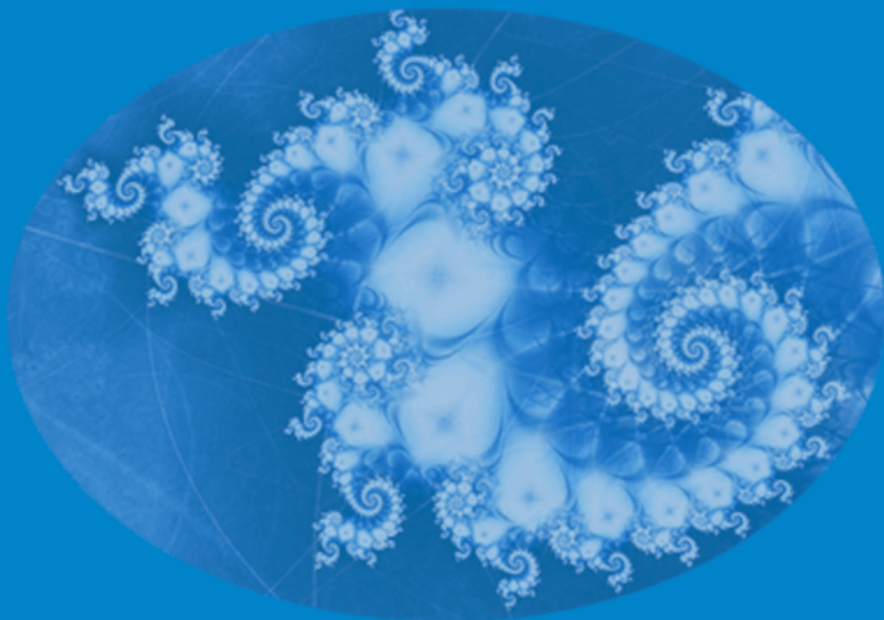


$+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt{i^2} + \pi$   
 $\bar{z} \quad 1 + \quad y$   
 $X^2 \quad 2 -$   
 $n^6 (1)^5 +$   
 $+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt[3]{i} + n$



# Os números complexos

María José García Cebrian

Tradução: Lindberg Barbosa Lira de Almeida

$\sqrt[3]{i} \quad b \quad i \quad (1) \quad = \quad X^2 \quad \div \quad - \quad 4 \quad n \quad 8 \quad 9$   
 $= \quad \pi \quad 0 \quad i \quad X \quad + \quad - \quad \bar{z} \quad 3$   
 $n \quad 2 \quad - \quad a \quad = \quad i \quad y \quad - \quad \sqrt{i^2} \quad + \quad - \quad (5)^x \quad y \quad b$

**RE**educativa  
digital  
escartes



# Os números complexos

María José García Cebrian  
Rede Educativa Digital Descartes, Espanha

Tradução para o português: Lindberg Barbosa Lira de Almeida



Córdoba (España)  
2023

Título da obra:  
Os números complexos

Autora:  
María José García Cebrian

Tradução:  
Lindberg Barbosa Lira de Almeida

Design da capa: Diana María Velásquez García  
Código JavaScript para o livro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.  
Recursos interativos: [DescartesJS](#)  
Fonte: [Lato](#)  
Fórmulas matemáticas:  $\text{KAT}_{\text{E}}\text{X}$   
Núcleo do livro interativo: julho 2022

Red Educativa Digital Descartes  
Córdoba (España)  
[descartes@projectodescartes.org](mailto:descartes@projectodescartes.org)  
<https://projectodescartes.org>

Proyecto iCartesiLibri  
<https://projectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm>

ISBN: 978-84-18834-68-4



Este trabalho está sob licença [Creative Commons 4.0 internacional: Atribuição-NãoComercial-Compartilhamento Igual](#). Todos os objetos interativos e os conteúdos desta obra coletiva são protegidos pela Lei de Propriedade Intelectual.

# Tabela de conteúdo

Introdução .....	5
<b>1. A forma algébrica .....</b>	<b>7</b>
1.1 Por que números complexos? .....	9
1.2 Parte real e parte imaginária .....	10
1.3 Operações com complexos: adição e subtração .....	12
1.4 Operações com complexos: multiplicação e divisão .....	14
<b>2. A forma trigonométrica .....</b>	<b>17</b>
2.1 Módulo e argumento de um número complexo .....	19
2.2 Multiplicação e divisão de complexos na forma ..... trigonométrica	20
2.3 Potências de complexos na forma trigonométrica .....	22
2.5 Exercícios para praticar .....	25
<b>3. Algumas aplicações .....</b>	<b>27</b>
3.1 Operações com complexos e transformações geométricas .....	29
<b>4. Autoavaliação .....</b>	<b>33</b>

