Universidad de los Andes **2015-II**

Cálculo Diferencial
Respuestas Ejercicios de preparación para el examen final

Material elaborado por Sandor Ortegón *Noviembre de 2015*

1. Estructura del Examen Final

El examen final consta de dos sesiones de 75 minutos cada una.

- **Preguntas de selección múltiple:** 75 minutos para 15 preguntas.
- **Preguntas abiertas:** Después de un receso de 5 a 10 minutos, enfrentarán 3 preguntas abiertas: Una de optimización, una de graficar una función con todos los detalles y una de áreas y volúmenes (plantear y calcular integrales).

2. Respuestas Preguntas de selección múltiple

Ver los ejercicios de selección multiple para comparar las respuestas. Se espera que no haya equivocaciones en esta lista!

1. D	9. B	17. B	25. E	33. C	41. C
2. D	10. B	18. B	26. D	34. E	42. E
3. B	11. A	19. A	27. D	35. C	43. D
4. C	12. C	20. B	28. D	36. A	
5. D	13. C	21. B	29. C	37. C	
6. C	14. C	22. D	30. E	38. A	
7. D	15. E	23. B	31. B	39. C	
8. C	16. D	24. C	32. A	40. D	

3. Preguntas abiertas

Como se mencionó en el simulacro, las preguntas abiertas serán de optimización, gráficas y cálculos de áreas y volúmenes.

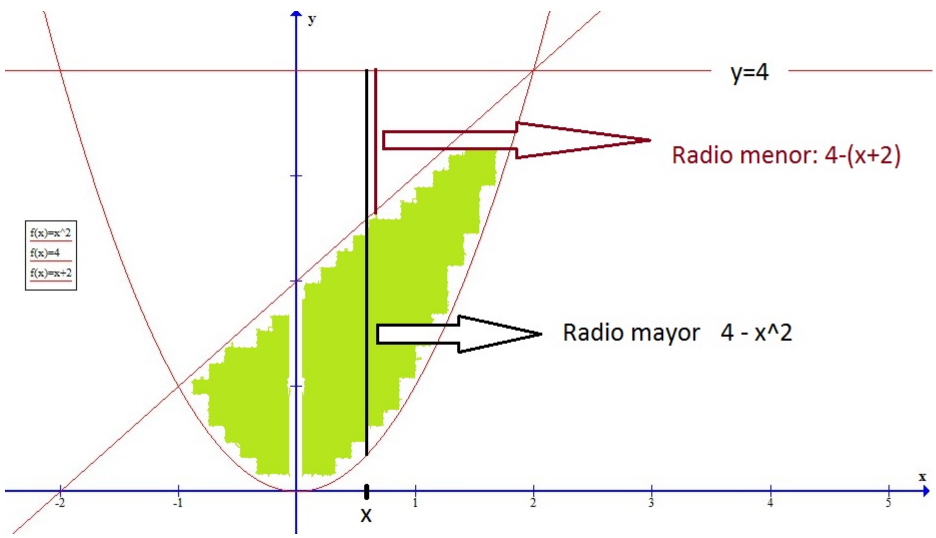
- Si se buscan ejercicios de práctica para optimización y gráficas, se pueden ver los tres simulacros de parcial 3 publicados en la página, que vienen con soluciones.
- Si se buscan ejercicios de práctica para áreas y volúmenes, se pueden usar los ejercicios de la competencia por equipos que se hizo para la complementaria, así como el último taller de áreas y volúmenes.

3.1. (Exámenes del 2014)

1. Las respuestas a estas preguntas están en el examen del 2014-1 publicado en la página (preguntas abiertas), ejercicios 1 y 3. Ver el siguiente link para referencia:

   Soluciones examen final 2014-10 (hacer click)

2. La idea es que por la forma en que luce la ecuación, se observa a simple vista que se usó el método de discos (tajadas, anillos, arandelas, etc, según el sinónimo que hayan dado en clase). Al ver la fórmula, vemos que el área de una tajada es $\pi(R^2 - r^2)$ donde R denota el radio mayor (distancia función más lejana al eje) y r el radio menor (distancia función más cercana al eje).



   Por la forma de la integral, vemos que $R = 4 - (x^2)$ y como el eje de rotación es $y = 4$, vemos que la primera función es $y = x^2$ (cosa que al restar $4 - x^2$ halle la distancia de la función al eje). Por la forma de la integral, vemos que $r = 4 - (x + 2)$ y como el eje de rotación es $y = 4$, vemos que la segunda función es $y = x + 2$ (cosa que al restar $4 - (x + 2)$ halle la distancia de la función al eje).

