton y Leibnitz", de la serie Universo Matemático, coordinado y presentado por el catedrático de Matemáticas y gran divulgador, Antonio Pérez Sanz.

José Antonio Salgueiro González

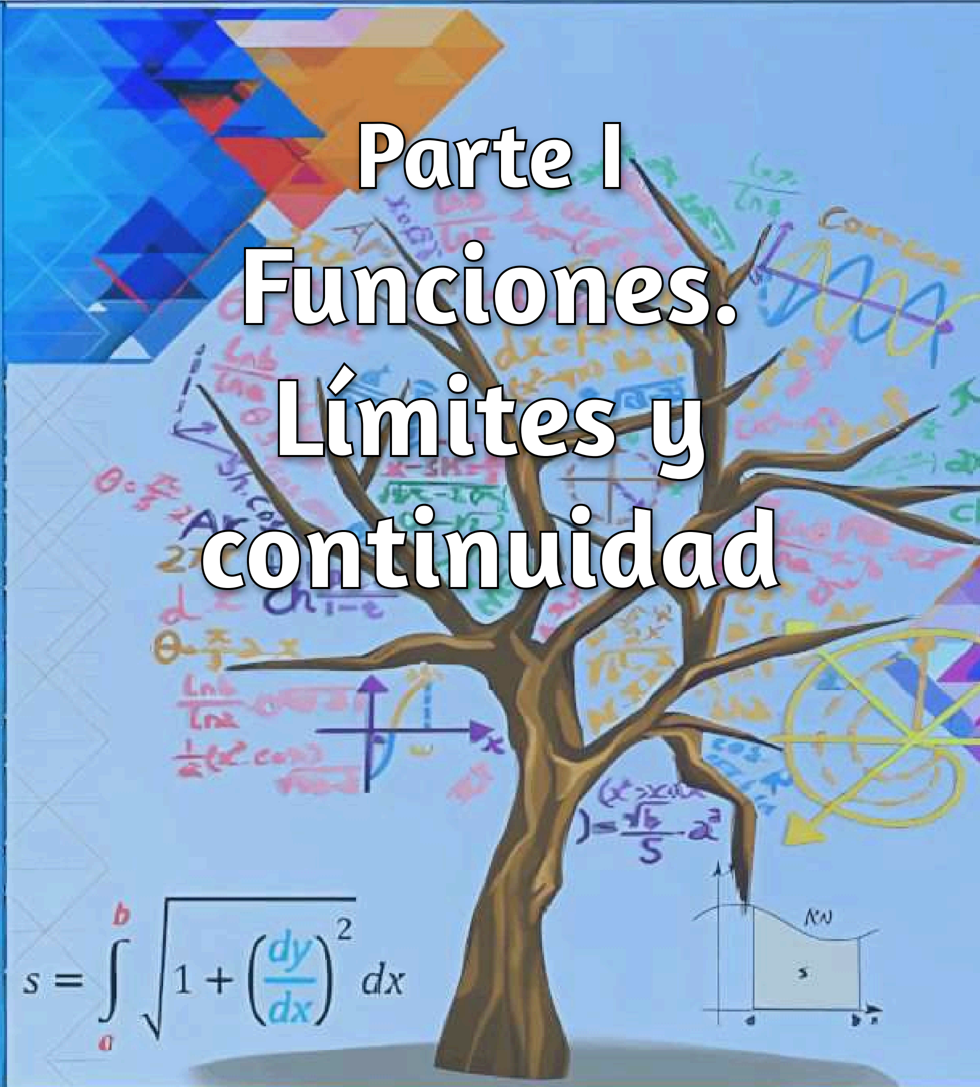
Secretario de Red Educativa Digital Descartes (España)

Profesor de Matemáticas en el IES Bajo Guadalquivir de Lebrija (Sevilla) durante treinta años


Si he llegado a ver
más lejos que otros,
es porque me subí
a hombros de gigantes...
Isaac Newton
2
archivo tve

Parte I

Funciones. Límites y continuidad



María José García Cebrian

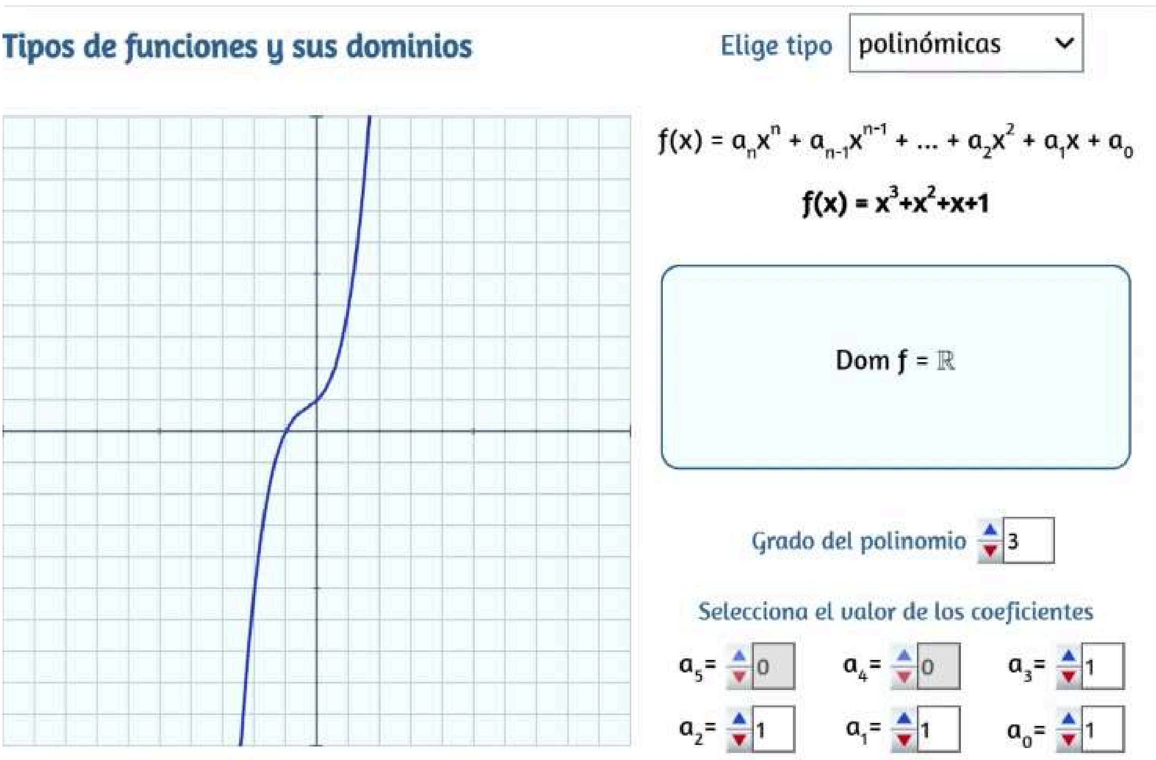
1.1 Funciones reales de variable real

Una **función real de variable real** es una correspondencia entre números reales que asigna a cada elemento, **x**, del conjunto inicial un y solo un elemento, **y**, del conjunto final. El valor y es la **imagen** de x por f.

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

- El subconjunto A, formado por todos los números reales que tienen imagen por f, se denomina **Dominio** de la función. Lo indicaremos **Dom(f)**.
- El subconjunto formado por todos los posibles valores, imágenes, de la función se llama **Imagen** o **Recorrido** de la función. Lo indicaremos **Im(f)**.

A continuación puedes ver distintos tipos de funciones y su dominio.



1.2 Límite de una función en un punto

1.2.1 Idea intuitiva de límite

Ya conoces el concepto de límite de una función en un punto, aquí vamos a profundizar un poco más en él. Si a y l son números reales diremos que "l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a" si cuando x toma valores próximos a a, los correspondientes valores de $f(x)$ se aproximan a l. Lo indicaremos:

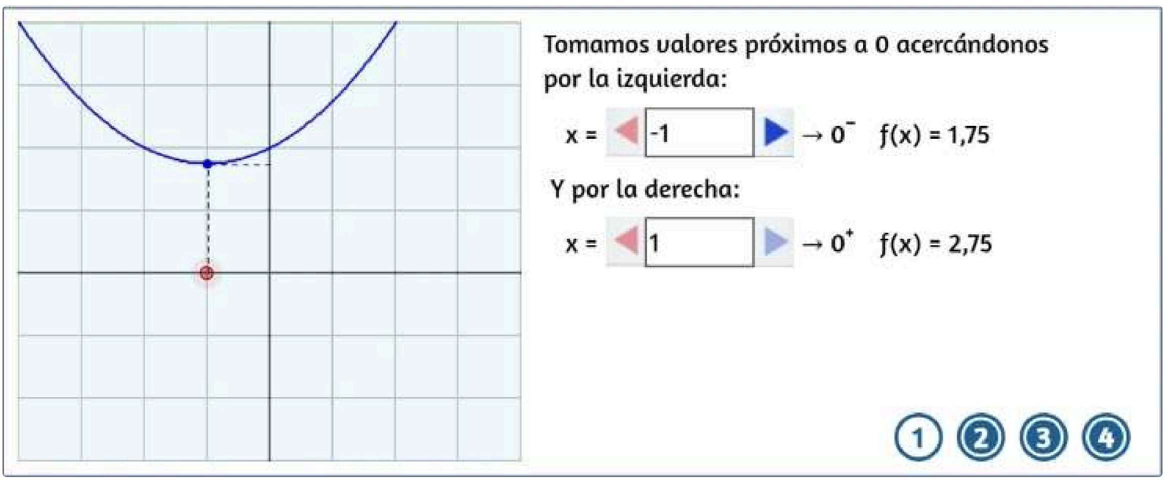
$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Para determinar que el límite de una función en $x = a$ es l, solo hace falta saber lo que ocurre alrededor de a, de hecho una función puede no estar definida en $x = a$ y en cambio tener límite en ese punto. Por otra parte se debe cumplir tanto si x se acerca a a tomando valores menores que a, por la izquierda de a, como si toma valores mayores, o sea si se acerca por la derecha. Si solo se considera una de las dos formas de acercarse hablaremos de **límites laterales** de $f(x)$ en $x = a$. Los indicamos:

Límite por la izquierda: $\lim_{x \to a^-} f(x) = l_i$ Límite por la derecha: $\lim_{x \to a^+} f(x) = l_d$

Observa que una función tendrá límite en un punto si y solo si existen los dos límites laterales en ese punto y coinciden.

Veamos unos ejemplos:



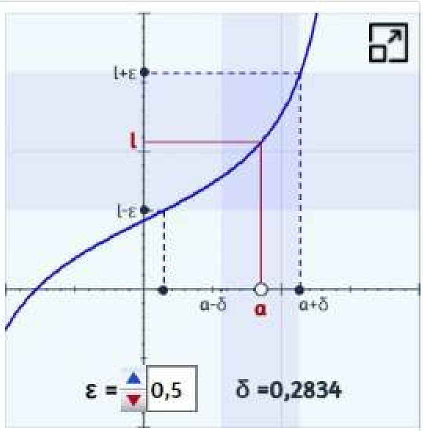
1.2.2 Definición formal de límite

Antes de la definición conviene recordar que un **entorno de centro** a **y radio** δ es el intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$, y se dice "reducido" si se excluye el propio punto a.

Diremos que l es el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ si, para cualquier entorno de l de radio ε, podemos encontrar un entorno de a de radio δ, tal que todos los puntos de ese entorno salvo quizás el propio a, verifican que su imagen está dentro del entorno de l.

En la escena de la derecha se ilustra esta definición. Cambia el valor asignado a ε y comprueba que si el límite existe siempre se puede encontrar un valor de δ.

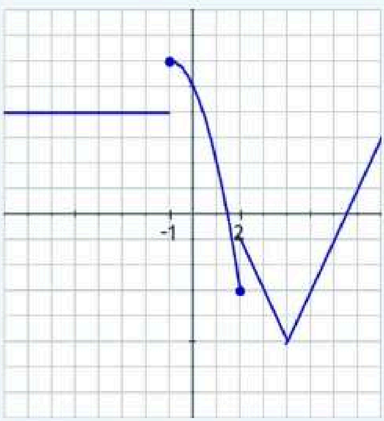
Pero si $f(x)$ pertenece a un entorno de l de radio ε se cumple que $|f(x) - l| < \varepsilon$, y si x pertenece a un entorno reducido de a de radio δ será $0 < |x - a| < \delta$.



Lo expresamos así:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon > 0\; \exists\delta > 0 \text{ tal que si } 0 < |x-a| < \delta \text{ entonces } |f(x) - l| < \epsilon$$

Ejercicio



Dada la función de la gráfica, calcula los límites indicados:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) =$

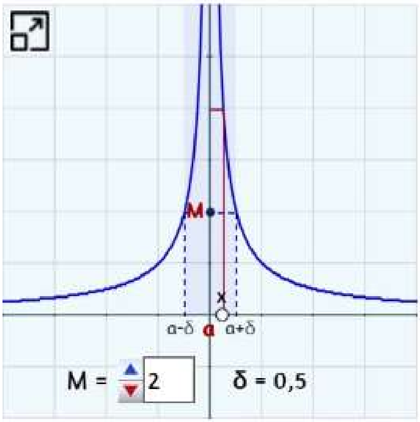
$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

comprobar

1.2.3 Límites infinitos y en el infinito

Límites infinitos



$x \to a$ es $+\infty$ si, cuando los valores de x se aproximan a a, tanto por la izquierda como por la derecha, los correspondientes valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes.

Dicho de otra forma, si para cualquier valor real M, tan grande como se quiera, podemos encontrar un **entorno reducido** de a, de radio δ, tal que si x es de este entorno, $f(x)$ es mayor que M.

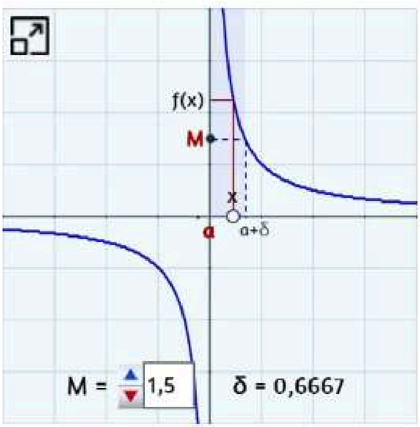
En la escena de la derecha se ilustra esta definición. Cambia el valor asignado a M y comprueba que siempre se puede encontrar un valor de δ.

Análogamente, el límite será $-\infty$ si las imágenes de los valores que se aproximan a **a** se hacen tan pequeñas como queramos. Lo expresamos así:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \, \exists \delta > 0$ **tal que si** $0 < |x-a| < \delta$ **entonces** $f(x) > M$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0 \, \exists \delta > 0$ **tal que si** $0 < |x-a| < \delta$ **entonces** $f(x) < M$

Muchas veces es necesario considerar los límites laterales.

En la escena puedes ver: límite por la derecha



El límite de $f(x)$ cuando $x \to a^+$ es $+\infty$ si, cuando los valores de x se aproximan a a por la derecha, para cualquier valor real M, tan grande como se quiera podemos encontrar un entorno a la derecha de a, $(a, a+\delta)$, tal que si x es de ese entorno, $f(x) > M$.

El límite de $f(x)$ cuando $x \to a^-$ es $-\infty$ si, cuando los valores de x se aproximan a a por la izquierda, para cualquier valor real M, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un entorno a la izquierda de a, $(a-\delta, a)$, tal que si x es de ese entorno, $f(x) < M$. En cada caso la definición es análoga si cambia el signo de ∞.

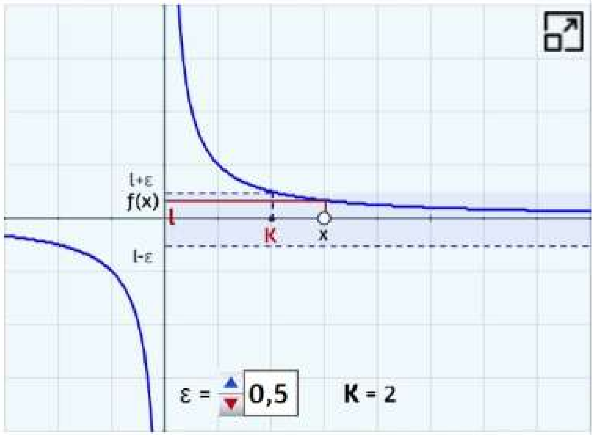
Límites en el infinito

En la escena puedes ver cuando x → +∞

Cuando los valores de x $(x>0)$ se hacen muy grandes y los correspondientes $f(x)$ se acercan a un valor l diremos que l es el límite de $f(x$ cuando $x\to +\infty$.

Dicho de otra manera cuando para cualquier entorno de l, de radio ε, tan pequeño como se quiera, podemos hallar un valor K, tal que si $x>K$, $f(x)$ está dentro de este entorno.

Análogamente definimos el límite de $f(x)$ cuando $x\to -\infty$.

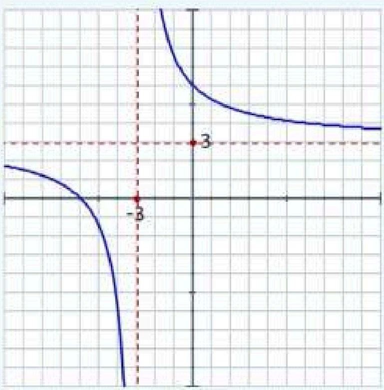


Los expresamos así:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon>0\;\exists K>0$ **tal que si** $x>K$ **entonces** $|f(x)-l|<\epsilon$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon>0\;\exists K<0$ **tal que si** $x<K$ **entonces** $|f(x)-l|<\epsilon$

En el caso $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **será** $\Leftrightarrow\; \forall M>0\;\exists K>0$ **tal que si** $x>K$ **entonces** $f(x)>M$ **y análogamente cuando** $x\to-\infty$ **o el límite es** $-\infty$**.**

Ejercicio



Dada la función de la gráfica, calcula los límites indicados:

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$ _ 　　$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$ _

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$ _ 　　$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$ _

comprobar

1.2.4 Propiedades de los límites

1) El límite de una función en un punto, si existe, es único.

2) Sean f y g funciones tales que: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$ entonces se verifica:

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = l_1 + l_2$
- $\lim\limits_{x \to a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot l_1$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = l_1 \cdot l_2$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$ siempre que sea $l_2 \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)} = l_1^{l_2}$ si $f(x) > 0$

3) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ también se cumplen las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^p = [\lim_{x \to a} f(x)]^p$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

$$\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$$

$$\lim_{x \to a} ln[f(x)] = ln[\lim_{x \to a} f(x)]$$

$\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x \to a} f(x))$ donde h(x) es una función trigonométrica (sen, cos, tg, ...)

Ejercicio

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 1$, calcula:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = \square$$

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

1.3 Cálculo de límites

Para calcular el valor de $\lim_{x \to a} f(x)$ comenzaremos por sustituir la variable por el valor al que tiende y operar, obteniendo un resultado que puede ser finito, infinito o indeterminado.

- Si el resultado es un número el proceso habrá terminado.
- Si el resultado es una fracción en la que el denominador es cero y el numerador no, el límite es infinito pero conviene investigar si es $+\infty$ o $-\infty$, para lo que, si es preciso, estudiaremos los límites laterales.

Ejemplos

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2+2}{x+3} = \frac{2\cdot(-2)^2+2}{-2+3} = 10$$

Otro ejemplo

- Si llegamos a una expresión que no nos permite decir si el límite existe y cuál es su valor, o si no existe, estamos ante una **indeterminación** y como veremos, habrá que manipular la expresión para conseguir otra equivalente en la que los resultados tengan sentido.

Ejercicio

Calcula el siguiente límite:

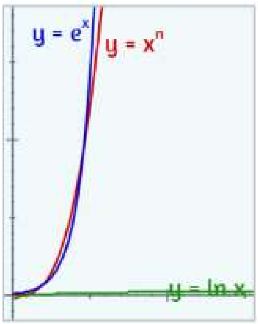
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+1}{x^2-4x+4} = \boxed{}$$

Escribe la respuesta y pulsa enter. Si el valor no es entero redondea a las centésimas. Si es +∞, escribe +inf y si -∞, -inf

comprobar

Al calcular límites en el infinito hemos de tener en cuenta que las propiedades vistas anteriormente también son válidas cuando $x \to \infty$, y por otra parte cómo se opera cuando aparecen expresiones con ∞. En el cuadro siguiente tienes las más usuales.

