



ISSN: 2603-9982

Galo-Sánchez, J.R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(1), 1-20.

PARTICIÓN PRISMÁTICA DE UN CUBO EN SEIS PIRÁMIDES TRIANGULARES EQUIVALENTES

José R. Galo-Sánchez, Red Educativa Digital Descartes

Resumen

En este artículo se realiza un análisis constructivo, global y unificador de la descomposición de un cubo en pirámides cuadradas y triangulares. Un problema clásico del que se encuentran soluciones regulares aisladas e inconexas y del que, aquí, se hace un completo y detallado recubrimiento descriptivo de su solución. Un recorrido que en particular detalla la respuesta a cómo realizar la partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes.

Palabras clave: *Partición poliedros, cubo, pirámide.*

Prismatic dissection of a cube into six equivalent triangular pyramids

Abstract

In this article a constructive, global and unifying analysis of the dissection of a cube into square and triangular pyramids is made. A classic problem, which regular, isolated and disconnected solutions are found and here a complete and detailed descriptive covering of their solution is performed. A tour that particularly details the answer to how to carry out the prismatic partition of a cube into six equivalent triangular pyramids.

Keywords: *Polyhedron dissection, cube, pyramid.*

INTRODUCCIÓN

El cubo o hexaedro regular, lo mismo que el resto de los poliedros regulares convexos —los sólidos platónicos—, tiene un atractivo generalizado tanto para expertos como para profanos. Los primeros, para profundizar en su estudio y análisis, habitualmente suelen proceder a realizar cortes planos con objeto de determinar cuáles son las diferentes secciones poligonales que pueden obtenerse; o bien buscan conocer diferentes descomposiciones o particiones del mismo en otros poliedros. Y algunos de los segundos, y muchos de los primeros, seguro que se han encontrado en algún momento con la actividad lúdica de elaborar puzzles o rompecabezas consistentes en montar un cubo a partir de unas piezas dadas; o bien, realizando una lectura recíproca, el diseñador y constructor de los mismos ha de plantearse cómo partir un cubo en diferentes piezas sobre las que puede autoimponerse ciertas restricciones o establecer cierta homogeneidad en la forma, el volumen o cualquier otro atributo o propiedad. En particular se puede establecer, por ejemplo, que las piezas sean de un mismo tipo e incluso iguales. La elegancia alcanzada en la partición obtenida, o la mayor o menor dificultad que involucra el adoptar un criterio u otro es matizable y opinable y, por tanto, no nos adentraremos en ello. Pero un planteamiento usual es la partición del cubo¹ en pirámides de base cuadrada y en pirámides de base triangular y en ello vamos a centrarnos. En todo este artículo consideraremos un cubo de arista unidad y todo lo que expondremos es aplicable a un cubo de arista cualquiera sin más que aplicar una homotecia.

PARTICIÓN DE UN CUBO EN PIRÁMIDES DE BASE CUADRADA

Atendiendo a que el cardinal de los elementos que componen la partición sea mínimo o que entre sí sean lo más regulares o similares posible, se obtienen cuatro situaciones que son las que usualmente suelen divulgarse (ver figura 1):

- 1) Descomposición en tres pirámides iguales (estrictamente deberíamos decir congruentes²). Al quedar dividido el cubo en tres partes iguales, este caso suele ponerse como un ejemplo visual de por qué el volumen de una pirámide se calcula como

$$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \text{Área}_{Base} \text{ altura}$$

e incluso éste puede ser el primer paso para realizar una demostración de esa igualdad.

- 2) En cuatro pirámides iguales dos a dos.
- 3) En cinco pirámides, cuatro iguales y una desigual, siendo ésta regular.
- 4) En seis pirámides regulares iguales.

Estas particiones pueden recrearse en los hiperenlaces anteriores que se corresponden con sendos objetos interactivos.

Estos cuatro casos considerados no son más que situaciones particulares de una partición general del cubo realizada en base a los ocho vértices y a un punto adicional del mismo. Veámoslo a continuación.

Para construir una partición del cubo en pirámides cuadradas es necesario utilizar los ocho vértices del cubo y las doce aristas del mismo, y adicionalmente hay que seleccionar o marcar cuál o cuáles serán las cúspides de las pirámides a construir. La introducción de puntos adicionales a los vértices hará que aumente el número de combinaciones de cinco puntos que pueden realizarse y consecuentemente podrá incrementarse el número de pirámides de la partición (no todas las

¹ Un conjunto de pirámides constituirán una partición de un cubo si la unión de las mismas conforman el cubo y la intersección entre ellas es disjunta o bien es una superficie plana o un segmento o un punto, es decir, figuras con volumen nulo.

² Figuras congruentes son aquellas que pueden hacerse coincidir mediante una composición de isometrías (traslación, giro y/o simetría).

combinaciones posibles de vértices son viables para obtener una partición del cubo). Así pues, analicemos diferentes alternativas:

- **No incluir ningún punto adicional** (ver figura 1, imagen 1). Esta elección obliga a que la cúspide de cada pirámide sea uno de los vértices del cubo y si además imponemos que todas las pirámides compartan la misma cúspide entonces obviamente obtendremos la partición de cardinal mínimo. Este planteamiento es viable pues basta seleccionar un vértice del cubo y desde él trazar segmentos a cada uno de los otros siete vértices, ello conduce a la partición en tres pirámides que ha sido reflejada en el primer caso descrito antes. La partición es única pues, se elija el vértice que se elija, todas las particiones son congruentes mediante giros.

