CUADRATURA DEL CÍRCULO CON LA CUADRATRIZ DE DINOSTRATO

Yuli Andrea Rodríguez Rodríguez[1]
Universidad Pedagógica Nacional
yulyarr@gmail.co

Benjamin R. Sarmiento Lugo[2]
Universidad Pedagógica Nacional
bsarmiento@pedagogica.edu.co

RESUMEN

En este artículo se presentan la construcción de la curva mecánica conocida como cuadratriz de Dinostrato, usada desde la antigüedad para darle solución al problema de la cuadratura del círculo, uno de los problemas clásicos de la geometría griega; además se describe en forma abreviada cómo usarla para tal fin. Para lograr la curva mediante los pasos que aquí se presentan se sugiere usar el software de geometría dinámica Cabri II Plus. Se aclara que con esta curva no se resuelve el problema con su planteamiento original, pero se presenta una solución mezclando el ingenio de los antiguos con la potencialidad de los programas de geometría dinámica.

INTRODUCCIÓN

Cuando se hace una revisión bibliográfica de artículos, documentos electrónicos y libros de texto con el fin de encontrar detalles sobre las construcciones geométricas de curvas mecánicas y mecanismos físicos usados para resolver los tres problemas clásicos de la geometría griega, no se encuentran suficientes fuentes sobre el tema, a excepción de algunos sitios en la red Internet que abordan esta temática de manera incompleta. Lo anterior ha motivado la realización de un trabajo sobre curvas y mecanismos inventados a lo largo de la historia para resolver estos problemas. Aquí se presentará una de ellas, la Cuadratriz de Dinostrato, inventada para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Este problema, que data del siglo V a.C., según testimonio de **Plutarco**, lo plantearon los griegos de la siguiente forma: construir a partir del radio *r* de un círculo un cuadrado de la misma área que el círculo. Esto significa que se debe construir un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado, es decir, si el círculo tiene área igual a πr^2 entonces el lado del cuadrado debe ser $\sqrt{\pi}\ r$. Por lo tanto, el problema se reduce a construir el número $\sqrt{\pi}$.

El primero que se interesó por el problema de la cuadratura del círculo fue el filósofo jónico Anaxágoras, quien por haber afirmado que el Sol excedía en magnitud a la península europea, y por intentar explicar diversos fenómenos que los griegos atribuían a los dioses caprichosos del paganismo, fue condenado a prisión; mientras estuvo en la cárcel Anaxágoras trató de "cuadrar el círculo", y en el silencio del presidio escribió un trabajo sobre este problema.

[1] Licenciada en Matemáticas – Universidad Pedagógica Nacional
[2] Magíster en Educación Matemática – Universidad Pedagógica Nacional

En el libro "El hombre que calculaba", se dice que once siglos antes de Mahoma, Hipócrates llegó a descubrir las primeras cuadraturas de superficies limitadas por curvas, cuando su objetivo único era llegar a la cuadratura del círculo. El geómetra Dinostrato, hermano de Menecmo y discípulo de Platón, reconoció que con la ayuda de una curva (cuyo descubrimiento se atribuye a Hipias) era posible resolver el problema de la cuadratura del círculo, de ahí la denominación de Cuadratriz de Hipias o de Dinostrato a esta curva. Otro procedimiento destacado en la antigüedad fue la espiral uniforme creada por Arquímedes y un procedimiento moderno es la cuadratriz de Abdank-Abakanowicz. Los griegos, intuitivamente llegaron a concluir que los tres problemas no se podían resolver sólo con regla y compás; debieron pasar aproximadamente dos milenios para que Lamber y Legendre demostraran que el número π no es racional (siglo XVIII). Fue hasta 1882, que Linderman, en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* demuestra que el número π es trascendente, siguiendo un proceso similar al descubierto por Hermite en 1873 con respecto a la trascendencia del número e.