SUMA Y RESTA	PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA
$(+\infty) \pm k \to +\infty$	$k\cdot(+\infty) \to \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ -\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$	$\dfrac{k}{+\infty} \to 0;\quad \dfrac{k}{-\infty} \to 0$	$k^{+\infty} \to \begin{cases} +\infty & \text{si } k>1 \\ 0 & \text{si } 0\le k<1 \end{cases}$
$(-\infty) \pm k \to -\infty$	$k\cdot(-\infty) \to \begin{cases} -\infty & \text{si } k>0 \\ +\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$	$\dfrac{+\infty}{k} \to \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ -\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$	$k^{-\infty} \to \begin{cases} 0 & \text{si } k>1 \\ +\infty & \text{si } 0\le k<1 \end{cases}$
$(+\infty)+(+\infty) \to +\infty$	$(+\infty)\cdot(+\infty) \to +\infty$	$\dfrac{-\infty}{k} \to \begin{cases} -\infty & \text{si } k>0 \\ +\infty & \text{si } k<0 \end{cases}$	$(+\infty)^{k} \to \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}$
$(-\infty)+(-\infty) \to -\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty) \to -\infty$		$(+\infty)^{+\infty} \to +\infty \quad (+\infty)^{-\infty} \to 0$
	$(-\infty)\cdot(-\infty) \to +\infty$		



Ya conoces los límites en el infinito de las funciones más comunes: potencial, exponencial y logarítmica. ver

Pero los infinitos que aparecen al calcular no son todos "iguales". Si en un límite aparecen funciones de distintos tipos, debemos saber cual crece más rápidamente, ya que esa será la dominante y la que determinará el valor del límite. Así, como puedes ver en la gráfica adjunta:

exponencial > potencial > logarítmica

Por último indicar que para calcular un límite cuando $x \to -\infty$, en ocasiones resulta más fácil aplicar la igualdad $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty} (-x^3+6x^2+9x-54) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (-x^3+6x^2+9x-54) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

(*) El límite es igual al del término de mayor grado y se aplica la regla de los signos.

Otro ejemplo

1.3.1 Indeterminaciones

Si los resultados obtenidos al calcular un límite no nos permiten determinar si existe y cuál es su valor, o si no existe estamos ante una **indeterminación**. Las indeterminaciones básicas son:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \infty - \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \cdot \infty \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$$

A continuación veremos algunos procedimientos de resolución, básicamente aplicaremos el Teorema fundamental del límite, pero para algunos casos necesitaremos otras herramientas que se verán en la Parte III.

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Cuando numerador y numerador son polinomios una forma de resolver esta indeterminación es dividir ambos por la potencia máxima de x. Otra forma más rápida es considerar los términos "dominantes" en numerador y denominador, es decir los términos de mayor grado. Así resulta que:

Dados $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + ... + a_0$ y $P(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + ... + b_0$ tenemos que:

Si p≤ q $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ Si p=q $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p}{b_q}$ Si p>q $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Las reglas son análogas para $x \to -\infty$ y también se aplican si en el numerador o denominador hay una raíz $\sqrt[n]{P(x)}$, o potencia de exponente fraccionario, entendiendo entonces que el grado es p/n.

Ejemplos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^4+5x^3-x^2+x}{-x^4+2x^3-3x^2+2x} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

El grado del numerador es igual al grado del denominador, el límite es $\frac{-3}{-1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^4+5x^3-x^2+x}{-x^4+2x^3-3x^2+2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^4}{-x^4} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Otro ejemplo

Indeterminación $\frac{0}{0}$

Vamos a encontrar esta indeterminación al calcular límites de un cociente de polinomios o un cociente de expresiones con radicales.

- En el primer caso si $x \to a$, el valor a es una raíz del polinomio numerador y del polinomio denominador, luego al factorizarlos $x - a$ es un factor de ambos que se puede simplificar. Si de nuevo apareciese la indeterminación se repite el proceso.
- En el segundo caso se multiplica y divide por el conjugado de la expresión donde aparece la raíz, y después se simplifica.

Ejemplos

1) $$\lim_{x \to 5} \frac{2x^3-7x^2-50x+175}{x^3-18x^2+95x-150} = \frac{0}{0}$$

5 es raíz del polinomio numerador y del polinomio denominador, luego **x-5** es factor de ambos.

	2	-7	-50	175
5)		10	15	-175
	2	3	-35	(0

	1	-18	95	-150
5)		5	-65	150
	1	-13	30	(0

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^3-7x^2-50x+175}{x^3-18x^2+95x-150} = \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(2x^2+3x-35)}{(x-5)(x^2-13x+30)} = \lim_{x \to 5} \frac{2x^2+3x-35}{x^2-13x+30} = \frac{30}{-10} = -3$$

....

2) $$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = \frac{0}{0}$$

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada del denominador

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(\sqrt{x}-\sqrt{7})(\sqrt{x}+\sqrt{7})} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x}+\sqrt{7})}{(x-7)} =$$

$$= \lim_{x \to 7} (\sqrt{x}+\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$$

Otros ejemplos

Indeterminación $0 \cdot \infty$

Este tipo de indeterminación, que trabajaremos más adelante, se resuelve pasando uno de los dos términos del producto al denominador y transformándola así en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ o del tipo $\frac{0}{0}$.

Así si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$,

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)\cdot g(x)] \text{ se puede transformar en } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Indeterminación $\infty - \infty$

Esta indeterminación aparece al calcular límites de funciones en las que hay una diferencia de radicales o bien una diferencia de cocientes de polinomios.

- En el primer caso se multiplica y divide por la expresión conjugada.
- En el segundo se opera la expresión y así se resuelve la indeterminación.

Ejemplos

1) $$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+1}\right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\left(2x + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x^2 - 1}{\left(2x + \sqrt{x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)} = +\infty$$

2) $$\lim_{x\to5} \left(\frac{x}{x-5} - \frac{x+4}{x^2-25}\right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to5} \left(\frac{x}{x-5} - \frac{x+4}{x^2-25}\right) = \lim_{x\to5} \frac{x(x+5) - x - 4}{x^2-25} = \lim_{x\to5} \frac{x^2+4x-4}{x^2-25} = \frac{41}{0} \to \infty$$

Otros ejemplos

Indeterminación 1^{∞}

Esta indeterminación se puede resolver transformando algebraicamente la expresión y recordando la definición del **número e**:

$$e = \lim_{f(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

También se puede aplicar directamente el siguiente resultado:

Si $\lim\limits_{x\to a}[f(x)] = 1$ **y** $\lim\limits_{x\to a}[g(x)] = \infty$ **se verifica que** $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$

Demostración

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}[1+f(x)-1]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{g(x)} = \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{g(x)\frac{f(x)-1}{f(x)-1}} =$$

$$= \lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}g(x)\cdot[f(x)-1]} = \left[\lim_{x\to a}\left[1+\frac{1}{1/[f(x)-1]}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x^2+5x-2}{2x^2-x+4}\right)^{-3x-1} = 1^{+\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+5x-2}{2x^2-x+4}\right)^{-3x-1} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+5x-2}{2x^2-x+4}-1\right)(-3x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(6x-6)(-3x-1)}{2x^2-x+4}} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-18x^2+12x+6}{2x^2-x+4}} = e^{-9}$$

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x-3}{-3x-3}\right)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x-3}{-3x-3}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-3}{-3x-3}-1\right)\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{(-3x-3)(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{-3x-3}} = e^{-\frac{4}{3}}$$

Otros ejemplos

1.3.2 Infinitésimos

Se dice que una función es un **infinitésimo** en $x = a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

- Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ se dice que son del mismo orden si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ y finito.

Si además $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ los infinitésimos se dicen **equivalentes**.

A continuación tienes algunos infinitésimos equivalentes:

Cuando $x \to 0$	$x \sim senx$	$x \sim tgx$	$x \sim ln(1+x)$	$x \sim e^x - 1$
	$x \sim arcsenx$	$x \sim arctgx$	$1 - cosx \sim x^2/2$	

Cuando un infinitésimo aparece como factor en el cálculo de un límite se puede sustituir por otro equivalente, lo que facilita el cálculo de buen número de límites.

Ejemplos

Selecciona: sen x ~ x

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(-3x)}{3x} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(-3x)}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-3x}{3x} = -1$

Otro ejemplo

Ejercicio

Calcula el valor de a para que el siguiente límite sea -4.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax \cdot \ln(1+x)}{1 - \cos x} = -4$

a =

Introduce el resultado y pulsa intro

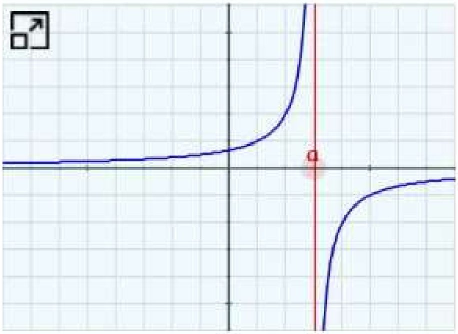
comprobar

1.4 Asíntotas

Se dice que una función tiene una rama **infinita** cuando x, f(x) o ambas crecen indefinidamente. Si la gráfica se aproxima cada vez más a una recta diremos que hay una **asíntota**, si no que la curva tiene una **rama parabólica**.

Asíntotas verticales

Si $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$ cuando x se acerca a un número real a por la izquierda o por la derecha, f se aproxima a la recta vertical $x = a$, es una asíntota.



Una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de $y = f(x)$ cuando se verifica una de estas dos condiciones:

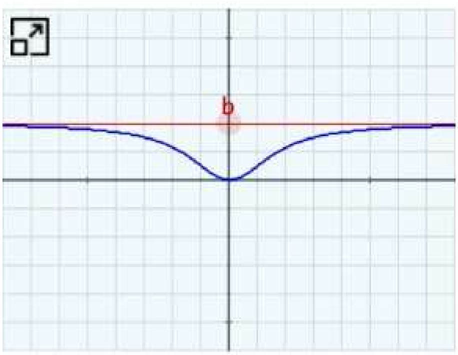
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Así, la recta **x =** 3 es asíntota vertical de $f(x) = \frac{-2}{x-3}$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-2}{x-3} = +\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{-2}{x-3} = -\infty$$

Asíntotas horizontales

Si $f(x)$ tiende a un número real b cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$, f se aproxima a la recta horizontal $y = b$, esta recta es una asíntota.



Una recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de $y = f(x)$ cuando se verifica una o las dos de estas condiciones:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Así, la recta **y =** 2 es asíntota horizontal de

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+3} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2+3} = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+3} = 2$$

Asíntotas oblicuas

Si $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$ cuando x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, la rama infinita puede tener o no un comportamiento asintótico, según se aproxime o no a una recta.

La recta $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ es una **asíntota oblicua** de $y = f(x)$ si se verifican una o las dos de las condiciones:

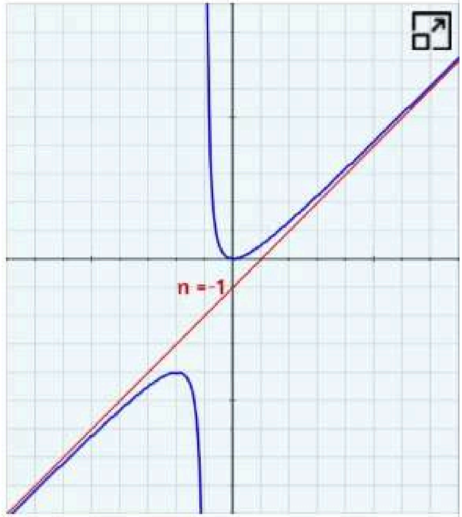
$$\lim_{x \to -0} [f(x) - (mx+n)] = 0 \qquad \lim_{x \to +0} [f(x) - (mx+n)] = 0$$

¿Cómo se calculan m y n?

La recta **y =** 1 x-1 es asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$



Observa que el comportamiento de una función en $+\infty$ o $-\infty$ no tiene por qué coincidir. La función puede tener una asíntota oblicua en un sentido si no tiene asíntota horizontal en ese sentido, y al igual que en el caso de asíntotas horizontales tendrá como máximo dos asíntotas oblicuas.

Ejercicio

Calcula una asíntota oblicua de la función y = f(x).

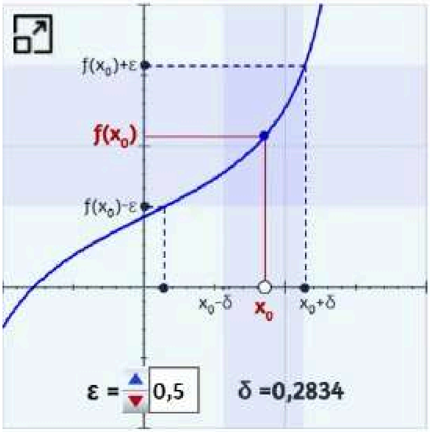
$f(x) = \dfrac{x^2-12x+35}{x-10}$ y = ☐ x + ☐

Introduce los valores con su signo y pulsa intro

comprobar

1.5 Continuidad

1.5.1 Función continua en un punto y en un intervalo



Intuitivamente decimos que una función es **continua** si se puede dibujar con un solo trazo o cuando su gráfica no presenta "saltos" o "agujeros". Pero es preciso formalizar más este concepto.

Para que una función $y = f(x)$ sea **continua en un punto**, debe cumplirse:

1) Que exista $f(x_0)$

2) Que tenga límite cuando $x \to x_0$

3) Que el valor de este límite coincida con el valor de $f(x_0)$

Recuerda la definición de límite, ahora debe ser $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, con lo que podemos escribir:

- Una función $y = f(x)$ es continua en un punto x_0 si y solo si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\text{ tal que si }\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\text{ entonces }\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Continuidad lateral

De la misma manera que definimos los límites laterales podemos considerar:

- Una función es **continua por la izquierda** en x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Una función es **continua por la derecha** en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Continuidad en un intervalo

- Una función es **continua en un intervalo abierto** (a, b) cuando lo es en cada uno de sus puntos.
- Una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ cuando lo es en el intervalo abierto (a, b), a la derecha de a y a la izquierda de b.

1.5.2 Propiedades de las funciones continuas

Dadas las funciones f y g continuas en $x = x_0$, se verifica:

- La función $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ es continua en $x = x_0$.
- La función $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = x_0$.
- La función $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = x_0$, siempre que $g(x_0) \neq 0$.
- Dadas f y g tales que f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en $x = x_0$.

Continuidad de algunas funciones

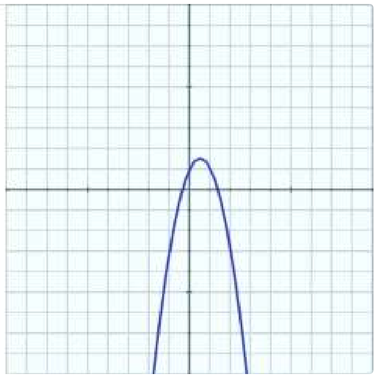
Elige tipo: polinómicas

Grado del polinomio: 2

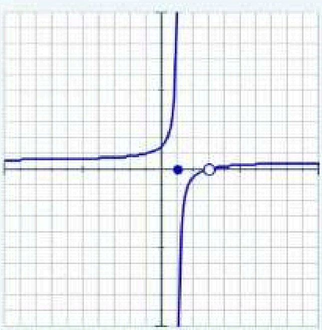
$f(x) = -2x^2+2x+1$

Otra

Continuas en $\mathbb{R}$



Ejercicio



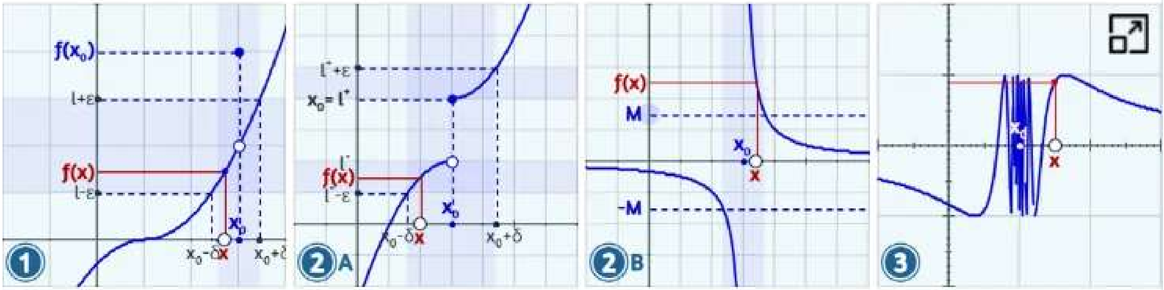
Indica los intervalos de continuidad de la función de la gráfica:

- [ ] $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$
- [ ] $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- [ ] $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

comprobar

1.5.3 Tipos de discontinuidad

Según cuál sea la que no se cumpla de las tres condiciones para que una función sea continua en un punto, nos encontramos con distintos tipos de discontinuidad. Vamos a distinguir:



1. **Discontinuidad evitable**: Existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero no coincide con $f(a)$ o bien $f(a)$ no existe.

   La discontinuidad se podría "evitar" redefiniendo la función y dando a $f(a)$ el valor del límite, de ahí el nombre.

2. **Discontinuidad de primera especie**. A su vez puede ser:

   a) De **salto finito** si existen los límites laterales y son finitos pero no coinciden

   b) De **salto infinito** si uno o los dos límites laterales son ∞.

3. **Discontinuidad de segunda especie**: Si la función no existe a la izquierda o a la derecha del punto a, o no existen alguno, o ambos, de los límites laterales de la función en ese punto.

Ejercicio

Calcula el valor de k para que la función sea continua en x = 2

$$f(x)=\begin{cases} -3x-2 & \text{si } x\le 2 \\ x^2+k & \text{si } x>2 \end{cases}$$

k = ☐

Introduce el resultado y pulsa intro

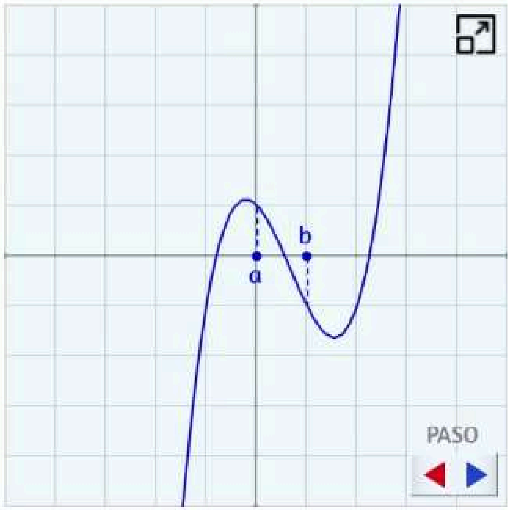
comprobar

1.6 Teoremas en funciones continuas

1.6.1 Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y tal que toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Para demostrarlo se emplea el **método de bisección**, que se ejemplifica en la escena adjunta.



Si es $f(a)>0$ y $f(b)<0$, tomamos el punto medio entre a y b, $m_0= (a+b)/2$, si $f(m_0) = 0$, ya estaría probado, y si no f toma valores de signos opuestos bien en el intervalo (a, m_0), bien en el (m_0, b), en nuestro caso en el (m_0, b).

Si f no es cero en el punto medio de este nuevo intervalo, construimos de forma análoga otro tal que f toma valores de signo opuesto en sus extremos.

Repetimos el proceso y construimos así una sucesión de intervalos, cada uno contenido en el anterior, de longitud la mitad de la de este y tal que en los extremos de cada uno de ellos f toma valores de distinto signo.

Y la sucesión de intervalos así formada determina un punto c que cumple que $f(c) = 0$.

Este método se aplica también para encontrar soluciones aproximadas de la ecuación $f(x) = 0$.

Ejemplos

Encuentra un intervalo en el que la ecuación $x^3-x+2 = 0$ tiene al menos una solución.

La función $f(x) = x^3-x+2$ es continua en $\mathbb{R}$, por tanto bastará encontrar un intervalo en cuyos extremos tome valores de signos opuestos.

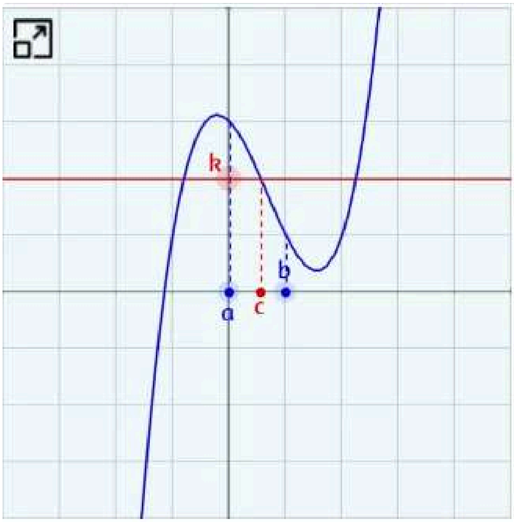
Por ejemplo $f(-1) = 2 > 0$ y $f(-2) = -4 < 0$, entonces existe un valor $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$, solución de la ecuación propuesta.

Otro ejemplo

1.6.2 Propiedad de Darboux

Si $y = f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y m es un valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = m$.