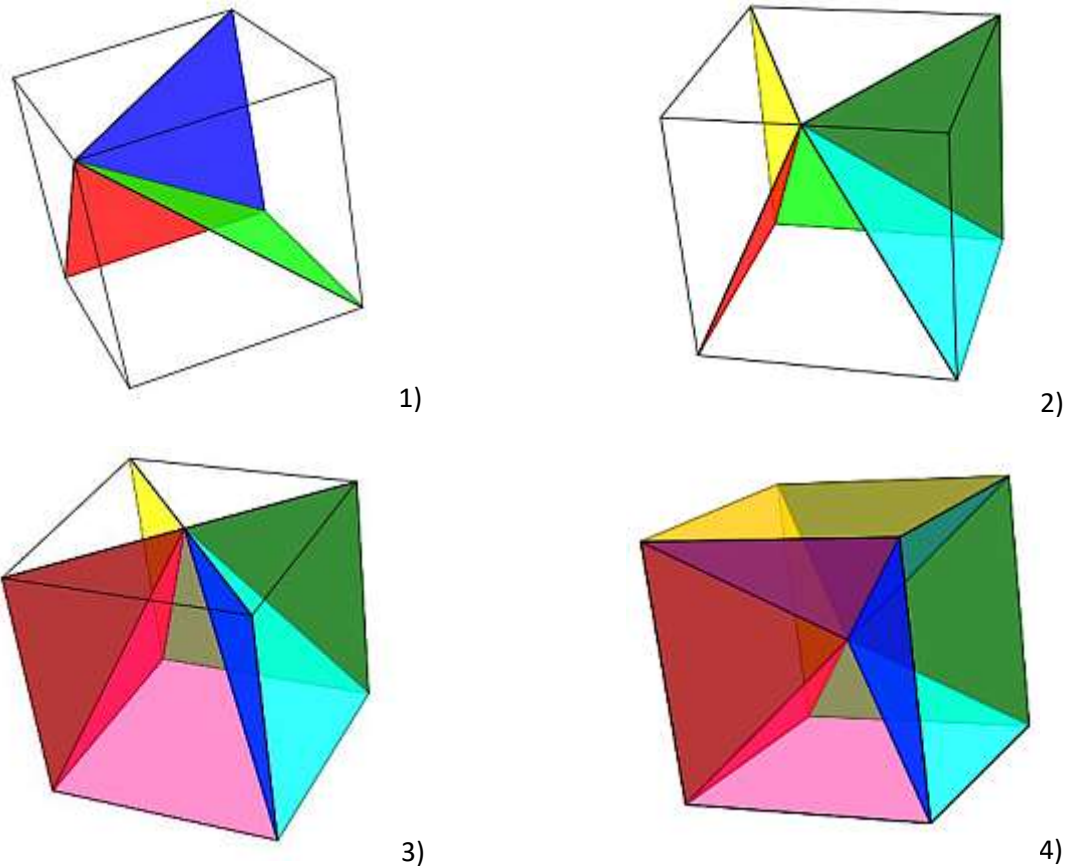


Figura 1. Partición de un cubo en tres (1), cuatro (2), cinco (3) y seis pirámides cuadradas (4).

- **Añadir un punto adicional.** Este punto sería la cúspide común de todas las pirámides a construir para que así el número de éstas sea lo menor posible y constructivamente se procede igual que en el caso anterior trazando segmentos desde la cúspide común a los vértices del cubo. Dicho punto adicional ha de pertenecer a él, bien a su interior o a la frontera y por tanto podemos distinguir las siguientes situaciones:
 - **Punto perteneciente a una arista** (ver figura 2). Aquí obtendremos una partición compuesta por **cuatro pirámides**. En general las cuatro son distintas, pero entre dos de ellas se da siempre una congruencia (una es simétrica de la otra). Y hay un caso particular en el que las pirámides son iguales dos a dos, que es el segundo caso expuesto antes, y que acontece cuando el punto adicional considerado es el punto medio de la arista. La arista a la que pertenezca el punto no introduce ninguna variación. Todas serán situaciones congruentes.

- **Punto perteneciente a una cara** (ver figura 3) Este caso conduce a la partición en **cinco pirámides** y de las infinitas posibilidades la situación con más regularidad es cuando el punto elegido es el punto donde se intersecan las diagonales de la cara. Es el tercer caso expuesto con anterioridad. La partición, salvo isometrías, es independiente de la cara seleccionada.

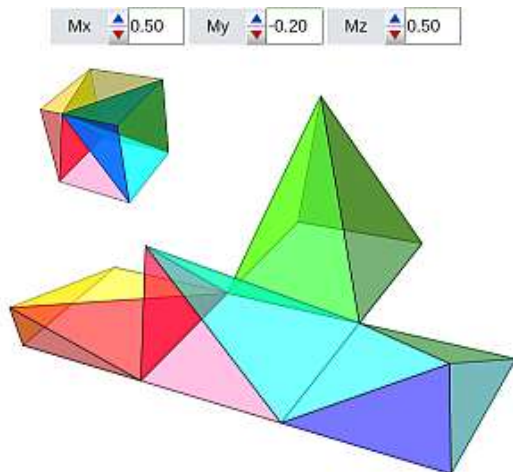


Figura 2. Punto ubicado en una arista, descomposición en cuatro pirámides.

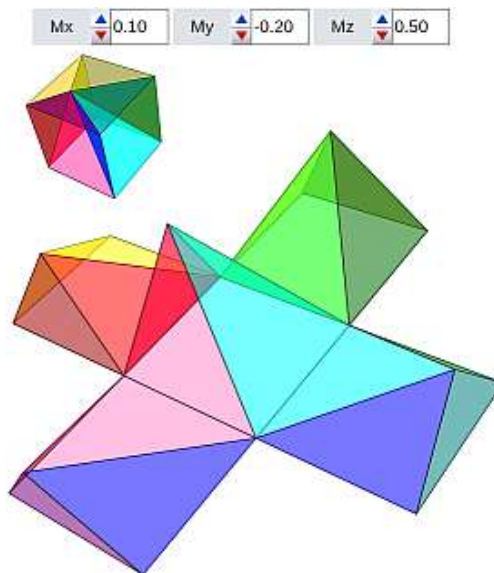


Figura 3. Punto ubicado en una cara, descomposición en cinco pirámides.

- **Punto perteneciente al interior del cubo** (ver figura 4). Esta situación hace que sean **seis pirámides** las que forman la partición. De las infinitas particiones posibles, cuando el punto seleccionado es el punto de intersección de las diagonales del cubo se tiene que las seis pirámides son iguales y regulares (el cuarto caso mostrado antes).

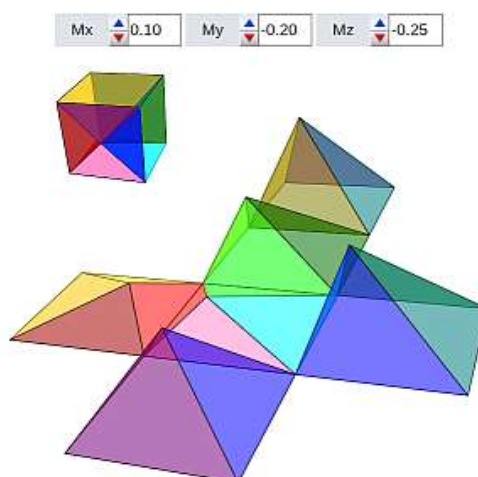


Figura 4. Punto ubicado en el interior del cubo, descomposición en seis pirámides.

Todas las situaciones anteriores pueden experimentarse en el recurso interactivo “Partición de un cubo en pirámides de base cuadrada, caso general”.

Hemos de señalar que aunque todas las descomposiciones del cubo cumplen la definición matemática de partición, su reproducción física tiene ciertos matices que hay que reseñar. Por un lado, si disponemos de las pirámides podremos componer el cubo, pero si partimos de un cubo no podrá descomponerse en esas pirámides si esta descomposición se realiza efectuando exclusivamente cortes mediante planos en la que cada uno de ellos fracciona una figura en otras dos independientes o separadas, es decir, lo equivalente a físicamente cortar y dividir en dos partes un objeto con un cuchillo.

PARTICIÓN DE UN CUBO EN PIRÁMIDES DE BASE TRIANGULAR

Podemos plantearnos, al menos, dos procedimientos para descomponer un cubo en pirámides triangulares. Uno, partiendo de las descomposiciones anteriores en pirámides de base cuadrada y otro abordando una construcción específica independiente.