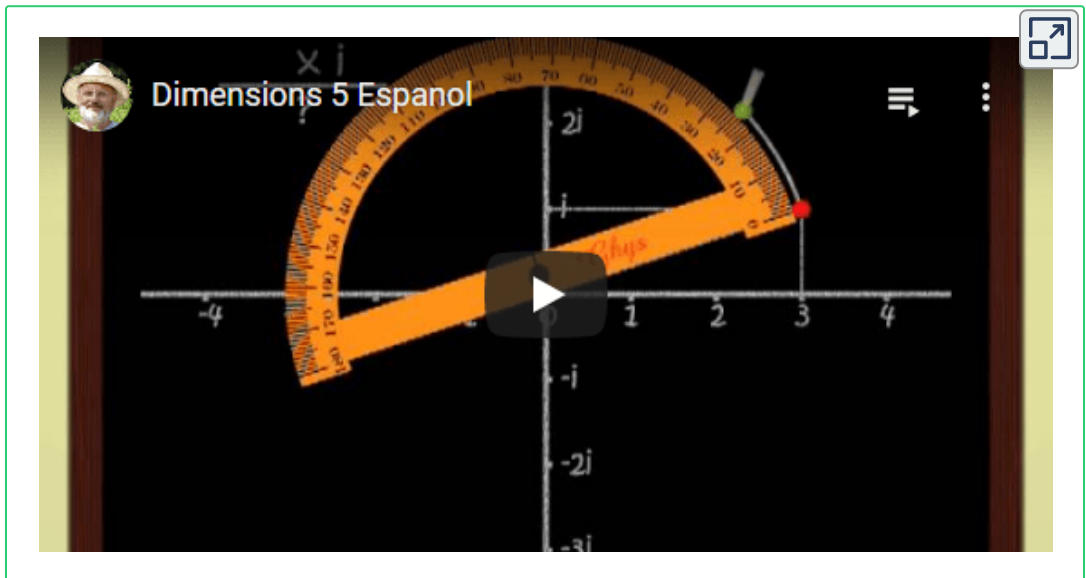


# Introdução

Os Números complexos foram introduzidos para dar sentido à raiz quadrada de números negativos. Desta forma, equações como  $x^2 + 1 = 0$  passam a poder ser resolvidas e abre-se então, a partir daí, uma porta para um mundo incrível no qual todas as operações (exceto a divisão por 0) são possíveis.

Aqui os conteúdos são abordados a nível do Bacharelado em Ciências espanhol, mas pode ser válido para qualquer aluno que queira mergulhar no estudo desses fascinantes números.

No vídeo a seguir<sup>1</sup> podes ver uma interessante introdução aos números complexos e suas aplicações.

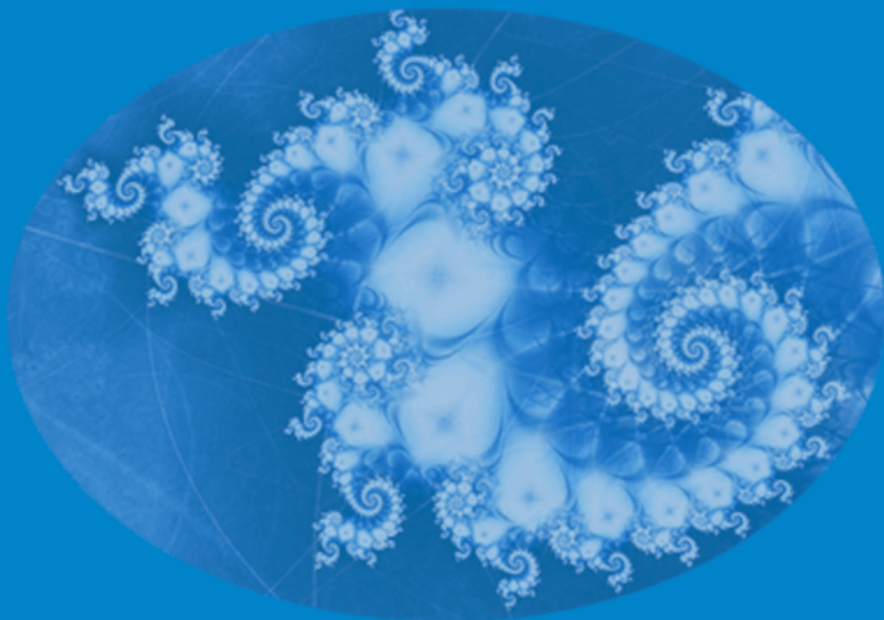


<sup>1</sup> Capítulo 5 do vídeo "DIMENSÕES, um passeio pela matemática", [www.dimensions-math.org/Dim\\_ES.htm](http://www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm)





$+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt{i^2} + \pi$   
 $\bar{z} \quad 1 + \quad y$   
 $X^2 \quad 2 -$   
 $n^6 (1)^5 +$   
 $+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt[3]{i} + n$



# Capítulo I

## A forma algébrica

$\sqrt[3]{i} \quad - \quad b \quad i \quad (1) \quad = \quad X^2 \quad \div \quad - \quad 4 \quad n \quad 8 \quad 9$   
 $= \quad \pi \quad 0 \quad i \quad X \quad + \quad - \quad \bar{z} \quad 3$   
 $n \quad 2 \quad - \quad a \quad = \quad i \quad y \quad - \quad \sqrt{i^2} \quad + \quad - \quad (5)^x \quad y \quad b$



# 1.1 Por que números complexos?

As soluções<sup>2</sup> da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  são os pontos de interseção da função  $y = ax^2 + bx + c$  com o eixo das abscisas.

Estas soluciones vienen dadas por:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Y según sea el signo del discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  puede ocurrir que haya dos, una o ninguna solución real.

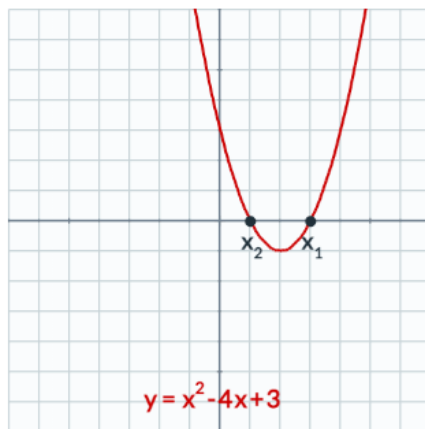
Però si se trata de que exista solución en todos los casos, ¿qué hacer cuando el discriminante es negativo?, esto es cuando tenemos la raíz cuadrada de un número negativo que sabemos no es un número real.

Si hacemos  $i = \sqrt{-1}$ , la unidad **imaginaria**, ya podremos resolver la ecuación en cualquier caso.

$$\boxed{1} x^2 + \boxed{-4} x + \boxed{3} = 0$$

- $\Delta = 4 > 0$  Dos soluciones reales:

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$



## Um pouco de história<sup>3</sup>

Embora a primeira referência conhecida a raízes quadradas de números negativos venha de matemáticos gregos, foi somente no século XVI que Girolamo Cardano propôs esses números. Mais tarde, Descartes, em 1637, deu-lhes o nome de imaginários.

Foi Wessel em 1799 e Argand em 1806, com a proposta do plano complexo, quem lançou as bases dos números complexos, até que, finalmente, Gauss (1777-1855) lhes deu um nome e os definiu rigorosamente.