De forma intuitiva podemos ver que si una función es continua en el intervalo $[a, b]$ tomará todos los valores comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$. Para demostrarla podemos aplicar el teorema de Bolzano:



Consideremos un valor k tal que $f(a) < k < f(b)$, y la función $F(x) = f(x) - k$, que cumple:

- F es continua en $[a, b]$ por serlo $y = f(x)$ y k constante.
- $F(a) = f(a) - k < 0$ y $F(b) = f(b) - k > 0$.

F cumple, por tanto, las condiciones del **Teorema de Bolzano**, luego existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $F(c) = 0$.

Y como $F(c) = f(c) - k = 0$, resulta ser $\boldsymbol{f(c) = k}$.

Este resultado es una consecuencia y a la vez una generalización del teorema de Bolzano, ya que si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, el 0 está obviamente comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

1.6.3 Funciones acotadas. Teorema de Weierstrass

Funciones acotadas

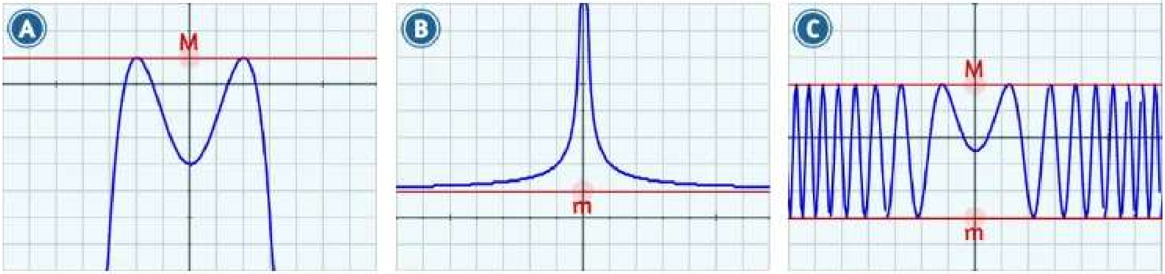
Dada una función real de variable real, f, diremos que:

A. f está **acotada superiormente** en $\mathbb{R}$ si hay un valor M tal que $f(x) \leq M$ para todos los valores que toma f(x). El número M es una **cota superior** de f.

B. f está **acotada inferiormente** en $\mathbb{R}$ si hay un valor m tal que $f(x) \geq m$ para todos los valores que toma f(x). El número m es una **cota inferior** de f.

C. f está **acotada** en $\mathbb{R}$ si lo está superior e inferiormente.

Observa los ejemplos:



A la menor de las cotas superiores se le llama **supremo**, si pertenece al conjunto Imagen de la función se dice que es el **máximo absoluto**. A la mayor de las cotas inferiores se le llama **ínfimo**, si pertenece al conjunto Imagen de la función se dice que es el **mínimo absoluto**. Aunque pueden coincidir, máximo y mínimo absolutos no se deben confundir con los máximos y mínimos relativos.

Teorema de Weierstrass

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, entonces f alcanza al menos un **máximo** y un **mínimo absolutos** en $[a, b]$.

Este teorema es consecuencia del hecho de que toda función continua está acotada en un intervalo. Por ello, tendrá supremo e ínfimo en el intervalo. El supremo será su mínimo y el ínfimo su máximo.

Ver la demostración

Ejercicio

Indica si se puede asegurar que existe un punto c en el intervalo (2, 10) tal que f(c) = 0.

$f(x) = x^3-18x^2+101x-180$

- [ ] No, porque f no es continua en (2, 10)
- [ ] No, porque signo(f(a)) = signo(f(b))
- [ ] Sí, por el teorema de Bolzano

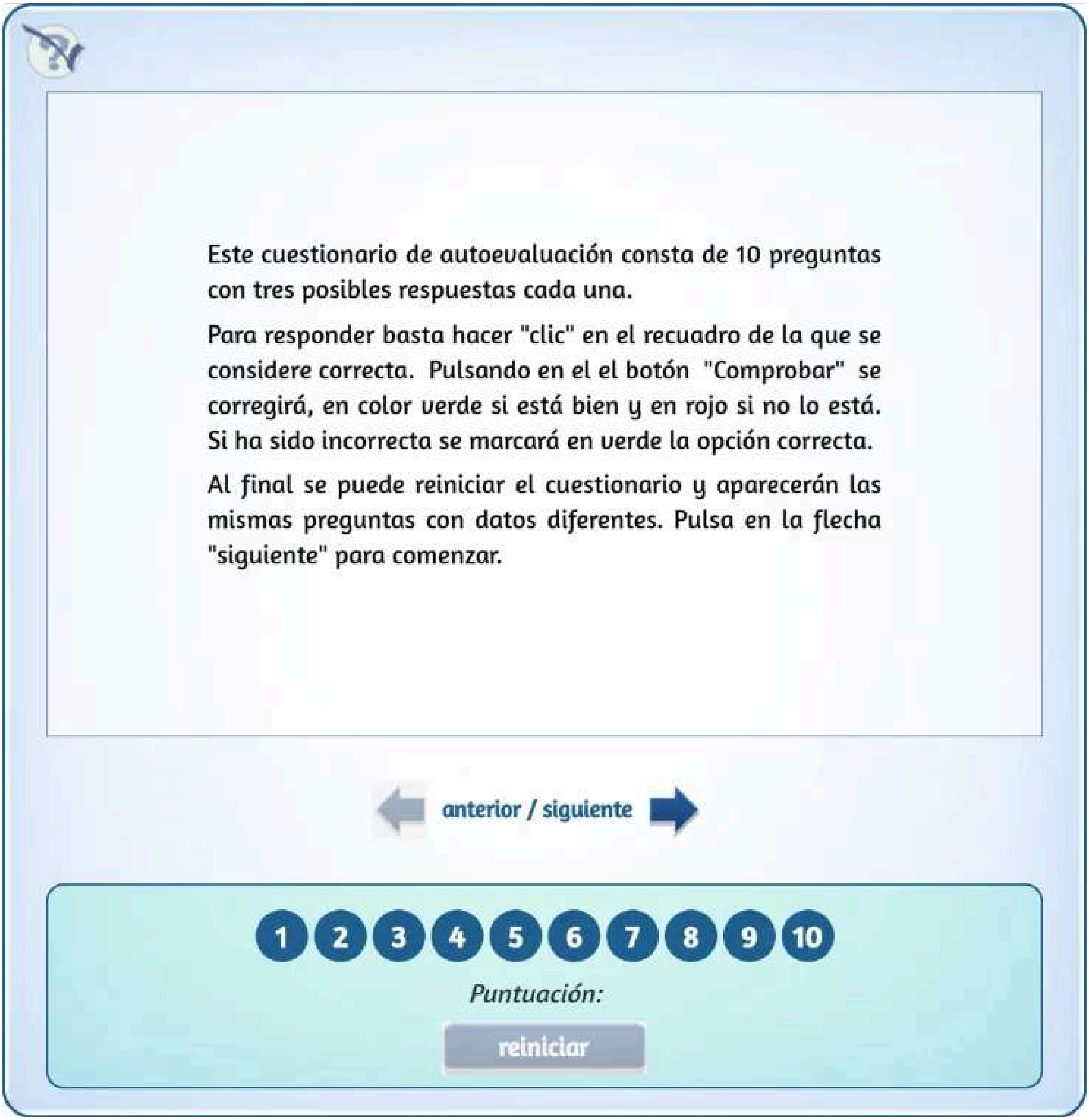
comprobar

1.6.4 Ejercicios para practicar

A continuación se presentan más ejercicios para practicar. Puedes elegir en el menú el tipo que prefieras para empezar. De todos ellos se ofrece la solución.

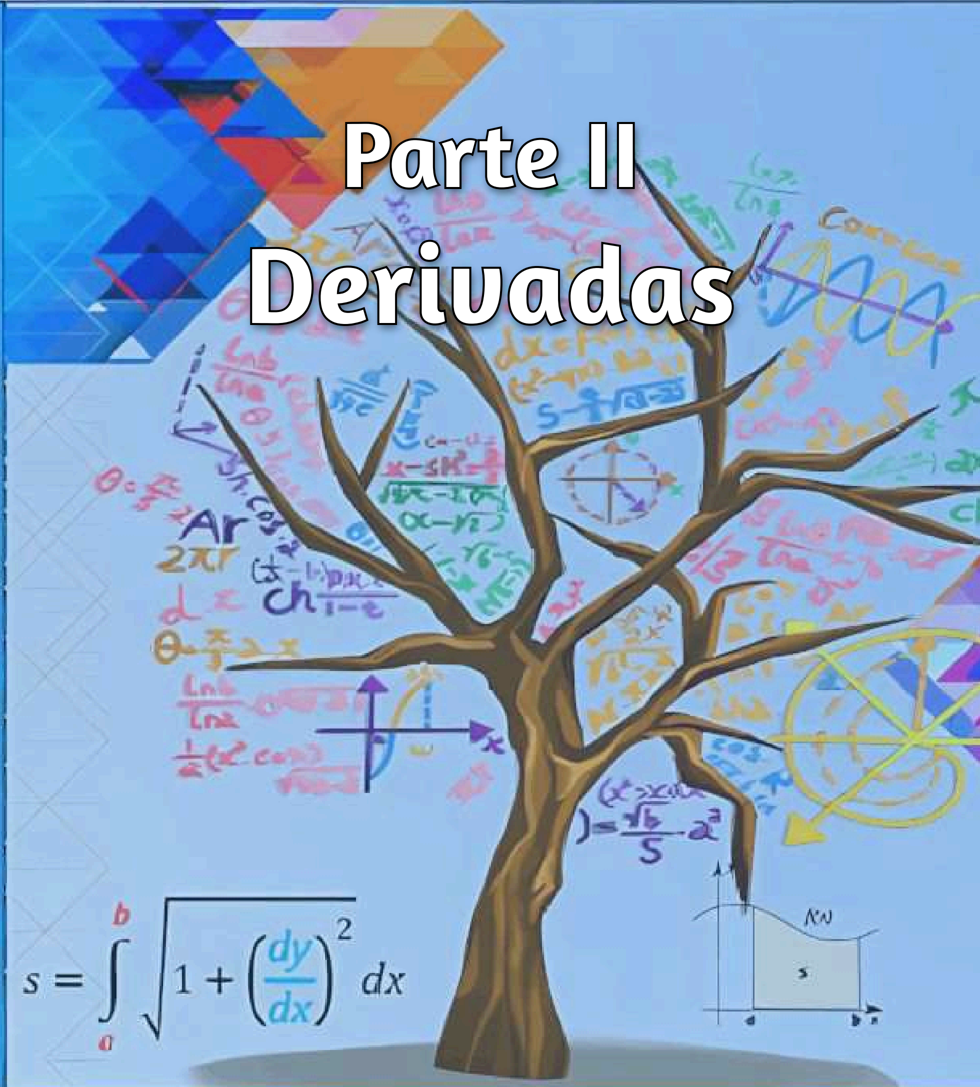
1.6.5 Autoevaluación

Ahora puedes hacer el siguiente cuestionario de autoevaluación para comprobar lo aprendido en esta sección.



Parte II

Derivadas



José R. Galo Sánchez

2.1 Derivadas

2.1.1 El problema de la recta tangente

El Cálculo y con él el concepto de derivada, o viceversa, surgió en el siglo XVII ligado a varios problemas: la determinación de la recta tangente, el estudio de la velocidad y aceleración o relación de cambio, el localizar máximos y mínimos y el cálculo de áreas. Descartes, Barrow, Newton y Leibniz, entre otros gigantes, contribuyeron a precisar la respuesta.

Análisis del problema

Formalicemos para funciones, que es el objeto de nuestro estudio, lo que antes hemos indicado, pero sólo esbozado:

"La recta tangente a una función $f(x)$ en $x = a$ es aquella que pasa por $(a, f(a))$ y es la que más se parece a la función en el entorno $x \in (a - \delta, a + \delta)$ próximo de él". Y ¿cómo expresar ese parecido?

1. La recta tangente es una de las del haz de rectas secantes $y - f(a) = m\,(x - a)$. Hay que hallar valor de m adecuado. Ese es el objetivo final.
2. Entorno próximo de a significaría $x \in (a - \delta, a + \delta)$ con δ tan próximo a 0 como se desee.
3. $f(x) - f(a)$ es un infinitésimo en el entorno anterior.
4. $y - f(a) = m\,(x - a)$ es otro infinitésimo en ese mismo entorno.
5. En ese entorno $f(x) - f(a)$ ha de tener un comportamiento análogo que $y - f(a)$, es decir, ha de ser similar a $m\,(x - a)$, ¡ése es el parecido observado y reseñado! Y el microscopio matemático antes usado es... Sí, es ¡el límite!

Por tanto: $f(x) - f(a)$ y $m\,(x - a)$ han de ser infinitésimos equivalentes, es decir :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{m\,(x - a)} = 1 \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$$

Definición: La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $y - f(a) = m\,(x - a)$ con

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La recta perpendicular a la tangente, que pasa por $(a, f(a))$, es la recta normal:

$$y - f(a) = -\frac{1}{m}(x - a)$$

2.1.2 La derivada de una función en un punto

Dada una función $f(x)$ definimos la derivada de ella en a y la denotaremos $f'(a)$ a

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

o bien tomando $h=x-a$ se tiene la definición equivalente

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si consideramos los límites laterales podemos definir la derivada por la izquierda, $f'(a^-)$, y por la derecha $f'(a^+)$:

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\qquad f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y, consecuentemente, la derivada $f'(a)$ existirá cuando existan las derivadas laterales y coincidan.

En la escena de la derecha observa cómo varía el valor del cociente incremental $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ o tasa de variación media de f en $[a, a+h]$.

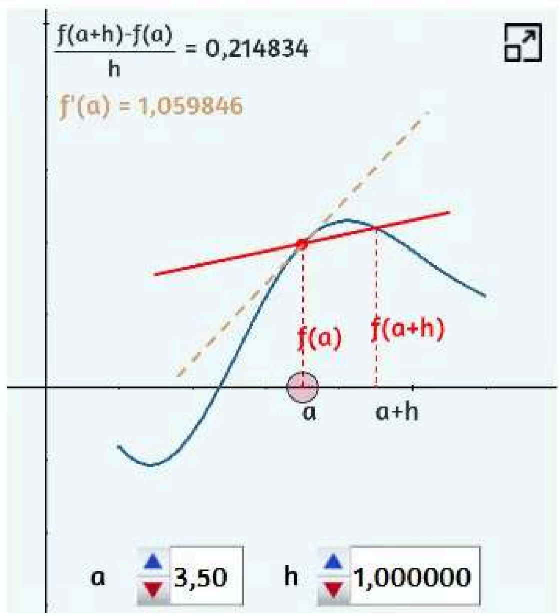
Esta es la pendiente de la recta

$$y-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)$$

que es la recta secante a f en el punto $(a, f(a))$ y en el $(a+h, f(a+h))$.

Cambiando los valores de $h\to 0$, considerando tanto valores negativos como positivos, la tasa de variación media se aproxima a la derivada por la izquierda $f'(a^-)$ y por la derecha $f'(a^+)$ respectivamente.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$.



Nota bene: A lo largo de la historia del Cálculo, diversos autores han propuesto distintas notaciones para la derivada. La usada anteriormente en la que se incluye un apóstrofo (') a continuación del nombre de la función (es decir: f') y que se lee "efe prima" se debe a Lagrange. Leibniz lo escribía como $\frac{df}{dx}$ que se lee "derivada de f respecto a x" o "diferencial de f, diferencial de x" o simplemente "df, dx" y recuerda al cociente incremental. Cauchy utiliza $D_x f$ reflejando la derivada como un operador que actúa sobre funciones. Aquí utilizaremos la notación de Lagrange, pero conviene conocer las otras dos.

2.1.3 Derivabilidad y continuidad

Continuidad y derivabilidad

Para que una función sea derivable en un punto ha de ser continua en ese punto, pero lo recíproco no es cierto. Consecuentemente la continuidad es una condición necesaria, pero no suficiente para la derivabilidad.

1) Derivabilidad ⇒ continuidad

Demostración:

Si f es derivable en a $\Rightarrow \exists\, f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right) = f'(a) \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a)\, 0 = 0, \text{ es decir,}$$

$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$ y, por tanto, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Luego f(x) es continua en a.

Apliquemos los conceptos anteriores en algunos ejercicios:

Ejemplos

1) Estudia la derivabilidad de $f(x) = x^2$ en $x = 0$, y determina la recta tangente y normal en ese punto si existe.

Para que sea derivable ha de ser continua, es decir, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

a) f está definida en x=0 y $f(0) = 0$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

luego se verifica que es continua y, por tanto, puede ser derivable.

Calculemos $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$

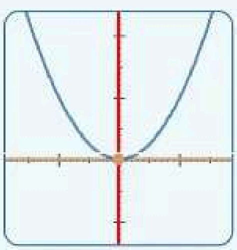
f es derivable en $x = 0$ y por tanto $f(x)$ tiene recta tangente y normal en $(0, f(0))$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$y - 0 = 0(x - 0)$$

$$y = 0$$

La recta tangente es horizontal, luego la recta normal es vertical y como pasa por $(0, f(0))$ la ecuación de la recta normal es $x = 0$.



Siguiente ▶

2.1.4 Función derivada y derivadas sucesivas

Dada una función $f(x)$ podemos construir una nueva función asignando a cada x el valor de su derivada. A esta función la llamamos función derivada o derivada primera y la denotamos $f'(x)$.

Dado que $f'(x)$ es una función podemos hallar su función derivada a la que denominaremos derivada segunda y denotamos $f''(x) = (f'(x))'$.

Y la derivada de la derivada segunda será la función derivada tercera $f'''(x) = (f''(x))'$ y así, de manera continuada, la derivada cuarta, quinta,... n-ésima que escribiremos $f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x)$.

A partir de una función f obtenemos infinitas derivadas sucesivas $f^{(n)}, n \in \mathbb{Z}$.

El cálculo de la función derivada de una función f implica la determinación de la derivada en todos los puntos de su dominio, lo que representa, en general, el cálculo de una infinidad de límites. Un cálculo arduo, salvo que lo abordemos de una manera lógica y sistemática.

Cálculo de derivadas

1) Derivada de la función constante

Si $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$

Demostración:

$f(x)$ esta definida y es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$, luego puede ser derivable.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Ejemplos:

$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = -5 \Rightarrow f'(x) = 0$

Sintetizando los resultados anteriores tenemos:

Álgebra de derivadas

Derivada de la suma

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Derivada del producto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Regla de la cadena

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Derivada de una constante por una función

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x)$$

Derivada del cociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Derivada de la función recíproca

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Al verificarse las dos primeras propiedades se dice que la derivación es una operación lineal.

Derivadas de funciones elementales

Función constante

$$\text{Si } f(x) = c,\; c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

Potencia de exponente racional

$$\text{Si } f(x) = x^q,\; q \in \mathbb{Q} \Rightarrow f'(x) = q\,x^{q-1}$$

Procedamos a calcular las derivadas de más funciones elementales y así, mediante la aplicación del álgebra de derivadas, podremos derivar todas las funciones que sean suma, resta, producto, cociente, composición y/o recíprocas de dichas funciones elementales.

Quedaría sin cubrir el caso de una función elevada a una función, pero todo a su tiempo. Lo importante es que con cinco reglas y el conocimiento de esas derivadas elementales podemos derivar infinitas funciones.

Derivadas de funciones elementales

1) Derivada del seno y del coseno

$(sen\ x)' = cos\ x$ y $(cos\ x)' = -\ sen\ x$

Demostración:

$f(x) = sen\ x$ esta definida y es continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$, luego puede ser derivable.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen\ x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(sen\ x\ cos\ h + cos\ x\ sen\ h - sen\ x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cos\ x\ sen\ h - sen\ x\ (1 - cos\ h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(cos\ x \frac{sen\ h}{h} - sen\ x \frac{1 - cos\ h}{h} \right)$$

y recordando que $sen\ h \sim h$ y $(1 - cos\ h) \sim \frac{h^2}{2}$ en $h = 0$,

$$= (cos\ x)\ 1 - (sen\ x)\ 0 = cos\ x$$

Una demostración análoga puede aplicarse para la derivada de $f(x) = cos\ x$.

En base a los resultados anteriores podemos construir la siguiente tabla de derivadas de las funciones elementales y de las funciones compuestas basadas en ellas.