Partición mediante descomposición de pirámides de base cuadrada

Si consideramos las diferentes particiones del cubo en pirámides cuadradas que hemos analizado en la sección anterior, entonces, automáticamente, son conocidas sendas particiones en pirámides triangulares sin más que considerar cada una de las dos diagonales del cuadrado que constituye la base en cada pirámide. Además las dos subpirámides obtenidas serán equivalentes³, pues la base inicial cuadrada ha quedado dividida en dos partes iguales y la altura es común a ambas y, por tanto, el volumen de cada una de esas pirámides triangulares es la mitad del volumen inicial. En este contexto tendríamos las siguientes situaciones:

- Considerando la partición mínima del cubo en tres pirámides cuadradas obtendríamos una subpartición en seis pirámides triangulares equivalentes. Dado que cada una de esas pirámides cuadradas pueden dividirse de dos formas diferentes, según cual sea la diagonal del cuadrado que se considere, tendríamos a su vez varias posibilidades:
 - Si la diagonal que se considera conduce a dividir las pirámides cuadradas por su plano de simetría, entonces las seis pirámides son congruentes ya que hay tres coincidentes entre sí mediante traslación y giro (lo que de manera simplificada se suele indicar como iguales) y las otras tres son simétricas de las primeras —denotaremos a una de las pirámides como tipo X_1 y a su simétrica como X_2 —. La partición sería $\{X_1, X_2, X_1, X_2, X_1, X_2\}$. Este caso es el que usualmente puede encontrarse en las fuentes literarias clásicas y en la Web, y que mostramos en la figura 5 y se reproduce de manera interactiva en este recurso⁴. Veremos que es una situación particular del estudio global, que abordaremos en la siguiente sección, correspondiente a lo que denominaremos particiones prismáticas, porque agrupando esas pirámides de tres en tres el cubo queda descompuesto en dos prismas triangulares.

Este proceso de división podría repetirse considerando la mediana de las nuevas bases y así obtendríamos una partición con doce pirámides equivalentes y dos familias de 6 pirámides congruentes entre sí; y con una nueva fracción por la mediana serían 24 pirámides equivalentes y 4 familias congruentes; y en general $3 \cdot 2^n$ pirámides equivalentes y 2^{n-1} familias de pirámides congruentes entre sí. Un entretenimiento teórico bonito, pero rápidamente no sería viable su traslación a un contexto manipulativo.

- Si se considera la diagonal perpendicular al plano de simetría, cada pirámide cuadrada queda dividida en dos pirámides equivalentes. La partición cuenta con dos tipos de pirámides (ver figura 6) que denotaremos como tipo Y (la que cuenta con un triedro trirectángulo) y la otra

³ Dos pirámides son equivalentes, o en general dos figuras tridimensionales son equivalentes, si tienen igual volumen.

⁴ Algunas de las figuras incluidas en este documento tienen hiperenlaces a recursos interactivos que permiten experimentar sobre el contenido mostrado.

que nombraremos tipo Z. La partición es $\{Y, Z, Y, Z, Y, Z\}$. Esta partición, a diferencia del caso anterior, no es prismática.

- Si se combinan las dos posibilidades anteriores se obtienen siempre seis pirámides equivalentes, pero habría dos posibilidades: $\{X_1, X_2, X_1, X_2, Y, Z\}$ o $\{X_1, Y, Z, X_2, Y, Z\}$ que también son casos particulares de particiones prismáticas que analizaremos posteriormente.
- Análogamente, en el caso de hacer nada más que una subdivisión por cada pirámide cuadrada, la partición en cuatro pirámides cuadradas se convertiría en ocho triangulares, la de cinco en diez y la de seis en doce.

En la imagen de la figura 7, se observa una partición en doce pirámides triangulares y se dispone de un recurso interactivo en el que se aborda de manera general la partición del cubo en pirámides triangulares a partir de las particiones del mismo en pirámides cuadradas.

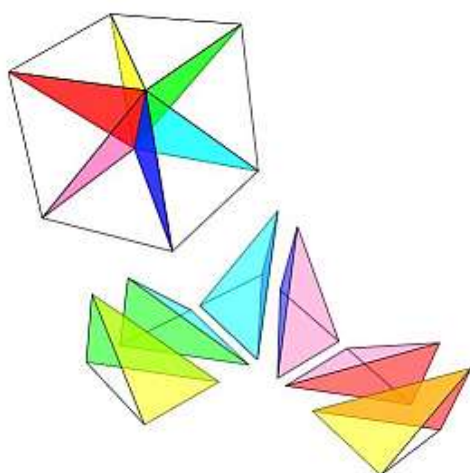


Figura 5. Partición del cubo en seis pirámides triangulares congruentes.

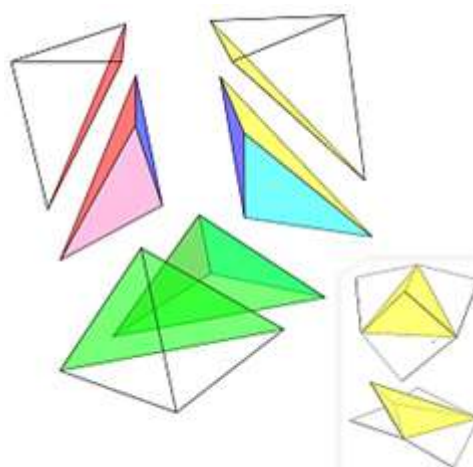


Figura. 6. Partición no prismática en seis pirámides triangulares equivalentes.

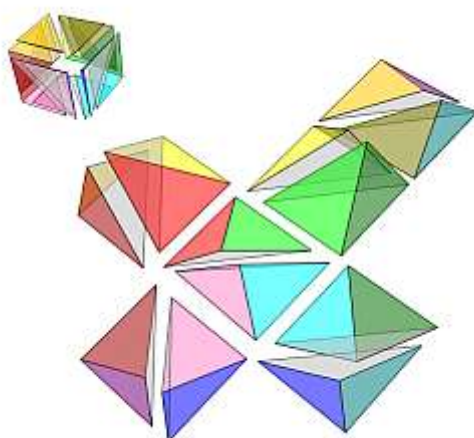


Figura. 7. Ejemplo de partición del cubo en doce pirámides triangulares equivalentes.

Todas las situaciones anteriores son, o pueden considerarse, interesantes y conducentes a puzles de cierta dificultad tanto en los casos en los que se busca la máxima congruencia o regularidad, como en la posición contraria. Pero ninguna de ellas conduce a la partición con cardinal mínimo, pues el planteamiento realizado viene condicionado por la partición previa en pirámides de base cuadrada. La partición mínima, como veremos en la próxima sección, se corresponde con cinco pirámides y salvo isometrías hay **una única posibilidad** para su construcción. Por ello, nuestro centro de interés se focalizará posteriormente en la citada **descomposición prismática del cubo en seis pirámides triangulares equivalentes**, que sin ser el caso único de cardinal mínimo sí que genera una variedad de situaciones que nos proponemos cuantificar y detallar.

Partición mediante construcción específica

En este apartado, partiendo de un cubo de arista la unidad y de vértices $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ —donde los cuatro primeros vértices constituyen la base superior y los otros cuatro la inferior—, nos planteamos realizar una partición del mismo en pirámides triangulares buscando por un lado que la descomposición tenga cardinal mínimo y, por otro, alternativas en las que sin ser de cardinal mínimo se encuentren congruencias o equivalencias.

Dado que las pirámides triangulares son poliedros convexos con cuatro caras triangulares (es decir tetraedros) y cuatro vértices, en la planificación de esta partición han de tenerse en consideración las siguientes observaciones:

- Las caras del cubo han de dividirse en triángulos y, por tanto, se parte de un mínimo de 12 triángulos (2 por cada cara del cubo) y 18 segmentos (las doce aristas del cubo, más seis diagonales necesarias para partir cada una de las seis caras del cubo), que junto a los ocho vértices constituyen los elementos primarios a partir de los cuales se han de construir las pirámides de la partición (ver figura 8).