   Al intersectar las dos funciones, se iguala y resulta $x^2 = x+2$, o lo mismo, $x^2-x+2 = 0$, cuya solución es $x = -1, 2$ y de ahí los límites de integración. Así que la región que fué rotada es la que muestra la figura.

a) Para calcular el área, simplemente se calcula

$$\int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\; dx$$

(la función a integrar es la resta de la función mayor menos la menor). El valor de esta integral es

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

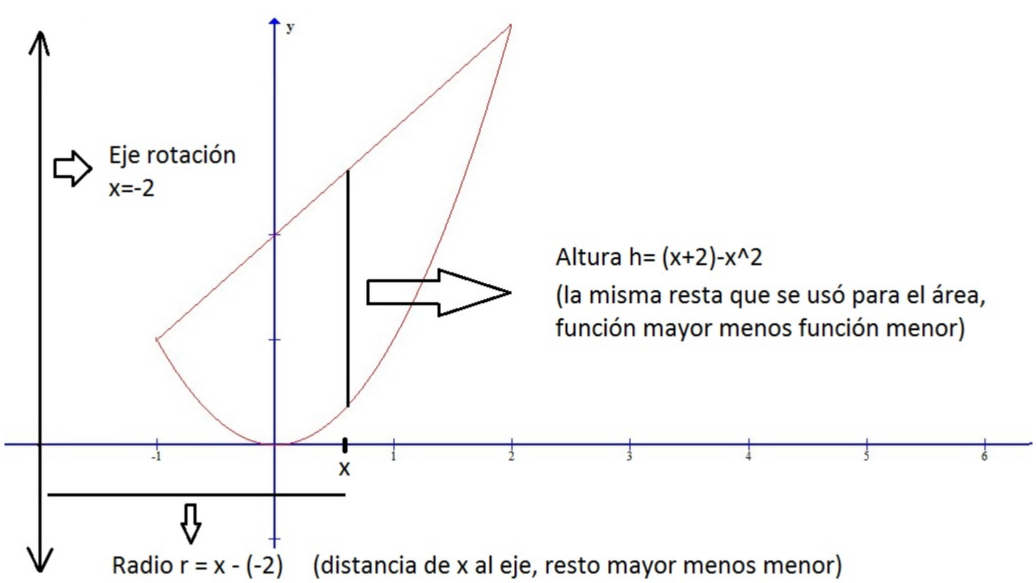
b) Dado que el área se calculó "verticalmente" (es decir, la integral dependía de x) y el eje de rotación para este ejercicio es vertical ($x = -2$), entonces se usa el método de cascarones (casquetes) cilíndricos. Recordar las fórmulas:

- Si el eje de rotación es paralelo a la dirección como se calculó el área *(vertical es "integral respecto a x", horizontal es "integral respecto a y")*, se usa cascarones.
- Si el eje de rotación es perpendicular a la dirección como se calculó el área, se usa discos.

Ahora, recordar que la fórmula para volumen usando cascarones es $\int 2\pi r h$ donde:

- La integral tiene dx o dy dependiendo de cómo se calculó el área.
- r es la distancia de x o y al eje (se dice x o y, dependiendo de item anterior). Generalmente, la fórmula para r es del tipo $x + C, C - x, x - C$ donde C es el valor en el eje (o similar, $y + C, C - y, y - C$ si la integral fué respecto de y)
- h es la misma altura con la que se calculó el área.
- Los límites de integración son los mismos con los que se calculó el área.

En este ejemplo, la figura indica los pasos:



Así que el volumen es igual a

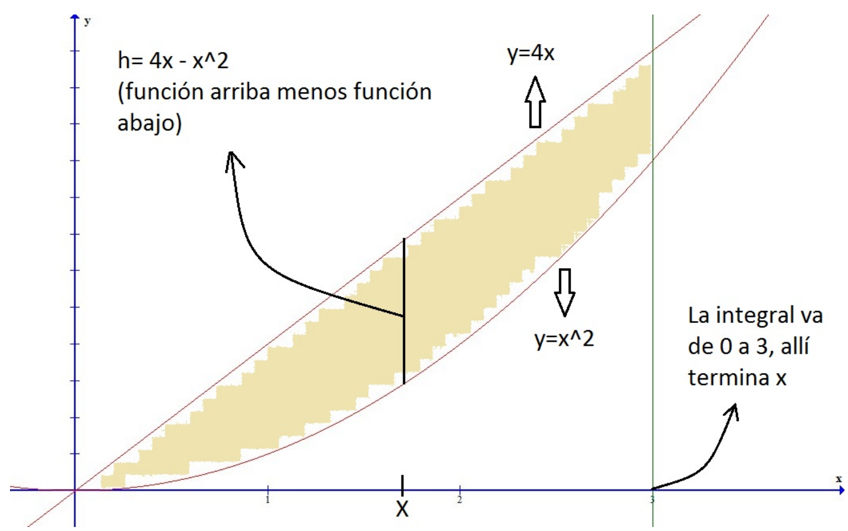
$$\int_{-1}^{2} 2\pi(x-(-2))(x+2-x^2)dx = \int_{-1}^{2} 2\pi(x+2)(x+2-x^2)dx$$