Tabla de las derivadas de las funciones elementales

Función potencial

$f(x) = x^{\alpha} \Rightarrow f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}$ $\qquad$ $g(x) = f(x)^{\alpha} \Rightarrow g'(x) = \alpha\, f(x)^{\alpha - 1}\, f'(x)$

Funciones trigonométricas

$f(x) = sen\, x \Rightarrow f'(x) = cos\, x$ $\qquad$ $g(x) = sen\,(f(x)) \Rightarrow g'(x) = cos\,(f(x))\, f'(x)$

$f(x) = cos\, x \Rightarrow f'(x) = -\, sen\, x$ $\qquad$ $g(x) = cos(f(x)) \Rightarrow g'(x) = -\, sen\,(f(x))\, f'(x)$

$f(x) = tg\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{cos^2 x} = (1 + tg^2 x)$ $\qquad$ $g(x) = tg\,(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{cos^2(f(x))} f'(x) = (1 + tg^2(f(x))\, f'(x)$

Funciones trigonométricas inversas

$f(x) = arcsen\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $g(x) = arcsen\,(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} f'(x)$

$f(x) = arccos\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $g(x) = arccos(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - (f(x))^2}} f'(x)$

$f(x) = arctg\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $g(x) = arctg\,(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1 + (f(x))^2} f'(x)$

Funciones exponenciales

$f(x) = e^{x} \Rightarrow f'(x) = e^{x}$ $\qquad$ $g(x) = e^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$

$f(x) = a^{x} \Rightarrow f'(x) = a^{x}\, ln\, a$ $\qquad$ $g(x) = a^{f(x)} \Rightarrow g'(x) = a^{f(x)}\, ln\, a\; f'(x)$

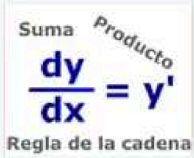
Funciones logarítmicas

$f(x) = ln\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = ln\,(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{f(x)} f'(x)$

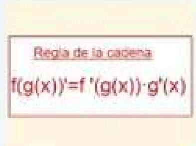
$f(x) = log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\, ln\, a}$ $\qquad$ $g(x) = log_a(f(x)) \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{f(x)\, ln\, a} f'(x)$

Ejercicios

Pulsa sobre la imagen para practicar ejercicios de cálculo de derivadas



Pulsa sobre la imagen para practicar con más ejercicios de la regla de la cadena



Derivación logarítmica e implícita

1) Derivada de una función elevada a una función (derivación logarítmica)

El cálculo de la derivada y' de la función $y = f(x)^{g(x)}$ puede abordarse tomando primero logaritmos, con lo que se convierte en un producto de funciones, y aplicando la regla de la cadena. Esta técnica se conoce como derivación logarítmica.

a) Tomar logaritmos: $\ln y = g(x) \ln (f(x))$

b) Derivación en la identidad anterior: $\dfrac{y'}{y} = g'(x) \ln (f(x)) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

c) Despejar: $y' = y \left(g'(x) \ln (f(x)) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right)$ $\quad y' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln (f(x)) + g(x) \dfrac{f'(x)}{f(x)} \right)$

También puede expresarse de la siguiente forma

$$y' = f(x)^{g(x)} \ln (f(x)) \; g'(x) \; + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$$

derivada como exponencial + derivada como potencial

Ver ejemplos

Derivadas de orden superior

1) Determinar las infinitas derivadas del polinomio

$$p(x)= 4\,x^3 + 5\,x^2 - 3\,x + 8$$

Solución:

$p'(x) = 12\,x^2 + 10\,x - 3$

$p''(x) = 24\,x + 10$

$p'''(x) = 24$

$p^{4)}(x) = 0$ Nota: A partir de la derivada cuarta suele usarse la notación n)

$p^{5)}(x) = 0$

$p^{6)}(x) = 0$

...

$p^{n)}(x) = 0 \quad$ para $n \geq 4$

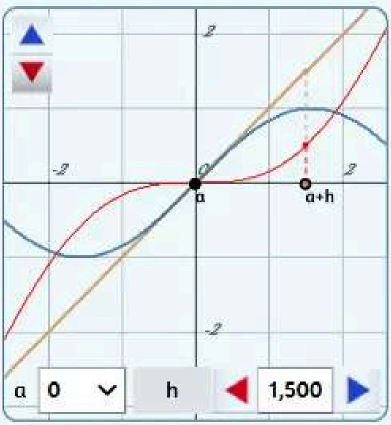
2.1.5 Aproximación lineal y diferencial de una función en un punto

La evaluación de una función en un punto puede entrañar la necesidad de realizar cálculos complejos, debido a ello (pensemos cuando no existían calculadoras) podemos tratar de aproximar una función por un polinomio de primer grado y de esta manera hacer dicha valoración sin más que realizar una suma y una multiplicación. Así pues, dada $f(x)$ hallemos $L(x) = mx + n$ tal que $f(x) \simeq L(x)$ en un entorno de $x = a$. Pero, si la función es derivable en a, ya tenemos la respuesta a este problema porque vimos que la recta tangente: $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la que mejor aproxima a $f(x)$ en el entorno de a. Por tanto, $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$ o bien $f(a + h) \simeq f(a) + f'(a)h$. Obviamente, para aproximar el valor de $f(a + h)$ tenemos que conocer $f(a)$ y $f'(a)$. Esta aproximación será adecuada para valores próximos a a (h próximo a cero), pero no hay garantía o puede diferir mucho si x no está "cercano".

Aproximación lineal de una función

1) Aproximación lineal, un primer ejemplo

Por trigonometría básica el cálculo de las razones trigonométricas puede reducirse a ángulos del primer octante y en éste es conocido el valor del seno y el coseno en 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, luego podemos usar la aproximación lineal de f(x) = sen x para evaluar esta función en un entorno de esos ángulos:



L(0 + h) = f(0) + f'(0) h   error e(x) = L(x) - f(x)

L(0 + h) = 0 + 1 h

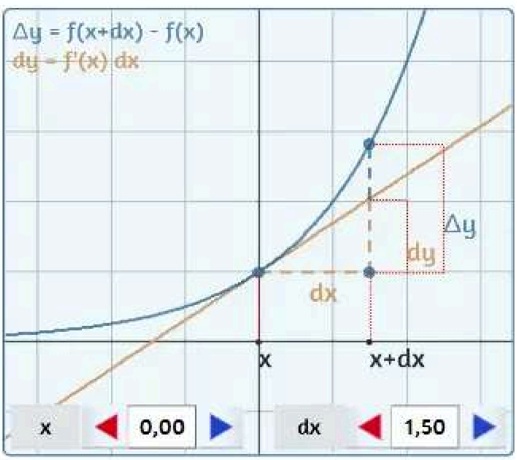
h	0 + h	L(0 + h)	f(0 + h)	e(0 + h)
-1,000	-1,000	-1,000	-0,841	-0,15852902
-0,100	-0,100	-0,100	-0,100	-0,00016658
-0,010	-0,010	-0,010	-0,010	-0,00000017
-0,001	-0,001	-0,001	-0,001	-0,00000000
0,000	0,000	0,000	0,000	0,00000000
0,001	0,001	0,001	0,001	0,00000000
0,010	0,010	0,010	0,010	0,00000017
0,100	0,100	0,100	0,100	0,00016658
1,000	1,000	1,000	0,841	0,15852902
1,500	1,500	1,500	0,997	0,50250501

Aunque se indica aproximación lineal, por ser la gráfica de $L(x) = mx + n$ una línea recta, hay que matizar que esta función solo es realmente una función lineal (de proporcionalidad directa) si $n = 0$.

Si en lugar de aproximar el valor de la función en x lo hacemos con el incremento o variación de la función $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, tendríamos que $\Delta y \simeq f'(x)h$ o bien $\Delta y \simeq f'(x)\Delta x$, pues $h = (x+h) - x$ es la variación o incremento de la variable independiente. Por tanto, Δy podemos aproximarlo por la siguiente función en la que vamos a denotar la variable dependiente como dy y la independiente como dx y que viene definida como $dy = f'(x)dx$. Esta función sí que es estrictamente lineal y se denomina diferencial.

La definición anterior tiene relación con la notación de Leibniz para la derivada: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y, como hemos visto, es especialmente útil para cálculos en los que dx es pequeño ya que en esos casos dy aproxima muy bien a Δy y por tanto $f(x+dx) \simeq f(x) + dy$, o bien en razonamientos como el siguiente $(x+dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2 \simeq x^2 + 2xdx$ porque si dx es un valor próximo a cero dx^2 es más pequeño aún y, por tanto, "despreciable" frente al primero. Pero insistamos que siempre hay un error ϵ que es necesario controlar para realizar operaciones matemáticamente correctas $\Delta y = dy + \epsilon$.

En la siguiente escena puede observarse geométricamente la relación entre Δy y dy. También rescribiremos el álgebra de derivadas expresadas como diferenciales.



Álgebra de diferenciales

Si $c \in \mathbb{R}$ y u, v son funciones derivables de x.

$du = u'\,dx$ y $dv = v'\,dx$

Múltiplo constante: $d[c\,u] = c\,du$

Suma o diferencia: $d[u \pm v] = du \pm dv$

Producto: $d[u\,v] = u\,dv + v\,du$

Cociente: $d[\frac{u}{v}] = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

Regla de la cadena $y = v \circ u$

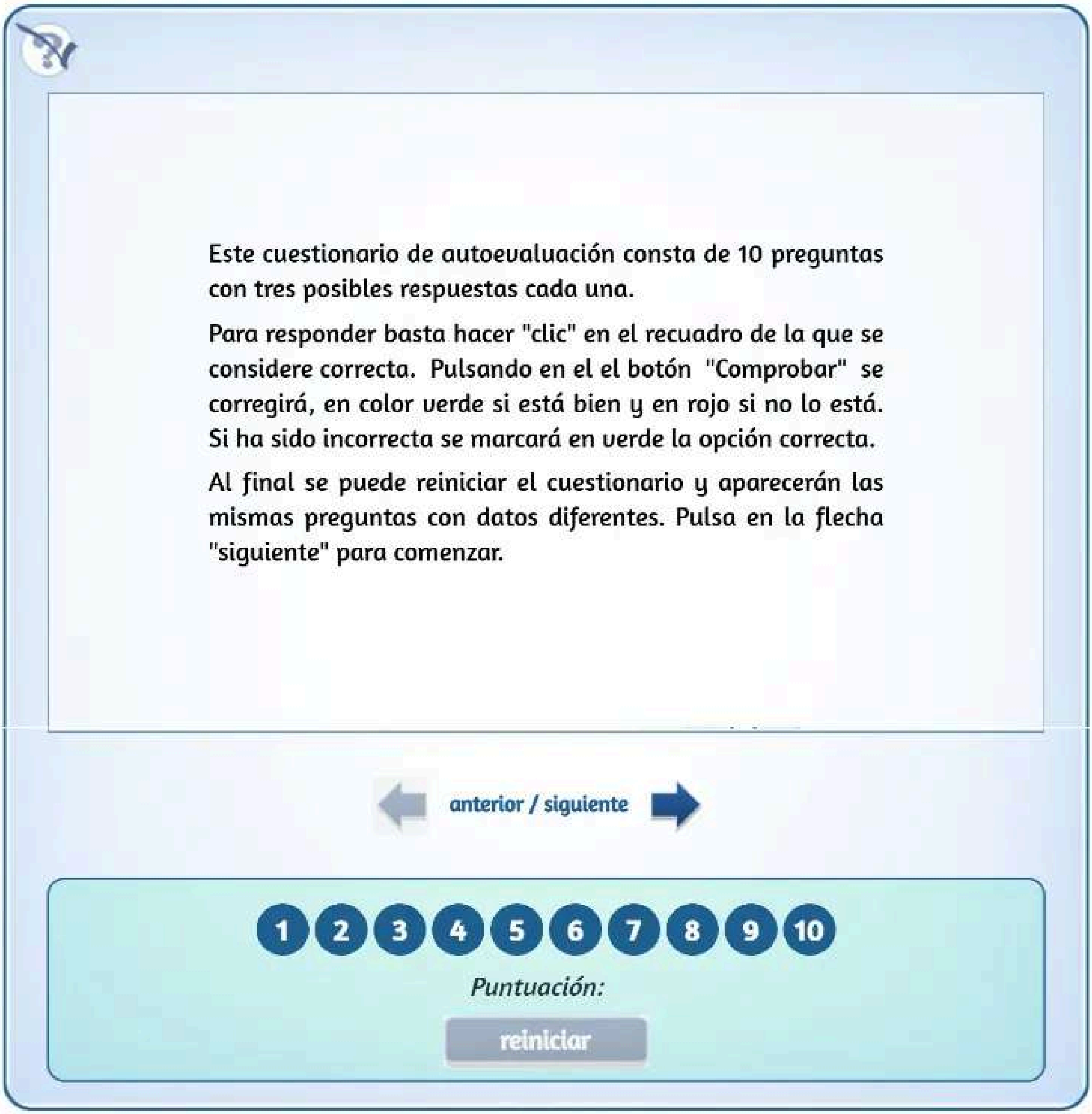
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}\,\frac{du}{dx}$$

2.1.6 Ejercicios para practicar

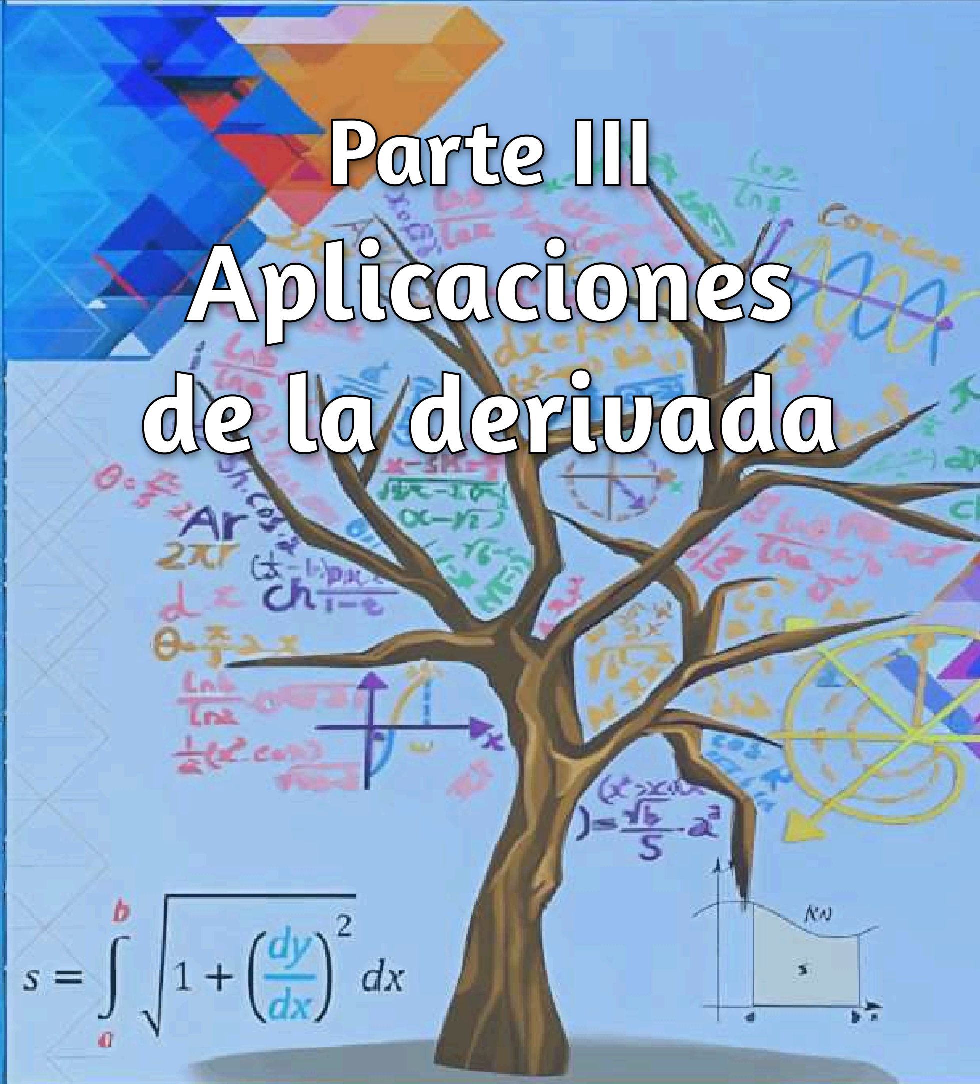
A continuación se presentan más ejercicios para practicar. Puedes elegir en el menú el tipo que prefieras para empezar. De todos ellos se ofrece la solución.

2.1.7 Autoevaluación

Ahora puedes hacer el siguiente cuestionario de autoevaluación para comprobar lo aprendido en esta sección.



Parte III
Aplicaciones de la derivada



María José García Cebrian

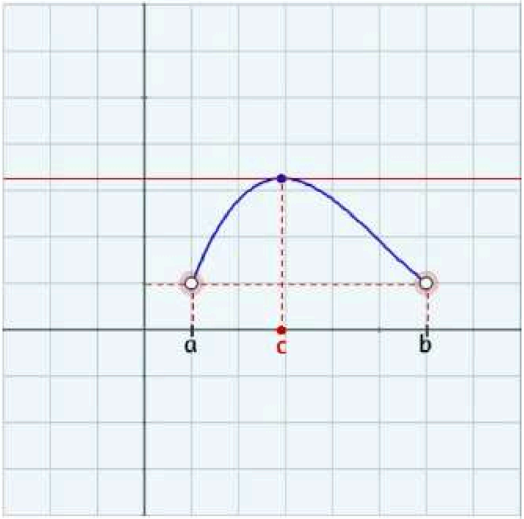
3.1 Teoremas en funciones derivables

3.1.1 Teorema de Rolle

Sea f una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

Si $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Como es continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass alcanza en ese intervalo un máximo y un mínimo absolutos. Puede ocurrir que:



a) Estos valores máximo y mínimo no se alcancen en (a, b), entonces se alcanzan en los extremos, pero $f(a) = f(b)$ y por tanto máximo y mínimo coinciden, la función es constante.
Luego $f'(c) = 0 \; \forall c \in (a, b)$

b) El máximo o el mínimo, o ambos, se alcanzan en (a, b). Sea $c \in (a, b)$ y supongamos que es $f(c)$ el valor máximo. Como la función es derivable en (a, b), existe $f'(c)$. Si en c hay un máximo, f es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha, por tanto:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Al existir $f'(c)$ ambos deben coincidir, luego $f'(c) = 0$

Ejemplos

¿Cumple la función $f(x) = x^3 - 7x^2$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 7]$? En caso afirmativo, ¿en qué punto?

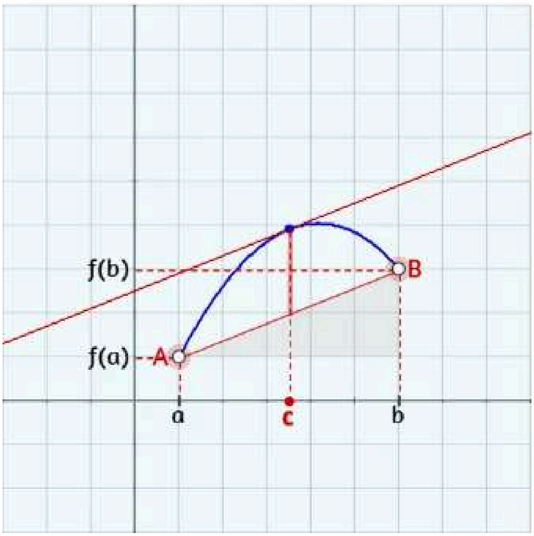
- $f(x)$ es una función polinómica, por tanto continua en $[0, 7]$ y derivable en $(0, 7)$
  $f(0) = 0$ y $f(7) = 0$, luego en efecto se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle.
- $f'(x) = 3x^2 - 14x = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; x = \frac{14}{3}$ y $x = \frac{14}{3} \in (0, 7)$ es el valor buscado.

Otro ejemplo

3.1.2 Teorema del valor medio de Lagrange

Sea f una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



La ecuación de la recta que une los puntos A y B es:

$$y - f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

consideremos la función $y = g(x)$ que da la distanci entre esa recta y $f(x)$.

$$g(x) = f(x) - [\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)]$$

La función g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) además cumple que $g(a) = g(b) = 0$.
Luego por el teorema de Rolle sabemos que existe al menos un valor $c \in (a, b)$ en el que $g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b - a} = 0$$

Por tanto $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ con $c \in (a, b)$

Ejercicio

Sea f una función continua y derivable tal que f(0) = 7. ¿Cuánto tiene que valer f(3) para asegurar que en el intervalo (0, 3) existe un c tal que f'(c) = 5?

f(3) =

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

3.1.3 Regla de L'Hôpital

En el capítulo anterior se resolvieron algunas indeterminaciones del tipo $0/0$ y ∞/∞, ahora vamos a ver un resultado que permite un método general de resolución en estos casos, la **Regla de L'Hôpital**.