<sup>2</sup> Com base em uma página da unidade [Números Complexos](#) de Ángela Núñez Castaín para Red Educativa Digital Descartes.

<sup>3</sup> Da Wikipedia [pt.wikipedia.org/wiki/Número\\_complexo](https://pt.wikipedia.org/wiki/Número_complexo).

## 1.2 Parte real e parte imaginária

Se considerarmos a unidade imaginária  $i = \sqrt{-1}$  e representá-la no ponto  $(0, 1)$  do plano, podemos localizar os números  $2i, 3i, \dots, -i$  da mesma forma,  $-2i, \dots$  no eixo vertical, ou seja, os números  $bi$  que chamaremos de imaginários. Então qualquer ponto no plano  $(a, b)$ , com  $a$  e  $b$  números reais, pode ser escrito como  $(a, 0) + (0, b)$ , isto é como a soma de a número real e um número imaginário.

- Os números complexos são da forma  $a + bi$ , onde  $a$  é a parte real e  $b$  é a parte imaginária. Cada número complexo  $z$  pode ser representado no plano pelo ponto  $Z(a, b)$  chamado **afixo** ou pelo vetor  $OZ$ .
- Dois números complexos são iguais se as partes reais e as partes imaginárias forem respectivamente iguais em ambos.

$$z = \begin{array}{|c|} \hline \color{red}{\uparrow} \\ \hline 3 \\ \hline \color{red}{\downarrow} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \color{red}{\uparrow} \\ \hline 4 \\ \hline \color{red}{\downarrow} \\ \hline \end{array}$$

- El **conjugado** de un número complejo  $z = a + bi$  es otro número complejo con la parte real igual y la parte imaginaria cambiada de signo.

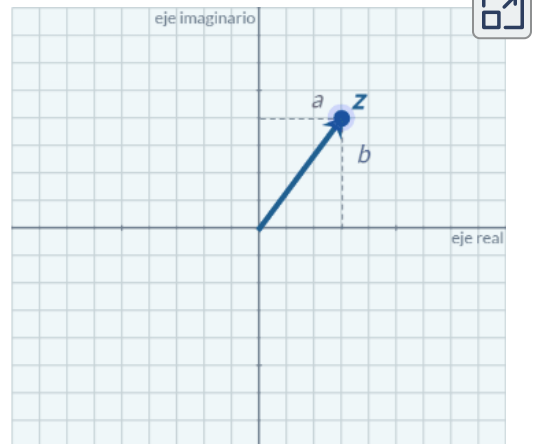
$$\bar{z} = 3 - 4i$$

dibujar

- El **opuesto** de un número complejo  $z = a + bi$  es otro número complejo con la parte real y la parte imaginaria cambiadas de signo.

$$-z = -3 - 4i$$

dibujar



## Para practicar



### Ejercicio 1



Averigua el valor de  $a$  y de  $b$  para que  $a + 6i$  sea el conjugado de  $-10 + bi$

$a =$

$b =$

comprobar



### Ejercicio 2



Halla las soluciones de la ecuación:  $z^2 - 14z + 85 = 0$

$\pm$    $i$

comprobar

# 1.3 Operações com complexos: adição e subtração

Números complexos podem ser adicionados ou subtraídos seguindo as regras de operações com números reais.

- Para **somar** dois números complexos soma-se as partes reais e as partes imaginárias, respectivamente. Assim, dados  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$ , sua soma é:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- Tal como acontece com os números reais, para **subtrair** dois complexos, o **oposto** do subtraendo deve ser adicionado ao minuendo.

$z_1 = \begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ 5 & \end{matrix} + \begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ 4 & \end{matrix} i$

$z_2 = \begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ -2 & \end{matrix} + \begin{matrix} \uparrow & \downarrow \\ 3 & \end{matrix} i$

- **Suma** dibujar

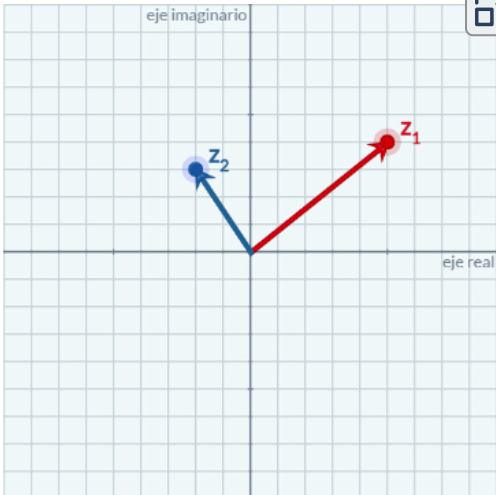
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 + z_2 = (5 + 4i) + (-2 + 3i) = 3 + 7i$

- **Resta** dibujar

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$z_1 - z_2 = (5 + 4i) - (-2 + 3i) = 7 + i$



12

## Para practicar



### Ejercicio 3



Efectúa las siguientes operaciones:  $(-7-6i) + \frac{1}{3}(6-9i) - (-4+6i)$

+  i

comprobar



### Ejercicio 4



Calcula los números complejos  $z_1$  y  $z_2$  que cumplen  $z_1 + z_2 = 4 + 5i$  y  $z_1 - z_2 = -6 - 7i$

$z_1 =$   +  i

$z_2 =$   +  i

comprobar

# 1.4 Operações com complexos: multiplicação e divisão

Os números complexos podem ser multiplicados seguindo as regras da operações com números reais e levando em conta que  $i \cdot i = i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot a_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) i \end{aligned}$$

$z_1$   +   $i$   
 $z_2$   +   $i$

- **Producto** dibujar

$z_1 \cdot z_2 = (4+2i) \cdot (-1+2i) =$   
 $= -4 \cdot 1 + 4 \cdot 2i - 2i \cdot 1 + 2 \cdot 2i^2 =$   
 $= -8 + 6i$

Comprueba que el producto de un número por su conjugado es siempre un número real:

$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (4+2i) \cdot (4-2i)$

Introduce el resultado y pulsa Intro

**Ejercicio 5**

Calcula el valor de **b** para que el producto  $(-3+i) \cdot (-5+bi)$  sea un número imaginario puro.