En 1837, Pierre Wantzel publicó en el *Journal de Liouville* la demostración del siguiente teorema: "Un número real es construible con regla y compás si verifica dos condiciones (además son necesarias y suficientes): (1) El número es algebraico sobre Q; (2) El polinomio irreducible que lo contiene como raíz es una potencia de 2" . Con este resultado Wantzel pone fin a la antigua polémica sobre si un problema geométrico puede o no ser resuelto mediante regla y compás, demostrando así que los tres problemas son irresolubles con las condiciones impuestas en sus inicios.

1. CUADRATRIZ DE DINOSTRATO

Sus ecuaciones son las siguientes:

Ecuación cartesiana: $x = y \operatorname{Cot} \dfrac{y}{a}$

Ecuación polar: $a = \dfrac{\nu}{\omega}$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = vt \\ \theta = \omega t \end{cases}$

2. CONSTRUCCIÓN DE LA CUADRATRIZ:

1. Se traza una recta horizontal h y se ubican puntos O y E sobre la recta h tales que la medida del segmento OE sea igual a 1.
2. Trazar la circunferencia C_O con centro O y radio OE.

3. Trazar el segmento FJ, tal que sea diámetro de la circunferencia C_O y que sea perpendicular a la recta h.
4. Trazar la semicircunferencia JEF. (Ver figura)
5. Sea G un punto sobre la semicircunferencia JEF.
6. Trazar el arco GF. (ver figura).
7. Trazar la semirrecta OG.
8. Sea K un punto sobre el segmento FJ tal que $\frac{m(FK)}{m(FJ)} = \frac{m(\overset{\frown}{GF})}{m(JEF)}$. Esto significa que la medida m(FK) aumenta con velocidad constante conforme aumenta la media $m(\overset{\frown}{GF})$ con velocidad constante. Por ejemplo cuando m(FK) es la mitad de m(FJ) entonces $m(\overset{\frown}{GF})$ es la mitad de m(JEF).
9. Trazar la recta s perpendicular al segmento FJ y que pase por K.
10. Sea M la intersección entre la recta s y la semirrecta OG.
11. El lugar geométrico generado por M cuando se mueve G sobre la semicircunferencia JEF es la cuadratriz de Dinóstrato.

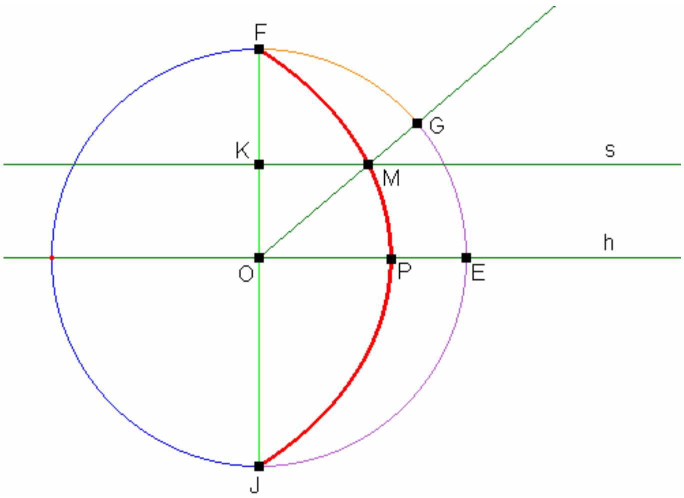

Figura 1

3. CUADRATURA DEL CÍRCULO CON LA CUADRATRIZ:

1. Sea P el punto de intersección entre la cuadratriz y la recta h.
2. La medida del segmento OP es $2/\pi$. (Al final de esta sección se justifica esta afirmación)
3. Trazar las rectas u y v, perpendiculares a la recta h, que pasen por P y E, respectivamente.
4. Sea R la intersección entre la recta u y la semicircunferencia JEF.