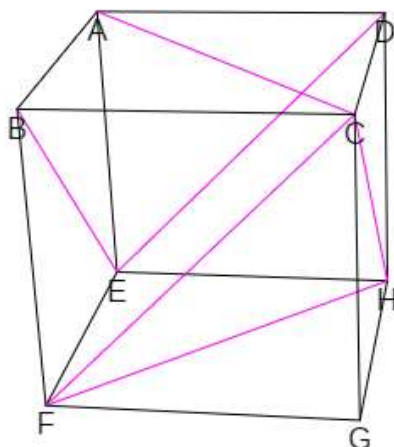


Figura 8. Un ejemplo de los elementos primarios para abordar la partición: 8 vértices, 12 aristas y 6 diagonales de las caras. La elección de una u otra diagonal en cada cara genera diferentes situaciones.

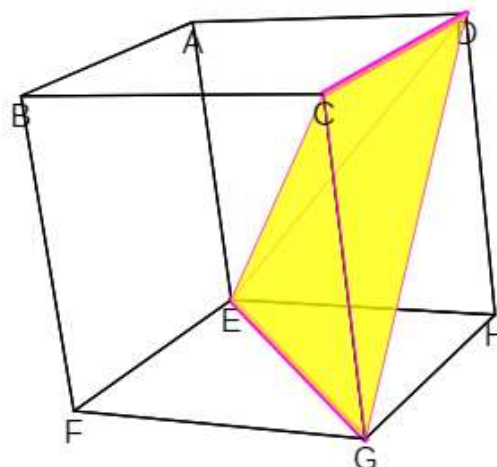


Figura 9. Pirámide determinada por dos segmentos con distinta dirección y no coplanarios.

- El menor número de pirámides se obtiene cuando se consideran exclusivamente los elementos primarios citados. La introducción de cualquier vértice o segmento adicional generará un mayor número de combinaciones posibles, un mayor número de pirámides.

- Dos pirámides de la partición pueden compartir como máximo tres vértices, una cara. O lo que es equivalente, han de tener tres caras diferentes.
- Una pirámide triangular de la partición queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección y que no sean coplanarios (ver figura 9).
- Cuando todas las diagonales correspondientes a las caras opuestas tienen distinta dirección las particiones en pirámides triangulares tienen más de seis pirámides, salvo:
 - Una partición con cinco elementos, que es la de **cardinal mínimo**, formada por cuatro pirámides trirrectángulas y un tetraedro regular (ver figura 10).
 - Una con seis elementos, que es la indicada en la figura 6, compuesta por las pirámides $\{Y, Z, Y, Z, Y, Z\}$.

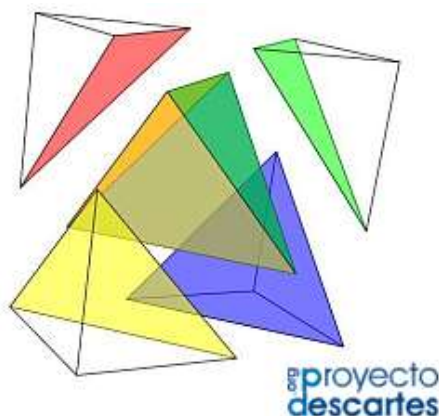


Figura 10. Descomposición de un cubo en cinco pirámides triangulares.

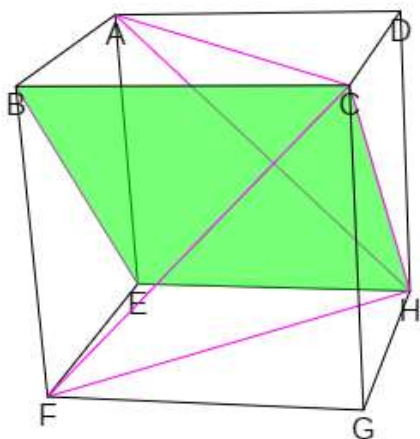


Figura 11. Dos diagonales de caras opuestas que tienen la misma dirección

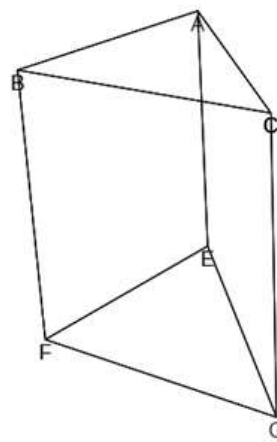


Figura 12. Prisma triangular

- Cuando al menos un par de las diagonales correspondientes a caras opuestas tienen la misma dirección, entonces ese par junto a las dos aristas que son perpendiculares a ellas forman un rectángulo y la partición en pirámides triangulares es posible solamente si se introduce al menos un segmento que bien subdivida ese rectángulo en dos triángulos o bien que lo corte

(ver figura 11). Al introducirse en la partición un nuevo elemento primario no puede obtenerse la partición de cardinal mínimo. Ese segmento adicional puede ser:

- Una diagonal del cubo. Aquí la obtención de una partición obliga a incluir más elementos primarios, puntos y segmentos, y consecuentemente se incrementa el número de pirámides obtenidas.
- La diagonal de ese rectángulo. En este caso el cubo queda dividido en dos prismas triangulares rectos con bases que son triángulos rectángulos isósceles —particiones prismáticas—, situación que detallaremos a continuación y que como veremos conduce a un mínimo de seis pirámides triangulares; y en el caso de ser exactamente seis se cumple que son equivalentes, es decir, que tienen igual volumen.

DESCOMPOSICIÓN DE UN PRISMA TRIANGULAR EN PIRÁMIDES TRIANGULARES

Con la partición en dos prismas triangulares, indicada en la sección anterior, el problema de partir un cubo queda reducido a la descomposición de un prisma triangular recto, cuyas bases son dos triángulos rectángulos isósceles de catetos 1 y de altura también 1, en pirámides triangulares. Situación que pasamos a analizar en este apartado.

Denotemos al conjunto de vértices del prisma anterior $\{A, B, C, E, F, G\}$ donde la base superior se corresponde con los tres primeros vértices y la inferior con los tres últimos (ver Fig. 12).

De manera análoga a lo indicado en la sección anterior tenemos:

- El menor número de pirámides se obtendrá cuando se consideren solo los seis vértices del prisma como posibles vértices de las pirámides de la partición.
- Los elementos primarios mínimos para abordar la partición son ocho triángulos (las dos bases del prisma y seis más resultantes de dividir las tres caras laterales en triángulos) y 12 segmentos (las nueve aristas y las tres diagonales de las caras laterales). Y dado que dos pirámides de la partición han de tener como mínimo tres caras diferentes, entonces también son, como mínimo, tres las pirámides que formarán la partición (ocho caras entre tres nos da un valor mayor que dos).