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La demostración de este resultado en el caso más general es complicada, pero si tomamos f y g de forma que f' y g' sean continuas en a y $g'(a) \neq 0$ la justificación es sencilla. Como f y g son derivables en a, son continuas en a y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \Rightarrow f(a) = g(a) = 0$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La aplicación de la regla como se ve es fácil, una vez comprobado que se cumplen las hipótesis, se derivan por separado numerador y denominador y se vuelve a tomar límites. Si de nuevo se obtiene la indeterminación, se repite el proceso, y así las veces que sean necesarias. Aunque no es habitual puede ocurrir que al aplicar L'Hôpital, se complique cada vez más la expresión resultante, en ese caso habría que recurrir a otros métodos.

Ejemplos

1) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-6x^2-16x+96}{x^3-19x^2+116x-224} = \frac{0}{0}$ Se cumplen las condiciones de la regla de L'Hôpital.

Derivamos numerador y denominador y aplicamos límites:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-6x^2-16x+96}{x^3-19x^2+116x-224} = \lim_{x\to 4} \frac{3x^2-12x-16}{3x^2-38x+116} = \frac{-16}{12} = -\frac{4}{3}$$

Otro ejemplo

La regla de L'Hôpital también resuelve otras clases de indeterminaciones, como las del tipo $\frac{0}{0}$ cuando $x \to \infty$, o indeterminaciones de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

  Este resultado se justifica teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}\cdot g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, con $a \in \mathbb{R}$ o $a = \infty$ si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

- La indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ se puede resolver aplicando la regla de L'Hôpital expresándola como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, y las de tipo ∞^0 y 0^0 también, expresándolas en forma exponencial y procediendo después como en los casos anteriores.

Ejemplos

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-8x}{6x^2+3x-10} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Se cumplen las condiciones de la regla de L'Hôpital.
Derivamos numerador y denominador y aplicamos límites.
Como se repite la indeterminación repetimos el proceso dos veces:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-8x}{6x^2+3x-10} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x-8}{12x+3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Otro ejemplo

3.2 Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

3.2.1 Crecimiento y decrecimiento

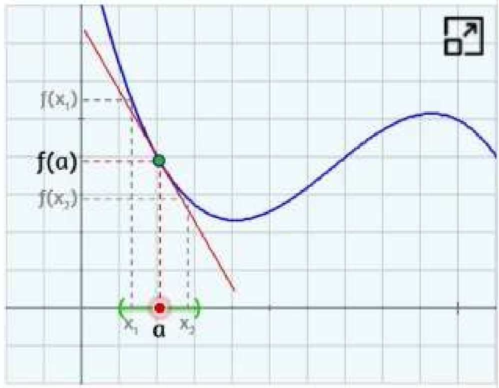
Recuerda que si f es una función definida y continua en un entorno del punto a, entonces:

- f es **creciente** en a si existe un entorno de a en el que $f(x) \le f(a)$ para todo x de dicho entorno tal que $x < a$ y $f(x) \ge f(a)$ cuando $x > a$.
- f es **decreciente** en a si existe un entorno de a en el que $f(x) \ge f(a)$ para todo x del entorno tal que $x < a$ y $f(x) \le f(a)$ cuando $x > a$.

Si la función es derivable en a, el signo de la derivada indica si la función es creciente o decreciente. Así:

- Si $f'(a) > 0$, f es **creciente** en a.
- Si $f'(a) < 0$, f es **decreciente** en a.
- Si f tiene un **máximo** o un **mínimo** relativo en a entonces $f'(a) = 0$.

Puedes observarlo en la escena arrastrando el punto a. El signo de la derivada es el de la pendiente de la recta tangente a la curva en (a, f(a)).
También puedes ***ver la demostración***



Ejemplos

Calcula los intervalos de crecimiento y de crecimiento de la función $f(x) = -x^3+12x^2-45x+3$.

Calculamos la derivada $f'(x) = -3x^2+24x-45$ y los puntos en que se anula:

$$-3x^2+24x-45 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 5$$

Calculamos el signo de la derivada antes y después de estos puntos dando a x los valores oportunos. Lo reflejamos en este gráfico:

$f'(x)<0$		$f'(x)>0$		$f'(x)<0$
↘	3	↗	5	↘

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$ y creciente en $(3, 5)$

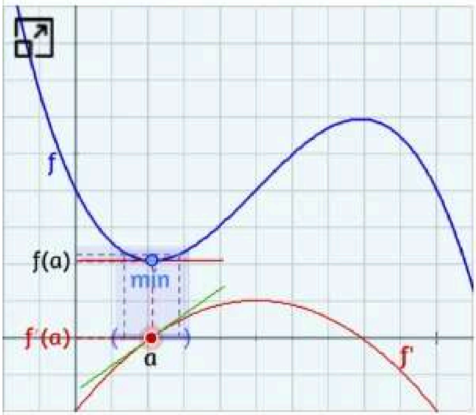
Otro ejemplo

3.2.2 Máximos y mínimos relativos

Una función f alcanza un **máximo relativo** en a si $f(a) \geq f(x)$ para todo x de un entorno de a, y alcanza un **mínimo relativo** en a si $f(a) \leq f(x)$ para todo x de un entorno de a.

Si en un punto a, f es derivable y $f'(a) = 0$ diremos que a es un punto **singular** o **crítico**. Los extremos relativos se alcanzan en puntos singulares, ya que acabamos de ver que si la función f, derivable en a, alcanza un máximo o un mínimo en a, entonces $f'(a) = 0$.

Ver la demostración



Para saber si en un punto crítico hay máximo o mínimo, o ninguno, podemos emplear uno de estos dos criterios.

1) Estudiamos el signo de $f'(a)$ en valores próximos a a, tanto a la izquierda como a la derecha. Si en a, f pasa de ser creciente a ser decreciente, hay un máximo y si pasa de decreciente a creciente habrá un mínimo.

2) Aplicamos el criterio de la segunda derivada:

- Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$ hay un **máximo** en $(a, f(a))$
- Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$ hay un **mínimo** en $(a, f(a))$

Ejercicio

Calcula el valor de a para que la función f(x) = $x^3 - 12x^2 + \mathbf{a}x - 4$ tenga un extremo relativo en x = 5. Para el valor obtenido indica si es un máximo o un mínimo.

a = ☐ _

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

3.2.3 Problemas de optimización

Optimizar una función consiste en buscar los valores para los que dicha función alcanza su máximo o su mínimo en un determinado intervalo.

Por el teorema de Weiertrass sabemos que si una función es continua en un intervalo cerrado existen puntos en él en los que la función alcanza el máximo y el mínimo. Estos puntos pueden ser del interior del intervalo, y en ellos si la función es derivable su derivada valdrá 0; pueden ser puntos donde f no sea derivable o pueden encontrarse en los extremos del intervalo. Según sea el caso habrá que comprobar el valor de la función en esos puntos.

Pero cuando hablamos de problemas de optimización nos solemos referir a problemas contextualizados en los que el primer paso es construir la función a optimizar.

En general el procedimiento a seguir será:

i. Identificar las variables que intervienen en el problema.

ii. Escribir la función f a optimizar dependiente de esas variables.

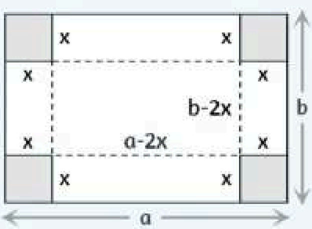
iii. En el caso de que f dependa de más de una variable, relacionarlas según el enunciado de forma que f dependa solo de una de ellas.

iv. Establecer el intervalo en el que varía la variable.

v. Buscar los máximos o los mínimos de la función en este intervalo.

Ejemplos

1) Cortando un mismo cuadrado de las esquinas de una hoja de papel rectangular de dimensiones a×b se puede construir una caja sin tapa. Calcula el lado del cuadrado que se ha de cortar para que el volumen de caja sea máximo.



Sea **x** el lado del cuadrado. Si suponemos que b<a, x puede tomar valores en (0, b/2). En los extremos 0 y b/2 el volumen es 0.

Volumen de la caja: $V(x) = (a-2x)\cdot(b-2x)\cdot x = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + abx = 0 \Rightarrow x = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2-3ab}}{6}$$

y el máximo se alcanza en $x = \dfrac{a+b-\sqrt{(a+b)^2-3ab}}{6} \in (0, \dfrac{b}{2})$

comprobación

1 2 3

3.3 Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

La curvatura de una función en un punto a se determina con la posición de la recta tangente en a respecto a la curva, así diremos que:

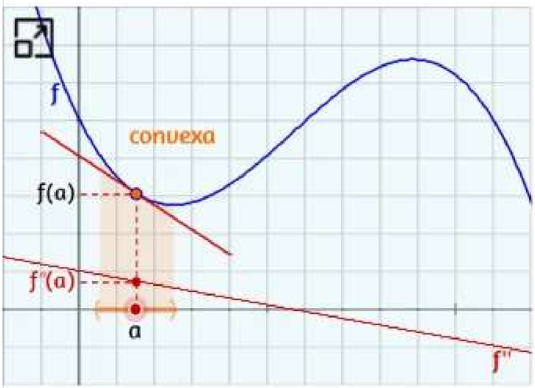
- f es **convexa** en a si en un entorno de a la tangente en $(a, f(a))$ queda por debajo de la curva.
- f es **cóncava** en a si en un entorno de a la tangente en $(a, f(a))$ queda por encima de la curva.

Los puntos de la curva en los que cambia la curvatura, pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, se llaman **puntos de inflexión**. En ellos la recta tangente atraviesa a la curva.

La posición de la tangente respecto a la curva se relaciona con el signo de $f''(a)$ si existe, ya que:

- Si $f''(a) > 0$ existe un entorno de a en el que la tangente queda por debajo de la curva.
- Si $f''(a) < 0$ existe un entorno de a en el que la tangente queda por encima de la curva.

Ver la demostración



Resumiendo los resultados anteriores tenemos que si f es dos veces derivable en a:

- Si $f''(a)>0$ la función en **convexa** en a.
- Si $f''(a)<0$ la función en **cóncava** en a.

En el caso de que $f''(a) = 0$ no podemos afirmar nada sobre f, pero si hay un punto de inflexión en $(a, f(a))$ y existe $f''(a)$ entonces $f''(a) = 0$

Arrastra el punto a con el ratón para comprobar gráficamente estas afirmaciones.

Ahora puedes ver cómo se justifica el criterio de la segunda derivada para la determinación de máximos y mínimos relativos, citado en el apartado anterior.

- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ en a hay un **mínimo relativo**.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ en a hay un **máximo relativo**.

Pero, ¿qué ocurre si $f'(a) = 0$ y también $f''(a) = 0$? Entonces habrá que recurrir a las derivadas sucesivas hasta encontrar la primera que no se anula.

Sea f una función n veces derivable en a y tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$ la primera derivada no nula de f en a, entonces:

- Si n es impar ($n > 1$), f presenta un punto de inflexión en a.
- Si n es par, hay un mínimo relativo cuando $f^{(n)}(a) > 0$, y un máximo relativo si $f^{(n)}(a) < 0$.

En la práctica para comprobar si un punto en el que se anula la segunda derivada es de inflexión, un criterio es ver si la tercera derivada no se anula, y otro estudiar si cambia la curvatura. Este último puede resultar más cómodo dependiendo del tipo de función.

Ejemplos

Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de la función $f(x) = x^3+6x^2+9x-5$.

Calculamos la derivada segunda y los puntos en que se anula:

$f'(x) = 3x^2+12x+9 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x+12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

Calculamos el signo de la segunda derivada antes y después de este punto dando a x los valores oportunos. Lo reflejamos en este gráfico:

Luego la función es cóncava en $(-\infty, -2)$ y convexa en $(-2, +\infty)$

En $x = -2$ hay un punto de inflexión.

Otro ejemplo

Ejercicio

Calcula el valor de a para que la función $f(x) = -x^3 + ax^2 - 24x - 1$ tenga un punto de inflexión en $x = -3$.

a =

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

3.4 Representación gráfica de funciones

En este apartado aplicaremos las propiedades de las funciones vistas anteriormente para estudiar y representar gráficamente las funciones elementales. Aunque en ocasiones no tiene que ser exhaustivo, el esquema que seguiremos en este estudio es el siguiente:

1. Dominio y continuidad

   Determinamos el conjunto de números reales para los que existe $f(x)$ y aquellos en los que es continua.

2. Periodicidad

   Una función f se dice que es **periódica** de periodo T, si $f(x) = f(x+T)\ \forall x \in Dom(f)$.

3. Simetrías

   Interesa estudiar si la función presenta simetrías de cara a simplificar el proceso de representación gráfica. Estudiaremos dos tipos de simetrías:

   - **Simetría respecto al eje OY**: Una función es simétrica respecto al eje de ordenadas cuando $f(x) = f(-x)\ \forall x \in Dom(f)$. En este caso se dice que f es una función **par**.
   - **Simetría respecto al origen**: Una función es simétrica respecto al origen de coordenadas cuando $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in Dom(f)$. En este caso se dice que f es **impar**.

4. Cortes con los ejes

   - **Cortes con el eje OX**: Son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.
   - **Cortes con el eje OY**: Se calcula $f(0)$. A lo sumo hay un corte con el eje de ordenadas.

   Puede interesar también estudiar el signo de f, lo que se hace a partir de los cortes con el eje OX y los puntos de discontinuidad.

5. Asíntotas

   - **Asíntotas verticales**: Son las rectas $x = a$ tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

     Se miran en los puntos de discontinuidad.

   - **Asíntotas horizontales**: Son las rectas $y = b$ tales que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

     A lo sumo hay una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y otra cuando $x \to -\infty$.

- **Asíntotas oblicuas**: Son las rectas $y = mx + n$ siendo:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx$$

  A lo sumo hay una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ y otra cuando $x \to -\infty$. Si en un sentido hay asíntota horizontal entonces no hay asíntota oblicua.

6. Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

   Si f es derivable:

   - **Intervalos de crecimiento**: Son aquellos en los que $f'(x) > 0$.
   - **Intervalos de decrecimiento**: Son aquellos en los que $f'(x) < 0$.

   En los puntos $(a, f(a))$ donde $f'(a) = 0$ puede existir:

   - Un **mínimo relativo** si f pasa en a de ser decreciente a ser creciente, o bien si $f''(a) > 0$.
   - Un **máximo relativo** si f pasa en a de ser creciente a ser decreciente, o bien si $f''(a) < 0$.

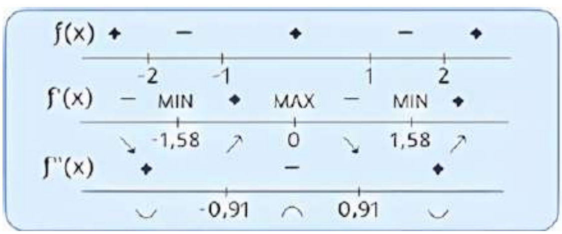
7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

   Si f es dos veces derivable:

   - **Intervalos de convexidad**: Son aquellos en los que $f''(x) > 0$.
   - **Intervalos de concavidad**: Son aquellos en los que $f''(x) < 0$.
   - En $(a, f(a))$ hay un **punto de inflexión** si $f''(a) = 0$ y f cambia en a su concavidad (o bien si $f'''(a) \neq 0$).

8. Representar la gráfica

   Con la información obtenida, que conviene resumir en una tabla, se representa la gráfica de la función.



3.4.1 Funciones polinómicas

Las funciones **polinómicas**, tienen como características comunes:

- Su dominio es $\mathbb{R}$ y son continuas en todo su dominio.
- No son periódicas, excepto si son de grado 0 que siempre toman el mismo valor.
- No tienen asíntotas verticales, ni horizontales (salvo las de grado 0, que asíntota y función coinciden), ni oblicuas menos las de grado 1 que también coinciden con la función.

Veamos algunos ejemplos: tipo 1

$f(x) = 1\,x^3 + -5\,x^2 + 6\,x$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

1) Dominio, el dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$

Dom (f) = $\mathbb{R}$

3) Simetrías

$f(-x) = (-x)^3-5(-x)^2+6(-x) = -x^3-5x^2-6x$ Ni PAR ni IMPAR

4) Cortes con los ejes

Con el **eje OX**: $x^3-5x^2+6x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 2 \quad x = 3$

Con el **eje OY**: $f(0) = 0^3-5 \cdot 0^2+6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

f(x): 0, 2, 3; − + − +

$f(x)<0$ en $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$

$f(x)>0$ en $(0, 2) \cup (3, +\infty)$

6) Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

$f'(x) = 3x^2-10x+6 = 0 \Rightarrow x = 0{,}78 \quad x = 2{,}55$

- En x = 0,78 f pasa de ser creciente a ser decreciente hay un **máximo** en (0,78, 2,11)
- En x = 2,55 f pasa de ser decreciente a ser creciente hay un **mínimo** en (0,78, 2,11)

f'(x): + 0,78 − 2,55 +; ↗ MAX ↘ MIN ↗

Creciente en $(-\infty, 0{,}78) \cup (2{,}55, +\infty)$

Decreciente en $(0{,}78, 2{,}55)$

7) Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión

$f''(x) = 6x-10 = 0 \Rightarrow x = 1{,}67$

- En x = 1,67 f pasa de ser cóncava a convexa Hay un **punto de inflexión** en (1,67, 0,74).

f''(x): − 1,67 +; ⌒ ⌣

Cóncava en $(-\infty, 1{,}67)$

Convexa en $(1{,}67, +\infty)$

8) Representar la gráfica

Ver la gráfica

3.4.2 Funciones racionales

A la hora de representar funciones **racionales**, tendremos en cuenta:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto los puntos que anulan el denominador y no son periódicas.
- Pueden tener asíntotas verticales y horizontales, si el grado de numerador y denominador coinciden, u oblicuas si el grado del numerador es el del denominador más uno.

Veamos algunos ejemplos:

$$f(x) = \frac{1\ x^2 + -2\ x + 1}{1\ x + -2}$$

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$$

1) Dominio, es $\mathbb{R}$ excepto $x = 2$ que anula el denominador.

Dom (f) = $\mathbb{R} - \{2\}$

3) Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^2-2(-x)+1}{(-x)-2} = \frac{x^2+2x+1}{-x-2}$ Ni PAR ni IMPAR

4) Cortes con los ejes

Con el **eje OX**: $x^2-2x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Con el **eje OY**: $f(0) = \frac{0^2-2\cdot 0+1}{0-2} = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}5$

f(x): – 1 – 2 +

f(x)<0 en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

f(x)>0 en $(2, +\infty)$

5) Asíntotas Ver cálculos

- Asíntota vertical: $x = 2$
- Asíntota oblicua: $y = x$

6) Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

$$f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad x = 3$$

- En $x = 1$ f pasa de ser creciente a ser decreciente hay un **máximo** en (1, 0)
- En $x = 3$ f pasa de ser decreciente a ser creciente hay un **mínimo** en (3, 4)

f'(x): + 1 – 2 – 3 +

↗ MAX ↘ ↘ MIN ↗

Creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

7) Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0 \quad \text{pero } f''(x)<0 \text{ si } x<2 \text{ y } f''(x)>0 \text{ si } x>2$$

f''(x): – 2 +

∩ ∪

Cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, +\infty)$

8) Representar la curva

Ver la gráfica

3.4.3 Funciones irracionales

En el estudio de funciones **irracionales** hemos de tener en cuenta que:

- Si el índice es par f(x) no existe cuando el radicando es negativo y si es impar el dominio es $\mathbb{R}$.
- Es habitual que si existen asíntotas horizontales u oblicuas no coincidan en $+\infty$ y $-\infty$, por lo que habrá que estudiarlas en ambos lados.

Veamos algunos ejemplos: tipo 1

$$f(x) = \sqrt{1\,x^2 + 0\,x + 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

1) Dominio, el radicando es positivo o 0 para todo x.

Dom (f) = $\mathbb{R}$

3) Simetrías: $f(-x) = \sqrt{x^2+1} = f(x)$ Función PAR

Es simétrica respecto al eje OY

4) Cortes con los ejes

Con el **eje OX**: $x^2+1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución

Con el **eje OY**: $f(0) = \sqrt{0^2+1} = 1 \quad y = 1$

f(x) +

f(x)>0 en $\mathbb{R}$

5) Asíntotas Ver cálculos

- Asíntotas oblicuas: $y = x \quad y = -x$

6) Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

- En x = 0 f pasa de ser decreciente a ser creciente hay un **mínimo** en (0, 1)

f'(x) − 0 + ↘ MIN ↗

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, +\infty)$

7) Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{4}{4(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$$

- La función es convexa en todo su dominio

f''(x) + ∪

Convexa en $\mathbb{R}$

8) Representar la curva

Ver la gráfica

3.4.4 Funciones exponenciales

Estudiamos aquí funciones **exponenciales** del tipo $f(x) = e^{P(x)}$, teniendo en cuenta que se puede hacer extensivo a las de base a con $a \neq 1$ y $a > 0$. En estos casos:

- El dominio es $\mathbb{R}$ y la función siempre es positiva. No son periódicas.
- Puede ocurrir que una recta sea asíntota horizontal (u oblicua) $+\infty$ y no en $-\infty$, o viceversa, por lo que habrá que estudiarlas en ambos lados.