5. Trazar la semirrecta OR.
6. Sea S la intersección entre la recta v y la semirrecta OR.
7. La proporción $\frac{OP}{OE} = \frac{OR}{OS}$ conduce a OS = $\pi/2$.
8. Trazar la circunferencia C_O^1 con centro O y radio OS = $\pi/2$.
9. Sea T la intersección entre la recta h y la circunferencia C_O^1.
10. Trazar la circunferencia C_T con centro T y radio 2.
11. Sea M la intersección de la circunferencia C_T con la recta h tal que O – T – M.
12. Sea N el punto medio entre O y M.
13. Trazar la circunferencia C_N con centro N y radio NM.
14. Trazar la recta r perpendicular al la recta h y que pase por T.
15. Sea W la intersección entre la recta r y la circunferencia C_N. (Por encima de la recta h)
16. Trazar el segmento WT perpendicular a la recta m. Como OS = OT mide $\pi/2$ y TN mide 2, entonces WT mide $\sqrt{\pi}$, por ser media geométrica de OT y TM.

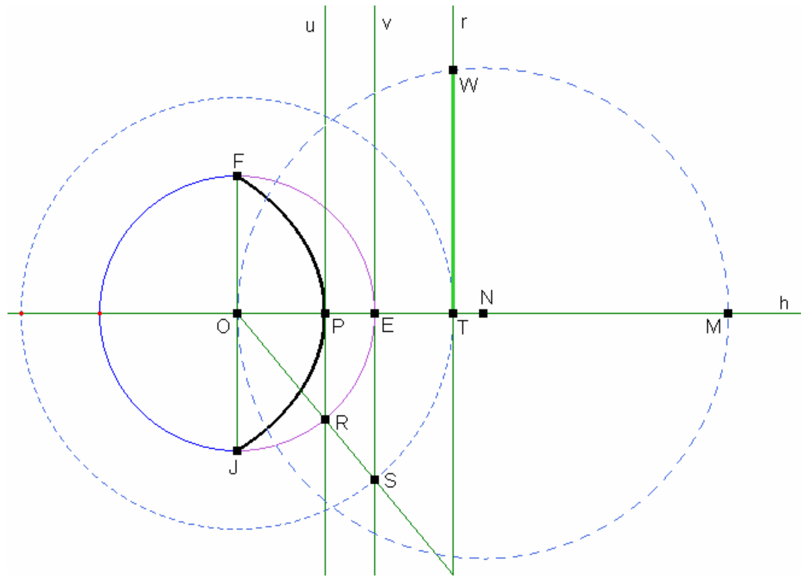

Figura 2

17. Se construye el cuadrado TWVZ, tomando como uno de sus lados el segmento WT. El área de este cuadrado es π, igual al área del círculo que se tomó como base para construir la cuadratriz.

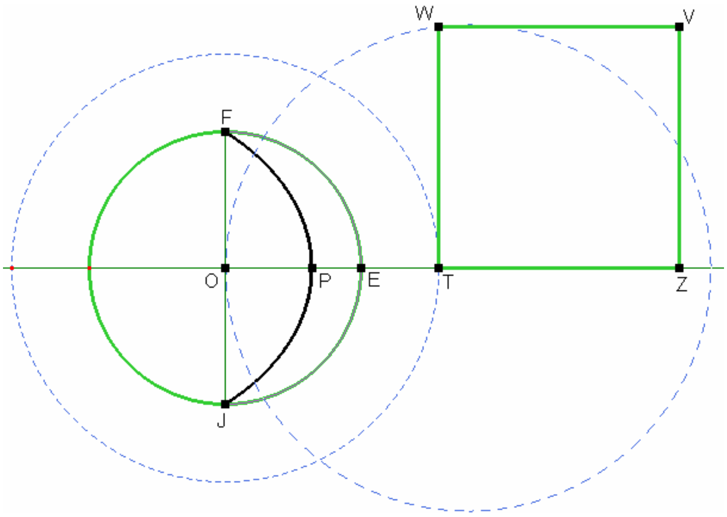

Figura 3

Afirmación: La distancia d(O,P) = $2/\pi$.