Basándonos en que una pirámide triangular queda determinada sin más que elegir dos segmentos con distinta dirección no coplanarios, una forma de abordar la partición del prisma $\{A, B, C, E, F, G\}$ en tres pirámides triangulares se logra considerando dos aristas no coplanarias, una de la base ABC y otra de la EFG (ver Fig. 13). Los cuatro vértices de esas dos aristas determinan una pirámide triangular que parte al prisma en tres bloques (ver Fig. 14) quedando fijadas así, junto a ésta, las otras dos pirámides buscadas.

Hay solamente seis posibilidades:

- BC con EF que conduce a la pirámide BCEF y determina a ABCE y CEFG
- AC con EF que conduce a ACEF y determina a ABCF y CEFG
- AB con EG que conduce a ABEG y determina a ABCG y BEFG
- AB con FG que conduce a ABFG y determina a ABCG y AEFG
- AC con FG que conduce a ACFG y determina a ABCF y AEFG
- BC con EG que conduce a BCEG y determina a ABCE y BEFG

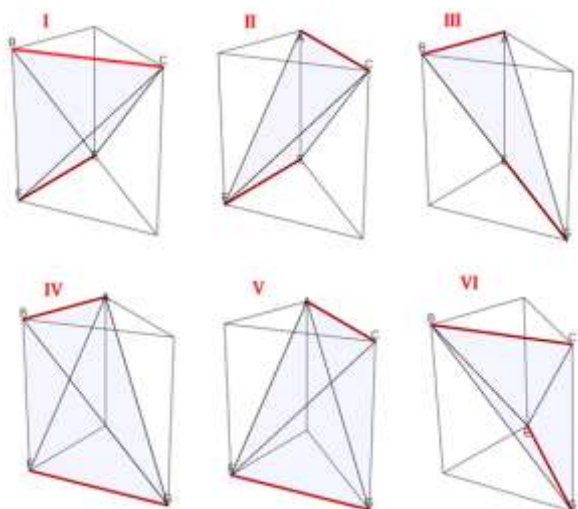


Figura 13. Aristas que determinan seis particiones diferentes

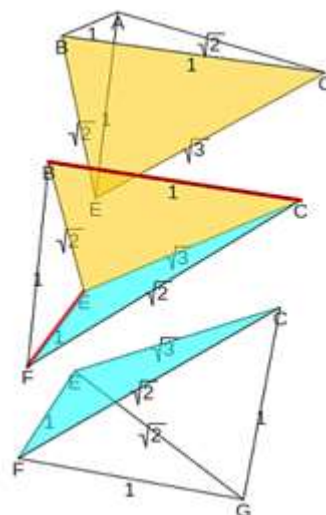


Figura 14. Partición del prisma a partir de las aristas BC y EF en tres pirámides ABCE, BCEF y CEFG

Distinguiendo los vértices por su nombre, en esas seis particiones aparecen doce pirámides diferentes, lo cual obviamente se corresponde con las combinaciones que se pueden obtener a partir de los seis vértices $\{A, B, C, E, F, G\}$ agrupándolos de cuatro en cuatro, que son los vértices de una pirámide, y quitando aquellas agrupaciones en las que los cuatro vértices son coplanarios. Así pues, son $C_{6,4} = 15$ combinaciones diferentes $\{ABCE, ABCF, ~~ABEF~~, ABEG, ABFG, ACEF, ~~ACEG~~, ACFG, AEFG, BCEF, BCEG, ~~BCFG~~, BEFG, CEFG\}$ y se excluyen los tres casos que hemos tachado por ser cuatro vértices coplanarios. Éste podría ser también otro procedimiento alternativo al anterior para analizar las diferentes particiones del prisma.

En esas doce pirámides intervienen 15 aristas posibles, pues son combinaciones de seis vértices tomados de dos en dos, $C_{6,2} = 15$. Son las reflejadas en la tabla 1, donde se indica su medida respectiva.

AB = 1				
AC = $\sqrt{2}$	BC = 1			
AE = 1	BE = $\sqrt{2}$	CE = $\sqrt{3}$		
AF = $\sqrt{2}$	BF = 1	CF = $\sqrt{2}$	EF = 1	
AG = $\sqrt{3}$	BG = $\sqrt{2}$	CG = 1	EG = $\sqrt{2}$	FG = 1

Tabla 1. Aristas de las pirámides y longitud de las mismas

En la tabla 2 podemos agrupar toda la información anterior y comparar las pirámides de esas particiones buscando detectar cuales son iguales o del mismo tipo. Fijándonos en la medida de las aristas que las componen se observa que hay tres tipos de pirámides que hemos etiquetado como⁵ X, Y, Z y, como detallaremos a continuación, en el tipo X se distinguen dos modalidades que

⁵ En secciones anteriores encontramos e introdujimos estos tipos de pirámides X₁, X₂, Y y Z.

etiquetamos como 1 y 2. También se refleja si la partición está constituida por pirámides congruentes entre sí (y por tanto también equivalentes) o si son solo equivalentes.

Partición	Pirámide	Aristas	Tipo	Modalidad	Congruencia y Equivalencia
I	ABCE	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	Congruencia
	BCEF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
	CEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
II	ABCF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		Equivalencia
	ACEF	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	CEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
III	ABCG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	Equivalencia
	ABEG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	BEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		
IV	ABCG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	Congruencia
	ABFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	
	AEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
V	ABCF	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		Equivalencia
	ACFG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	AEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	1	
VI	ABCE	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	X	2	Equivalencia
	BCEG	$1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$	Z		
	BEFG	$1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$	Y		

Tabla 2. Desglose de particiones, pirámides que lo conforman, longitud de las aristas que lo componen, tipo de pirámide y modalidad, y congruencia y/o equivalencia

Cada partición del prisma se distinguirá con el número romano que le hemos asignado o sin más que nombrar los tipos de pirámide que la forman para lo que convendremos hacerlo de arriba hacia abajo de acuerdo a la ubicación inicial de la pirámide en la que la base superior tiene de vértices ABC y la inferior EFG. Así la partición II viene dada por $\{Y, Z, X_2\}$.

Procedamos a analizar cada uno de los tipos de pirámides que aparecen en dichas particiones.

Pirámide tipo Y

Atendiendo únicamente a la forma, es decir, considerando que todas las caras son de igual color y no etiquetando los vértices, solo es posible una pirámide triangular cuyas aristas midan $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ (ver figura 15). Su desarrollo plano está compuesto por un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$ y tres triángulos rectángulos isósceles de catetos 1 y de hipotenusa $\sqrt{2}$. El desarrollo, como se ha representado en la figura, tiene simetría axial con eje de simetría cualquiera de las alturas del triángulo equilátero y, por tanto, independientemente de la orientación con la que se realiza el plegado (hacia dentro o hacia fuera) se obtiene la misma pirámide. El volumen de esta pirámide es $\frac{1}{6}$ de la unidad cúbica.

