

MATEMÁTICAS BÁSICAS



Libro interactivo



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO



Matemáticas Básicas

Carlos Alberto Rojas Hincapié
Red Educativa Digital Descartes, Colombia

Fondo Editorial Pascual Bravo



Medellín

Título de la obra:
Matemáticas Básicas

Autor:
Carlos Alberto Rojas Hincapié

Actualización: Joel Espinosa Longi

Imagen portada: [Education cartoon vector created by pch.vector - www.freepik.com](https://www.freepik.com)

Código JavaScript para el libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.

Recursos interactivos: [DescartesJS](#)

Fuentes: [Nunito](#) y [UbuntuMono](#)

Fórmulas matemáticas: [K^AT_EX](#)

Actualización: Joel Espinosa Longi

Núcleo del libro interactivo: julio 2022

Fondo Editorial Pascual Bravo

Calle 73 73A-226

PBX: (574) 4480520

Apartado 6564

Medellín, Colombia

www.pascualbravo.edu.co

ISBN: [978-958-56476-1-9](#)



Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual](#).

Tabla de contenido

Introducción	6
1. Conceptos preliminares	7
1.1 El conjunto de los Números Naturales (\mathbb{N})	8
1.2 El conjunto de los Números Enteros (\mathbb{Z})	8
1.3 El conjunto de los Números Racionales (\mathbb{Q})	9
1.4 Conjunto de Números Irracionales (\mathbb{Q}^*)	11
1.5 El conjunto de Números Reales (\mathbb{R})	11
1.6 Practiquemos	12
2. Potenciación	15
2.1 Propiedades de la potenciación	18
2.2 Practiquemos	20
3. Radicación	22
3.1 Propiedades de los Radicales	24
3.2 Operaciones con expresiones Radicales	25
3.3 Simplificar expresiones radicales	26
3.4 Practiquemos	27
4. Expresiones Algebraicas	29
4.1 Definiciones preliminares	30
4.1.1 Expresión algebraica	30
4.1.2 Términos en una expresión algebraica	30
4.1.3 Términos semejantes	32
4.2 Polinomios	35

4.3 Suma y resta de polinomios	36
4.4 Producto de monomios entre sí	39
4.5 Producto de polinomios	40
4.6 Productos notables	42
4.6.1 Cuadrado de la suma de dos términos	42
4.6.2 Cuadrado de la diferencia de dos términos	42
4.6.3 Potencias de binomios	45
4.7 División de polinomios	47
4.7.1 División de monomios	47
4.7.2 División de un polinomio por un monomio	48
4.7.3 División de un polinomio por un polinomio	48
4.8 Practiquemos	51
5. Factorización	53
5.1 Factor común	54
5.2 Diferencia de cuadrados	56
5.3 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	59
5.4 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	61
5.5 Suma de cubos	64
5.6 Diferencia de cubos	65
5.7 Factorización por agrupación	66
5.8 Practiquemos	67
6. Fracciones Algebraicas	68
6.1 Simplificación de fracciones aritméticas	69
6.2 Simplificación de fracciones racionales	70
6.3 Suma y diferencia de fracciones racionales	72

6.4 Producto de fracciones racionales	74
6.5 División de fracciones racionales	76
6.6 Practiquemos	78
7. Bibliografía	79

Introducción

De la colección iCartesiLibri surge este libro digital interactivo, diseñado de tal forma que permita el aprendizaje significativo a través de la intervención directa y personal del usuario, el cual se convierte en el protagonista del libro, en tanto que podrá interactuar con algunos objetos de aprendizaje. Estos objetos de aprendizaje interactivos fueron diseñados con el editor DescartesJS.

La herramienta Descartes se caracteriza por una innata interactividad, por permitir realizar representaciones de objetos bi y tridimensionales, por gestionar expresiones de texto y de fórmulas, por integrar objetos multimedia como imágenes, audios y vídeos, por tener la posibilidad de reflejar casos concretos y también potenciar la conceptualización de tareas y procedimientos mediante la utilización de semillas aleatorias y controles numéricos, gráficos y de texto, y con ellos poder abordar la evaluación de manera automática, tanto la correctiva como la formativa. Con Descartes es posible el diseño y desarrollo de objetos educativos que promueven el aprendizaje significativo, posibilitando esa deseada construcción del conocimiento.¹

Todos los recursos incluidos en este libro se basan en el estándar HTML y consecuentemente son plenamente accesibles y operativos en cualquier ordenador, tableta o smartphone sin más que utilizar un navegador compatible con dicho estándar. Diseñar en HTML, significa que usaremos:

1. Lenguaje HTML
2. Hojas de estilo CSS
3. Programación en JavaScript

¹ Véase <http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/descrpcion.htm>.

CONCEPTOS PRELIMINARES



Capítulo 1



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

1. Concepto preliminares

El sistema de los Números Reales lo conforman los siguientes conjuntos numéricos:

1.1 El conjunto de los Números Naturales (\mathbb{N})

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$



Se denomina el conjunto de los Números Naturales o enteros positivos. Están definidas las siguientes operaciones básicas: adición y multiplicación. El conjunto de los Números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se

manifiesta en el ser humano desde sus inicios. Este conjunto se caracteriza porque tiene un número ilimitado de elementos

1.2 El conjunto de los Números Enteros (\mathbb{Z})

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El Conjunto de los Números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción, pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los Números Naturales (por ejemplo: $5 - 20 = ?$). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número natural le corresponda un punto simétrico, situado a la izquierda del cero. Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él). Se dividen en:

Enteros Negativos: \mathbb{Z}^- , Enteros Positivos: \mathbb{Z}^+ y el Cero: $\{0\}$

Por lo tanto, el conjunto de los Números Enteros es la unión de los tres subconjuntos mencionados: $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$

1.3 El conjunto de los Números Racionales (Q)

$$Q = \{ \dots, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, \dots \}$$

El conjunto de los Números Racionales se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban en el conjunto de los Números Naturales y Números Enteros. Para solucionar esta dificultad, se creó este conjunto, el cual está formado por todos los números de la forma $\frac{a}{b}$. Esta fracción en la cual el numerador es a y el denominador b donde a, b son números enteros con b distinto de cero.

Este conjunto se representa gráficamente, dividiendo cada intervalo de una recta numérica en espacios iguales, que representen números enteros.

Representación en la línea recta de la fracción: $\frac{1}{3}$

Num

Den

zoom

SOLUCIÓN

Observa la representación en la recta de fracciones propias e impropias.



Representación en la recta de una fracción propia: $\frac{8}{9}$



[OTRA FRACCIÓN](#)

Representación en la recta de una fracción impropia: $-\frac{75}{6} = -12\frac{3}{6}$



[OTRA FRACCIÓN](#)

Cada una de estas subdivisiones representa una fracción con denominador igual al número de partes de la subdivisión. Cada fracción es un número racional y cada número racional consta de infinitas fracciones equivalentes.

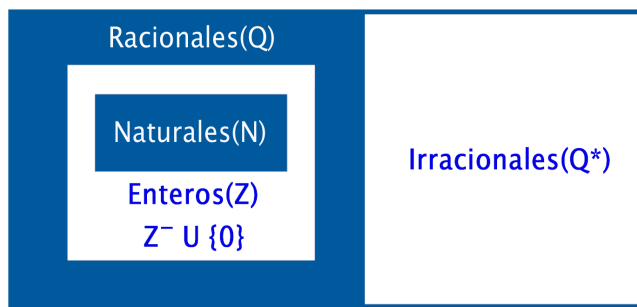
1.4 Conjunto de Números Irracionales (Q^*)

Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos. Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las raíces inexactas, el número Pi (π), etc. A él pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción.

No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semi periódicos que sí pueden transformarse en una fracción.

1.5 El conjunto de Números Reales (R)


El sistema de los números reales esta conformado por la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales: $R = Q \cup Q^*$.




Representación gráfica del conjunto de los números reales.

Todos los conjuntos numéricos pueden ser representados en la recta numérica.

1.6 Practiquemos

 **Ejercicio 1:** Identifica a que conjunto numérico pertenece el número dado. Oprime el botón correspondiente al conjunto numérico al cual pertenece el numero dado, \mathbb{N} (Naturales), \mathbb{Z} (Enteros), \mathbb{Q} (Racional), \mathbb{Q}^* (Irracional) o \mathbb{R} (Real) y verifica tu respuesta.