Veamos algunos ejemplos:

$f(x) = e^{1x^2 + 0x + 1}$

$f(x) = e^{x^2+1}$

1) Dominio, el dominio es $\mathbb{R}$.

Dom (f) = $\mathbb{R}$

3) Simetrías: $f(-x) = e^{(-x)^2+1} = e^{x^2+1} = f(x)$ Función PAR

Es simétrica respecto al eje OY

4) Cortes con los ejes

Con el **eje OX**: No corta al eje de abscisas.

Con el **eje OY**: $f(0) = e^{0^2+1} = e$ $y = e$

f(x) +

f(x)>0 en $\mathbb{R}$

5) Asíntotas

- No tiene asíntotas

6) Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2+1} = 0 \Rightarrow x = 0$

- En x = 0 f pasa de ser decreciente a ser creciente hay un **mínimo** en (0, 2,72)

f'(x) − 0 +

↘ MIN ↗

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, +\infty)$

7) Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión

$f''(x) = (4x^2+2)\, e^{x^2+1} > 0$

- La función es convexa en todo su dominio.

f''(x) +

∪

Convexa en $(-\infty, +\infty)$

8) Representar la curva

Ver la gráfica

3.4.5 Funciones logarítmicas

Como en el caso anterior vemos aquí funciones **logarítmicas** del tipo $f(x) = ln(P(x))$, cuyo estudio se puede hacer extensivo a las de base a con $a \neq 1$ y $a > 0$. En estos casos:

- El logaritmo solo existe para números positivos, luego el dominio serán los valores de x que hacen el argumento mayor que 0. No son periódicas.
- Puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(x) = -\infty$, habrá asíntotas verticales en las raíces de $P(x)$.

Veamos algunos ejemplos:

f(x) = ln (1 x^2 + 0 x + 1)

f(x) = ln (x^2+1)

1) Dominio, $x^2+1 > 0 \quad \forall x$

Dom (f) = $(-\infty, +\infty)$

3) Simetrías: $f(-x) = \ln((-x)^2+1) = \ln(x^2+1) = f(x)$ PAR

Es simétrica respecto al eje OY

4) Cortes con los ejes

Con el **eje OX**: $f(x) = 0$ si $x^2+1 = 1 \Rightarrow x=0$

Con el **eje OY**: $f(0) = \ln(0^2+1) = 0 \quad y = 0$

f(x): + 0 +

f(x)>0 en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

5) Asíntotas

- No tiene asíntotas

6) Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

- En x = 0 f pasa de ser decreciente a ser creciente hay un **mínimo** en (0, 0)

f'(x): − 0 +

↘ MIN ↗

Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, +\infty)$

7) Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad x = 1$$

- En x = -1 y x = 1 cambia la concavidad. (-1, 0,69) y (1, 0,69) son **puntos de inflexión.**

f''(x): − -1 + 1 −

∩ ∪ ∩

Cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Convexa en $(-1, 1)$

8) Representar la curva

Ver la gráfica

3.4.6 Funciones trigonométricas

Ya conoces la gráfica de las funciones **trigonométricas** básicas, en especial las de $y = senx$, $y = cos\ x$ e $y = tg\ x$. En este apartado estudiamos algunas funciones relacionadas con estas.

Recuerda que $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ están definidas y son continuas $\forall x \in \mathbb{R}$, mientras que $y = tg\ x$ es discontinua con asíntota vertical en $x = \pm(2k+1)\pi/2$. Por otra parte la periodicidad que presentan muchas de estas funciones, simplifica notablemente su estudio, ya que podemos limitarnos a un periodo T. Aquí lo hacemos en el intervalo $[-T/2, T/2]$.

Veamos algunos ejemplos: tipo 1 sen

f(x) = sen (1 x + 0)

f(x) = sen x

1) **Dominio**, todos los reales.

2) **Periodicidad**, f(x+2π) = sen(x+2π) = senx = f(x)

3) **Simetrías:** f(-x) = sen(-x) = - f(x) IMPAR

4) **Cortes con los ejes**

Con **OX**: f(x) = 0 si x = ±kπ ⇒ x = ± kπ (k = 0, 1, 2, ...)

Con **OY**: f(0) = sen(0) = 0 (0, 0)

5) **Asíntotas**, no tiene.

6) **Crecimiento, decrecimiento. Extremos relativos**

$f'(x) = \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

- En $x = -(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ f pasa de ser decreciente a ser creciente, hay un **mínimo**
- En $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ f pasa de ser creciente a ser decreciente, hay un **máximo**

7) **Concavidad, convexidad. Puntos de inflexión**

$f''(x) = -\operatorname{sen} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm k\pi$

- x = ± kπ son **puntos de inflexión**

8) **Representar la curva**

Dom (f) = (-∞, +∞)

Periódica, de periodo T = 2π

Es simétrica respecto al origen

f(x) -π 0 π
− +

f(x)<0 en (-π, 0)
f(x)>0 en (0, π)

f'(x) -π − -1,57 + 1,57 − π
↘ MIN ↗ MAX ↘

Decreciente en (-π, -1,57) ∪ (1,57, π)
Creciente en (-1,57, 1,57)

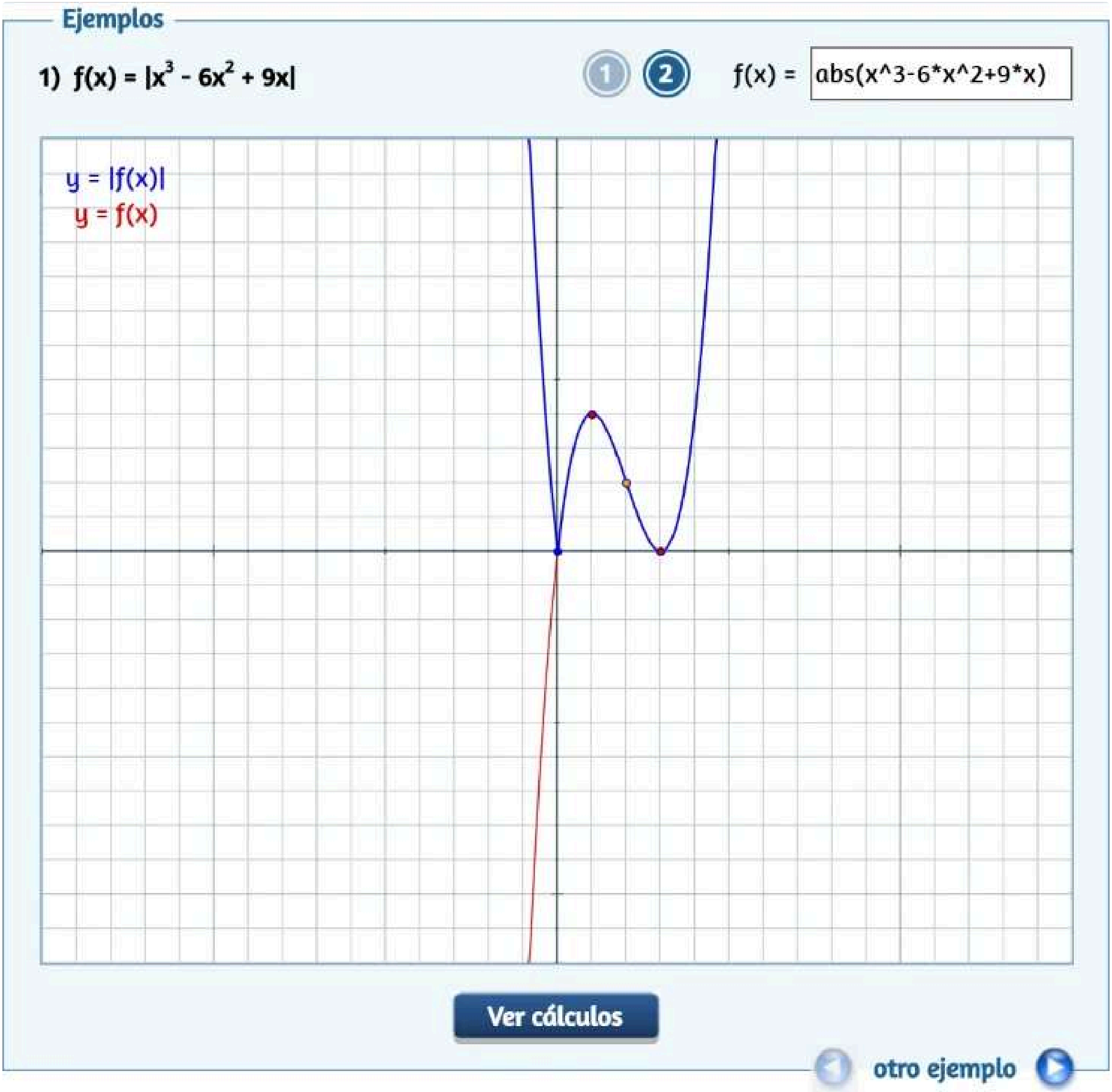
f''(x) -π + 0 − π
∪ ∩

Convexa en (-π, 0)
Cóncava en (0, -π)

Ver la gráfica

3.4.7 Representa más funciones

En este apartado se presentan más ejemplos de gráficas de funciones. Te recomendamos que hagas los correspondientes cálculos y después los compruebes. También puede emplearse la escena para representar otras funciones, para ello basta escribirlas con la notación adecuada en el campo de texto.

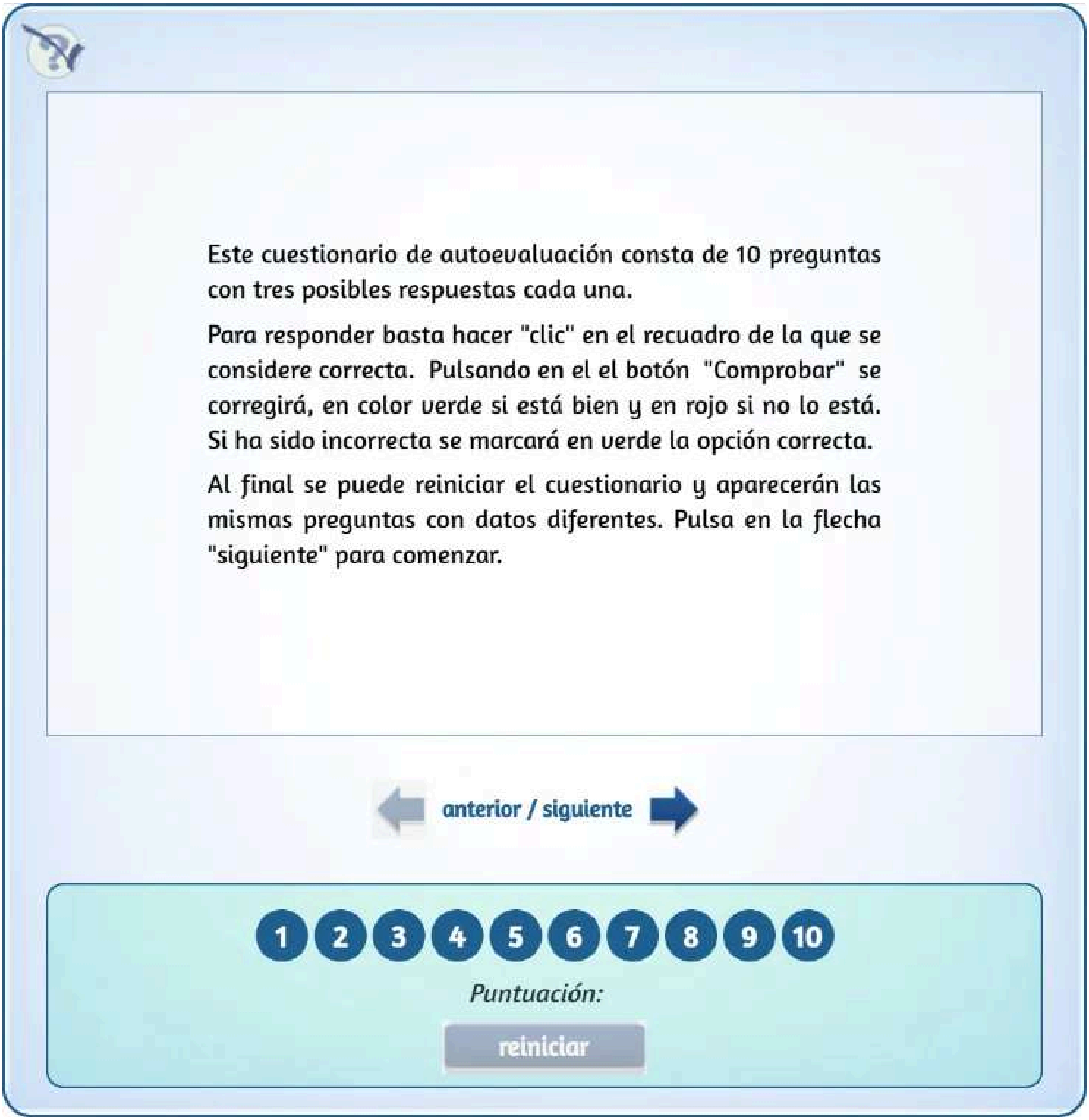


3.4.8 Ejercicios para practicar

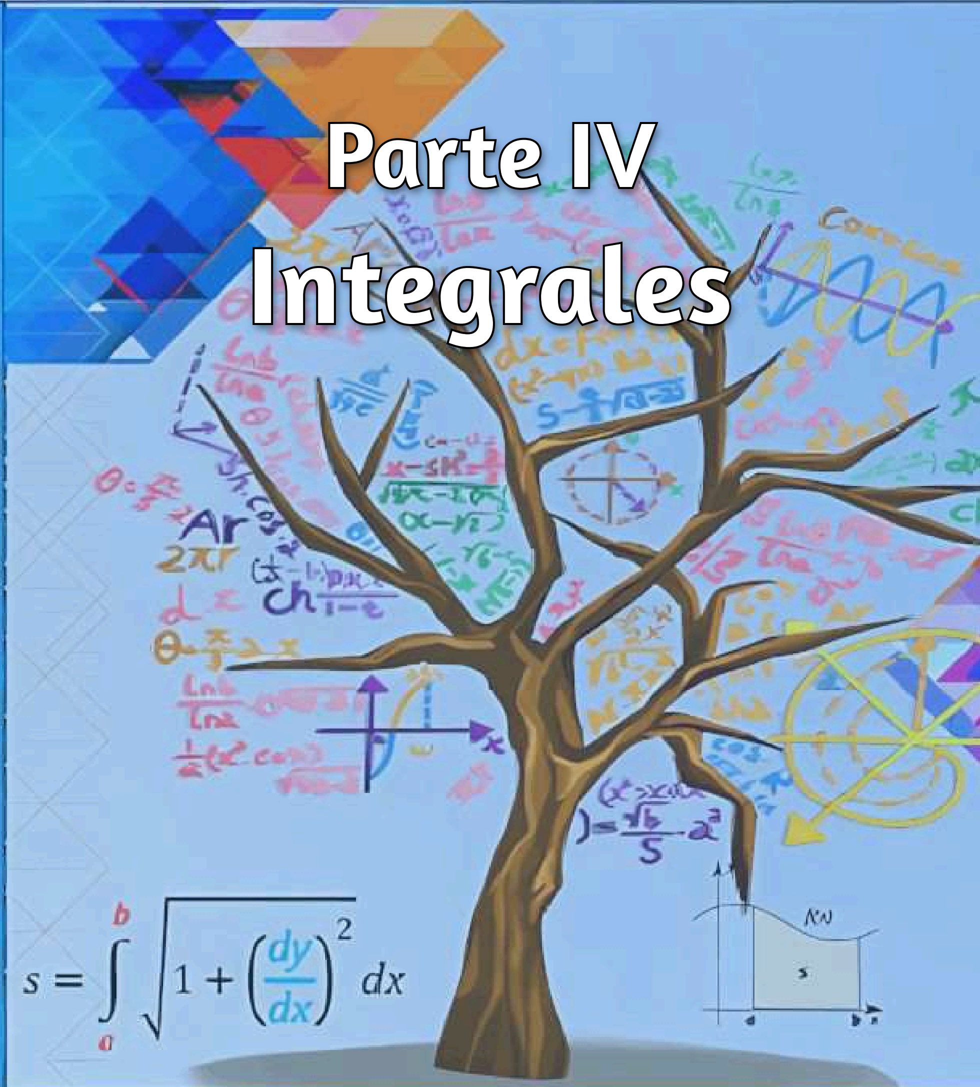
A continuación se presentan más ejercicios para practicar. Puedes elegir en el menú el tipo que prefieras para empezar. De todos ellos se ofrece la solución.

3.4.9 Autoevaluación

Ahora puedes hacer el siguiente cuestionario de autoevaluación para comprobar lo aprendido en esta sección.



Parte IV
Integrales



José R. Galo Sánchez

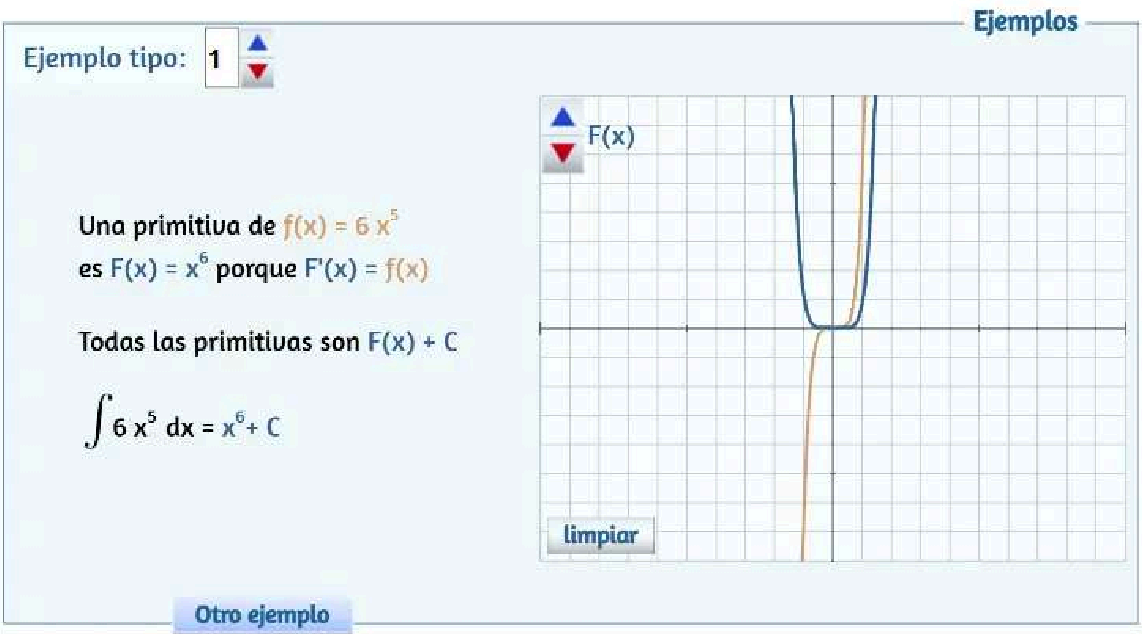
4.1 Integral indefinida

4.1.1 Primitiva, antiderivada o integral indefinida

Se dice que una función F es **una primitiva** de otra f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Se verifica que si F es una primitiva de f en el intervalo I entonces también es primitiva $F(x) + C$, donde C una función constante[1]. Y recíprocamente[2], si F y G son dos primitivas de f en I, entonces $G(x) = F(x) + C$. Por tanto, todas las primitivas de una función se diferencian en una constante, que se denomina constante de integración, y conocida una primitiva se conocen todas.

Si usamos la notación de diferencial: $dy = f(x)dx$, la operación para determinar todas las primitivas de $f(x)$ será la inversa de la derivación (antiderivada) y se denota mediante un símbolo denominado integral: $\int$. Así pues, $y = \int f(x)dx = F(x) + C$ que también se denomina integral indefinida de f.



[1] $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$.

[2] Dado que $F'(x) = G'(x)$ en I entonces $(F(x) - G(x))' = 0$ y por tanto, por el Teorema del valor medio del cálculo diferencial entonces $F(x) - G(x)$ es constante en I.