Justificación:

Denótese $\measuredangle EOG = \theta$, $\measuredangle FOG = \dfrac{\pi}{2} - \theta$, $OM = \rho$, $OF = r$ $(r = 1)$.

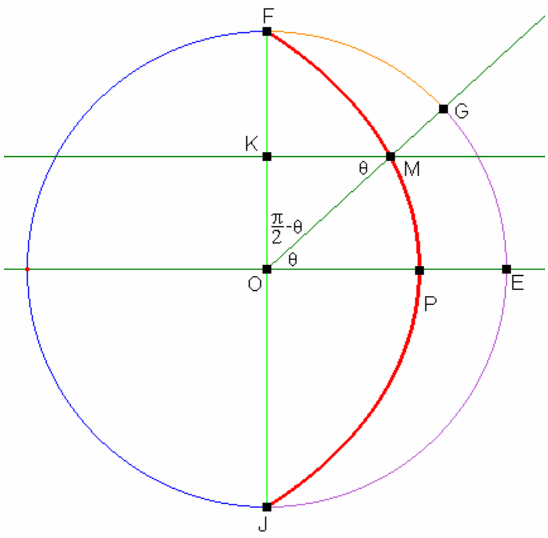

Figura 4

Por la construcción de la cuadratriz "la medida m(FK) aumenta con velocidad constante conforme aumenta la media m($\overset{\frown}{GF}$) con velocidad constante", se tiene que:

$$\frac{FK}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{2r}{\pi}.$$

Del triángulo MKO se tiene que $\text{Sen}\theta = \frac{OK}{OM} = \frac{OK}{\rho} \Rightarrow OK = \rho\text{Sen}\theta$.

Como FK + KO = r, entonces FK = r – KO ó FK = r – ρSenθ.

Además, como la medida del segmento KO disminuye conforme el ángulo EOG disminuye, entonces: $\frac{KO}{\theta} = \frac{FO}{\frac{\pi}{2}}$; pero como KO = ρSenθ entonces $\frac{\rho\text{Sen}\theta}{\theta} = \frac{2FO}{\pi}$ es decir,

$2r = \pi\frac{\rho\text{Sen}\theta}{\theta}$ por ser FO = r. (1)

Por otro lado, cuando $\theta \to 0$ se tiene que $OM = \rho \to OP$ y $\frac{\text{Sen}\theta}{\theta} \to 1$

De (1) se llega a 2r = π·OP·1 entonces $OP = \frac{2r}{\pi}$.

Dado que en la construcción se tomó r = 1, entonces $OP = \frac{2}{\pi}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arguedas, Jendry. Construcción de lugares geométricos trascendentales y su importancia en la enseñanza de la matemática. (V Congreso de enseñanza de la matemática asistica por computadora).

Álvarez, J. (2006), Curvas en la historia. España. Nivola Libros Ediciones.

Beckmann, P. (2007), La Historia de π. México. Editorial Trillas.

Boyer, Carl. Historia de las matemáticas, Madrid editorial,1996

González, P. y Vaqué, J. (1993), Arquímedes: El método relativo a los teoremas mecánicos. Barcelona. Ediciones de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Hitt, F. y Filloy, E. Geometría Analítica. Grupo editorial Iberoamérica. México, 1997.

Kline, Morris. El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. Madrid, Editorial Alianza. Tomos I , II y III.

Lehmann, Charles. Geometría Analítica. Editorial Limusa. Máxico, 1994.

Pombo, A. (2002), La cuadratura del círculo. Barcelona. Alianza Editorial.

Las curvas mecánicas en la geometría griega: La cuadratriz de Dinóstrato. Revista SUMA. Año 1998, No 28. Paginas 31-36.

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml