

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir los conceptos de población y muestra.
- Diferenciar los tres tipos de variables estadísticas.
- Hacer recuentos y gráficos.
- Calcular e interpretar las medidas estadísticas de centralización más importantes.
- Calcular las principales medidas de dispersión.
- Entender la importancia de la elección de la muestra para que sea representativa.
- Utilizar y representar variables bidimensionales.
- Calcular el centro de gravedad, la covarianza, el coeficiente de correlación y la recta de regresión en una distribución bidimensional.

1. Estadística descriptiva	pág. 4
Población y muestra	
Variables estadísticas	
Gráficos variables cualitativas	
Gráficos variables cuantitativas discretas	
Gráficos variables cuantitativas continuas	
2. Medidas de centralización	pág. 7
Media, moda y mediana	
Evolución de la media	
Evolución de la mediana	
Media y mediana comparadas	
Medidas de posición	
3. Medidas de dispersión	pág. 10
Desviación típica y recorrido	
Cálculo de las medidas de dispersión	
La media y la desviación típica	
4. Representatividad de las muestras...pág.	12
Muestreo estratificado	
Muestreo aleatorio. Sesgo	
5. Estadística bidimensional	pág. 14
Distribuciones bidimensionales	
Correlación lineal	
Recta de regresión	

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Antes de empezar

Recuerda

El curso pasado ya estudiaste estadística, y en numerosas ocasiones has hecho estadística aunque no te hayas dado cuentas de ello. Veamos algunos ejemplos.

Nota media

A lo largo de un curso escolar tendrás muchas ocasiones donde calcular este valor. Si una nota depende de dos exámenes y en uno tienes un 4, intentarás sacar al menos un 6 en la otra.

Al final del instituto, las medias del bachillerato y de la prueba selectividad. Comparaciones con la media local o nacional. Las medias de corte para determinadas carreras

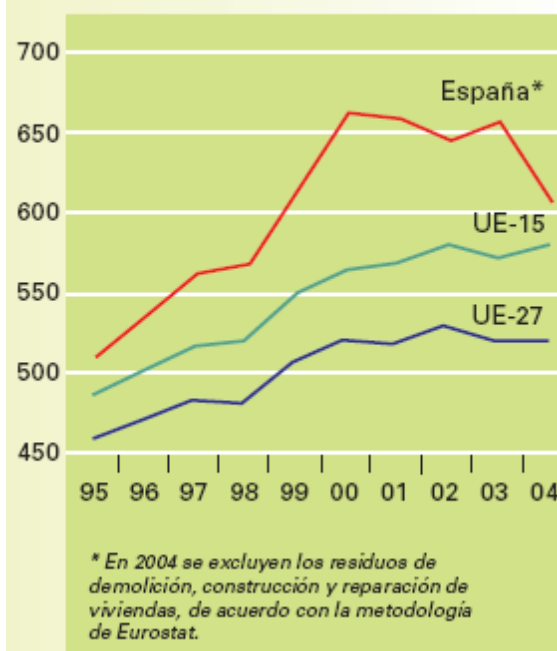
Fútbol

El jugador que más goles ha marcado, el portero que menos ha encajado. La clasificación de la liga. La mejor mitad de liga. Los puestos de competiciones europeas, los de descenso, nº de veces internacional, nº de fases finales, minutos jugados, tiros a puerta, faltas.

Consumo medio de agua de los hogares. 2004 (litros/hab./día)



Residuos urbanos (kg/hab./año)



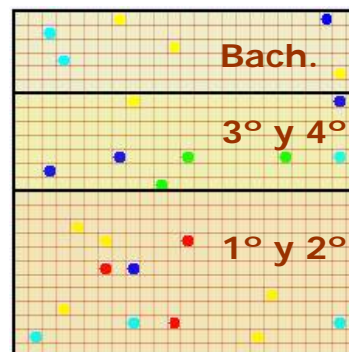
1. Estadística descriptiva

Población y muestra.

Población es el conjunto de individuos, con alguna característica común, sobre el que se hace un estudio estadístico.

La **muestra** es un subconjunto de la población, seleccionada de modo que ponga de manifiesto las características de la misma, de ahí que la propiedad más importante de las muestras es su representatividad.

El proceso seguido en la extracción de la muestra se llama **muestreo**



Si cada cuadrado representa a cada uno de los alumnos de un instituto ficticio y se les pregunta sobre su color favorito, el total de los cuadros es la población, 625 alumnos, y los 26 encuestados constituyen la muestra.

Variables estadísticas

La característica a estudiar en una población es la **variable estadística**.

Las variables estadísticas pueden ser esencialmente de dos tipos **cualitativas y cuantitativas**.

Las variables cualitativas son las que no aparecen en forma numérica sino como una categoría o atributo.

Las variables cuantitativas son las que pueden expresarse numéricamente, y a su vez pueden ser:

- ✓ Cuantitativas discretas, si sólo pueden tomar un número finito de valores.
- ✓ Cuantitativas continuas cuando pueden tomar cualquier valor de un intervalo.

- El color de los ojos, el queso preferido, el continente donde vives, son **variables estadísticas cualitativas**.
- El nº de ordenadores en casa, o de televisores y el nº de habitantes por vivienda, por ejemplo, son variables estadísticas **cuantitativas discretas**.
- El peso, la altura, la velocidad, la densidad, la presión, son **variables estadísticas cuantitativas continuas**.

Gráficos en variables cualitativas.

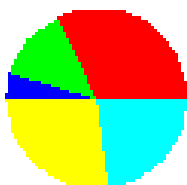
El **diagrama de sectores** es el más indicado para este tipo de información. El porcentaje de datos de cada valor en una muestra se corresponde con el mismo porcentaje de sector de un círculo. Así por ejemplo, si los datos son A, A, A, A, A, B, B, B, C y C. Las frecuencias son (A,5), (B,3) y (C,2), los porcentajes serán (A,50%), (B,30%) y (C,20%) los que corresponde a un gráfico de sectores con (A, 180°), (B,108°) y (C, 72°).

Los datos:

xi fi
 ● 7
 ● 3
 ● 1
 ● 6
 ● 5

Total 22

Tienen este diagrama de sectores



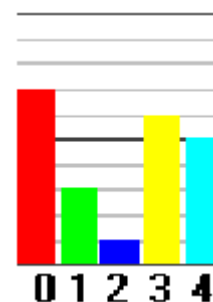
$$\frac{\text{frecuencia}}{\text{nº total de datos}} = \frac{\text{grados del sector}}{360}$$

Gráficos en variables discretas.

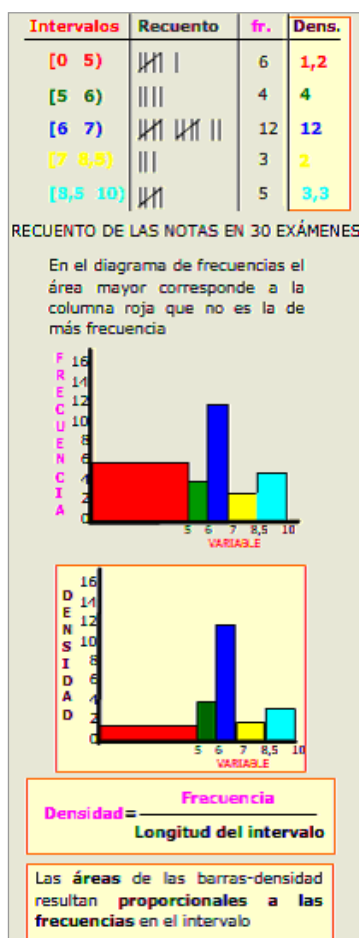
Diagrama de barras. Bastará que observes un ejemplo.

A los datos,

1 2 4 4 3
 3 3 3 0 0
 0 4 0 1 0
 0 3 4 1 3
 0 4



les corresponde el gráfico de la derecha.

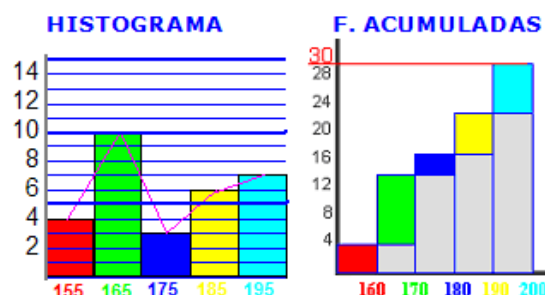


Gráficos en variables continuas.

Histograma. Los datos se representan por rectángulos cuya base es la amplitud del intervalo representado y con la altura que nos indica la frecuencia absoluta, si todos los intervalos son de la misma amplitud. Si no es el caso, las alturas se calculan de manera que las áreas sean proporcionales a las frecuencias absolutas. A la izquierda tienes un ejemplo hecho.

Polígono de frecuencias. Uniremos los centros de la parte superior de todos los rectángulos para obtenerlo. También se suele dibujar el histograma de las **frecuencias acumuladas**, en cada dato se acumula la frecuencia de los datos anteriores.

[150, 160]→4
 [160, 170]→10
 [170, 180]→3
 [180, 190]→6
 [190, 200]→7



EJERCICIOS resueltos

1. Clasifica los siguientes ejemplos de variables estadísticas: Longitud de un camión, Carga máxima, nº de ruedas, nº de ejes, tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo de tapicería, nº de puertas, altura máxima.

Cualitativas: Tipo de camión, marcas de neumáticos, tipo tapicería

C. discretas: Nº de ruedas, nº de ejes, nº de puertas

C. continuas: Longitud de un camión, Carga máxima y altura máxima.

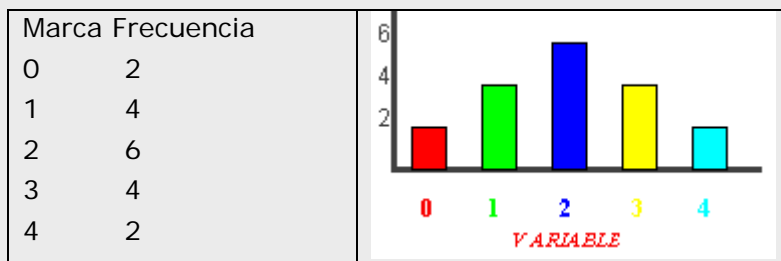
2. Calcula los grados que corresponden a cada valor en un gráfico de sectores hecho a partir de los datos: R, R, V, V, V, V, V, A, A y A

Hacemos el recuento $R \rightarrow 2$, $V \rightarrow 5$ y $A \rightarrow 3$ Y calculamos

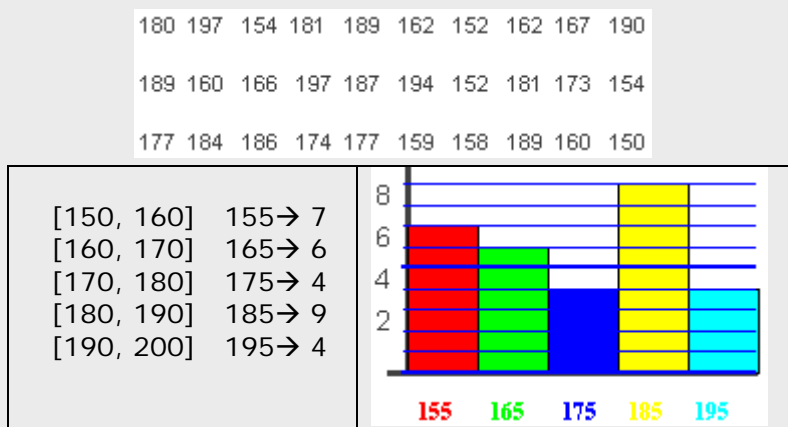
$$\frac{2}{10} = \frac{\text{Grados R}}{360}, \quad \frac{5}{10} = \frac{\text{Grados V}}{360} \quad \text{y} \quad \frac{3}{10} = \frac{\text{Grados A}}{360} \quad \text{y obtenemos}$$

Grados R = 72, Grados V = 180 y Grados A = 108

3. Agrupa los datos siguientes y haz un diagrama de barras adecuado. Datos = { 0 1 0 2 3 4 1 2 2 1 2 2 3 4 3 2 1 3 }



4. Clasifica los datos en intervalos y dibuja un histograma adecuado.



2. Medidas de centralización

Media, mediana y moda.

Un conjunto N de observaciones, N números, puede que por sí solo no nos diga nada. En cambio, si además nos dicen que están situados alrededor de uno o varios valores centrales ya tenemos una referencia que sintetiza la información.

Media. La suma de los N números dividida entre N. Por ejemplo, para 3, 4 y 5, $(3+4+5)/3 = 12/3 = 4$;

para 1, 1, 4, 8, 8 y 8, $(1+1+4+8+8+8)/6=5$.

$$\text{Media} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

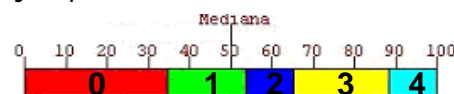
Moda. Si una observación se repite más que cualquier otra, será considerada la moda de esos datos. Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos $6 \rightarrow 4$, $7 \rightarrow 2$, $8 \rightarrow 2$ y $9 \rightarrow 1$ vemos claramente que el valor 6 aparece más que ningún otro. En este caso la moda es 6.