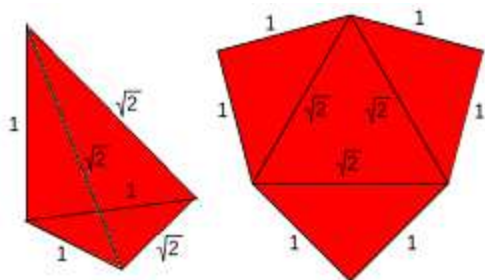


Figura 15. Pirámide triangular tipo Y y desarrollo plano de la misma

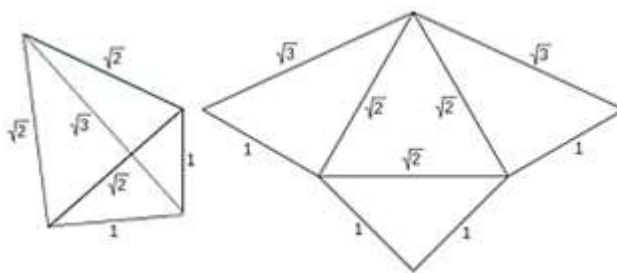


Figura 16. Pirámide triangular tipo Z y desarrollo plano de la misma

Pirámide tipo Z

De manera análoga al caso anterior, si atendemos a la forma, solo es posible una pirámide triangular cuyas aristas midan $1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ (ver Fig. 16). Su desarrollo plano está compuesto por un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1 e hipotenusa $\sqrt{2}$ y dos triángulos rectángulos de catetos 1 y $\sqrt{2}$ e hipotenusa $\sqrt{3}$. Este desarrollo, como está representado en la figura, tiene simetría axial con eje de simetría la altura del triángulo equilátero que es altura a la vez del triángulo rectángulo isósceles. Así pues, independientemente de la orientación con la que se realiza el plegado (hacia dentro o hacia fuera) se obtiene la misma pirámide. El volumen de esta pirámide es también $\frac{1}{6}$, por tanto, equivalente a la pirámide tipo Y.

Pirámide tipo X

Con las aristas de medidas $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ se pueden construir dos pirámides triangulares siendo una simétrica de la otra (ver Fig. 17). Los desarrollos planos son simétricos entre sí. Eligiendo uno de ellos, si se pliega hacia dentro se obtiene una de las pirámides y al plegarlo hacia fuera se obtiene la otra. Ambas tienen de volumen $\frac{1}{6}$, es decir, son equivalentes entre sí y a las pirámides Y y Z.

También en la parte inferior de la figura 17 puede observarse cómo ambas pirámides son simétricas, una respecto a la otra, en el sentido de que si se hacen coincidir dos caras que sean iguales el plano que separa a ambas pirámides es un plano de simetría de las mismas. X_1 y X_2 son, por tanto, congruentes entre sí.

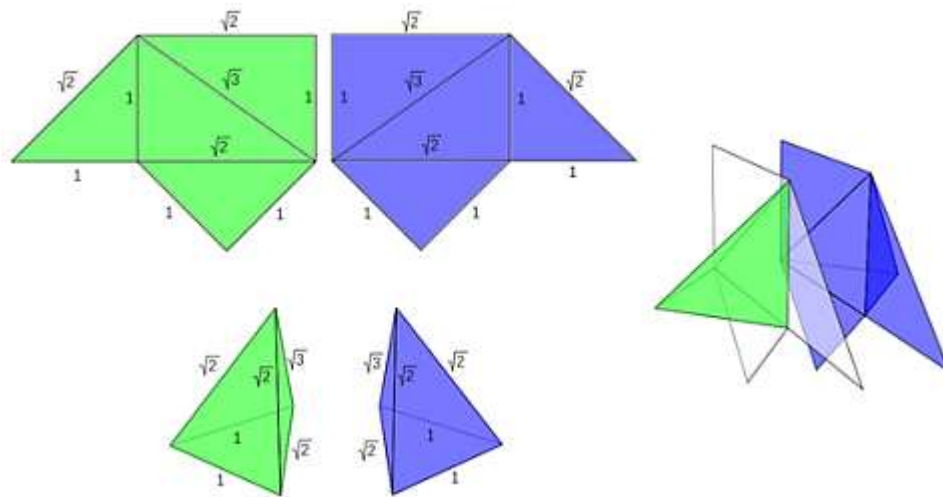


Figura 17. Pirámides triangulares tipo X — X_1 en color azul y X_2 en color verde—, desarrollo plano de las mismas y simetría de una respecto a la otra

Particiones del prisma triangular

Las seis particiones del prisma reflejadas en la tabla 2 están representadas en las imágenes de la figura 18, donde se han mantenido los colores usados anteriormente en cada tipo de pirámide para así poder distinguir a simple vista cuál es la pirámide utilizada: rojo para tipo Y, blanco para tipo Z, azul para X_1 y verde para X_2 .

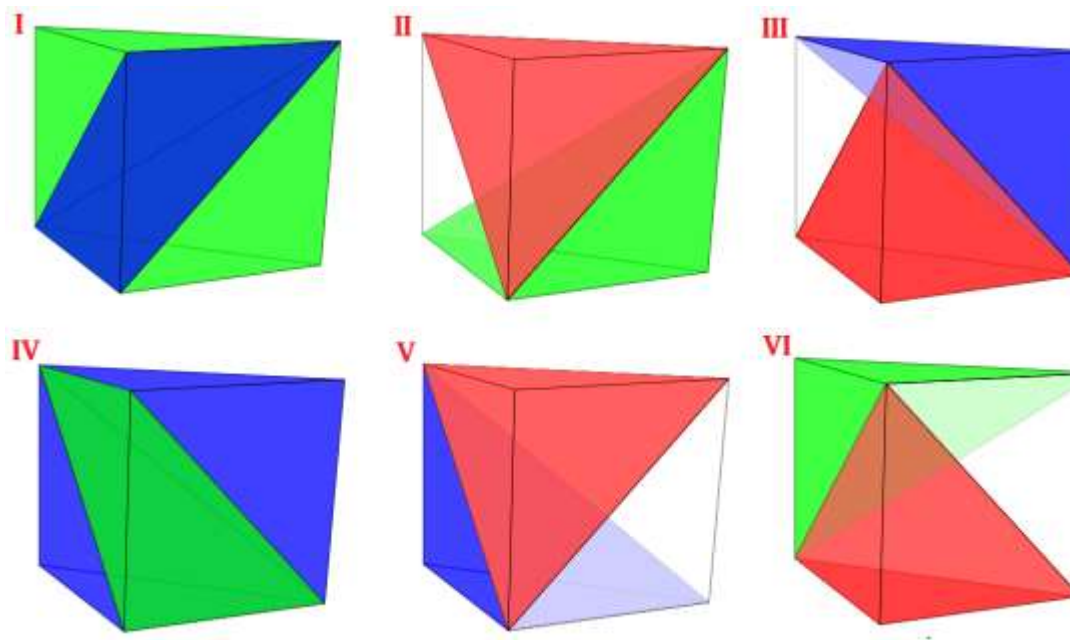


Figura 18. Particiones del prisma triangular

Sin embargo, de esas seis particiones hay solamente dos que no son congruentes entre sí, pues tenemos que se cumplen las siguientes relaciones:

- Las particiones II, III, V y VI son congruentes entre sí:
 - La partición tipo V —compuesta por las pirámides Y, Z, X_1 — es congruente con la III —compuesta por las pirámides X_1 , Z, Y—, basta realizar un giro de 180° .

- La partición VI —compuesta por las pirámides X_2, Z, Y — es congruente con la II —compuesta por las pirámides Y, Z, X_2 — mediante un giro.
- La partición tipo V —compuesta por las pirámides Y, Z, X_1 — es congruente con la II —compuesta por las pirámides Y, Z, X_2 — mediante una simetría (según lo indicado con anterioridad Y es simétrica de sí misma, Z también, y X_1 es simétrica de X_2).
- Las particiones I y IV son congruentes entre sí:
 - La partición IV —compuesta por las pirámides X_1, X_2, X_1 — es simétrica de la I —compuesta por las pirámides X_2, X_1, X_2 —.