4.1.2 Integrales inmediatas

El carácter inverso de la integración y la derivación es evidente, pues sin más que poner $F'(x)$ en la integral indefinida tenemos que

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

y, adicionalmente, si $\int f(x)dx = F(x) + C$ entonces

$$\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x).$$

Consecuentemente si partimos de la tabla de derivadas de funciones elementales, haciendo una lectura inversa de la misma, podemos construir la tabla de integrales que denominaremos inmediatas porque obtenemos de una forma trivial las infinitas primitivas de cada una de esas funciones. Esto es, formalmente, lo que hemos aplicado de manera intuitiva en los ejemplos anteriores.

Tabla de integrales inmediatas

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\int x^\alpha\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\text{si } \alpha \neq -1)$
e^x	e^x	$\int e^x\, dx = e^x + C$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
$a^x \quad (\text{si } a > 0)$	$a^x \ln a$	$\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

Nota bene

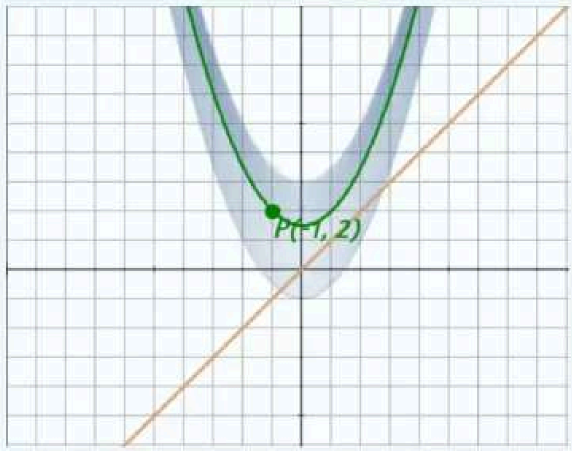
4.1.3 Condiciones iniciales y soluciones particulares

Si se fija una condición adicional como puede ser que la primitiva buscada pase por un determinado punto (condición inicial), entonces puede obtenerse una solución que se dice particular.

Ejemplos

función | selecciona

Primitiva que pasa por el punto P



Ejercicio

La primitiva de $f(x) = x$ que pasa por $(2, -1)$ es $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, donde C vale:

C =

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

4.2 Métodos de integración

Si bien el cálculo de la derivada de una función, que está expresada mediante operaciones algebraicas y composición de funciones elementales, es un problema siempre resoluble sin más que aplicar el álgebra de derivadas, el cálculo de las primitivas de una función definida de igual forma no siempre es posible expresarla mediante funciones elementales. Por ejemplo mediante el Teorema de Liouville se demuestra que $\int e^{-x^2} dx$ no es expresable de manera elemental. Así pues, aunque abordaremos diferentes métodos de integración, unos pocos de otros posibles, no tendremos nunca garantía de poder obtener una primitiva elemental.

4.2.1 Linealidad de la integración, método de descomposición

La linealidad de la derivación también se extiende a la integración[3]:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad \text{donde} \quad c \in \mathbb{R}$$

La aplicación de estas propiedades nos permite calcular primitivas de funciones que sean combinaciones lineales de otras que ya sabemos integrar y a este procedimiento se le denomina "Método de descomposición".

Ejemplos

$$\int (-9x^8 - 8x^{10} + 10x^{20})\, dx = -9\int x^8\, dx - 8\int x^{10}\, dx + 10\int x^{20}\, dx$$

$$= -9\,\frac{x^9}{9} - 8\,\frac{x^{11}}{11} + 10\,\frac{x^{21}}{21} + C$$

$$= -\,x^9 - \frac{8}{11}\,x^{11} + \frac{10}{21}\,x^{21} + C$$

Tipo: 1 Otro ejemplo

[3] Si $F(x)$ y $G(x)$ son respectivamente las integrales de $f(x)$ y $g(x)$, es decir, $F'(x)=f(x)$ y $G'(x)=g(x)$, entonces:

- $(F+G)'(x) = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)$, es decir, $(F+G)(x)$ es la integral de $(f+g)(x)$.
- $(cF)'(x) = cF'(x) = cf(x) = (cf)(x)$, es decir, $(cF)(x)$ es la integral de $(cf)(x)$.

4.2.2 Integrales cuasi inmediatas

Si nos apoyamos en la regla de la cadena para la derivación de las funciones compuestas:

$$[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$$

podemos realizar la lectura inversa y hallar de manera directa las primitivas de un nuevo rango de funciones, las que tienen esa forma. Así:

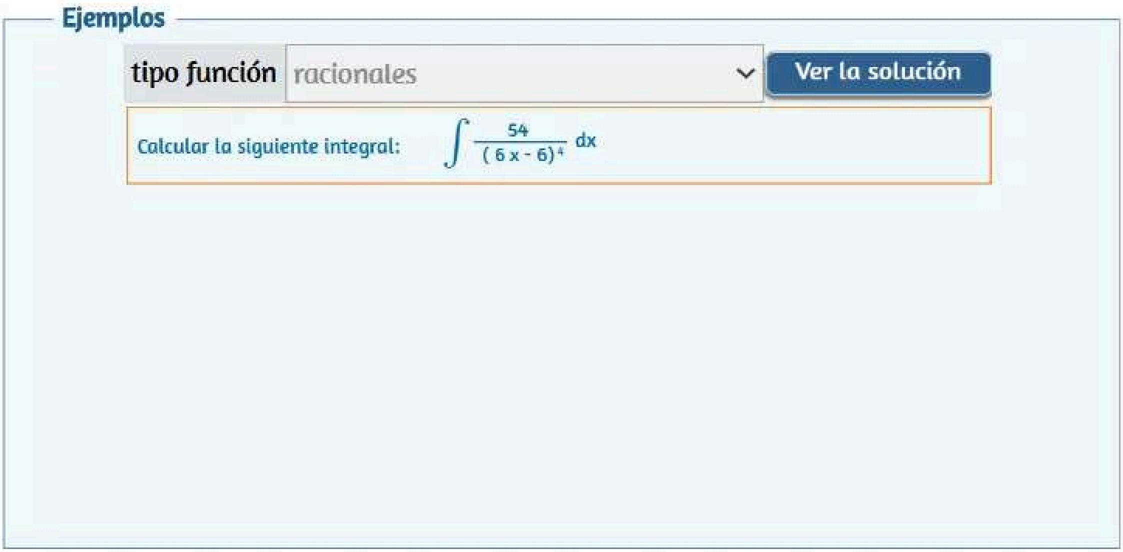
$$\int g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$$

y consecuentemente podemos construir una nueva tabla de integrales:

Tabla de integrales cuasi inmediatas

$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\text{si } \alpha \neq -1)$	$\int f(x)^{\alpha}\, f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$	$\int e^{f(x)}\, f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{f(x)}\, f'(x)\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$	$\int a^{f(x)}\, f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos(f(x))\, f'(x)\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))}\, f'(x)\,dx = \tan(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}\, f'(x)\,dx = \operatorname{arc\,sen}(f(x)) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$	$\int \frac{1}{1+f(x)^2}\, f'(x)\,dx = \arctan(f(x)) + C$

Para identificar que estamos ante una integral cuasi inmediata hemos de observar que en la función integrando acontece un producto de funciones donde una de ellas es la derivada de otra existente en ese producto, lo que nos induce a pensar que pudiera ser la derivada de una función compuesta encuadrada en la tabla anterior. Además, si necesitamos ajustar algún coeficiente o "constante multiplicativa" podremos hacerlo gracias a la linealidad de la integral.



4.2.3 Método de sustitución o cambio de variable

Como hemos comprobado el cálculo de una integral cuasi inmediata requiere cierta abstracción para visualizar mentalmente la composición de funciones existente en la función integrando, el ajuste de constantes multiplicativas y finalmente proceder a determinar cuál es la primitiva correspondiente. Pero este proceso mental puede sistematizarse sin más que renombrar $u = f(x)$ y calculando su diferencial $du = f'(x)dx$ proceder a sustituir (método de sustitución) en el integrando:

$$\int g'(f(x))f'(x)dx = \int g'(u)du = g(u) + C = g(f(x)) + C$$

Observamos, pues, que la integral original en la variable x la hemos transformado en otra integral en la variable u, de ahí la denominación de cambio de variable, y esta es una integral inmediata.

Ejemplos

Ejemplo tipo **1**. Calcular la integral indefinida $\int 10x^5 \cos(8x^6)\,dx$

Por la linealidad de la integral, sacamos la constante 10 de ella:

$$\int 10x^5 \cos(8x^6)\,dx = 10\int x^5 \cos(8x^6)\,dx \quad (1)$$

Llamamos

$$u = 8x^6 \quad (2)$$

Calculamos la diferencial de u:

$$du = u'(x)\,dx = 48x^5\,dx \quad (3)$$

Necesitamos poner $x^5\,dx$ en términos de u, así que despejamos $x^5\,dx$ de (3) y obtenemos

$$x^5\,dx = \frac{1}{48}\,du \quad (4)$$

Sustituimos (2) y (4) en (1):

$$10\int x^5 \cos(8x^6)\,dx = 10\int \frac{1}{48}\cos(u)\,du = \frac{5}{24}\int \cos(u)\,du$$

Ésta ya es una integral inmediata; aplicamos la fórmula de la integral del coseno:

$$\frac{5}{24}\int \cos(u)\,du = \frac{5}{24}\,\mathrm{sen}(u) + C$$

Finalmente, escribimos esta expresión en términos de x.

$$\frac{5}{24}\,\mathrm{sen}(u) + k = \frac{5}{24}\,\mathrm{sen}(8x^6) + C$$

Tipo: 1 Otro ejemplo

Más adelante ampliaremos las posibilidades de este método, pues aquí únicamente lo hemos aplicado restringiéndonos al caso en el que la primitiva es una función compuesta.

4.2.4 Integración por partes

Este método se basa en la derivación del producto de dos funciones y lo que permite es pasar de una integral a otra, buscando que la segunda sea más fácil de resolver. Partimos de la diferencial del producto:

$$d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx$$

e integrando y despejando:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que es la fórmula de integración por partes. Pero, usualmente, suele expresarse en términos de diferenciales haciendo $u = f(x)$, $v = g(x)$, luego $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$ obteniéndose:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Para recordar esta fórmula se aplica la regla nemotécnica: "<u>u</u>n <u>d</u>ía <u>v</u>i <u>u</u>na <u>v</u>aca <u>v</u>estida <u>d</u>e <u>u</u>niforme".

Ejemplos

Para hallar la integral $\int x\, e^{5x}\, dx$

conviene considerar $u = x$ y $dv = e^{5x}dx$

ya que $du = 1\, dx$ y $v = \int e^{5x}\, dx = \frac{e^{5x}}{5}$

y aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos una integral más sencilla que la inicial:

$$\int x\, e^{5x}\, dx = x\,\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}\, 1\, dx = x\,\frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C$$

siguiente ▶

La elección de u y dv es crítica para que $\int vdu$ sea más sencilla de calcular que la integral inicial. En este caso la palabra ALPES sirve para recordar cuál es la función que preferentemente ha de elegirse como u. Este acrónimo se corresponde con las iniciales de las funciones: Arco, Logarítmicas, Polinómicas, Exponenciales y Sinoidales.

Encuentra la integral indefinida $\int x \operatorname{sen}(2x)\, dx$

Para aplicar el método de integración por partes elige la pareja u(x) y dv = v'(x) dx:

u =   v' =

Encuentra du = u'(x) dx y v(x)

u' =   v =

Observa el resultado de aplicar la fórmula con tu selección y encuentra con los pulsadores la solución

$\int x \operatorname{sen}(2x)\, dx$ =

Verificar   Otro ejercicio

Ejercicios

Pulsa sobre la imagen para practicar con más ejercicios

4.2.5 Integración de funciones racionales

4.2.5.1 Resultados algebraicos

1. Una función racional real es un cociente de polinomios con coeficientes reales

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \cdots + p_1 + p_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}$$

Diremos que es propia si el $grado\ P(x) < grado\ Q(x)$ y en caso contrario se dice impropia.

2. Toda función racional impropia puede escribirse como un polinomio más una función racional propia, pues basta abordar la división polinomial.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad grado\ R(x) < grado\ Q(x)$$

3. Con base el Teorema Fundamental del Álgebra, demostrado por Gauss, todo polinomio de grado n con coeficientes reales puede descomponerse en el producto de un polinomio cero, polinomios de grado uno de la forma $x - r$ y polinomios de grado dos $x^2 + bx + c$ que son irreducibles en $\mathbb{R}$ (se corresponde con una pareja de raíces complejas conjugadas):

$$Q(x) = a(x - r_1)^{\alpha_1}(x - r_2)^{\alpha_2} \cdots (x - r_k)^{\alpha_k}(x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m}$$

con $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + 2\beta_1 + \cdots + 2\beta_m = grado\ Q(x)$.

4. Toda función racional propia con coeficientes reales puede descomponerse en sumas de fracciones algebraicas de la forma

$$\frac{A}{(x-r)^\alpha} \quad \text{y} \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + bx + c)^\beta} \quad \text{con} \quad A, M, N \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

a las que se denominan fracciones simples. La descomposición se concreta en:

- Por cada raíz real r de multiplicidad α, se tendrán α fracciones simples con la forma:

$$\frac{A_1}{x - r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-r)^\alpha}$$

- Por cada pareja de raíces complejas conjugadas de multiplicidad β, se tendrán β fracciones simples con la forma:

$$\frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + b_1 x + c_1)} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + b_2 x + c_2)^2} + \cdots + \frac{M_\beta x + N_\beta}{(x^2 + b_\beta x + c_\beta)^\beta}$$

Ejemplos

Descomponer en fracciones simples $\frac{8}{(x+4)(x-4)}$ (1)

Son raíces reales simples luego $= \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x-4)}$

$= \frac{A(x-4) + B(x+4)}{(x+4)(x-4)}$ (2)

Igualando los numeradores en (1) y (2) $8 = A(x-4) + B(x+4)$

En la identidad anterior sustituyendo x por los valores de las raíces del denominador

$x = -4 \rightarrow 8 = -8A \rightarrow A = -1$

$x = 4 \rightarrow 8 = 8B \rightarrow B = 1$

Dos raíces reales simples

Tipo: 1 Otro ejemplo

> *Nota bene*: En los ejemplos anteriores no se ha incluido el caso de raíces complejas múltiples porque en esa situación la técnica de integración más adecuada es el método de Hermite-Ostrogradsky que reduce el problema a raíces simples. Se puede consultar el libro interactivo "Integrando con Paco".

4.2.5.2 Integración de fracciones simples

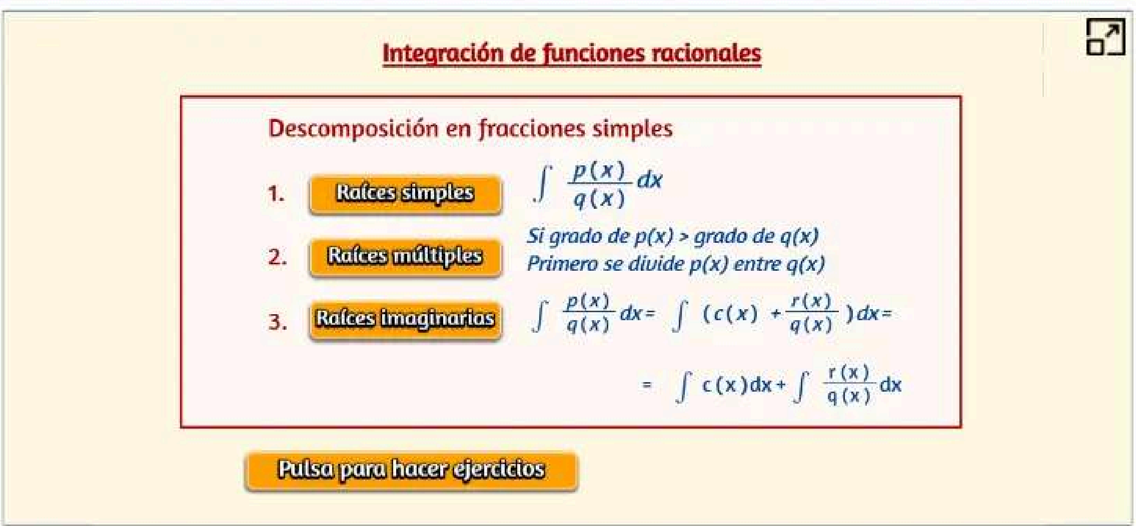
Por la linealidad de la integral, la integración de funciones racionales propias queda reducida a la integración de fracciones simples del tipo[4]:

$$\int \frac{A}{x-r}dx = A\, ln|x-r|$$

$$\int \frac{A}{(x-r)^\alpha}dx = \frac{A}{-\alpha+1}\frac{1}{(x-r)^{\alpha-1}} \quad \text{con} \quad \alpha > 1$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{M}{2}ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{N+M\alpha}{\beta}arctg\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

[4] Por lo indicado anteriormente no es necesario incluir el caso de raíces complejas múltiples.
Para raíces complejas simples, es decir, parejas de raíces conjugadas $x = \alpha \pm \beta i$, se tiene que $x^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta^2$



4.2.6 Ampliación del método de sustitución o cambio de variable

La sustitución o cambio de variable puede realizarse de tres formas:

$$u = g(x), \quad x = h(u), \quad \text{y} \quad r(x) = s(u)$$

- El cambio $u = g(x)$, es el que hemos estado aplicando hasta ahora. En él se elige una función que aparece en el integrando y la renombramos. Para que este cambio funcione, en el integrando tiene que aparecer la diferencial de u, es decir, $g'(x)dx$, si no, el cambio no es viable.

- El segundo puede releerse o interpretarse como el primero, pues si $x = h(u)$ y h tiene inversa, entonces $u = h^{-1}(x)$, pero h no tiene por qué tener inversa, y lo que es más importante, esta sustitución siempre la podemos aplicar, mientras que en el primer caso ya hemos señalado que no siempre es posible. Aquí, basta poner en el integrando en lugar de x la función $h(u)$, y sustituir $dx = h'(u)du$, obviamente esperando que la función resultante sea más fácil de integrar.

$$\int f(x)dx = \int f(h(u))\, h'(u)\, du$$

- La aplicación del tercer cambio exige mayores restricciones porque la diferenciación en la igualdad $r(x) = s(u)$ ha de permitir pasar de la integral en la variable x a la variable u y ello no siempre será posible y aún siéndolo, lógicamente, hay que llegar a un integrando más fácil de integrar. Para ubicarnos, pongamos un ejemplo inicial calculando $\int \sqrt{e^x + 4}\, dx$ donde planteamos el cambio $e^x + 4 = u^2$.

Diferenciando tenemos que $e^x\,dx = 2u\,du$ y de aquí $dx = \frac{2u}{e^x}\,du$. Pero dx ha de expresarse únicamente en función de la nueva variable u y ello no siempre es posible. En este caso sí, pues despejando en el cambio inicial tenemos que $e^x = u^2 - 4$ y, por tanto, $dx = \frac{2u}{u^2-4}\,du$. Consecuentemente:

$$\int \sqrt{e^x+4}\,dx = \int \sqrt{u^2}\,\frac{2u}{u^2-4}\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$

que es una función racional impropia cuyo denominador tiene raíces reales simples ($u = -2$ y $u = 2$) y aplicando el método de la sección anterior obtenemos como primitiva:

$$2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du = 2(u + ln|u-2| + ln|u+2|) + C$$

y deshaciendo el cambio $u = \sqrt{e^x+4}$

$$= 2(\sqrt{e^x+4} + ln|\sqrt{e^x+4} - 2| + ln|\sqrt{e^x+4} + 2|) + C$$

Ejemplos

Ejemplo tipo 1. Calcular la integral indefinida

$$\int \frac{e^{\sqrt{7x}}}{\sqrt{7x}}\,dx$$

Hacemos el cambio:

$$u = \sqrt{7x}$$

$$du = \frac{7}{2\sqrt{7x}}dx$$

Sustituyendo en el integrando:

$$\int \frac{e^{\sqrt{7x}}}{\sqrt{7x}}\,dx = \frac{2}{7}\int e^u\,du = \frac{2}{7}e^u + C$$

Y deshaciendo el cambio:

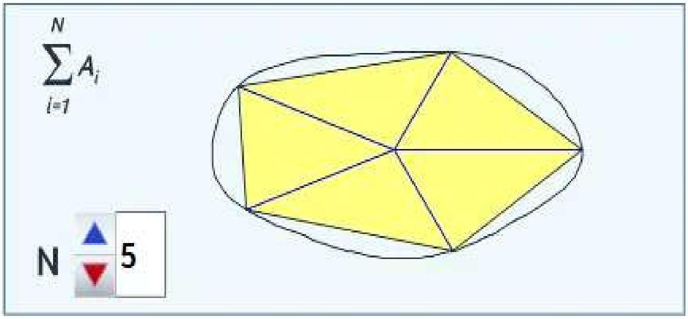
$$\int \frac{e^{\sqrt{7x}}}{\sqrt{7x}}\,dx = \frac{2}{7}e^{\sqrt{7x}} + C$$

Tipo: 1 Otro ejemplo

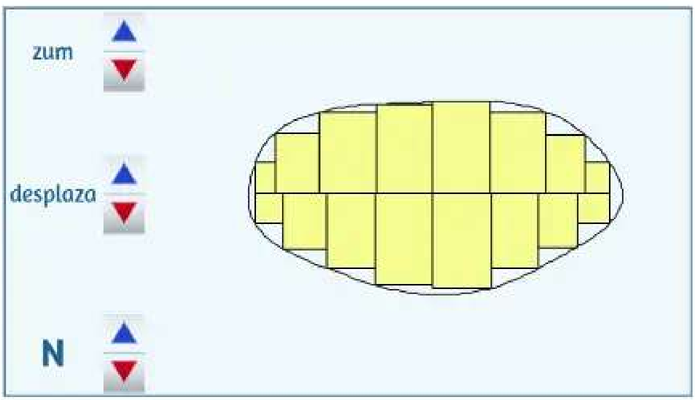
4.3 Integral definida

4.3.1 Cálculo de áreas

La medición de terrenos, cálculos de áreas, es un problema clásico y con soluciones que se remontan a las más antiguas civilizaciones. Eudoxo (390 a.C.- 337 a. C.) aborda el cálculo del área delimitada por cualquier curva cerrada mediante el cálculo de áreas de triángulos[5], método utilizado por Euclides y sistemáticamente usado por Arquímedes. Es conocido como "método de exhaución" o "método exhaustivo".



O en una relectura, ubicada en el ámbito de las funciones, puede plantearse como suma de áreas de rectángulos.



[5] La fórmula de Herón permite un cálculo eficiente del área de un triángulo sin más que conocer la longitud de sus lados.

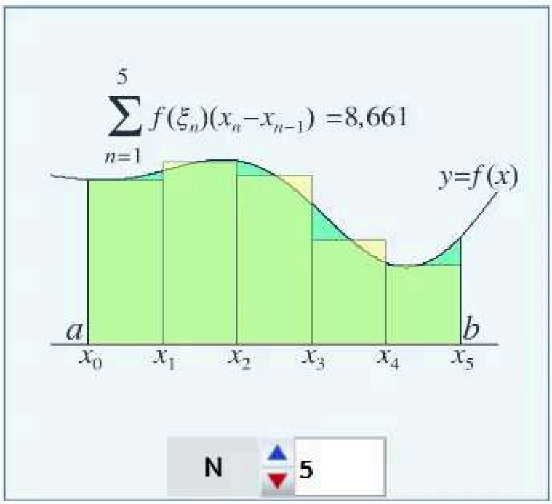
Pero obviamente las sumas anteriores, bien de triángulos o rectángulos, no son más que una aproximación del área de la región considerada. No obstante, gracias al cálculo infinitesimal, haciendo un paso al límite podremos realizar un cálculo exacto.

4.3.2 Definición de integral definida. La integral de Riemann.

La integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se denota $\int_a^b f(x)\,dx$ y se define así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

donde P es una partición de $[a, b]$ formada por $N+1$ puntos: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, cuyo diámetro ($máx|x_n - x_{n-1}|$) tiende a cero, y ξ_n es un punto en el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$.



En la escena puede observarse que $f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ se corresponde con el área del n-ésimo rectángulo de base el intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ y altura $f(\xi_n)$. La integral definida es la suma de infinitos rectángulos y en el caso de que ésta exista, es decir, que sea un número real entonces diremos que $f(x)$ es integrable Riemann en $[a, b]$. Pero hay que precisar que según la definición de $f(x)$, $f(\xi_n)$ puede ser positivo, nulo o negativo y consecuentemente la integral definida será un número también positivo, nulo o negativo. Sólo cuando $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ dicho valor coincide con el área del trapecio curvilíneo delimitado por $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Propiedades de la integral definida

Propiedades

Definiciones adicionales para situaciones especiales

En la definición de la integral definida de f en $[a, b]$ implícitamente se asume que $a < b$, pero es útil considerar los casos en los que $a = b$ y $b < a$. Por ello, geométrica y aritméticamente es razonable que se defina:

1) Si f existe en $x = a$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2) Si f es integrable en $[a, b]$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejercicios

Tipo: 1

Dada f continua en [-5, -2] se sabe que $\int_{-5}^{-2} f(x)\ dx = 3$. Sea $g(x) = -\ f(x) + 3$

¿cuál es el valor de $I = \int_{-5}^{-2} g(x)\ dx$?

I =

Introduce el resultado y pulsa intro

comprobar

4.3.3 Teorema Fundamental del Cálculo

4.3.3.1 Primer teorema fundamental del cálculo

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, consideremos la función definida en ese intervalo como:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

entonces $F(x)$ es diferenciable y $dF(x)=f(x)dx,\ \forall x\in[a,b]$.

Así pues, escribiendo lo anterior en detalle tenemos que:

$$d\int_a^x f(t)\,dt=f(x)dx\ \text{ o bien }\int_a^x dF(t)=F(x),$$

es decir, la diferenciación y la integración son operaciones inversas.

4.3.3.2 Segundo teorema fundamental del cálculo o regla de Barrow

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

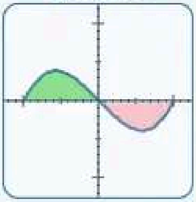
Este resultado se conoce como la regla de Barrow y suele escribirse

$$F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

Consecuentemente, ahora, podemos comprender por qué pusimos interés en aprender a calcular las primitivas de una función. Y recalquemos que el resultado de aplicar la regla de Barrow es independiente de la primitiva que se elija, ya que si $G(x)$ y $F(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $G(x)=F(x)+C$ y, por tanto:

$$G(x)\Big]_a^b=G(b)-G(a)=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a)=F(x)\Big]_a^b.$$

Ejemplos



Calcular $I = \int_{-1}^{1} x\,(x^2 - 1)\,dx$

Es necesario hallar una primitiva, $F(x) = \int x\,(x^2 - 1)\,dx$

que puede hallarse expandiendo la expresión $F(x) = \int (x^3 - x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

o como integral cuasi inmediata $G(x) = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2 - 1)\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)^2}{2} = \frac{(x^2-1)^2}{4}$

Y aplicando la regla de Barrow

$$I = F(1) - F(-1) = \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 0$$

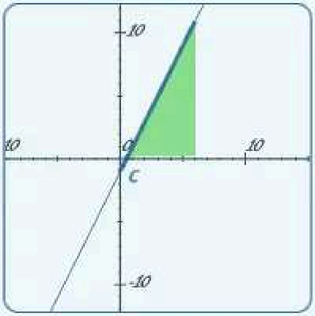
siguiente ▶

4.3.4 Aplicaciones del cálculo integral

4.3.4.1 Área delimitada por una función en un intervalo

Ejemplos

Calcular el área delimitada por $f(x) = 2x - 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 6$



$$A = \int_0^6 |2x - 1|\,dx \qquad \text{Corte de } f(x) \text{ con el eje Ox} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$|2x - 1| = \begin{cases} -(2x - 1) & \text{si } x < c \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

$$A = -\int_0^c (2x - 1)\,dx + \int_c^6 (2x - 1)\,dx$$

$$= -[F(c) - F(0)] + F(6) - F(c) = 30{,}5$$

con $F(x) = \int (2x - 1)\,dx = 2\frac{x^2}{2} - x$

Tipo: 1 Otro ejemplo

4.3.4.2 Área delimitada por dos funciones

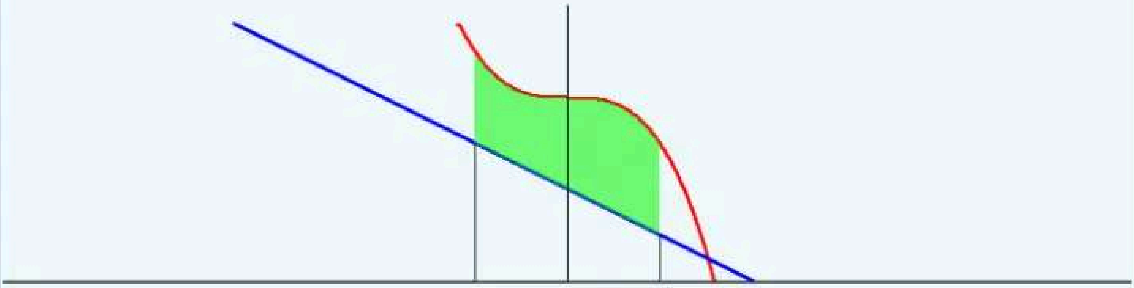
Ejemplos comenzar

El área delimitada por dos funciones $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede aproximarse por rectángulos de altura $f(x_i) - g(x_i)$ donde x_i son puntos de una partición de ese intervalo, es decir, $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$.

Al aumentar los rectángulos, el área calculada se aproxima más al área real.

Empleando la integral definida, se calcula el área exacta (suma de infinitos rectángulos de base infinitesimal).

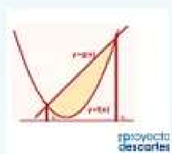
$$A = \int_a^b (f(x)-g(x))dx \text{ con } f(x) \geq g(x)$$



Y en general $A = \int_a^b | f(x)-g(x) | \, dx$

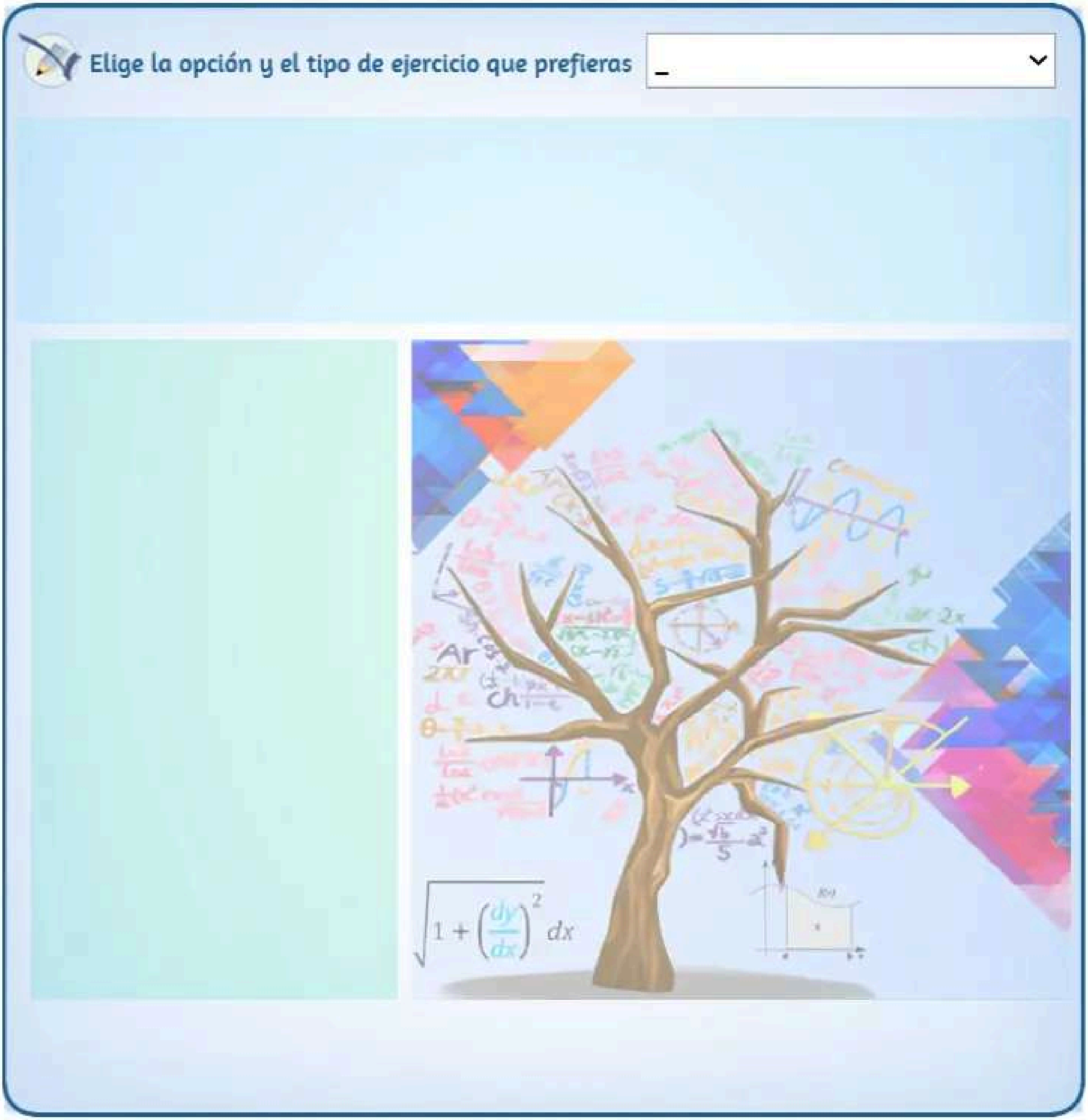
Ejercicios

Pulsa sobre la imagen para practicar con más ejercicios



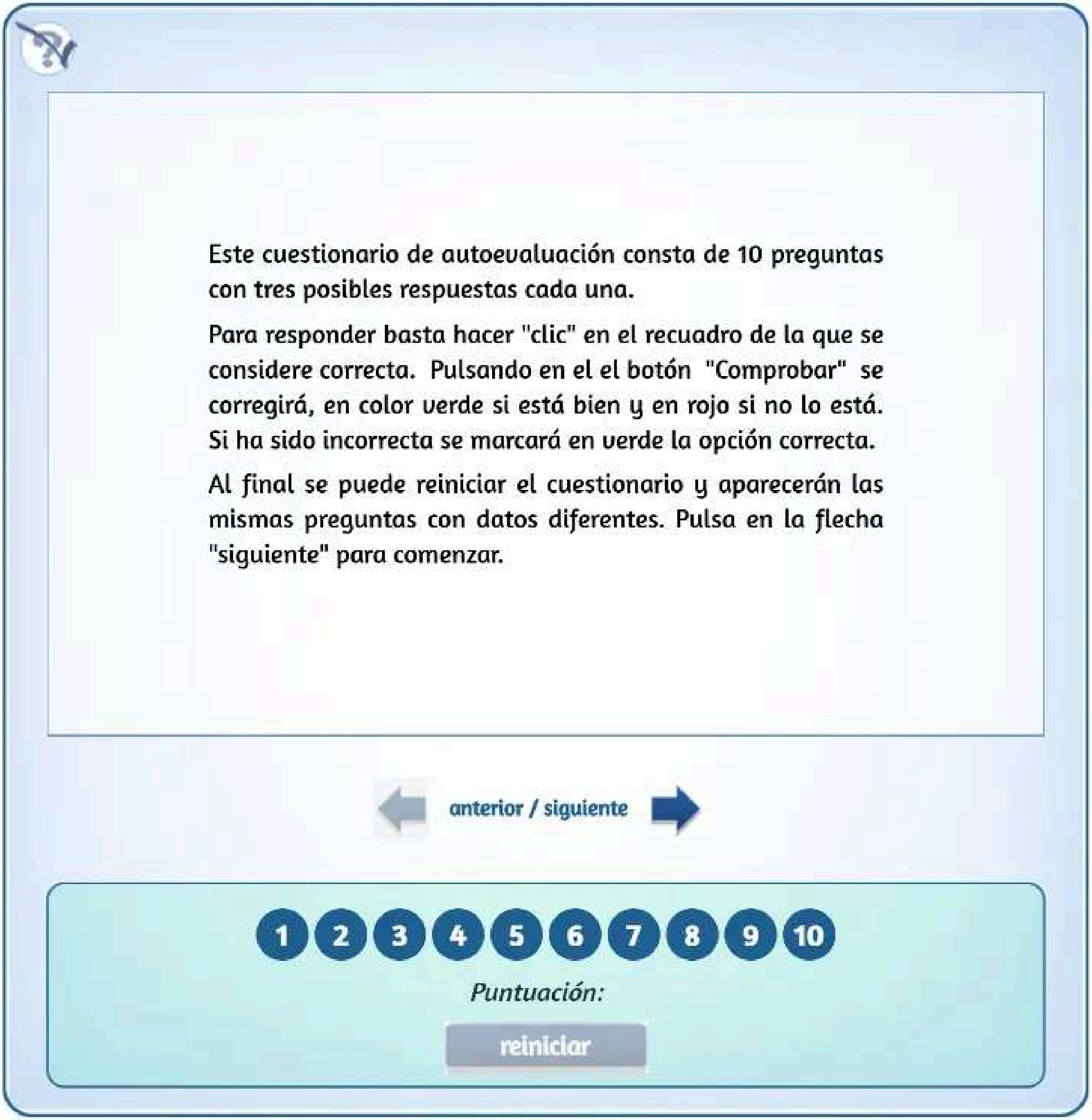
4.3.5 Ejercicios para practicar

A continuación se presentan más ejercicios para practicar. Puedes elegir en el menú el tipo que prefieras para empezar. De todos ellos se ofrece la solución.

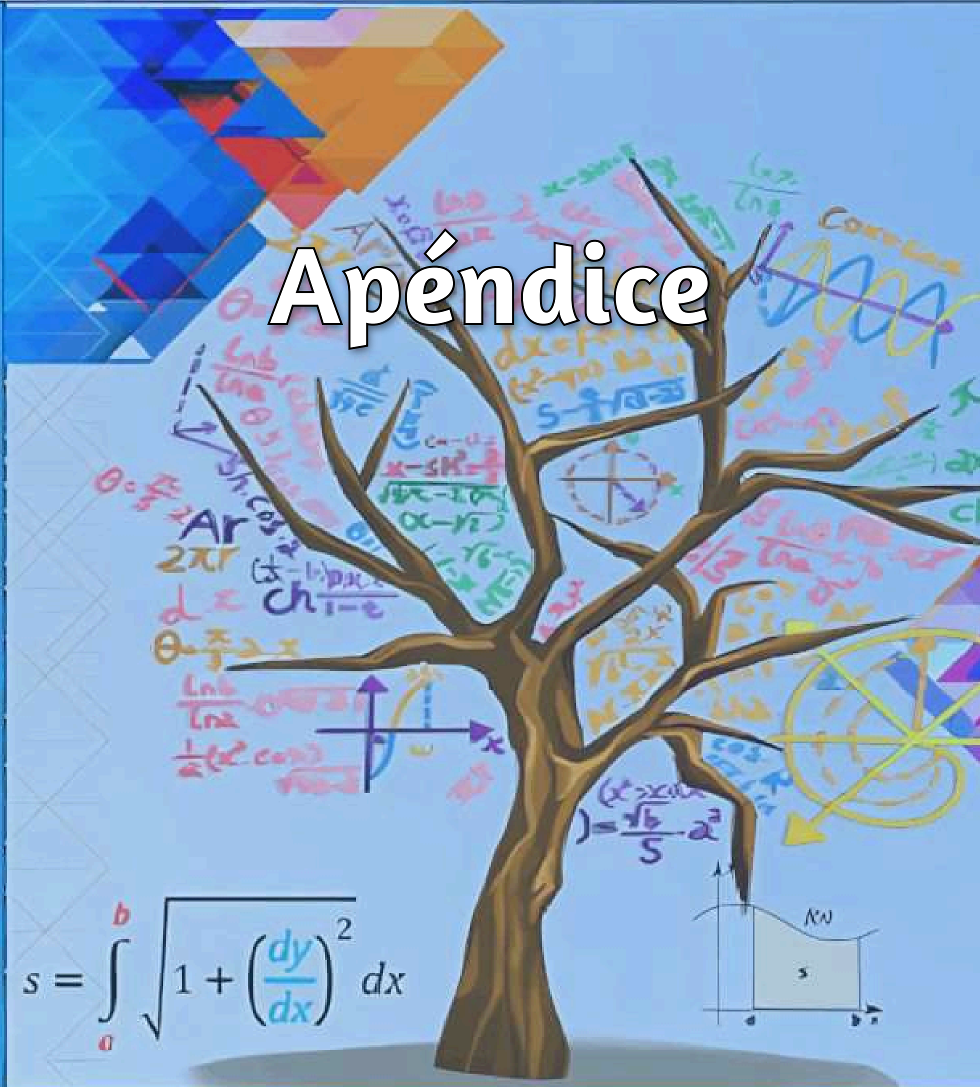


4.3.6 Autoevaluación

Ahora puedes hacer el siguiente cuestionario de autoevaluación para comprobar lo aprendido en esta sección.



Apéndice



María José García Cebrian

5.1 Problemas de Selectividad

A continuación se presentan los problemas de Análisis propuestos en la Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad del año 2019, en cada distrito universitario de España.

DESCARTES
matemáticas interactivas