Se deja planteado, ya el estudiante si quiere puede hacer el cálculo (tendría que multiplicar los dos paréntesis, operar y luego antiderivar, sacando el 2π como constante fuera de la integral).

3. *a*) Ya en el ejercicio anterior se explicó la idea de usar el método de discos y de cascarones, así que solamente hay que seguir las indicaciones.

   Es claro por la fórmula $\int_{0}^{3} 2\pi(4x-x^2)(13+x)dx$ que se usó el método de cascarones.

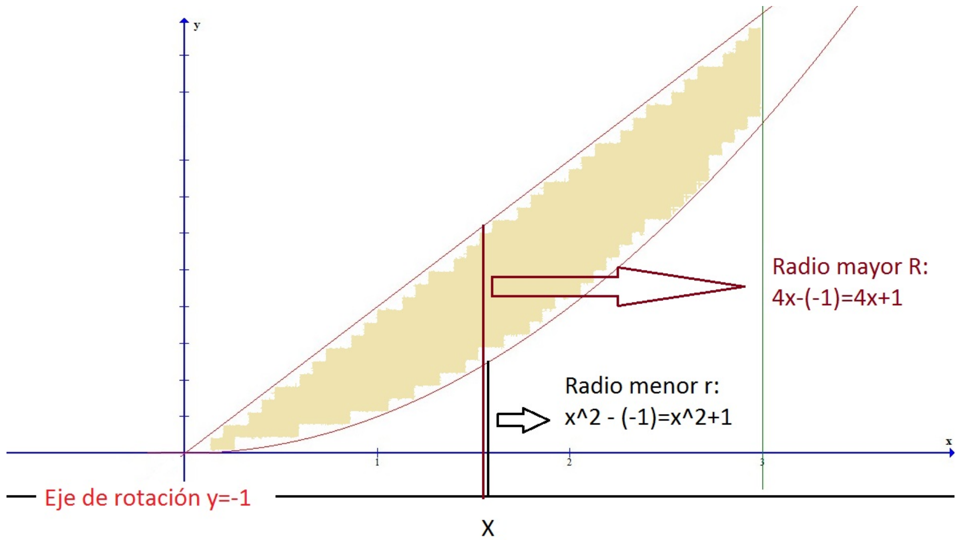
   Ahora comparando con la fórmula de $\int 2\pi rh$, es claro que r toma el papel de $13+x$ (se mencionó en la página anterior típicamente cómo luce r). Y como el eje es $x=-13$ se ve que ese $x+13$ salió de restar $x-(-13)$. Además, el que hace el papel de h es $4x-x^2$, así que se reconoce que $4x$ es la función mayor y x^2 es la función menor. Entonces, el dibujo de la región luce como el siguiente:



   Así que el área de la región sería:

$$\int_{0}^{3} 4x - x^2 \; dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

   b) Para calcular este volumen, debemos usar el método de discos, según la fórmula dada antes (el área se calculó verticalmente y el eje de rotación es horizontal -perpendicular a la dirección en que se calculó el área-). Así que usamos la fórmula $\int \pi R^2$ o $\int \pi(R^2-r^2)$ dependiendo de si al obtener tajadas queda un círculo



relleno o una especie de anillo. En este caso se obtiene un anillo, pues la región no está "pegada" al eje de rotación.

Recordar que en el cálculo de volumen se usan los mismos límites de integración que se usaron para el área y se observa de la figura que $R = 4x + 1$ (restando la función arriba, menos la función abajo que es $y = -1$), mientras que $r = x^2 + 1$. Así que el volumen obtenido al girar respecto del eje $y = -1$ es igual a

$$\int_0^3 \pi((4x+1)^2 - (x^2+1)^2)\ dx$$