Así pues, salvo isometrías, solo hay dos particiones diferentes del prisma en pirámides triangulares. Basta considerar, por ejemplo, la partición I y la II. En ellas, a su vez, en la partición I las pirámides son congruentes entre sí (y consecuentemente equivalentes) y en la II son únicamente equivalentes. No obstante, dado que nuestro objetivo real es la descomposición prismática del cubo mediante la unión de dos prismas, entonces la orientación de uno de ellos respecto al otro es significativa y consecuentemente tendremos que considerar como diferentes las seis particiones antes indicadas que son el fruto de hacer una distinción entre la cara inferior y la superior del prisma, o bien podemos hacer la lectura de que partiendo de las dos únicas particiones I y II del prisma al aplicarles isometrías tendríamos que son seis las particiones distinguibles a la hora de construir a partir de ellas el cubo.

PARTICIÓN PRISMÁTICA DE UN CUBO EN PIRÁMIDES TRIANGULARES EQUIVALENTES

Para construir una partición prismática del cubo basta considerar una de las particiones del prisma triangular obtenidas en el apartado anterior, aplicarle isometrías para transformarlo en otro prisma y juntar los dos juntos para conformar la partición buscada. En la tabla 3 se reflejan las posibles transformaciones isométricas a realizar para construir esa partición del cubo.

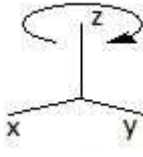
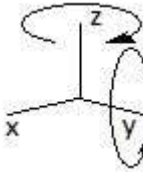
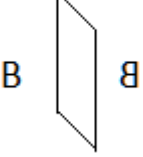
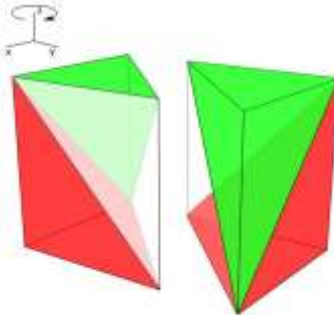
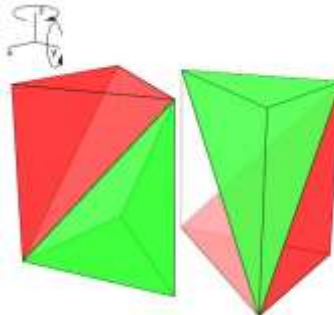
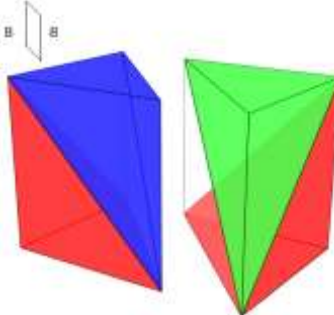
		
		
<p>Giro alrededor eje Oz</p>	<p>Giros alrededor eje Oz y eje Oy</p>	<p>Simetría respecto a un plano</p>

Tabla 3. Isometrías para obtener un cubo a partir de un prisma triangular

En esta construcción podemos realizar dos planteamientos. Una primera opción en la que consideramos como distinguibles las seis particiones obtenidas para el prisma y una segunda en la que la construcción la abordamos considerando solo las dos particiones no congruentes del prisma.

La primera opción tiene como ventaja el poder ver todas las particiones posibles, agrupadas por congruencia, y la segunda el implicar un análisis más breve.

Opción A

Consideramos como distinguibles las seis particiones del prisma y procedemos a construir el cubo a partir de ellas. Para ello, en la tabla 4 hemos indicado cómo se transforman esas seis particiones cuando les aplicamos las isometrías indicadas en la tabla 3.

Las seis particiones se autotransforman entre sí. Consecuentemente, las diferentes particiones del cubo en seis pirámides equivalentes se obtienen sin más que hallar las variaciones con repetición de 6 elementos (las particiones del prisma I, II, III, IV, V y VI) tomados de dos en dos, es decir, un total de $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ posibilidades. Pero entre ellas hay congruencias que hemos de detectar.

Partición	Giro z	Giro z, y	Simetría
I = X ₂ , X ₁ , X ₂	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV
II = Y, Z, X ₂	Y, Z, X ₂ = II	X ₂ , Z, Y = VI	Y, Z, X ₁ = V
III = X ₁ , Z, Y	X ₁ , Z, Y = III	Y, Z, X ₁ = V	X ₂ , Z, Y = VI
IV = X ₁ , X ₂ , X ₁	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV	X ₁ , X ₂ , X ₁ = IV	X ₂ , X ₁ , X ₂ = I
V = Y, Z, X ₁	Y, Z, X ₁ = V	X ₁ , Z, Y = III	Y, Z, X ₂ = II
VI = X ₂ , Z, Y	X ₂ , Z, Y = VI	Y, Z, X ₂ = II	X ₁ , Z, Y = III

Tabla 4. Aplicación de isometrías a las seis particiones de un prisma

De partida, al comparar esas 36 posibilidades, sin más que realizar un giro de 180° alrededor de la vertical (eje Oz) se observan que quedan reducidas a 21 las posibles particiones (combinaciones con repetición $CR_{6,2}$) porque, por ejemplo, la partición I-II es congruente con la II-I. Éstas veintiuna son: {I-I, I-II, I-III, I-IV, I-V, I-VI, II-II, II-III, II-IV, II-V, II-VI, III-III, III-IV, III-V, III-VI, IV-IV, IV-V, IV-VI, V-V, V-VI, VI-VI}. Y en particular, entre ellas, hay tres casos en los que todas las pirámides son congruentes entre sí: {I-I, I-IV, IV-IV}. Puede observarse en la figura 19.

La aplicación de las isometrías, indicadas en la tabla 4, a cada una de las 36 particiones anteriores conduce a las particiones indicadas en la tabla 5 y en la tabla 6 reflejamos las congruencias existentes que reducen a ocho las particiones diferentes del cubo en pirámides equivalentes: {I-I, I-II, I-III, I-IV, II-II, II-III, II-V, II-VI}. Entre ellas hay dos: {I-I, I-IV} que, en particular, las forman pirámides congruentes entre sí.