$b =$

comprobar





## Inverso de un número complejo

El inverso de un número complejo  $z = a + bi$  es otro complejo  $\frac{1}{z}$  que debe cumplir  $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

Para calcularlo observa que el producto de  $z = a + bi$  por su conjugado  $\bar{z} = a - bi$  resulta:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

Y si se dividen los dos miembros de esta igualdad por  $a^2 + b^2$  se obtiene:

$$\frac{(a + bi) \cdot (a - bi)}{a^2 + b^2} = (a + bi) \cdot \left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) = (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i\right) = 1$$

Con lo que el inverso de  $z = a + bi$  es:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

## Cociente de complejos

Para dividir dos números complejos, al igual que con los números reales, se multiplica el numerador por el inverso del denominador. Como regla práctica multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i$$

$$\begin{array}{l} z_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \color{blue}{\blacktriangle} & -8 \\ \hline \color{red}{\blacktriangledown} & 6 \\ \hline \end{array} \\ z_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \color{blue}{\blacktriangle} & -1 \\ \hline \color{red}{\blacktriangledown} & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-8 + 6i}{-1 + 2i} = \frac{(-8 + 6i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{8 \cdot 1 + 8 \cdot 2i - 6i \cdot 1 - 6 \cdot 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{20 + 10i}{5} = 4 + 2i$$



## Ejercicio 6

Calcula el valor de  $b$  para que el afijo del cociente  $\frac{-3 + bi}{4 + 3i}$  esté en la bisectriz del primer cuadrante.

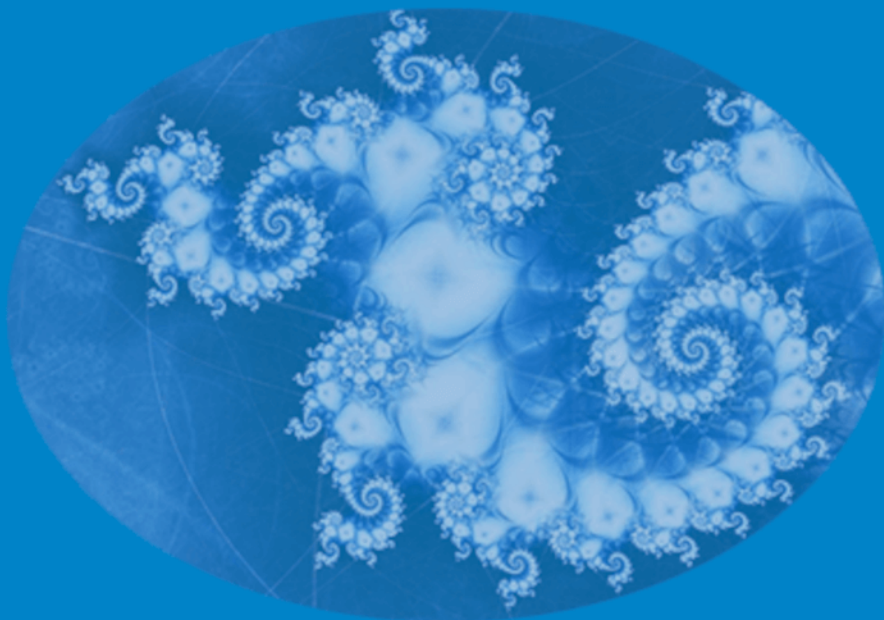
$$b = \text{  }$$



comprobar



$+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt{i^2} + \pi$   
 $\bar{z} \quad 1 + \quad y$   
 $X^2 \quad 2 -$   
 $n^6 (1)^5 +$   
 $+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt[3]{i} + n$



# Capítulo II

## A forma trigonométrica

$\sqrt[3]{i} \quad b \quad i \quad (1) \quad = \quad X^2 \quad \div \quad - \quad 4 \quad n \quad 8 \quad 9$   
 $= \quad \pi \quad 0 \quad i \quad X \quad + \quad - \quad \bar{z} \quad 3$   
 $n \quad 2 \quad - \quad a \quad = \quad i \quad y \quad - \quad \sqrt{i^2} \quad + \quad - \quad (5)^x \quad y \quad b$

**RE**educativa  
digital **escartes**



# 2.1 Módulo e argumento de un número complejo

Sea el número complejo  $z = \begin{matrix} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{matrix} 4 + \begin{matrix} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{matrix} 3$

- El **módulo** de  $z$  es la distancia del afijo al origen de coordenadas.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- El **argumento** es el ángulo que forma el segmento  $\overline{OZ}$  con el semieje positivo real medido en sentido contrario a las agujas del reloj entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ .

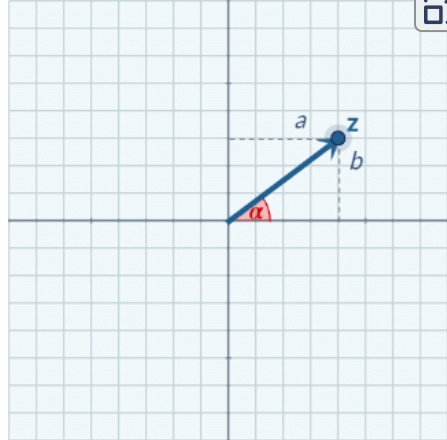
$$\alpha = \arg(z) = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{3}{4} = 36,9^\circ \quad \text{i}$$

Se puede expresar el número complejo  $z$  mediante su módulo y su argumento en **forma polar**:

$$r_{\alpha} = 5_{36,9^\circ}$$

Observa que:  $a = r \cdot \cos \alpha$  y  $b = r \cdot \sen \alpha$ , así se puede expresar  $z$  en forma **trigonométrica**, a la vez que sirve para pasar de la forma polar a la forma binómica.

$$z = r (\cos \alpha + i \sen \alpha) = 5 (\cos 36,9^\circ + i \sen 36,9^\circ)$$



## Ejercicio 7

a) Pasa a forma binómica:

$$7_{45^\circ} = \square + \square$$

*Introduce los valores con su signo redondeados a centésimas*

comprobar

b) El conjugado del número complejo  $2_{75^\circ}$  es:

$$\square \square^\circ$$

comprobar

## 2.2 Multiplicação e divisão de complexos na forma trigonométrica

A relação entre a forma trigonométrica de dois números complexos e a de seu produto e quociente permite-nos multiplicar e dividir com muita facilidade.

Se expressarmos os complexos na forma trigonométrica e operarmos:

$$r_{\alpha} = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \quad r'_{\beta} = r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$$

**O produto:**

$$\begin{aligned} r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) &= \\ r \cdot r' \cdot [(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta) + (\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta)i] &= \\ r \cdot r' \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)) & \end{aligned}$$

Observamos que o módulo do número complexo resultante é o produto dos módulos dos fatores e o argumento **a soma dos argumentos**.

**O quociente:**

$$\begin{aligned} \frac{r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} &= \frac{r}{r'} \cdot \frac{(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \cdot (\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)} = \\ \frac{r}{r'} \cdot \frac{(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta) + (\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta)i}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta} &= \\ \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)) & \end{aligned}$$

E o resultado do quociente é um número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e o argumento **a diferença dos argumentos**..

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha+\beta}$$

Sean los números complejos  $z = r_\alpha$  y  $z' = r'_\beta$

$$z = 5_{120^\circ} \quad z' = 2_{90^\circ}$$

**Producto**

[dibujar](#)

Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

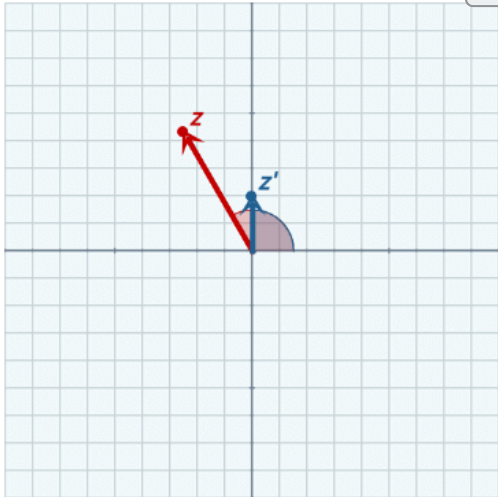
$$z \cdot z' = 5_{120^\circ} \cdot 2_{90^\circ} = 10_{210^\circ}$$

**Cociente**

[dibujar](#)

Para dividir dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

$$\frac{z}{z'} = \frac{5_{120^\circ}}{2_{90^\circ}} = 2,5_{30^\circ}$$



**Ejercicio 8**



a) Dado el número complejo  $z = 5_{55^\circ}$  calcula  $z \cdot \bar{z}$  y  $z/\bar{z}$

$$z \cdot \bar{z} = \square \square^\circ$$

$$z/\bar{z} = \square \square^\circ$$

[comprobar](#)

b) Averigua dos números complejos tales que su producto sea  $75_{205^\circ}$  y su cociente  $3_{35^\circ}$

$$z_1 = \square \square^\circ$$

$$z_2 = \square \square^\circ$$

[comprobar](#)

## 2.3 Potências de complexos na forma trigonométrica

Para calcular una potencia de exponente natural,  $n$ , de un número complejo expresado en forma polar, basta elevar el módulo a  $n$  y multiplicar el argumento por  $n$ .

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$$

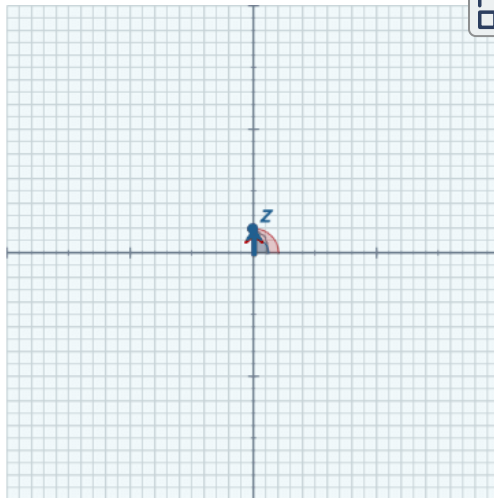
Sea el número complejo:  $z = r_\alpha = \boxed{2} \angle 90^\circ$

$$n = \boxed{1} \quad (2_{90})^1 = 2^1_{1 \cdot 90^\circ} = 2_{90^\circ}$$

Se puede expresar  $z^n$  en forma trigonométrica:

$$[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha)$$

y haciendo en esta expresión  $r = 1$  obtenemos la **fórmula de Moivre**, útil en trigonometría para calcular  $\operatorname{sen} n\alpha$  y  $\cos n\alpha$  a partir de  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$ .



### La fórmula de Moivre

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \operatorname{sen} 2\alpha$$

Desarrollando la potencia por el binomio de Newton resulta:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 &= \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha i + \operatorname{sen}^2 \alpha i^2 = \\ &= \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha i - \operatorname{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

Agrupando términos e igualando la parte real y la parte imaginaria tenemos que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$



# Potências de $i$

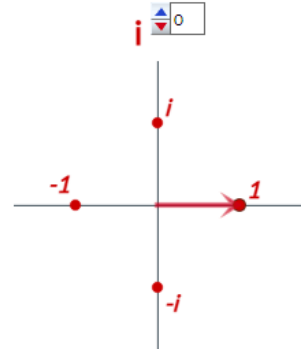
Un caso particular lo encontramos al calcular las potencias sucesivas de  $i$ .

Teniendo en cuenta que  $i^2 = -1$ , será:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 & i^1 &= i & i^2 &= -1 & i^3 &= -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = 1 & i^5 &= i^4 \cdot i = i & i^6 &= i^5 \cdot i = -1 & i^7 &= i^6 \cdot i = -i \end{aligned}$$

y así sucesivamente, con lo que observamos que se repiten de cuatro en cuatro. Luego para hallar una potencia de  $i$ , se divide el exponente entre 4 y se calcula la potencia de exponente el resto de la división.

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$



## Ejercicio 9

a) Averigua el valor de  $n$  y de  $a$  ( $a > 0$ ) para que  $(-a\sqrt{3} + ai)^n = 1296_{240^\circ}$

$n =$

$a =$

comprobar

b) Selecciona el valor de la potencia de  $i$ .

$i^{100} =$

comprobar

## 2.4 Raíces de números complejos

Sea el número complejo:  $z = r_\alpha = \boxed{8} \angle \boxed{90}^\circ$

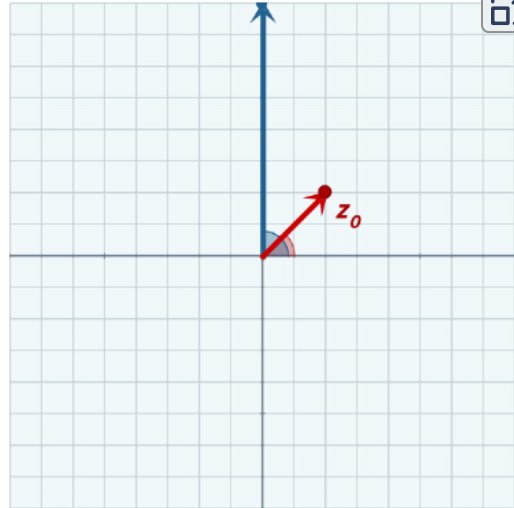
- La raíz  $n$ -ésima de  $z$  es otro complejo  $m_\beta$  que debe cumplir:  $(m_\beta)^n = r_\alpha$

$$\text{luego: } m^n = r \Rightarrow m = \sqrt[n]{r}$$

$$\text{y } \beta \cdot n = \alpha + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ \cdot k}{n}$$

$$n = \boxed{2} \quad z_k = \sqrt[2]{8}_{90^\circ} = 2,8_{45^\circ + \frac{360^\circ}{2} \cdot k}$$

$$z_0 = 2,8_{45^\circ} \quad k = \boxed{0}$$



Observe que:

Todo número complejo tem  $n$ -ésimas raíces. Os afixos dessas  $n$  raíces estão localizados em um círculo e são os vértices de um polígono regular com  $n$  lados.



### Ejercicio 10

Calcula:  $\sqrt{\frac{1+i}{-1-i}}$  (Sugerencia: Primero se debe pasar el radicando a forma polar)

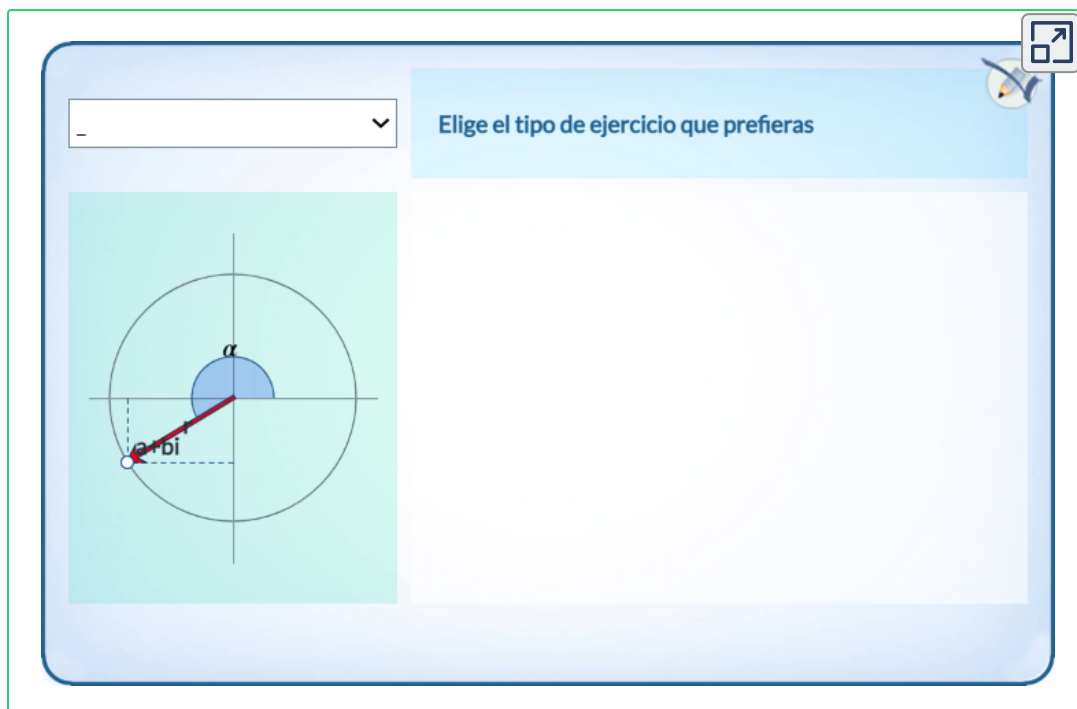
$$z_0 = \boxed{\phantom{0}} \angle \boxed{\phantom{0}}^\circ \quad z_1 = \boxed{\phantom{0}} \angle \boxed{\phantom{0}}^\circ$$



comprobar

## 2.5 Exercícios para praticar

A seguir mais exercícios<sup>4</sup> para praticar as operações com complexos. Podes escolher o tipo no menu. Podes ver depois a solução de cada um.

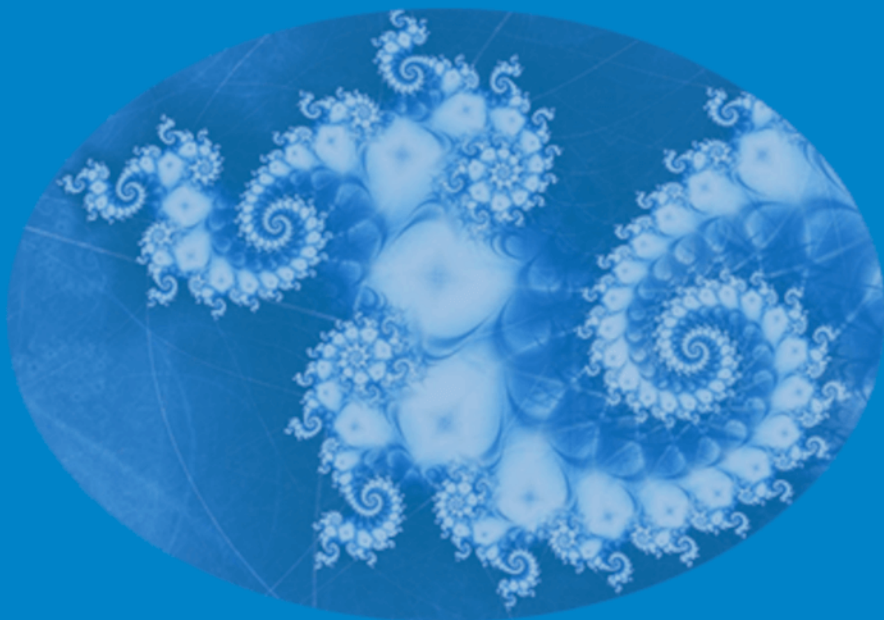


The screenshot shows a digital interface for practicing complex numbers. At the top left, there is a dropdown menu with a downward arrow and a minus sign. To its right, a light blue banner contains the text "Elige el tipo de ejercicio que prefieras" (Choose the type of exercise you prefer). Below the menu is a diagram of a complex plane with a circle centered at the origin. A red vector originates from the origin and points to a point in the second quadrant, labeled  $a+bi$ . The angle between the positive real axis and the vector is labeled  $\alpha$ . Dashed lines indicate the coordinates  $a$  and  $b$ . In the top right corner of the interface, there is a small icon of a pencil and a square with an arrow pointing outwards.

<sup>4</sup> Adaptação de uma cena de Consolação Ruiz Gil para [Red Educativa Digital Descartes](#).



$+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt{i^2} + \pi$   
 $\bar{z} \quad 1 + \quad y$   
 $X^2 \quad 2 -$   
 $n^6 (1)^5 +$   
 $+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt[3]{i} + n$



# Capítulo III

## Algumas aplicações

$\sqrt[3]{i} \quad - \quad b \quad i \quad (1) \quad = \quad X^2 \quad \div \quad - \quad 4 \quad n \quad 8 \quad 9$   
 $= \quad \pi \quad 0 \quad i \quad X \quad + \quad - \quad \bar{z} \quad 3$   
 $n \quad 2 \quad - \quad a \quad = \quad i \quad y \quad - \quad \sqrt{i^2} \quad + \quad - \quad (5)^x \quad y \quad b$



# 3.1 Operações com complexos e transformações geométricas

## Translação

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

$$A(-4, -2) \quad B(2, -5) \quad C(-1, 1)$$

Si sumamos a los tres vértices el número complejo:

$$z = \frac{\triangle}{\nabla} 3 + \frac{\triangle}{\nabla} 5 i$$

¿Qué le ocurre al triángulo?. Compruébalo:

$$A \rightarrow (-4 - 2i) + (3 + 5i) \quad \square + \square i$$

$$B \rightarrow (2 - 5i) + (3 + 5i) \quad \square + \square i$$

$$C \rightarrow (-1 + i) + (3 + 5i) \quad \square + \square i$$

Efectúa las operaciones y pulsa Intro

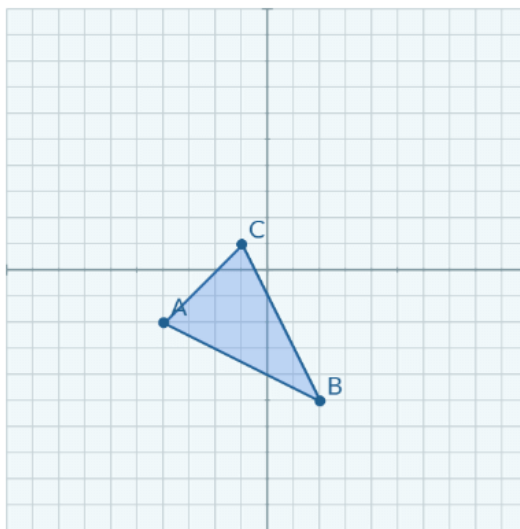


Figura 3.1. Detalhe da obra de M. C. Escher "Bird/Fish", tirado de [mcescher.com](http://mcescher.com).

# Rotação do centro a origem

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

$$A(0,0) \quad B(0,0) \quad C(0,0)$$

Si se multiplican los tres vértices por el número complejo de módulo 1 y argumento  $90^\circ$ . ¿Qué le ocurre al triángulo?

$$1 \cdot e^{i90^\circ}$$

Expresamos primero los vértices en forma polar:

$$A: 7+2i = \sqrt{53} \angle 15,9^\circ \rightarrow 7,3 \angle 15,9^\circ \cdot 1 \angle 90^\circ = 7,3 \angle \quad \square$$

$$B: 3+6i = \sqrt{45} \angle 63,4^\circ \rightarrow 6,7 \angle 63,4^\circ \cdot 1 \angle 90^\circ = 6,7 \angle \quad \square$$

$$C: 3+3i = \sqrt{18} \angle 45^\circ \rightarrow 4,2 \angle 45^\circ \cdot 1 \angle 90^\circ = 4,2 \angle \quad \square$$

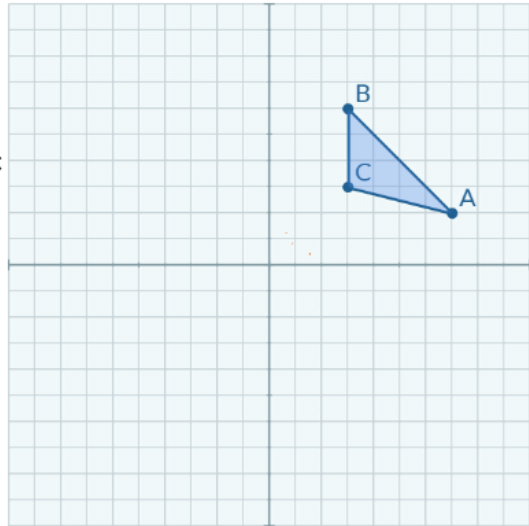


Figura 3.2. Detalhe da obra de M. C. Escher "Butterfly", tirado de [mcescher.com](http://mcescher.com).



# Homotetia e giro



Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

$$A(0, -4) \quad B(4, -3) \quad C(1, -1)$$

Si multiplicamos los tres vértices por el número complejo  $r_\alpha$ :

$$r_\alpha = \begin{matrix} \uparrow \\ 2 \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 60^\circ \\ \downarrow \end{matrix}$$

¿Qué le ocurre al triángulo?. Compruébalo:

$$A: 0 - 4i = \sqrt{16} \quad 270^\circ \rightarrow 4 \quad 270^\circ \cdot 2 \quad 60^\circ = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$$

$$B: 4 - 3i = \sqrt{25} \quad 323,1^\circ \rightarrow 5 \quad 323,1^\circ \cdot 2 \quad 60^\circ = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$$

$$C: 1 - i = \sqrt{2} \quad 315^\circ \rightarrow 1,4 \quad 315^\circ \cdot 2 \quad 60^\circ = \begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}$$

Utiliza para las operaciones los valores redondeados a décimas que aparecen

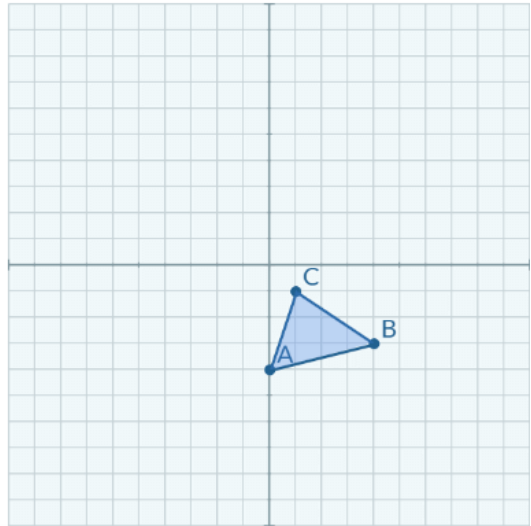
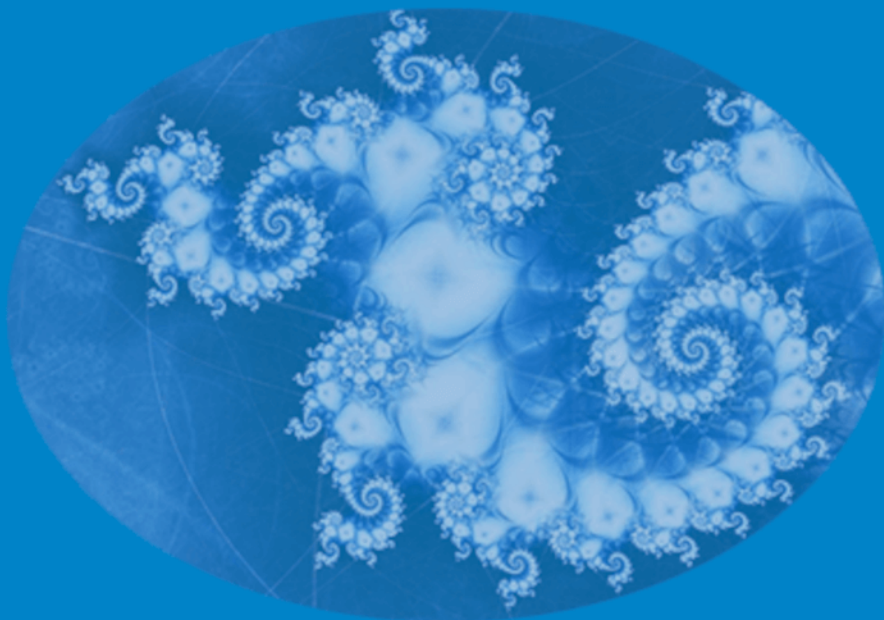


Figura 3.3. Detalle da obra de M. C. Escher "Smaller and smaller", tirado de [mcescher.com](http://mcescher.com).



$+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt{i^2} + \pi$   
 $\bar{z} \quad 1 + \quad y$   
 $X^2 \quad 2 -$   
 $n^6 (1)^5 +$   
 $+ = \bar{z}$   
 $(5)^x \quad 4 \quad y$   
 $- \sqrt{i^2} \div$   
 $= a - i$   
 $X^2 (1)^3 \quad n$   
 $i \quad 4 \quad \bar{z}$   
 $\sqrt[3]{i} + n$



## Autoavaliação

$\sqrt[3]{i} \quad - \quad b \quad i \quad (1) \quad = \quad X^2 \quad \div \quad - \quad 4 \quad n \quad 8 \quad 9$   
 $= \quad \pi \quad 0 \quad i \quad X \quad + \quad - \quad \bar{z} \quad 3$   
 $n \quad 2 \quad - \quad a \quad = \quad i \quad y \quad - \quad \sqrt{i^2} \quad + \quad - \quad (5)^x \quad y \quad b$



# Autoavaliação

**Selecciona la respuesta correcta**

Este cuestionario de autoevaluación consta de 10 preguntas con tres posibles respuestas cada una.

Para responder basta hacer "clic" en el recuadro de la que se considere correcta. Pulsando en el el botón "Comprobar" se corregirá, en color verde si está bien y en rojo si no lo está. Si ha sido incorrecta se marcará en verde la opción correcta.

Al final se puede reiniciar el cuestionario y aparecerán las mismas preguntas con datos diferentes.

← anterior / siguiente →

Tus respuestas: **1** **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9** **10** Puntuación:

reiniciar