1 . Identifica a qué conjuntos de numéricos pertenece el número: **-1,414213562**

(Haz clic en todos los botones a los cuales pertenece el número)

N

Z

Q

Q*


R

Ejercicio

Solución

Bien = 0

Mal = 0

 Ejercicio 2: Clasifica cada uno de los siguientes números en el recuadro correspondiente al conjunto numérico, ubicándolos en el conjunto más pequeño al que pertenezcan:


Clasifica los siguientes números:



-39	-89	$\frac{23}{5}$	$-\frac{32}{4}$
3.141516...	π	-101	38
0.123581...	5	-10031	19

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racional (Q)	Irracional (Q ^o)

1 / 4

 Ejercicio 3: Resuelve los siguientes ejercicios con su debido procedimiento.

1. $1,517 - 2,304 + 9,379$

2. $4,224 - 6,293 - 1,611$

3. $2,818 + 9,006 + 7,423$

4. $2 + \pi - 5$

5. $\frac{1}{3} + 3,121 - 5,465$

6. $4,399 \times (1,283 - 5,915)$

7. $2,247 \times (0,035 + 3,247)$

8. $6,744 \times (7,163 - 2,872)$

POTENCIACIÓN



Capítulo 2



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

2. Potenciación

En la nomenclatura de la potenciación se diferencian tres partes, la base, el exponente y la potencia.

Una potencia es el resultado de multiplicar un número por sí mismo varias veces. El número que multiplicamos se llama base, el número de veces que multiplicamos la base se llama exponente.

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \qquad \qquad \text{Potencia} \\ 2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{multiplica 3 veces}} = 8 \\ \text{Base} \end{array}$$


El exponente determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma:

Ejemplos:

- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$
- $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
- $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = (-7)^4$

Exploremos

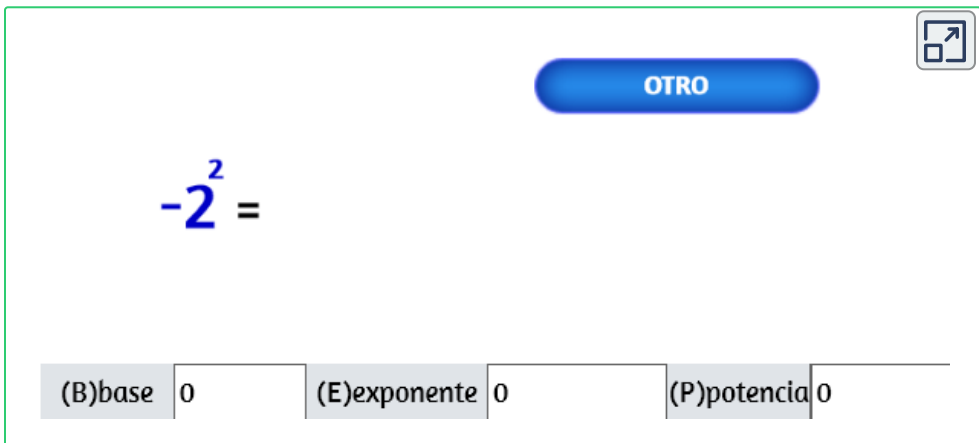
1. Ingresas la base y el exponente indicado, oprime la tecla “intro” y verifica.



3 = 0⁰

OTRO

2. Verifica ingresando la base y el exponente del ejercicio propuesto y escribe la potencia, (recuerda $(B)^E = P$), oprime la tecla “intro” para verificar.



$-2^2 =$

OTRO

(B)base 0 (E)exponente 0 (P)potencia 0

2.1 Propiedades de la potenciación

Las propiedades de la potenciación son válidas para todos los conjuntos numéricos.

Todo número diferente de cero, elevado al exponente cero, es igual a uno:

$$a^0 = 1$$

Todo número diferente de cero, elevado al exponente uno, es igual a el mismo:

$$a^1 = a$$

Selecciona y observa ejemplos:

1. Producto de potencias de la misma base
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. Cociente de potencias de la misma base
 $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. Potencia de una potencia
 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. Producto de potencias con igual exponente
 $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. Cociente de potencias con igual exponente
 $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$


Potencia de una potencia ✓

$(5^{16})^{14} = 5^{224}$

otro

Exploremos




Verifica lo aprendido en esta sección por medio de un paso a paso.

Oprime las flechas y observa el paso a paso 

OTRO


Una potencia que tiene de base una potencia

$$(3^2)^1 =$$

Base  exponente 1°  exponente 2° 

Recuerda, una potencia que tiene de base una potencia, se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

2.2 Practiquemos

 Ejercicio 1: Da clic en el botón “Ejercicio”, soluciona en tu cuaderno, escribe el exponente, la base y pulsa la tecla “intro” y verifica tu respuesta.

exponente

base

Solución


a^b

Pulsa el botón EJERCICIO para generar un ejercicio de potencias.

EJERCICIO

SOLUCIÓN

Bien: 0
Mal : 0

 Ejercicio 2: Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y responde las siguientes preguntas seleccionando la respuesta correcta.

Test de conocimientos en 8 preguntas



Responde con la mejor opción.



Comenzar

RADICACIÓN



Capítulo 3



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

3. Radicación

Las expresiones radicales son expresiones que incluyen un radical, el cual es el símbolo de calcular una raíz.

En la nomenclatura de la radicación se tienen las siguientes partes:

Diagram illustrating the parts of a radical expression $\sqrt[n]{a} = b$ and its equivalent power form $b^n = a$.

The radical expression $\sqrt[n]{a} = b$ is labeled with:

- Indice de la raíz (Index of the root) pointing to n .
- Radical pointing to the radical symbol $\sqrt{}$.
- Cantidad Subradical (Subradical quantity) pointing to a .
- Raíz (Root) pointing to b .

The equivalent power form $b^n = a$ is labeled as "Expresada en forma de Potencia" (Expressed in power form).

La radicación es la operación inversa de la potenciación, porque se expresa en forma de potencia:

$$\begin{aligned} \sqrt{25} = 5 \text{ porque } 5^2 = 25 & \qquad \sqrt[4]{16} = 2 \text{ porque } 2^4 = 16 \\ \sqrt[3]{343} = 7 \text{ porque } 7^3 = 343 & \qquad \sqrt[5]{243} = 3 \text{ porque } 3^5 = 243 \end{aligned}$$

Nota:

Una expresión radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario:

$\sqrt[n]{x^m}$ se puede expresar como $x^{\frac{m}{n}}$ donde el denominador es el índice del radical.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

[otro ejemplo](#)

3.1 Propiedades de los Radicales

Selecciona y observa el ejemplo:

Seleccione para ver ejemplos



1. Producto de raíces de igual índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2. Cociente de raíces de igual índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. Potencia de una raíz.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

4. Raíz de una raíz.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$
$$\sqrt[14]{\sqrt{18}} = \sqrt[14]{18}$$

3.2 Operaciones con expresiones Radicales

Para operar sumas o restas de expresiones radicales, deben tener el mismo índice y el mismo radicando, o sea radicandos semejantes.

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} \quad \text{Términos semejantes } \sqrt{5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

OTRO EJEMPLO



Resuelva expresiones radicales de suma y resta. ingresa el coeficiente numérico y el valor del radical, pulsa la tecla “intro” y observa la solución.

Coficiente

Radizando

Solución

$$C\sqrt{R}$$

Pulsa el botón EJERCICIO,
escribe los resultados, luego
enter y verifica la SOLUCIÓN.

EJERCICIO

SOLUCIÓN

Bien: 0
Mal : 0



3.3 Simplificar expresiones radicales

Para simplificar expresiones radicales, buscamos términos exponenciales dentro del radical, donde usamos la factorización o descomposición en factores primos y aplicamos las reglas de los exponentes.

Se debe llevar a un índice común (m.c.m.) y se expresa en una sola raíz, simplificando la expresión si es posible, por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 2 \sqrt[3]{4^2}}{2 \times 3 \sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2}$$

Indice R...	2
Exp. Rad.	0
Exp. Coef	0

Solución

Pulsa el botón EJERCICIO, escribe los resultados, luego enter y verifica la SOLUCIÓN.

EJERCICIO



3.4 Practiquemos

Ejercicios

1. Resuelve y simplifica en tu cuaderno aplicando las propiedades vistas en el capítulo.

$$1. 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$6. \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{27}$$

$$2. 2 \cdot \sqrt{3} + 9 \cdot \sqrt{3} \div 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$7. \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{3}$$

$$3. \sqrt{50} - \sqrt{72} - 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$8. \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{8} \div \sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{18}$$

$$9. \sqrt{45} \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

$$5. \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{27}$$

2. Resuelve y simplifica en tu cuaderno aplicando las propiedades vistas en el capítulo.

$$1. \frac{\sqrt{8a^3b}}{\sqrt{2ab}}$$

$$4. \frac{\sqrt[3]{ab^2c^2}}{\sqrt[3]{a^2bc}}$$

$$7. \frac{\sqrt[3]{2a^3b^4c}}{\sqrt{2abc^2}}$$

$$2. \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab}}$$

$$5. \frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt[3]{2ab}}$$

$$8. \frac{\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[3]{2a^2b}}{\sqrt[6]{2ab}}$$

$$3. \frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt{2ab}}$$

$$6. \frac{\sqrt[4]{2a^2b}}{\sqrt{2a}}$$

3. Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y responde las siguientes preguntas tipo ICFES:

Test de conocimientos en 8 preguntas



Responde con la mejor opción.



Comenzar

EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Capítulo 4



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

4. Expresiones algebraicas

4.1 Definiciones preliminares

4.1.1 Expresión algebraica

Combinación de números, letras, signos de agrupación, con operaciones indicadas. Por ejemplo:

$$\frac{3a-5}{a+4}, \quad x^2 - 5x + 2, \quad 2b + 3, \quad 8y - 3xy + 2x$$

4.1.2 Términos en una expresión algebraica

Se llama término en una expresión algebraica, a cada parte de ella que viene a ser separada por el signo mas (+) ó el signo menos (-), los términos están formados por números y letras o expresiones combinadas multiplicadas entre sí (llamados factores). Por ejemplo:

$$x^2 - 5x + 2 \rightarrow \text{Expresión de tres términos}$$

$$2b + 3 \rightarrow \text{Expresión de dos términos}$$

$$8y - 3xy + 2x - 5 \rightarrow \text{Expresión de cuatro términos}$$

El término puede tener factor literal y factor numérico o coeficiente numérico o coeficiente del término.

Exploremos

Observa y explora las diferentes expresiones algebraicas.


The image shows a digital interface for exploring algebraic expressions. At the top, the expression $-1/2 \cdot x^2$ is displayed in large orange font. Below it, there are two columns of text boxes. The left column contains: "El doble", "El triple", "La mitad", "Menos el doble", "Menos el triple", "La raíz", and "27 por ciento". The right column contains: "del cubo", "de x e y", "de x menos y", "de x por y", and "del inverso". A horizontal orange box highlights the text "Menos la mitad" from the left column and "del cuadrado" from the right column. At the bottom, there are two vertical arrow controls (up and down) on each side, and a red instruction: "Pulsa en las flechas laterales para obtener distintas expresiones". A small icon in the top right corner of the interface shows a square with an arrow pointing outwards.

Figura 4.1. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Cuando un término en apariencia no presenta coeficiente numérico, como en la expresión algebraica $b - 4c$ en donde b es el término que en apariencia no presenta el coeficiente numérico, se asume a la unidad (1) como su coeficiente numérico. Luego el término $1b = b$.

Para conocer el valor numérico de una expresión algebraica, se sustituyen las letras por números reales y se efectúan operaciones.

Por ejemplo:

Expresión algebraica: $7(7x^2 - 4y) + 6z$ 

Ingresa los valores de x, y, z

x	<input type="text" value="0"/>	y	<input type="text" value="0"/>	z	<input type="text" value="0"/>
---	--------------------------------	---	--------------------------------	---	--------------------------------

SOLUCIÓN

4.1.3 Términos semejantes

Aquellas expresiones que poseen una misma parte, bien sea literal (letras) o radical (raíces). Por ejemplo:

$ab - 2ab \rightarrow$ Términos semejantes, poseen la misma parte literal:
 ab

$\sqrt[3]{x}, 5\sqrt[3]{x} \rightarrow$ Términos semejantes, poseen la misma parte radical:
 $\sqrt[3]{x}$


Los términos semejantes pueden sumarse o restarse. Por ejemplo:

Simplificar términos semejantes.



Simplificar la siguiente expresión: $17q^3 - 7t^2$

SOLUCIÓN

 Ejercicio: Simplificar términos semejantes en expresiones algebraicas cuando sea posible.

1. $8t + 7t =$

6. $23mp - 29mp =$

2. $5a^2b + 13a^2b =$

7. $300r^3 - 153r^2 =$

3. $55z^2 - 21z^2 =$

8. $76t - 37t =$

4. $21a + 14b =$

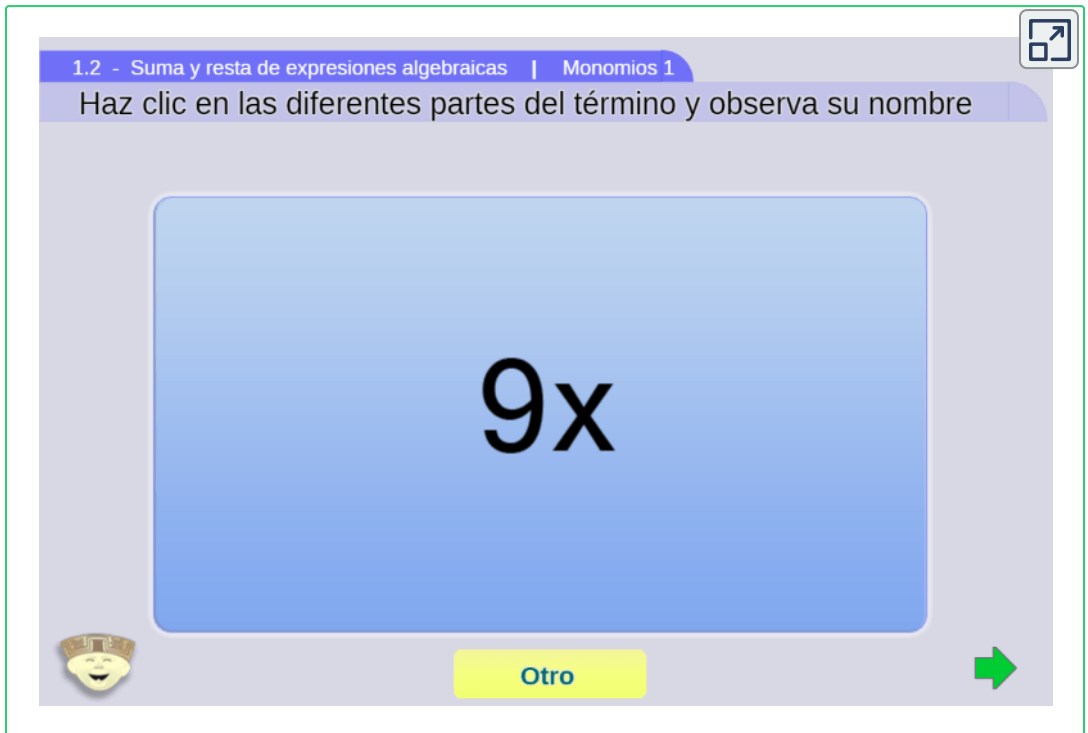
9. $66m - 36m =$

5. $25wxy + 13xyz =$

10. $104 - 104m^2 =$

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



The screenshot shows a web browser window with the following elements:

- Address bar: 1.2 - Suma y resta de expresiones algebraicas | Monomios 1
- Instruction: Haz clic en las diferentes partes del término y observa su nombre
- Central display: A large blue rounded rectangle containing the text $9x$.
- Bottom left: A small icon of a smiling face wearing a crown.
- Bottom center: A yellow button labeled "Otro".
- Bottom right: A green arrow pointing to the right.
- Top right: A small icon of a square with an arrow pointing outwards.

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t02_s01_descartes-JS/index.html

4.2 Polinomios

Son expresiones algebraicas con características especiales, así por ejemplo un polinomio en la variable x , es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

- n es un entero no negativo.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ son números reales.
- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ son coeficientes del polinomio.
- a_n es el coeficiente principal.
- a_0 es el término independiente.
- El mayor exponente de x se denomina grado del polinomio.

OTRO EJEMPLO

$$\text{Sea } P(x) = 3x^2 + 3x^2 - x + 10$$

- El grado del polinomio es 2
- El coeficiente principal es 3
- El término independiente es 10



Algunos polinomios reciben nombres especiales de acuerdo con el número de términos que posean:

$$5x^2 \rightarrow \text{Monomio (un término)}$$

$$2b + 3 \rightarrow \text{Binomio (dos términos)}$$

$$8x^2 + 2x - 5 \rightarrow \text{Trinomio (tres términos)}$$

4.3 Suma y resta de polinomios

Sean los polinomios: $P_1 = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ y $P_2 = 4x^3 - 5x^2 + 3$

1. Se coloca el primer polinomio y a continuación se le suma o adiciona el segundo polinomio.

$$P_1 + P_2 = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$$

2. Se eliminan signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes)

$$P_1 + P_2 = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$$

Si a un signo de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes) lo antecede un signo más (+), al eliminar el signo de agrupación, todos los términos que haya dentro de él quedarán con los mismos signos, para el caso, que el signo de agrupación lo antecede un signo menos (-), o sea una resta, al eliminar el signo de agrupación todos los términos dentro de éste cambian de signo.

3. Se realizan las operaciones de sumas o restas de términos semejantes, los que no son semejantes se dejan igual, después de realizar las operaciones con los términos semejantes se organizan en orden creciente o decreciente para la variable si es el caso.

$$P1 + P2 = (x^3 + 4x^3) + (2x^2 - 5x^2) - 5x + (7 + 3)$$

$$P1 + P2 = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$$

Nota: Al sumar o restar dos o más polinomios, se suman los términos semejantes de cada polinomio.

Modifica los coeficientes de cada polinomio y observa los resultados.

$$P1 = -1x^3 + (5x^2) + (-1x) + (1)$$

$$P2 = 0x^3 + (5x^2) + (-1x) + (-3)$$

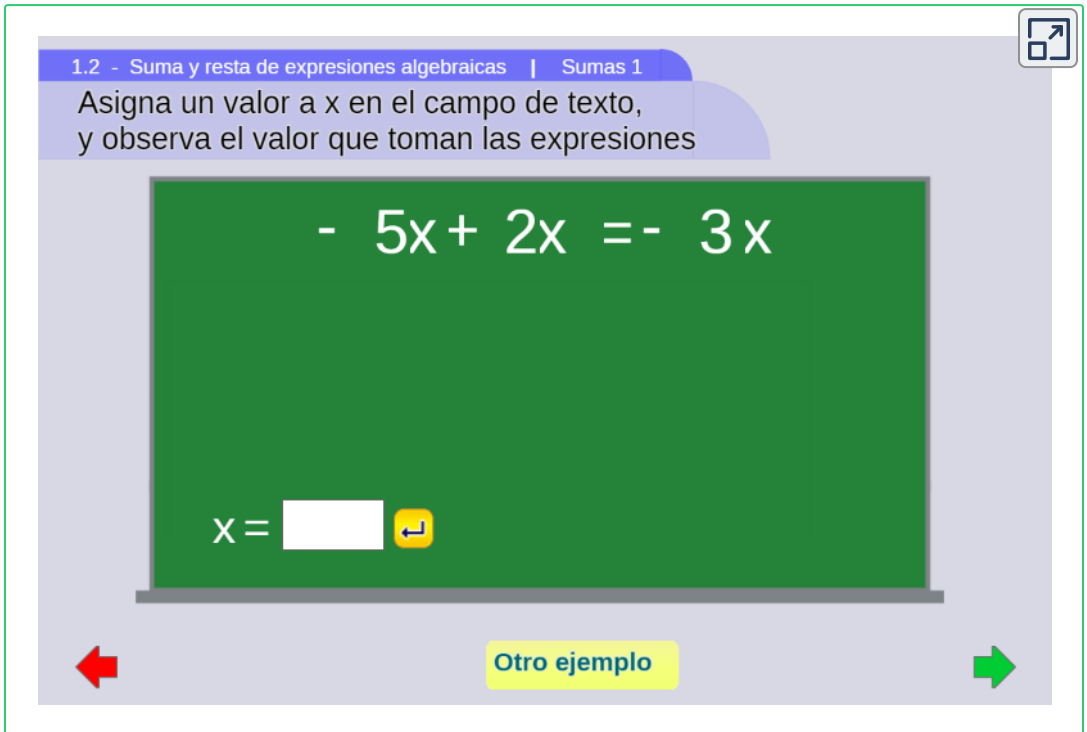
SOLUCIÓN

Ingresa los coeficientes del polinomio $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Polinomio 1 (P1)				Polinomio 2 (P2)			
a_3	Δ	∇	-1	a_3	Δ	∇	0
a_2	Δ	∇	5	a_2	Δ	∇	5
a_1	Δ	∇	-1	a_1	Δ	∇	-1
a_0	Δ	∇	1	a_0	Δ	∇	-3

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:



1.2 - Suma y resta de expresiones algebraicas | Sumas 1

Asigna un valor a x en el campo de texto, y observa el valor que toman las expresiones

$$- 5x + 2x = - 3x$$

x = ↵

Otro ejemplo

The screenshot shows an interactive learning interface. At the top, there is a blue header with the text '1.2 - Suma y resta de expresiones algebraicas | Sumas 1'. Below the header, a light blue box contains the instruction 'Asigna un valor a x en el campo de texto, y observa el valor que toman las expresiones'. The main content is a green chalkboard with the algebraic equation $- 5x + 2x = - 3x$ written in white. Below the chalkboard, there is a text input field with 'x =' followed by a white box and a yellow return key icon. At the bottom of the interface, there is a yellow button labeled 'Otro ejemplo', a red left-pointing arrow on the left, and a green right-pointing arrow on the right. A small square icon with an arrow is in the top right corner of the interface.

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t02_s01_descartes-JS/index.html.

4.4 Producto de monomios entre sí

1. Se multiplican los coeficientes numéricos de los términos, aplicando las reglas de los signos:

Signos iguales: (+)

$$(+)\cdot(+)=(+)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)$$

Signos diferentes: (-)

$$(+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(+)=(-)$$

2. Se aplica a la parte literal, el producto de potencias de igual base:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Simplifica el siguiente producto de monomios.

Simplificar la siguiente expresión: $3 t^{19} \cdot 8 t \cdot 6 t^{12}$

SOLUCIÓN

4.5 Producto de polinomios

Para multiplicar polinomios entre sí, se aplica la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer polinomio por todo el segundo polinomio, ejemplo:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 3x \cdot (5x - 7) + 4 \cdot (5x - 7)$$

Se aplica a la parte literal, el producto de potencias de igual base:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$((3x) \cdot (5x) - (3x) \cdot 7) + (4 \cdot (5x) - 4 \cdot 7)$$

Suma de términos semejantes.

$$15x^2 - 21x + 20x - 28$$

por lo tanto, tenemos que:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 15x^2 - 1x - 28$$

Se debe tener en cuenta la ley de los signos entre los términos a multiplicar, donde los positivos son aquéllos términos que los antecede un signo mas (+) ó aquéllos términos que en apariencia no poseen signo que los anteceda; y los negativos son aquéllos términos que los antecede un signo menos (-).

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:

2.2 a - Multiplicación y división de expresiones algebraicas | Binomios 3

Utiliza los pulsadores para realizar la multiplicación término a término

$$\begin{array}{r} 5y - 2 \\ \times \quad -3y - 3 \\ \hline 0y + 0 \\ 0y^2 + 0y \\ \hline \end{array}$$

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b02_t02_s01_descartes-JS/index.html.

4.6 Productos notables

Corresponden a productos especiales, destacables en operaciones matemáticas y que tienen su base en la potenciación de polinomios.

4.6.1 Cuadrado de la suma de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, mas el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) \text{ ————— Definición de potencia}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ejemplo:

$$(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot (2m) \cdot (3) + (3)^2 = 4m^2 + 12m + 9$$

4.6.2 Cuadrado de la diferencia de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) \text{ ————— Definición de potencia}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$


Ejemplo:

$$(y - 5x)^2 = (y)^2 - 2 \cdot (y) \cdot (5x) + (5x)^2 \\ = y^2 - 10xy + 25x^2$$

Si se tienen tres o más términos, se agrupan y se aplica la misma definición:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Escribe los valores de los coeficientes y exponente, pulsa la tecla "intro" y observa el resultado cuando tienen diferentes exponentes dentro de los términos del binomio.



Binomio al cuadrado: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Coeficiente(...) Exponente(...) Coeficiente(b) Exponente(...)

Escriba los valores de los coeficientes a, b, y exponentes n, m $(ax^n + by^m)^2$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Exploreemos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:

The screenshot shows a software interface for a mathematics activity. At the top, there is a navigation bar with the text "1.1 - Productos notables y factorización | Exploración" and "Matemáticas" on the right. Below the navigation bar, a blue instruction box says "Utiliza las piezas para rellenar el rectángulo azul." (Use the pieces to fill the blue rectangle). The main area contains a large blue rectangle on the right. On the left, there are three pieces: a small white square labeled "1", a yellow rectangle labeled "x", and a pink square labeled "x²". At the bottom center, there is a "Verificar" (Verify) button. In the bottom right corner, there is a right-pointing arrow button.

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

4.6.3 Potencias de binomios

Los binomios se desarrollan de la siguiente forma:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Detallando el desarrollo de los binomios se tiene que:

1. El número de términos del resultado es uno más que el exponente del binomio.
2. El exponente del primer y último término del binomio, son iguales al exponente del binomio.
3. El exponente de a disminuye de uno en uno en cada término y en cambio b aumenta de uno en uno para cada término.
4. Todos los términos del desarrollo de cada binomio son positivos, pero sí fueran de la forma $(a - b)^2, (a - b)^3, (a - b)^4, \dots$, los signos alternarían : $(+), (-), (+), (-), \dots$
5. Al analizar los coeficientes numéricos para cada término del desarrollo de un binomio se observa que son simétricos.

Los términos simétricos tienen los mismos coeficientes, la simetría de los términos permite disponer los coeficientes de cada binomio en forma de un triángulo conocido como:

Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{l}
 (a + b)^0 = \text{—————} 1 \\
 (a + b)^1 = \text{—————} 1 \quad 1 \\
 (a + b)^2 = \text{—————} 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a + b)^3 = \text{—————} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a + b)^4 = \text{—————} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a + b)^5 = \text{—————} 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 (a + b)^6 = \text{—————} 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
 \end{array}$$

Con este triángulo se puede deducir que:

1. Los coeficientes de los términos de los extremos son iguales a uno.
2. Sumando dos coeficientes seguidos de una fila, se obtiene un coeficiente de la fila siguiente.

Ejemplo:

$$(m - 2n)^5 = (m)^5 - 5(m)^4(2n) + 10(m)^3(2n)^2 - 10(m)^2(2n)^3 + 5(m)(2n)^4 - (2n)^5$$

$$(m - 2n)^5 = m^5 - 10m^4n + 40m^3n^2 - 80m^2n^3 + 80mn^4 - 32n^5$$

4.7 División de polinomios

4.7.1 División de monomios

Para dividir dos monomios:

1. Se dividen los coeficientes, aplicando la ley de los signos.
2. En la parte literal, se le aplica la propiedad de división de potencias de igual base:

Siendo $m > n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

Siendo $m < n$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

Siendo $m = n$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1;$$

Simplifica la siguiente división de monomios y luego observa la solución.

Simplificar la siguiente expresión: $\frac{42 p^{23}}{-6 p^{18}}$

SOLUCIÓN

4.7.2 División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, teniendo en cuenta la ley de signos y las propiedades de la potencia de bases iguales, ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{18x^5 - 9x^3 + 24x^4}{-3x^2} &= \frac{18x^5}{-3x^2} - \frac{9x^3}{-3x^2} + \frac{24x^4}{-3x^2} \\ &= -6x^{5-2} + 3x^{3-2} - 8x^{4-2} \\ &= -6x^3 + 3x - 8x^2\end{aligned}$$

4.7.3 División de un polinomio por un polinomio

1. Ordenamos los polinomios en orden decreciente.
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y el resultado lo restamos del dividendo, así obtenemos un dividendo parcial.
4. Continuamos a partir de este dividendo parcial, conforme lo indicamos en el paso 2 hasta obtener un residuo de menor exponente que el divisor.
5. Si el resultado es CERO la división es EXACTA.

Exploremos

Observa varios ejercicios, verás que para hacer la división siempre **se dividen** los monomios de mayor grado, **se multiplica** y se cambia de signo, y **se suma**. Este proceso se repite hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor. La división de polinomios debe cumplir dos condiciones. La primera, que el **Dividendo = divisor · cociente + resto** y, la segunda, que **gr(resto) < gr(divisor)**

El grado del cociente es la diferencia de los grados del dividendo y del divisor. Cuando el resto es cero, se dice que el dividendo es divisible entre el divisor.

$$\begin{array}{r} -2x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 6 \\ \underline{2x^4 + 2x^3 - 2x^2} \\ -8x^3 - 10x^2 + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 2x + 2 \\ \underline{x^2} \end{array}$$

Multiplicamos el último monomio escrito en el cociente por el divisor y lo cambiamos de signo.

Otros polinomios Otra paso a paso

Figura 4.2. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

En la siguiente escena se ven divisiones de polinomios con la expresión en coeficientes, cuyo procedimiento es el mismo: **División** de coeficientes, **Multipliación** del último coeficiente por el divisor **cambiando de signo** el resultado y, **Suma** de este resultado con lo que resta en el dividendo.

Observa varios ejercicios en cada uno de los tres niveles de la escena.

$P(x) = 7x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

$Q(x) = x + 6$

P(x) Dividendo


Q(x) divisor

Pulsa el botón para ver paso a paso la división.

1 2 3

Figura 4.3. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

4.8 Practiquemos

 **Ejercicio 1:** Simplifique la siguiente expresión algebraica de (sumas, restas, productos, cocientes, potencias), resuelva primero en tu cuaderno y luego verifica la solución.


Seleccione el tipo de ejercicio a resolver:



Simplificar la siguiente expresión: $(-9 a^6) \cdot (-7 a^3)$

EJERCICIO

SOLUCIÓN

 Ejercicio 2: Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y resuelve la actividad:

Evaluar la expresión si: $a=3$, $b=1$, $c=2$

COLUMNA 1



COLUMNA 2

Arrastra los elementos hacia las columnas 1 y 2, de tal forma que queden parejas con propiedades asociadas.

$$3a - b - 2c$$

$$143^{\sqrt{b}}$$

$$\left(\frac{a^2 + b}{a}\right)^2 + b^2$$

$$4 \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Revoluer

Otro test

Ten cuidado al soltar la pieza, es posible que quede debajo de otra. Si esto ocurre, aparecerá un cuadrado de color verde.

FACTORIZACIÓN



Capítulo 5



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

5. Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de otros polinomios que tengan menor grado que éste. Casos de factorización:

5.1 Factor común

Hace referencia al término común de un polinomio, pueden ser factores numéricos o factores literales. Para encontrar el factor común, se realiza lo siguiente:

1. Encontrar el factor común numérico que corresponde al M.C.D. de los coeficientes del polinomio común (M.C.D. = Factores comunes elevados a su menor exponente).
2. El factor común literal está conformado por aquellas letras que están elevadas a su menor exponente.
3. El factor común para el polinomio corresponde a la multiplicación del factor común numérico con el factor común literal.

La expresión, presenta un polinomio al lado izquierdo de la igualdad y a la derecha la factorización del polinomio.



$$4x^5 + 24x^4 + 8x^3 = 4x^3 (x^2 + 6x^1 + 2x^0)$$

FACTOR COMÚN $4x^3$

Factor Numérico: 4

Factor Literal: x^3

OTRO EJEMPLO

Si aparecen expresiones con exponente cero, se han dejado sólo por ilustración.


Ejemplo: Encontrar el factor común para el polinomio: $3m^3 - 6m^2n$

Factor común numérico de 3 y 6 es 3

Factor común literal de m^3 y m^2n es m^2

Por lo tanto, el factor común del polinomio = $3m^3 - 6m^2n = 3m^2$

Ahora, veamos por medio de un paso a paso como hallar el factor común de un polinomio, pulsa en botón “Paso1” y sigue las instrucciones.



Factorizar $P(x) = 18m^8 n^{17} x^7 + 8m^7 n^{15} x^{10}$

Paso 1

EJERCICIO

VERIFICAR

Una vez encontrado el factor común para un determinado polinomio, se procede a encontrar el otro factor que multiplica al factor común, dividiendo cada término del polinomio dado por el factor común. Quedando en ésta forma factorizado completamente el polinomio dado.

Ejemplo:

$$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4$$

el factor común del polinomio es $5p^2q^2$ ahora dividimos cada termino por el factor común:

$$\begin{aligned} \frac{5p^2q^3}{5p^2q^2} + \frac{10p^2q^2}{5p^2q^2} + \frac{20p^3q^4}{5p^2q^2} &= p^{2-2}q^{3-2} + 2p^{2-2}q^{2-2} + 4p^{3-2}q^{4-2} \\ &= q + 2 + 4pq^2 \end{aligned}$$

division de coeficientes numéricos, propiedad de división de potencias de igual base, por lo tanto,

$$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4 = 5p^2q^2 \cdot (q + 2 + 4pq^2)$$

5.2 Diferencia de cuadrados

Se caracteriza por ser una diferencia (resta) entre dos términos que poseen raíz cuadrada exacta.

Ejemplo: $9a^2 - b^2$

raíz cuadrada del primer término $\rightarrow 3a$

raíz cuadrada del segundo término $\rightarrow b$

Una diferencia de cuadrados se factoriza como la suma de las raíces cuadradas, multiplicada por la diferencia de las mismas, simbólicamente se tiene:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{ccc} 25p^2 & - & 4p^2 & = & (5p + 2p) \cdot (5p - 2p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{25p^2} & & \sqrt{4p^2} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 5p & & 2p & & \end{array}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} k^2 - (1 + v)^2 &= (k + (1 + v)) \cdot (k - (1 + v)) \\ &= (k + v + 1) \cdot (k - v - 1) \end{aligned}$$



Ejercicio: Factorizar los siguientes polinomios si es posible.

1. $a^2x^2 - 169 =$

2. $a^2 - \frac{1}{25} =$

3. $16y^4 - 36 =$

4. $x^{2a} - y^{2b} =$

5. $25 - 19y^2 =$

6. (3 factores) $x^4 - 81 =$

7. (4 factores) $a^4x^2 - 81x^6 =$

8. $(2x - 5)^2 - (3x - 5)^2 =$

9. $(y^2 - 6y + 9) - x^2 =$

10. $(x^2 + 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) =$

11. $4a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) =$

12. (3 factores) $16t^4 - x^4 =$

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:

The screenshot shows a web-based interface for a mathematics activity. At the top, there is a navigation bar with the text "1.1 - Productos notables y factorización | Factorización 2" and "Matemáticas" on the right. Below the navigation bar, a blue box contains the instruction: "Sigue los pasos para demostrar gráficamente la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.". Below this, another instruction reads: "Define los cuadrados de lados a y b moviendo los controles gráficos azules." The main area features a yellow square with side length 'a'. A vertical line of length 'b' is drawn from the top edge, and a horizontal line of length 'b' is drawn from the right edge, meeting at a blue dot. This creates a smaller yellow square of side 'b' in the top-right corner and a larger yellow rectangle of dimensions (a-b) by a in the bottom-left. The remaining area is a white rectangle of dimensions (a-b) by b. Labels 'a-b', 'b', 'a', and 'a-b' are placed around the square to indicate dimensions. At the bottom, there is a dropdown menu showing "paso 1" and a "Siguiete" button.

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

5.3 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

Todo trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, siempre que $x^2 + bx + c = 0$ tenga solución, equivale al producto de dos binomios o factores.

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

Donde el primer término de cada binomio, es la raíz cuadrada del primer término del trinomio x y los segundos términos de cada binomio son los números p y q , cuya suma $p + q = b$ y el producto $p \cdot q = c$.

Simbólicamente se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & bx & + & c & = & (x + p) \cdot (x + q) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{x^2} & & b = p + q & & c = p \cdot q & & \\ \downarrow & & & & & & \\ x & & & & & & \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 8x & + & 15 & = & (x + 3) \cdot (x + 5) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \sqrt{x^2} & & b = 3 + 5 & & c = 3 \cdot 5 & & \\ \downarrow & & & & & & \\ x & & & & & & \end{array}$$

Se puede presentar que el trinomio tenga la forma $x^{2n} + bx^n + c$, el cual se factoriza de igual forma.


Ejemplo:


$$x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

donde,

$$b = (-3 + 2) = -1$$

$$c = (-3)(2) = -6$$



 Ejercicio: Practiquemos factorizando algunos trinomios, si es posible.



Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Factorizar la siguiente expresión

$$a^2 - 5a - 14 = (a + 0)(a + 0)$$

Coeficiente1 Coeficiente2 pulsa (enter)↓ Cambiar signos  

5.4 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

Se caracterizan por ser muy parecidas a la forma $x^{2n} + bx^n + c$, con la diferencia de que la variable x^{2n} ya tiene un coeficiente a diferente de cero y uno. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}2x^2 + 7x - 15 \\3x^2 + 17x + 10 \\5x^2 - 17x + 6\end{aligned}$$

Para factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, lo que se hace es llevarlo a la forma $y^{2n} + by^n + c$, y luego se resuelve como en el caso anterior.

Simbólicamente se tiene: $ax^{2n} + bx^n + c \rightarrow$ Trinomio dado

$$= \frac{a(ax^{2n} + bx^n + c)}{a} \rightarrow \text{Multiplico y divido por } a$$

$$= \frac{a^2x^{2n} + abx^n + ac}{a} \rightarrow \text{Aplico distributiva}$$

El primer término de cada binomio será: $(ax^n + p) \cdot (ax^n + q)$

por lo tanto, $(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac = (ax^n + p) \cdot (ax^n + q)$

donde: $p + q = b$ y $p \cdot q = a \cdot c$

Ejemplo: $3x^2 + 17x + 10 \rightarrow$ Trinomio dado


$$= \frac{3(3x^2 + 17x + 10)}{3} \rightarrow \text{Multiplico y divido por 3}$$

$$= \frac{(3x)^2 + 17(3x) + 30}{3} \rightarrow \text{Aplico distributiva}$$

donde: $15 + 2 = 17$ y $15 \cdot 2 = 30$

$$\text{entonces: } = \frac{(3x + 15)(3x + 2)}{3} \rightarrow \text{Factor com\u00fan } 3(x + 5)$$

$$= x^2 + 17x + 10 = (x + 5)(3x + 2) \rightarrow \text{Simplificando el 3}$$

 Ejercicio: Practiquemos factorizando algunos trinomios, si es posible.

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Factorizar la siguiente expresi\u00f3n

$$20m^2 - 26m - 6 = (1m+0)(1m+0)$$

Coeficiente1 Coeficiente2 pulsa (enter) Cambiar signos

EJERCICIO

VERIFICAR

Exploremos

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección:

The screenshot shows a software interface for a math exercise. At the top, the navigation bar includes "1.1 - Productos notables y factorización", "Factorización 1", and "Matemáticas". A blue instruction box at the top reads: "Utiliza las piezas para formar un rectángulo que tenga el área que se indica." Below this, the target area is given as $\text{Área} = x^2 + 6x + 9$. On the left, there are three pieces: a small square labeled "1", a yellow rectangle labeled "x", and a larger pink square labeled "x²". At the bottom center, there is a "Verificar" button.

Véase

http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b01_t01_s01-JS/index.html.

5.5 Suma de cubos

Se trata de la suma entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

Ejemplo: $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

raíz cúbica del primer término $\rightarrow x$

raíz cúbica del segundo término $\rightarrow 3$

Para factorizar una suma de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Una suma de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la suma de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (-), (+).

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$y^3 + 64x^3 = (y + 4x)(y^2 - 4xy + 16x^2)$$

5.6 Diferencia de cubos

Se trata de la resta entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

$$\text{Ejemplo: } p^3 - 8k^3 = p^3 - (2k)^3$$

Raíz cúbica del primer término $\rightarrow p$

Raíz cúbica del segundo término $\rightarrow 2k$

Para factorizar una diferencia de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Una diferencia de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la diferencia de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (+), (+).

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

$$y^3 - 64x^3 = (y - 4x)(y^2 + 4xy + 16x^2)$$

Ahora, veamos algunos ejemplos de la factorización de suma y diferencia de cubos.



Suma y diferencia de cubos

SUMA DE CUBOS, expresión de la forma: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$$

DIFERENCIA DE CUBOS, expresión de la forma: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$64x^3 - 125 = (4x - 5)(16x^2 + 20x + 25)$$

OTRO EJEMPLO

5.7 Factorización por agrupación

Algunos polinomios no se pueden factorizar directamente, mediante la aplicación de los casos vistos hasta ahora, sino que es necesario agrupar adecuadamente los términos antes de factorizar.

Ejemplo, factorizar el siguiente polinomio: $x^3 - 6x^2 - x + 6$

$$x^3 - 6x^2 - x + 6 \rightarrow \text{agrupamos} \rightarrow (x^3 - 6x^2) - (x - 6)$$

$$\text{factor común} \rightarrow x^2(x - 6) - (x - 6)$$

$$\text{factor común} \rightarrow (x - 6)(x^2 - 1)$$

$$\text{diferencia de cuadrados} \rightarrow (x - 6)(x - 1)(x + 1)$$

5.8 Practiquemos

Ejercicio

Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y resuelve la actividad:

FACTORIZAR DIFERENCIA DE CUADRADOS

Arrastra la imágenes a los cajones, en orden de acuerdo al signo. Procura no dejar imágenes montadas.

1	2	3	4	5	6

$(8-x^4)$ $-(8+x^4)$ 64

FRACCIONES ALGEBRAICAS



Capítulo 6



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

6. Fracciones Racionales

6.1 Simplificación de fracciones aritméticas

Recordemos:

Para simplificar fracciones, escribimos el numerador y el denominador como un producto de factores y cancelamos los FACTORES COMUNES a ambos.

¡CUIDADO! No podemos simplificar términos. Sólo factores.

Una fracción aritmética está simplificada cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número UNO.

Ejemplos:

$$\frac{4}{8} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2}$$

$$\frac{48}{270} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot 5} = \frac{8}{45}$$

$$\frac{4 + \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4 \rightarrow \text{¡Error!}$$

$$\frac{4 + 3}{3} = \frac{7}{3} \rightarrow \text{¡Correcto!}$$

Para simplificar, cancelamos los FACTORES COMUNES al numerador y al denominador.

Cuando el denominador de una fracción es cero (0) se dice que la fracción no existe o no está definida.

6.2 Simplificación de fracciones racionales

Al igual que las fracciones aritméticas, decimos que una fracción algebraica está simplificada, cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número UNO, es decir, cuando el numerador y el denominador sean primos entre sí. Para simplificar fracciones algebraicas procedemos de la siguiente forma:


1. Factorizamos el numerador y el denominador.
2. Suprimimos los FACTORES COMUNES al numerador y denominador (¡CUIDADO! No podemos cancelar sumandos).

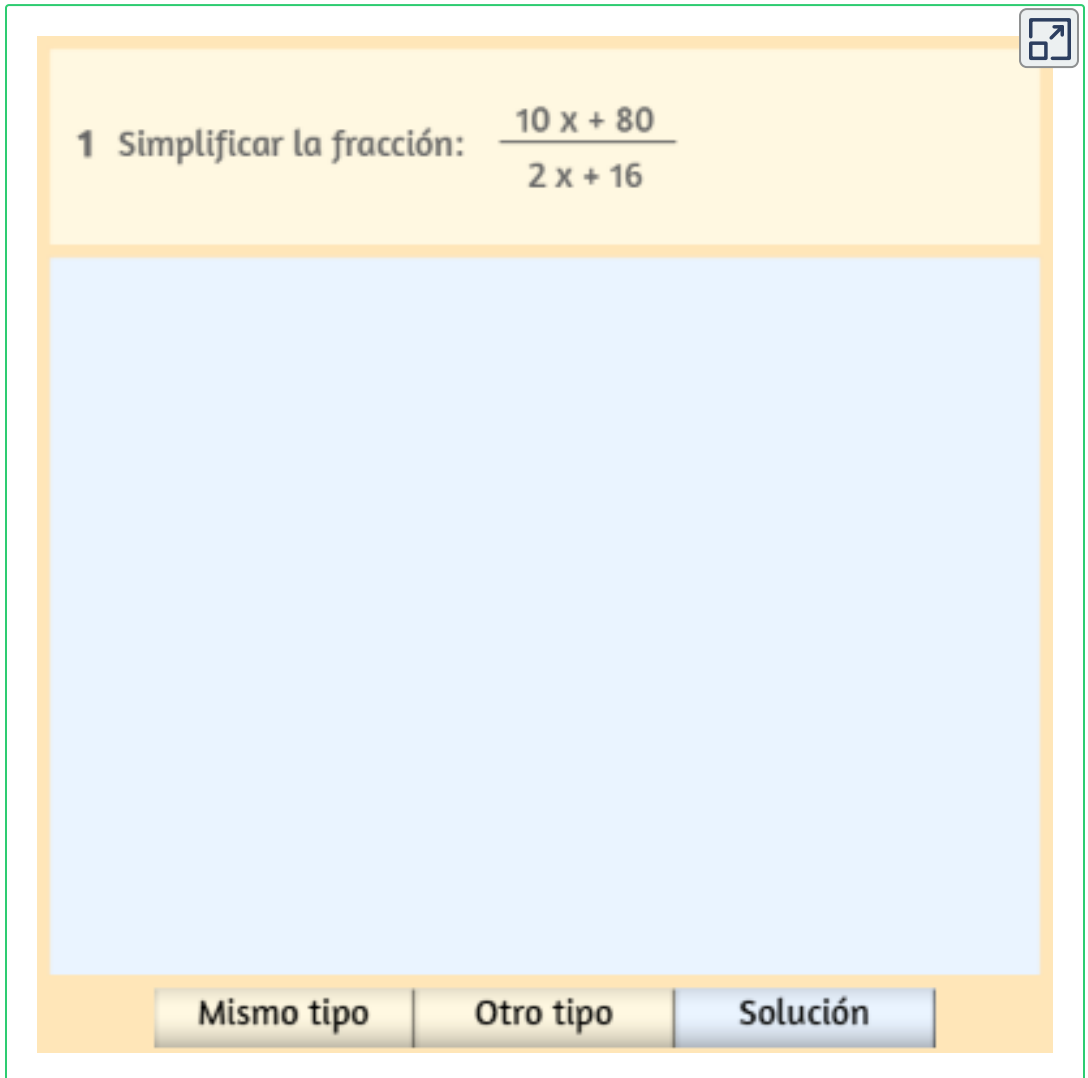
Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} &= \frac{(x - 2)^2}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{(x - 2) \cdot \cancel{(x - 2)}}{(x + 2) \cdot \cancel{(x - 2)}} \\ &= \frac{(x - 2)}{(x + 2)} \rightarrow \text{Suprimiendo factores comunes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{x^2 - 5x - 6}{36 - x^2} &= \frac{(x - 6) \cdot (x + 1)}{(6 - x) \cdot (6 + x)} = \frac{\cancel{-(6 - x)} \cdot (x + 1)}{\cancel{(6 - x)} \cdot (x + 6)} \\ &= \frac{-(x + 1)}{(x + 6)} = -\frac{x + 1}{x + 6} \end{aligned}$$

En algunos casos, se requiere cambiar el orden de los términos de uno o varios factores, para el segundo ejemplo, se requiere cambiar el orden del factor $(x - 6)$, por eso se le antecedió con un signo menos $(-)$ al signo de agrupación y se cambió el orden de los términos dentro del signo de agrupación, quedando $-(6 - x)$.

 Ejercicio 1: En la siguiente escena simplifica en tu cuaderno la expresión racional dada, luego verifica haciendo clic en el botón “Solución”.



The screenshot shows a digital interface for a math exercise. At the top right, there is a small icon of a square with an arrow pointing outwards. Below this, the text reads "1 Simplificar la fracción:" followed by the fraction $\frac{10x + 80}{2x + 16}$. The fraction is displayed with a horizontal line separating the numerator and denominator. Below the text and fraction is a large, empty light blue rectangular area intended for the student to write their work. At the bottom of the interface, there are three buttons: "Mismo tipo", "Otro tipo", and "Solución". The "Solución" button is highlighted with a blue background, while the other two are grey.

Figura 6.1. Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

6.3 Suma y diferencia de fracciones racionales

Para sumar o restar fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. Hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2. Dividimos el m.c.m. encontrado entre el denominador de cada fracción y lo multiplicamos por el numerador respectivo.
3. Efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos el resultado, si es posible.


$$\begin{aligned}x + 3 + \frac{6}{x-5} &= \frac{x+3}{1} + \frac{6}{x-5} = \frac{(x+3) \cdot (x-5) + 6}{x-5} \\ &= \frac{x^2 + 3x - 5x - 15 + 6}{x-5} = \frac{x^2 - 2x - 9}{x-5}\end{aligned}$$

 Ejercicio 2: Simplifiquemos expresiones racionales de suma y diferencia.

Simplificar la expresión racional: $\frac{-7x^2 - 2x - 7}{x - 5} + \frac{5x - 7}{x^2 - 5x}$



Solución

 Ejercicio 3: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

$$1. \frac{x-7}{15} + \frac{x-9}{25} - \frac{x+3}{45}$$

$$2. \frac{a-2b}{2a} - \frac{a-5b}{4a} + \frac{a+7b}{8a}$$

$$3. \frac{2}{xy} - \frac{3y^2 - x^2}{xy^3} + \frac{xy + y^2}{x^2y^2}$$

$$4. \frac{x-3}{5x} + \frac{x^2-9}{10x^2} - \frac{8-x^3}{15x^3}$$

$$5. \frac{a}{x^2-4} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

$$6. \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(x+y)}$$

$$7. \frac{1}{2x-3y} - \frac{x+y}{4x^2-9y^2}$$

$$8. \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{2x-y} - \frac{3x}{4x^2-y^2}$$

$$9. \frac{2a}{2a+3b} + \frac{3b}{2a-3b} - \frac{8b^2}{4a^2-9b^2}$$

$$10. \frac{5x}{6(x^2-1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$11. \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$12. \frac{1+2a}{1-2a} - \frac{1-2a}{1+2a} - \frac{8a}{(1-2a)^2}$$

$$13. \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^3} - \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

$$14. \frac{x-a}{x+a} + \frac{a^2+3ax}{a^2-x^2} - \frac{x+a}{x-a}$$

$$15. \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x}$$

$$16. \frac{1}{2a+5b} + \frac{3a}{25b^2-4a^2} + \frac{1}{2a-5b}$$

6.4 Producto de fracciones racionales

Para multiplicar fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. Factorizamos en primer lugar todos los numeradores y los denominadores.
2. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
3. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

Recordemos, cuando multiplicamos fracciones se tiene que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \rightarrow \frac{\text{numeradores}}{\text{denominadores}}$$

Ejemplo:


$$\frac{4}{5} \cdot \frac{-3}{7} = \frac{4 \cdot (-3)}{5 \cdot 7} = \frac{-12}{35}$$

Multipliquemos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:

$$\frac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} \cdot \frac{4x + 8}{x^2 - 2x - 15}$$
$$= \frac{(x + 5) \cdot (x - 5)}{(3x + 5) \cdot (x + 2)} \cdot \frac{4 \cdot (x + 2)}{(x + 3) \cdot (x - 5)} \quad \text{Factorizamos las expresiones}$$

$$= \frac{(x + 5) \cdot \cancel{(x - 5)} \cdot 4 \cdot \cancel{(x + 2)}}{(3x + 5) \cdot \cancel{(x + 2)} \cdot (x + 3) \cdot \cancel{(x - 5)}} \quad \text{Simplificamos}$$


$$\text{por lo tanto } \frac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} \cdot \frac{4x + 8}{x^2 - 2x - 15} = \frac{4 \cdot (x + 5)}{(3x + 5) \cdot (x + 3)}$$

 Ejercicio 4: Simplifiquemos productos de expresiones racionales.

Simplificar la expresión racional: $\frac{x^2 + 2x}{x + 5} \cdot \frac{x + 5}{x^2 + 6x + 8}$



Solución

 Ejercicio 5: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

1. $\frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \cdot \frac{-4a^3bx^2}{3a^2bx}$

2. $\frac{21x^2y^3}{13ab^2} \cdot \frac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$

3. $\frac{2x^2y}{3yz} \cdot \frac{5z^2x}{7xy^2} \cdot \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$

4. $\frac{x - y}{x^2 + xy} \cdot \frac{x^2}{y^2 - xy}$

5. $\frac{14x^2 - 7x}{12x^3 + 24x^2} \cdot \frac{2x - 1}{x^2 + 2x}$

6. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 36}{x^4 - 81}$

7. $\frac{x^2 - 9}{x + 4} \cdot (2x - 6)$

8. $\frac{3a(a - 2b)^2}{2b^3} \cdot \frac{b(a + 2b)}{6a^2} \cdot \frac{12ab}{a^2 - 4b^2}$

9. $\frac{a^2 - 3a}{b^2 - 2b} \cdot \frac{ab^2 - 2ab}{a^2 - 9} \cdot \frac{a}{b(a + 3)}$

10. $\frac{2x^2 + 3x}{y^2 - 2y} \cdot \frac{xy^2 - 2xy}{4x^2 - 9} \cdot \frac{x}{2xy - 3y}$

6.5 División de fracciones racionales

Para dividir fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. En primer lugar, la segunda fracción se cambia por su inverso multiplicativo, convirtiendo la división en una multiplicación.
2. Se continúa con el mismo proceso de la multiplicación, factorizamos todos los numeradores y los denominadores.
3. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
4. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

Recordemos, cuando dividimos fracciones se tiene que:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \rightarrow \frac{\text{numeradores entre sí}}{\text{denominadores entre sí}}$$


↓
inverso
multiplicativo

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} \div \frac{-3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{-3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot (-3)} = \frac{28}{-15}$$

Dividamos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:


$$\begin{aligned} \frac{3x-15}{x+3} \div \frac{12x+18}{4x+12} &= \frac{3x-15}{x+3} \cdot \frac{4x+12}{12x+18} \\ &= \frac{3 \cdot (x-5)}{(x+3)} \cdot \frac{4 \cdot (x+3)}{6 \cdot (2x+3)} = \frac{12 \cdot (x-5) \cdot (x+3)}{6 \cdot (x+3) \cdot (2x+3)} = \frac{2 \cdot (x-5)}{2x+3} \end{aligned}$$

 Ejercicio 6: Simplifiquemos divisiones de expresiones racionales.

Simplificar la expresión racional: $\frac{x + 6}{x^2 + x - 6} : \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 2}$



Solución

 Ejercicio 7: Resuelve en tu cuaderno y practica simplificando expresiones racionales.

1. $\frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \div \frac{4a^3bx^2}{3a^2bx}$

2. $\frac{21x^2y^3}{13ab^2} \div \frac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$

3. $\frac{2x^2y}{3yz} \div \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$

4. $\frac{x - y}{x^2 + xy} \div \frac{x^2}{y^2 - xy}$

5. $\frac{14x^2 - 7x}{12x^3 + 24x^2} \div \frac{2x - 1}{x^2 + 2x}$

6. $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 36}{x^4 - 81}$


7. $\frac{x^2 - 9}{x + 4} \div (2x - 6)$

8. $\frac{3a(a - 2b)^2}{2b^3} \div \frac{12ab}{a^2 - 4b^2}$

9. $\frac{a^2 - 3a}{b^2 - 2b} \cdot \frac{ab^2 - 2ab}{a^2 - 9} \div \frac{a}{b(a + 3)}$

10. $\frac{2x^2 + 3x}{y^2 - 2y} \div \frac{x}{2xy - 3y}$

6.6 Practiquemos

 Ejercicio 8: Simplifica la siguiente expresión racional (sumas, restas, productos, cocientes, potencias), resuelve primero en tu cuaderno y luego verifica la solución.

Simplificar la expresión racional: $\frac{-3x + 2}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^2 + 6x + 8}$



Solución

BIBLIOGRAFÍA



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

- [1] Abreu L., José y Muñoz P.,Valentina (2004). *ProyectoDescartes.org - Telesecundaria*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos
- [2] Barbero Corral, Eduardo (2004). *ProyectoDescartes.org*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos
- [3] Barnett, Raymon A. (1989). *Álgebra y Geometría*. Bogotá: 2° Ed. Ediciones MC Graw-Hill. pág 384.
- [4] Rodríguez S, Benjamín y otros (1996). *Matemáticas con Tecnología Aplicada*. Bogotá: Ediciones Prentice Hall. pág 220.
- [5] Ruiz Gil, Consolación (2014). *proyectodescartes.org - EDAD*. Obtenido de: http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos
- [6] Uribe Calad, Julio A. (1989). *Elementos de Matemáticas*. Medellín: 2° Ed. Ediciones Bedout. pág 401.