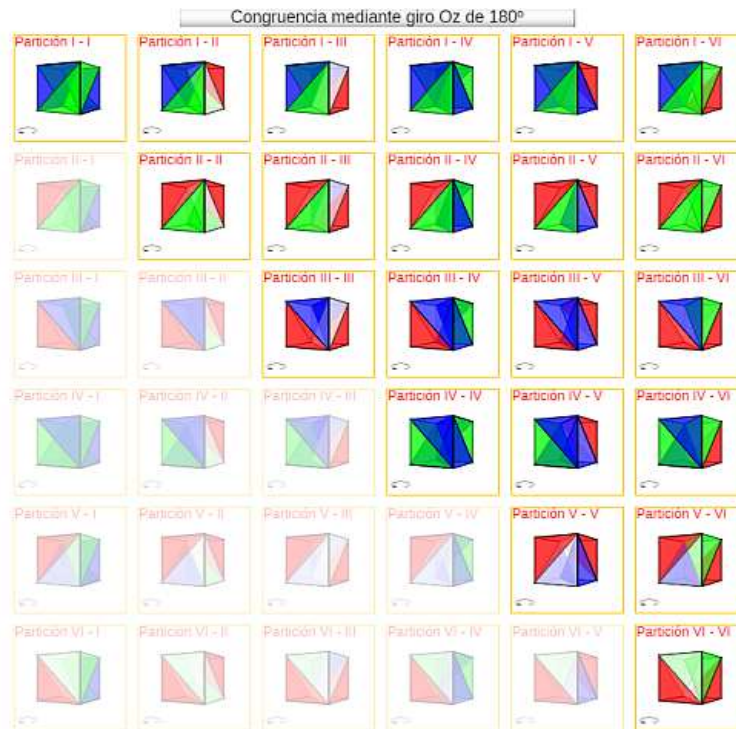





























Figura 19. Congruencias mediante giro Oz de 180°

Simetría							Giro alrededor de Oy						
	I	II	III	IV	V	VI		I	II	III	IV	V	VI
I	IV-IV	V-IV	VI-IV	I-IV	II-IV	III-IV	I	I-I	I-VI	I-V	I-IV	I-III	I-II
II	IV-V	V-V	VI-V	I-V	II-V	III-V	II	VI-I	VI-VI	VI-V	VI-IV	VI-III	VI-II
III	IV-VI	V-VI	VI-VI	I-VI	II-VI	III-VI	III	V-I	V-VI	V-V	V-IV	V-III	V-II
IV	IV-I	V-I	VI-I	I-I	II-I	III-I	V	IV-I	IV-VI	IV-V	IV-IV	IV-III	IV-II
V	IV-II	V-II	VI-II	I-II	II-II	III-II	V	III-I	III-VI	III-V	III-IV	III-III	III-II
VI	IV-III	V-III	VI-III	I-III	II-III	III-III	VI	II-I	II-VI	II-V	II-IV	II-III	II-II

Tabla 5. Aplicación de isometrías a las treinta y seis particiones prismáticas del cubo

Partición origen	1ª isometría	partición obtenida	2ª isometría	partición obtenida	Congruente con
VI-VI 	Giro en y	II-II 			II-II

V-VI 	Simetría	III-II 	Giro en z	II-III 	II-III
V-V 	Simetría	II-II 			II-II
IV-VI 	Simetría	III-I 	Giro en z	I-III 	I-III
IV-V 	Simetría	II-I 	Giro en z	I-II 	I-II
IV-IV 	Simetría	I-I 			I-I
III-VI 	Giro en y	V-II 	Giro en z	II-V 	II-V
III-V 	Simetría	II-VI 			II-VI
III-IV 	Simetría	I-VI 	giro en y	I-II 	I-II
III-III 	giro en y	V-V 	simetría	II-II 	II-II
II-VI 					II-VI














II-V 					II-V
II-IV 	simetría	I-V 	giro en y	I-II 	I-II
II-III 					II-III
II-II 					II-II
I-VI 	giro en y	I-II 			I-II
I-V 	giro en y	I-III 			I-III
I-IV 					I-IV
I-III 					I-III
I-II 					I-II
I-I 					I-I

Tabla 6. Detección de congruencias entre las diferentes particiones del cubo

Opción B

En este caso consideramos exclusivamente las dos particiones diferentes del prisma (I y II), junto a sus congruencias respectivas (IV y III, V, VI) y abordemos las combinaciones de las mismas para formar el cubo. Esto nos lleva al detalle reflejado en la tabla 7:









I-I			seis pirámides congruentes
I-II			seis pirámides equivalentes
I-III			seis pirámides equivalentes
I-IV			seis pirámides congruentes
I-V	congruente con I-III		
I-VI	congruente I-II		
II-II			seis pirámides equivalentes
II-III			seis pirámides equivalentes
II-IV	congruente I-III		
II-V			seis pirámides equivalentes
II-VI			seis pirámides equivalentes

Tabla 7. Las diferentes particiones del cubo, salvo isometrías

CONCLUSIONES

Del análisis anterior se concluye que, salvo isometrías, **hay solo ocho formas diferentes de descomponer prismáticamente el cubo en seis pirámides equivalentes** y entre ellas **hay dos en las que todas las pirámides son también congruentes** entre sí (ver recurso interactivo).

SÍNTESIS

En este artículo se han realizado las siguientes aportaciones:

1. Partiendo de las clásicas y conocidas descomposiciones del cubo en tres, cuatro, cinco y seis pirámides de base cuadrada, aquí se ha planteado una visión global que muestra que los casos anteriores no son más que cuatro casos particulares de una infinidad de particiones, todas construidas en base a considerar un punto que pasa a configurarse como el vértice común a todas las pirámides que conforman cada partición. El cardinal mínimo de la partición se alcanza en tres pirámides.
2. En base a la partición genérica anterior, se ha descompuesto de manera general el cubo en seis, ocho, diez y doce pirámides triangulares mediante la subdivisión de cada pirámide cuadrada en dos triangulares. En el caso de seis pirámides se demuestra que dichas pirámides son siempre equivalentes, de igual volumen.
3. Constructivamente se prueba que la partición del cubo en pirámides triangulares alcanza su cardinal mínimo en una única y clásica partición en cinco pirámides triangulares compuesta por un tetraedro regular y cuatro pirámides trirrectangulares, pero que no tienen igual volumen.
4. Centrándose en las particiones del cubo en pirámides triangulares que sean equivalentes (igual volumen) se ha obtenido que en este caso el cardinal mínimo es de seis y pueden englobarse en particiones no prismáticas y particiones prismáticas (aquellas en las que el cubo queda a su vez dividido en dos prismas triangulares).
5. Se ha abordado y analizado la partición de un prisma triangular en tres pirámides equivalentes, como problema conducente a la partición prismática del cubo, y se ha concluido que salvo isometrías hay únicamente dos posibilidades. En particular en una de ellas las tres pirámides son además congruentes (coincidentes mediante isometrías).
6. A partir de la descomposición del prisma se han construido las posibles particiones prismáticas del cubo en pirámides triangulares equivalentes obteniéndose ocho posibilidades y, entre ellas, dos casos en las que las seis pirámides además son congruentes.

Así pues, un problema clásico —la partición de un cubo en pirámides cuadradas y triangulares—, que ha sido siempre expuesto de manera parcial a través de ejemplos particulares que no detallan la totalidad de las posibilidades, aquí se ha analizado constructivamente desde una perspectiva metódica, global que logra hacer un completo y detallado recubrimiento descriptivo de su solución.

Referencias

- Alexandrov, A.D. (2005). *Convex Polyhedra*. Springer Monographs in Mathematics.
- Coffin, S. T. (1990). *The Puzzling World of Polyhedral Dissections*. New York: Oxford University Press.
- Red Educativa Digital Descartes (2013). Recursos Educativos interactivos de RED Descartes <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas> .
- Weisstein, Enric W. "Cube". From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/Cube.html>
- Weisstein, Enric W. "Pyramid". From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/Pyramid.html>

José R. Galo
Red Educativa Digital Descartes
galosanchezjr@gmail.com
reddescartes.org proyectodescartes.org