En el caso de variable continua, consideraremos por moda a la marca del intervalo de mayor frecuencia, cuando esto ocurra. También puede ocurrir que haya dos modas o que no haya ninguna que destaque.

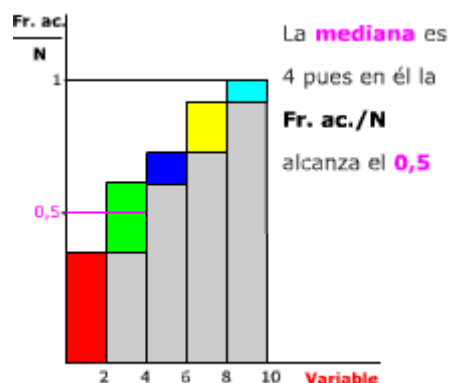
Mediana. El número tal que la mitad de las observaciones son mayores que él y la otra mitad menores.

En general, para pocos datos lo mejor es proceder según el ejemplo de la izquierda, según sea una cantidad para o impar.

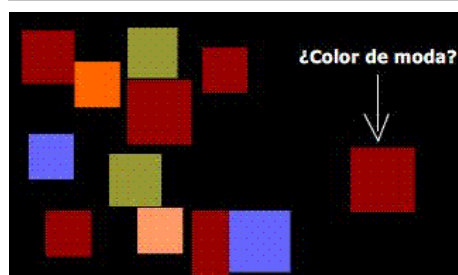
Para cantidades mayores, habrá que agrupar los datos primero en una tabla. Y determinar segmentos de longitud proporcional a su frecuencia, disponerlos de forma lineal y marcar el centro como muestra el siguiente ejemplo.



En este otro gráfico vemos indicada la mediana en un diagrama de Frecuencias relativas acumuladas:



1ª EVALUACIÓN	
5	NOTA MEDIA 5,5
6	
4	
1	
9	
7	
6	
6	



Por ejemplo, si tenemos las observaciones 6,7,8,6,7,6,8,6,9 y agrupamos los datos vemos claramente que el valor 6 aparece más que ningún otro. En este caso la **moda** es 6.

$x_i \rightarrow f_i$
$6 \rightarrow 4$
$7 \rightarrow 2$
$8 \rightarrow 2$
$9 \rightarrow 1$

Si ordenamos los datos, y dado que el nº de datos es impar justo el 7 queda en el centro.

6 6 6 6 7 7 8 8 1

Si los datos fueran 6,7,8,6,7,6,8,6,5 una vez ordenados, y como hay una cantidad par de datos, dos de ellos ocuparían el centro:

5 6 6 6 6 7 7 8 8 1

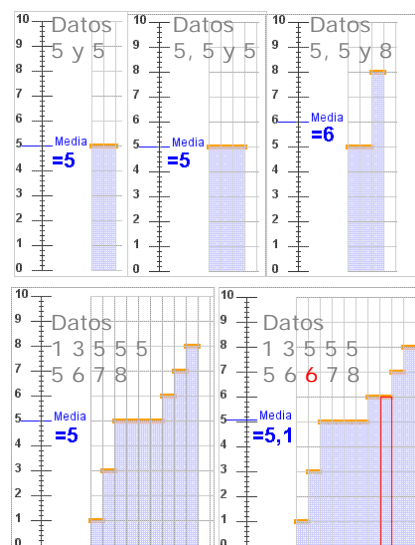
y la mediana será $(6+7)/2 = 6,5$

Media. Evolución de esta al añadir y/o cambiar un dato.

1 Para los datos 5 y 5 la media es 5. Si añadimos un 5 se mantiene en 5. Si añadimos un 8 la media pasa a ser 6. (Figura derecha).

2 Si tenemos 9 datos con media 5, necesitamos añadir un 6 para que la media pase a ser 5,1. Si tenemos 19 datos con media 5, necesitamos un dato de valor 7 para que la media suba a 5,1. (Figura derecha).

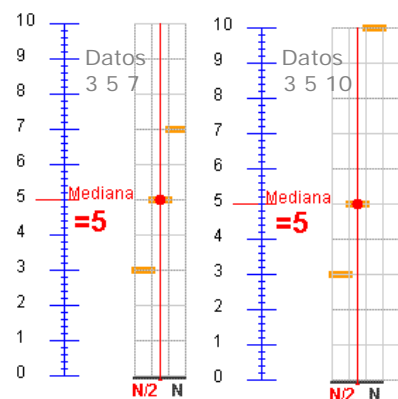
3 Para un conjunto de datos con media 5, si añadimos otro con media 5, por ejemplo 6 y 4, el nuevo conjunto conserva la media.



Mediana. Evolución de esta al añadir y/o cambiar un dato.

1 La mediana, para los datos 2, 3 y 4 es $Me=3$. Si cambiamos el 4 por 5 o por 6 o por cualquier otro valor mayor sigue siendo $Me = 3$.

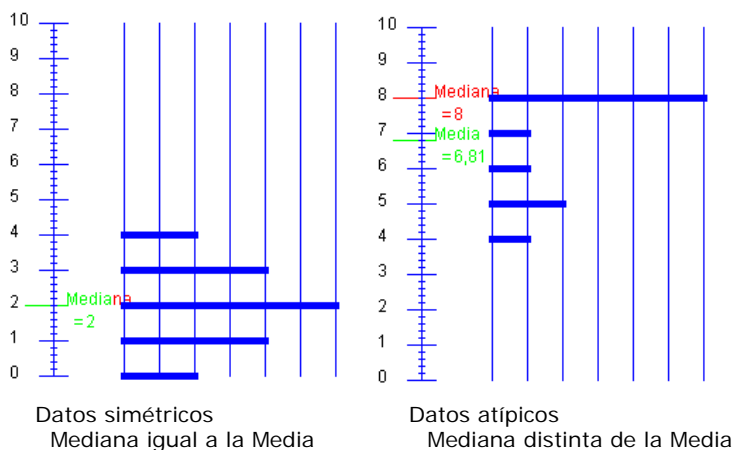
2 En cambio, si añadimos otro dato y tenemos 2, 3, 4 y 4, por ejemplo, la $Me = 3,5$. Y si ahora añadimos un quinto valor, un 4 o un 5 o un 6 o cualquier otro mayor que 4, la mediana en 2,3, 4, 4 y ?? pasa a ser 4. Da igual el valor ?? es 5, 10 o 25.



Para ver la mediana se traza una vertical desde el eje horizontal en $N/2$

Media y mediana comparadas

Para los datos 4 y 6 la media y la mediana coinciden en 5. Añadir un 8 o un 11 da lo mismo para la mediana, que pasa a ser en ambos casos 6. Sin embargo la media con un 8 pasa a ser 6 y con un 11 pasa a ser 7. Los valores 8 y 11 se consideran observaciones atípicas, están distanciados del resto de valores, tiran de la media y no afectan a la mediana. Si los datos estuvieran repartidos simétricamente respecto a un valor, ese valor sería a la vez la media y la mediana. En cambio, si los valores a un lado de la mediana están más alejados de ella que los del otro lado, la media se desplaza hacia esos valores alejados que tiran de ella. Hay una asimetría.



Datos simétricos
Mediana igual a la Media

Datos atípicos
Mediana distinta de la Media

Por ejemplo, si tenemos las observaciones

1. 20, 24 y 28.

$Me = 24$

2. Y para 20, 24, 28 y 30

$Me = (24+28)/2 = 26$

3. Para 20, 24, 28 y 100

$Me = (24+28)/2 = 26$

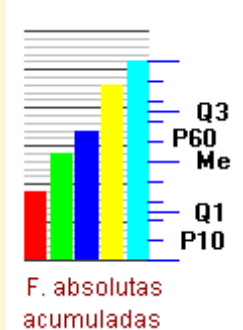
En cambio la media no se comporta de la misma forma para los mismos datos

1 $\bar{X} = 24$

2 $\bar{X} = 25,5$

3 $\bar{X} = 43$

También podemos hacer un diagrama de frecuencias acumuladas y dividir en partes iguales como muestra el gráfico.

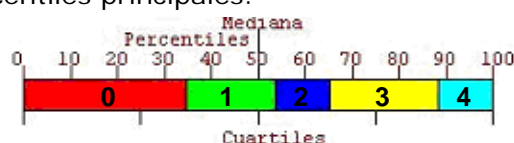


Medidas de posición: cuartiles y percentiles

Dado un conjunto de datos numéricos además de la mediana podemos considerar otras medidas de posición

- Si nos fijamos en el primer valor que supera al 25% o al 75%, estamos hablando del **primer y tercer cuartil, Q_1 y Q_3** .
- Para otros valores como el 10%, o el 80% hablamos de **percentiles, P_{10} y P_{80}** .

Ejemplo. Para la variable de valores 0, 1, 2, 3, 4, y frecuencias $0 \rightarrow 9$, $1 \rightarrow 5$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 3$, dibujamos barras de longitud proporcional a las frecuencias y dividimos el total en partes iguales: en dos partes para la mediana, cuatro para los cuartiles y 10 para los percentiles principales.



EJERCICIOS resueltos

5. Calcula la media en cada caso:

- a) 4, 6, 8
b) 4, 6, 8, 6
c) 100, 120, 180, 200

- Soluciones: a) $(4+6+8)/3 = 6$
b) $(4+6+8+6)/4 = 24/4 = 6$
c) $(100+120+180+200)/4 = 150$

6. Calcula la media en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

Marca	Fr
100	2
200	4
300	3
400	2

a) $\bar{X} = \frac{10 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 40 \cdot 2}{11} = 24,54$

b) $\bar{X} = \frac{100 \cdot 2 + 200 \cdot 4 + 300 \cdot 3 + 400 \cdot 2}{11} = 245,45$

7. Determina la moda y la mediana

- a) 5,6,6 c) 1,2,3,4,2
b) 1,1,2,3 d) 3,2,3,2,2,2

- Soluciones: a) $Me=6$, $Mo=6$ c) $Me=2$ $Mo=2$
b) $Me=1,5$ $Mo=1$ d) $Me=2$ $Mo=2$

8. Calcula la moda y la mediana en cada caso:

a

Marca	Fr
10	2
20	4
30	3
40	2

b

Marca	Fr
100	2
200	3
300	4
400	1

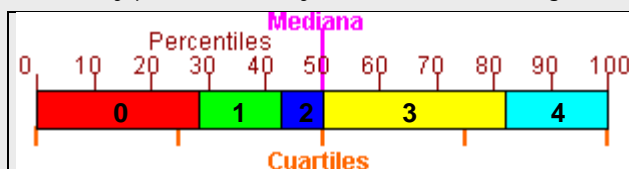
Soluciones:

- a) $Me=20$ $Mo=4$
b) $Me=250$ $Mo=300$

9. Calcula la mediana, cuartiles primer y 3º, y el percentil 30 60 y 90 de los datos.

4 1 3 3 2 3 1 3 3 4 0 0 0 4 4 3 0 3 0 3 2 1 0 0 4 3 0 1

Hacemos el recuento: $0 \rightarrow 8$, $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 9$ y $4 \rightarrow 5$ y barras de longitud proporcional a la frecuencia para cada valor. Además partimos la longitud total de la barra en 2, 4 y 10 trozos para obtener la mediana, cuartiles y percentiles, tal y como muestra la imagen.



Vemos que la mediana está entre el azul y el amarillo, $(3+2)/2 = 2,5$, Q_1 entre rojo y verde, $Q_1=0$, $Q_3=3$, $p_{30}=1$, $P_{60}=3$ y $P_{90}=4$

3. Medidas de dispersión.

Varianza, Desviación típica y rango

“La estadística es una ciencia según la cual, si yo me como un pollo y tú no te comes ninguno, nos hemos comido como promedio medio pollo cada uno”.

La estadística indicará que todos comen lo mismo cuando las medidas de dispersión sean todas nulas.

Rango. El intervalo definido por el menor y el mayor dato. También se llama rango a la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.

Varianza. La media aritmética de los cuadrados de las diferencias de los datos con la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2}{n} \text{ que equivale a } \sigma^2 = \frac{\sum f_i X_i^2}{n} - (\bar{X})^2$$

Desviación típica. La raíz cuadrada positiva de la varianza.

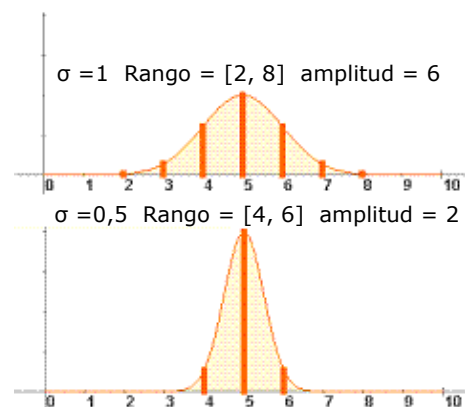
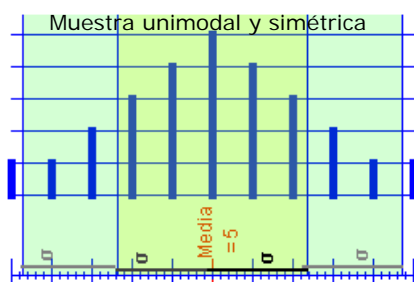
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad \text{o} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2}$$

Medir la dispersión

Ese es el objetivo de estas medidas. Por ejemplo, los datos A= {20, 20}, B={15, 20, 20, 25} tienen la misma media, moda y mediana. En todos los casos igual a 20. Sin embargo, puedes comprobar que en ninguna de las tres medidas de dispersión definidas arriba coinciden.

Media y desviación típica.

Para muestras unimodales (una sola moda) y casi simétricas, alrededor de la media podemos considerar un intervalo que contenga la mayoría de los datos. Por ejemplo, para una muestra con media 100 y desviación típica 10, la mayor parte de los datos estarán entre 90 y 110, aproximadamente el 68% ; entre 80 y 120 estará el 95% aproximadamente. Y casi todos entre 70 y 130. Hay una forma de distribución de datos llamada **normal** que cumple con lo anterior, y de una manera u otra, de todas las poblaciones grandes se pueden extraer datos que se ajustan a ella. En cursos superiores verás la importancia de estas distribuciones.



En ambos gráficos la media, mediana y moda valen 5

En la práctica se suele usar la fórmula reducida para el cálculo de la desviación típica.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i X_i^2}{n} - \bar{X}^2}$$

Así, para

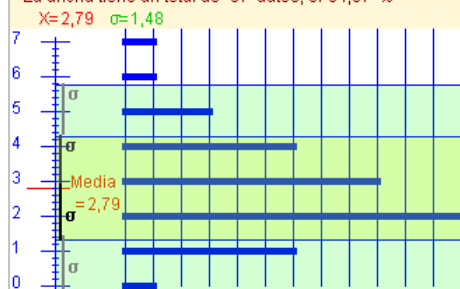
Marca	Fr
4	3
5	3
6	2

Se tiene que la media

$$\bar{X} = 4,85 \text{ y}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2}{8} - 4,85^2}$$

Datos= 39
Fanja interior [2,79-1,48 , 2,79+1,48]= [1,3 , 4,28]
con un total de 27 datos, lo que supone un 69,23 %.
La anchura tiene un total de 37 datos, el 94,87 %



EJERCICIOS resueltos

10. Calcula la media y la desviación típica en

- a) 200, 250
- b) 175, 275
- c) 250, 250

$$a) \bar{X} = \frac{250 + 200}{2} = 225 \quad \sigma = \sqrt{\frac{(250 - 225)^2 + (200 - 225)^2}{2}} = \sqrt{\frac{25^2 + 25^2}{2}} = 25$$

$$b) \bar{X} = \frac{175 + 275}{2} = 225 \quad \sigma = \sqrt{\frac{(175 - 225)^2 + (275 - 225)^2}{2}} = \sqrt{\frac{50^2 + 50^2}{2}} = 50$$

$$c) \bar{X} = \frac{250 + 250}{2} = 250 \quad \sigma = \sqrt{\frac{(250 - 250)^2 + (250 - 250)^2}{2}} = \sqrt{\frac{0^2 + 0^2}{2}} = 25$$

11. Calcula la media y la desviación típica en:

- a) 7, 5, 3, 2, 4, 5
- b) 20, 25, 20, 22, 21

$$a) \bar{X} = \frac{7 + 5 + 3 + 2 + 4 + 5}{6} = \frac{26}{6} = 4,33$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{7^2 + 5^2 + 3^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2}{6} - 4,33^2} = \sqrt{\frac{128}{6} - 18,75} = 1,59$$

$$b) \bar{X} = \frac{20 + 25 + 20 + 22 + 21}{5} = \frac{108}{5} = 21,6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{20^2 + 25^2 + 20^2 + 22^2 + 21^2}{5} - 21,6^2} = \sqrt{\frac{2350}{5} - 466,56} = 1,85$$

(Nota.- Observa la fórmula utilizada para la desviación)

12. Organiza los datos siguientes en intervalos de 10 cm desde 150 a 200. Amplia la tabla con dos columnas, una para el producto de las marcas con las frecuencias y otra para el producto de las frecuencias con los cuadrados de las diferencias con la media. Calcula la media y la desviación típica.

174	158	150	185	186	178	166	185	199
183	175	173	175	164	173	178	179	164
176	159	190	173	189	163	156	169	

	xi	fi	xi·fi	fi·(xi- \bar{X}) ²
[150,160)	155	5	775	1733,65
[160,170)	165	5	825	371,58
[170,180)	175	10	1750	19,02
[180,190)	185	7	1295	906,42
[190,200)	195	2	390	914,14
Total		29	5035	3944,82

Con los datos de la tabla es mas fácil, y se tiene:

Media y Desviación típica

$$\bar{X} = \frac{5035}{29} = 173,62 \quad \sigma = \sqrt{\frac{3944,82}{29}} = 11,66$$

4. Representatividad

Representatividad. Muestreo estratificado.

REPRESENTATIVIDAD. Una muestra es representativa de la población cuando en ella podemos encontrar las mismas proporciones de las características de estudio que en el conjunto de la población. El proceso de elegir una muestra, a qué individuos elegimos como representantes de la población, es el punto importante y de ello va a depender que el estudio sea útil o no (representativo o no).

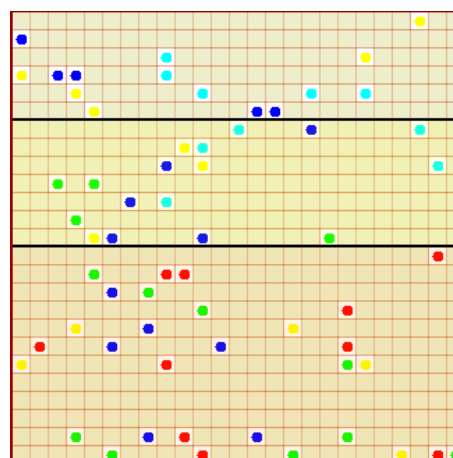
Elegir bien la muestra no es sinónimo de representatividad, pero elegirla mal casi si es sinónimo de no representatividad.

Por ejemplo, si queremos estudiar el poder adquisitivo de una población, y solo elegimos a individuos de una determinada zona, o principalmente de una determinada zona, la muestra con toda seguridad no será representativa. La muestra se ha de elegir tomando muestras de individuos proporcionales a la población de cada zona. Si hay tres zonas con 12.000, 18.000 y 20.000 habitantes, la muestra deberá tener un 24% de la primera zona, 36% de la segunda y 40% de la última.

Este tipo de **muestreo**, escogiendo un reparto proporcional a los estratos, se llama **estratificado**.

Ejemplo

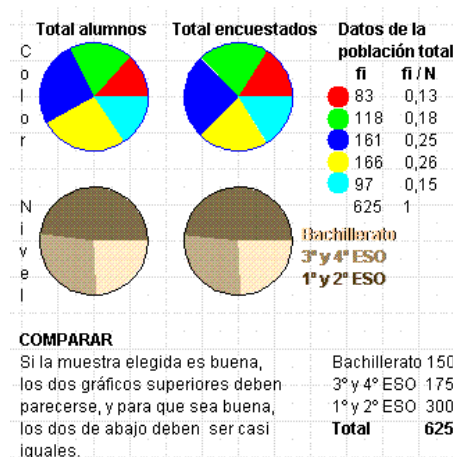
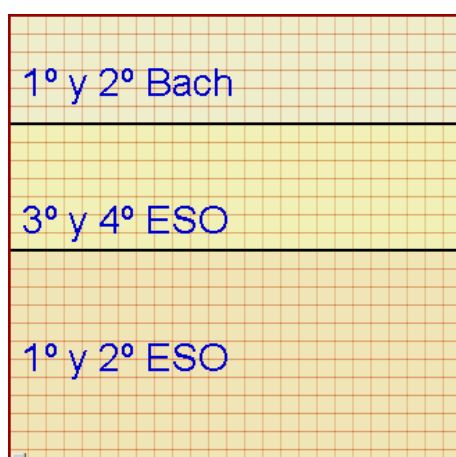
En la imagen tienes 625 cuadros que representan a los alumnos de un instituto ficticio



fi	fi / N	→ DATOS DE LA MUESTRA
10	0,16	●
13	0,2	●
16	0,25	●
13	0,2	●
10	0,16	●
62	1	

MUESTREO
Ten en cuenta los alumnos que hay en cada nivel:
1º y 2º Bachillerato 150 alumnos
3º y 4º ESO 175 alumnos
1º y 2º ESO 300 alumnos

Bachillerato	15
2º ciclo ESO	17
1º ciclo ESO	30
Total	62
Porcentaje	7,52 %



A la derecha vemos la muestra estratificada que se ha elegido y el resultado de la encuesta. Los últimos diagramas de sectores comparan la realidad con los resultados de la encuesta.

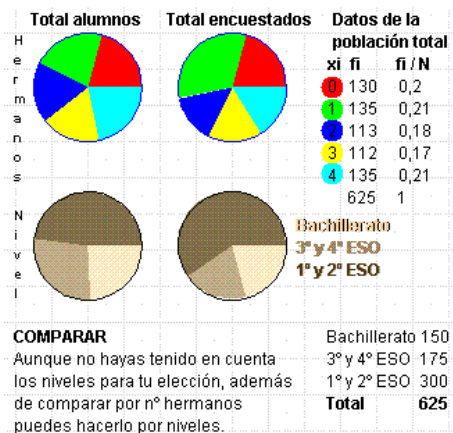
Sesgo. Muestreo aleatorio

Sesgo. Se dice que la muestra está sesgada cuando hay diferencia entre los datos de la muestra y los datos de toda la población.

Ejemplo: Llamadas telefónicas voluntarias. Estas encuestas tienen varias fuentes de sesgo. Hay familias que no tienen teléfono, el coste de la llamada no todo el mundo está dispuesto a asumirlo. Pero sobre todo, el factor de respuesta voluntaria, los encuestados se auto-seleccionan. Suelen contestar aquellos con una fuerte opinión negativa sobre el tema. El enojo les anima a participar.

Muestreo aleatorio total. A diferencia del estratificado, que guarda las proporciones, esta forma de elegir la muestra considera a toda la población y elige individuos aleatoriamente. Se considera una buena forma de proceder.

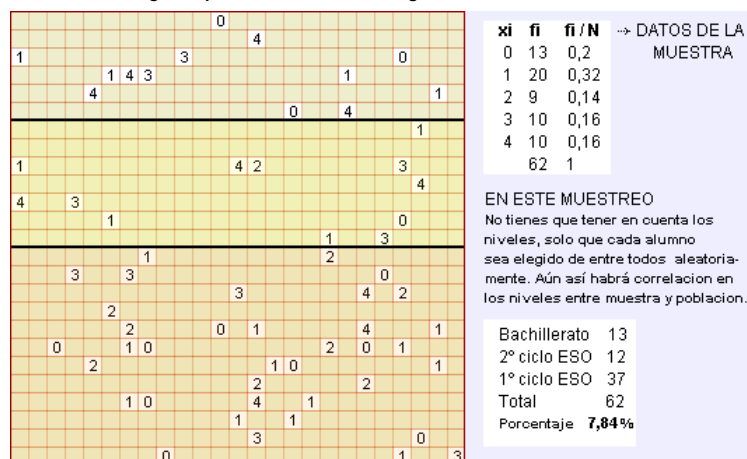
En el siguiente ejemplo se ha escogido con ordenador una muestra aleatoria total entre los 625 alumnos de un instituto, este muestreo puede salir estratificado o no, en el ejemplo no salió muy bien estratificado.



x_i	f_i	f_i / N	→ DATOS DE LA MUESTRA
0	13	0,2	
1	20	0,32	
2	9	0,14	
3	10	0,16	
4	10	0,16	
	62	1	

EN ESTE MUESTREO
No tienes que tener en cuenta los niveles, solo que cada alumno sea elegido de entre todos aleatoriamente. Aún así habrá correlación en los niveles entre muestra y población.

Bachillerato	13
2º ciclo ESO	12
1º ciclo ESO	37
Total	62
Porcentaje	7,84%



EJERCICIOS resueltos

13. Una gran empresa tiene trabajadores en cuatro áreas. Operarios, Representantes, administración y dirección. Las condiciones de trabajo son bastantes diferentes en cada área, por lo que el grado de satisfacción no es igual en cada una de ellas. Para averiguarlo, si hay 1000, 500, 300 y 200 trabajadores en las áreas de operarios, representantes, administrativos y directivos, ¿cuántos hay que seleccionar de cada área para una muestra de tamaño?
- 200
 - 100
 - 300
- a) De un total de 2000 empleados, los porcentajes para operarios, repartidores, administrativos y directivos son del 50%, 25%, 15% y 10%. Lo cual hace que la muestra tome 100 operarios, 50 repartidores, 30 administrativos y 20 directivos.
- 50, 25, 15 y 10.
 - 150, 75, 45 y 30

5. Estadística bidimensional

Distribuciones bidimensionales

Una distribución bidimensional es aquella en la que intervienen dos variables X e Y que pueden estar o no relacionadas.

Podemos representar conjuntamente las dos variables mediante un **diagrama de dispersión** o **nube de puntos**, simplemente haciendo corresponder un punto del plano a cada par (x_i, y_i) .

Cuando hay muchos datos y los pares de valores se repiten recurrimos a una tabla de contingencia, como la de la derecha. En este caso la representación gráfica se hace mediante un gráfico tridimensional llamado prismograma, o más a menudo poniendo puntos de tamaño proporcional a las frecuencias.

Correlación lineal

El objetivo de un estudio bidimensional es observar si existe algún tipo de relación entre las dos variables. Esta relación, que llamaremos **correlación** se puede apreciar viendo si la nube de puntos se acerca o no a la gráfica de una función, en nuestro caso a una recta, por eso hablaremos de **correlación lineal**.

Cuanto más se aproxime la nube de puntos a una recta más fuerte será la correlación lineal, además será positiva o directa si la recta es creciente (si crece X decrece Y) y negativa o inversa en caso contrario (si crece X decrece Y o viceversa).

Para cuantificar esta relación emplearemos un parámetro **r**, el **coeficiente de correlación lineal**, que toma valores entre **-1** y **1**. Cuanto más se acerque r a valer 1 o -1 más fuerte será la correlación.

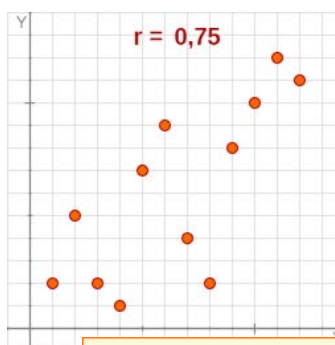
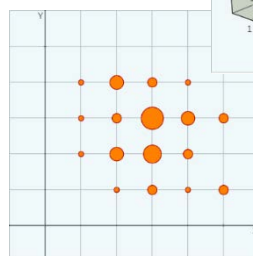
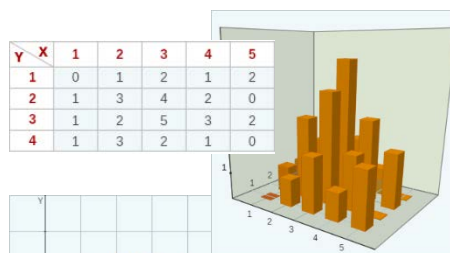
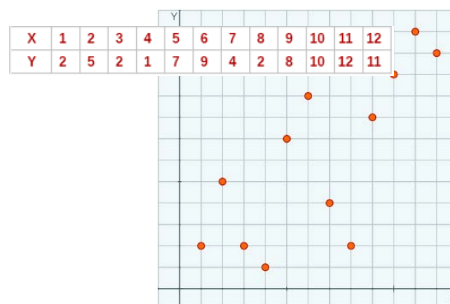
- Si **r=1** o **r=-1**, hay dependencia funcional, los puntos están sobre una recta.
- Si **0,5 < r < 1** consideraremos que la correlación es fuerte y directa o fuerte e inversa si **-1 < r < -0,5**.
- Si **r=0** o muy próximo a 0, no hay correlación lineal entre las dos variables.

Disponemos los datos en columnas y calculamos la media y la desviación típica de las dos distribuciones X e Y. Para calcular **r** tenemos que calcular antes otro parámetro, la **covarianza**, definida así:

$$\sigma_{XY} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Y el **coeficiente de correlación lineal**:

$$r = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (-1 \leq r \leq 1)$$



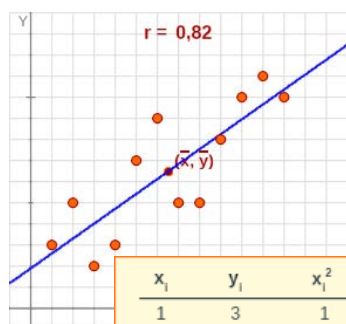
x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	2	1	4	2
2	5	4	25	10
3	2	9	4	6
4	1	16	1	4
5	7	25	49	35
6	9	36	81	54
7	4	49	16	28
8	2	64	4	16
9	8	81	64	72
10	10	100	100	100
11	12	121	144	132
12	11	144	121	132
78	73	650	613	591

$$\bar{x} = \frac{78}{12} = 6,5 \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{650}{12} - 6,5^2} = 3,45$$

$$\bar{y} = \frac{73}{12} = 6,08 \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{613}{12} - 6,08^2} = 3,75$$

$$\sigma_{xy} = \frac{591}{12} - 6,5 \cdot 6,08 = 9,71$$

$$r = \frac{9,71}{3,45 \cdot 3,75} = 0,75$$



x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	3	1	3
2	5	4	10
3	2	9	6
4	3	16	12
5	7	25	35
6	9	36	54
7	5	49	35
8	5	64	40
9	8	81	72
10	10	100	100
11	11	121	121
12	10	144	120
78	78	650	608

$\bar{x} = 6,5$ $\bar{y} = 6,5$ $\sigma_x = 3,45$ $\sigma_{xy} = 8,42$

Recta de regresión de Y sobre X

$$y = 6,5 + \frac{8,42}{3,45^2} (x - 6,5)$$

$$y = 0,7x + 1,9$$

Rectas de regresión

Cuando se aprecia un cierto grado de correlación entre las dos variables de una distribución bidimensional, se busca la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos.

La recta de regresión de Y sobre X pasa por el punto (\bar{x}, \bar{y}) , centro de gravedad de la nube de puntos. Su ecuación es:

$$y = \bar{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$

La pendiente $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ es el **coeficiente de regresión**.

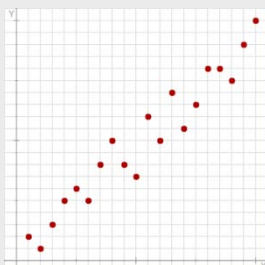
Esta recta de regresión sirve para estimar el valor que tomará la variable Y para un determinado valor de X. El valor de esta estimación será tanto más fiable cuanto:

- Más se acerque el coeficiente de correlación a 1 o a -1.
- El valor quede dentro del rango de valores de X y más cerca esté del centro de gravedad.

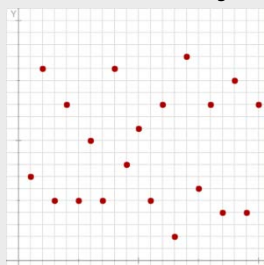
Si se pretende estimar valores de X a partir de los de Y deberemos emplear otra recta análoga, la recta de regresión de X sobre Y.

EJERCICIOS resueltos

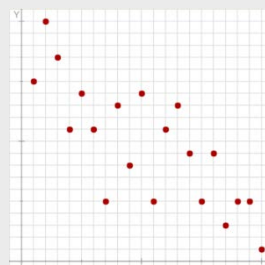
14. A la vista de la nube de puntos indica si crees que la correlación es muy fuerte, fuerte (directa o inversa), débil o muy débil.



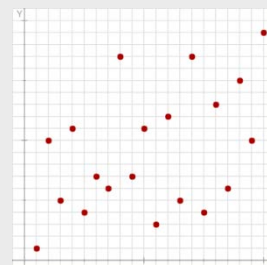
Muy fuerte y directa



Muy débil

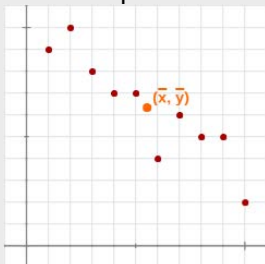


Fuerte e inversa



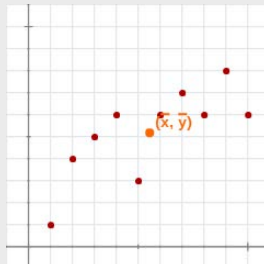
Débil

15. Una de la cuatro ecuaciones corresponde a la recta de regresión de Y sobre X de la nube de puntos. Indica la correcta.



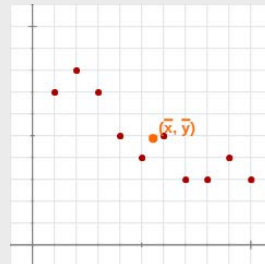
- a) $y = 0,7x + 2,4$
b) $y = -0,7x + 10,2$
c) $y = 0,7x + 10,2$
d) $y = -0,7x + 2,4$

Sol: (b)



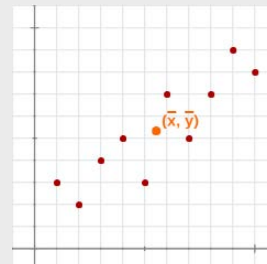
- a) $y = -0,5x + 2,5$
b) $y = 0,5x + 8$
c) $y = -0,5x + 8$
d) $y = 0,5x + 2,5$

Sol: (d)



- a) $y = -0,5x + 2,2$
b) $y = 0,5x + 2,2$
c) $y = -0,5x + 7,7$
d) $y = 0,5x + 7,7$

Sol: (c)



- a) $y = -0,7x + 1,4$
b) $y = 0,7x + 9,2$
c) $y = -0,7x + 9,2$
d) $y = 0,7x + 1,4$

Sol: (d)

Algunos de los ejercicios propuestos a continuación están elaborados a partir de esta publicación de INE. Puedes ver artículos similares en

<http://www.ine.es/prodyser/pubfolletos.htm>

4/2007

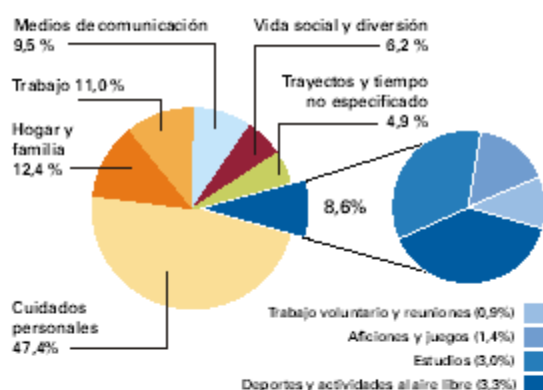


Encuesta de Empleo del Tiempo

Qué hacemos y durante cuánto tiempo



Distribución del tiempo por actividades



NOTA: Los informantes de 10 y más años han anotado las actividades realizadas en un día concreto (de lunes a domingo) elegido al azar. El tiempo así estimado se refiere a un "día promedio" obtenido al concentrar todas las actividades de todos los informantes en un solo día. Los datos que aquí se presentan se refieren a toda la población investigada, salvo que se indique expresamente lo contrario.



Más información en:

www.ine.es

DEPÓSITO LEGAL: M-1547-2001

ISSN: 1579-2327

NºPQ: 005-01-005-1

El Instituto Nacional de Estadística (INE) presenta en esta publicación algunos de los principales resultados de la **Encuesta de Empleo del Tiempo**, primera y única encuesta de ámbito nacional sobre la utilización del tiempo. Se realizó en España entre los años 2002 y 2003 de manera armonizada con las de otros países europeos, siguiendo las recomendaciones de la Oficina Estadística de la Unión Europea (Eurostat). Entre los años 1998 y 2004 otros países de la Unión llevaron a cabo investigaciones similares.

La encuesta facilita información, entre otras cosas, del **porcentaje de personas que realizan una determinada actividad en el transcurso del día y la duración media diaria dedicada a esa actividad por dichas personas**. Esta información primaria nos permite analizar con rigor la dimensión del trabajo no remunerado realizado por los hogares, la distribución de las responsabilidades familiares en el hogar, la participación de la población en actividades culturales y de ocio, etc. Por otra parte, la información recogida también permite comparar **datos nacionales de uso del tiempo en relación con los demás países europeos** que han realizado la encuesta.

Como principales resultados, cabe destacar el dato de que **las tareas domésticas y el cuidado de niños y ancianos son tareas eminentemente femeninas, ya que el 93% de las mujeres las realizan, frente al 70% de los varones**. En el contexto europeo, es de señalar la **primera posición de España en tiempo dedicado a caminar y pasear**; pero también el **último lugar por lo que se refiere a tiempo dedicado a la lectura**.

El INE quiere aprovechar esta ocasión para expresar su **agradecimiento a los cerca de 24.000 hogares de la muestra**, y pone a su disposición los resultados obtenidos.

Fuentes estadísticas utilizadas:

Procedentes del INE: Encuesta de Empleo del Tiempo. La información internacional procede de Eurostat.



Para practicar

- Agrupar las siguientes variables:
a) Peso, b) densidad, c) nº de plantas de los edificios, d) Tipo de fachada de los edificios, e) nº de ventanas, f) metros de fachada, g) nº de habitantes por edificio, h) tipo de puerta principal.

- Escribe tres variables cualitativas que tengan que ver con embarcaciones.

- Escribe tres variables cuantitativas discretas que tengan que ver con aviones.

- Escribe tres variables cuantitativas continuas que tengan que ver con trenes.

- Si las frecuencias para R, V, A y T son $R \rightarrow 3$, $V \rightarrow 2$, $A \rightarrow 4$ y $T \rightarrow 1$ ¿Cuántos grados le corresponde a cada letra en un gráfico de sectores?

- Haz una tabla y un gráfico de sectores de los datos: R R A A R A R V N V R N

- Haz una tabla y un gráfico de barras con los datos:
3 3 4 5 4 5 3 2 1 2 3 4 5 4 5 4 3 3 4 4

- Agrupar los datos siguientes en cinco intervalos y haz un histograma.

195 194 194 182 168 179 191 154 177 189
184 187 155 167 177 187 161 171 190 162
190 152 166 180 156 186 184 167 184 162

- Calcula la media en cada caso:

- 4, 6, 8
- 4, 6, 8, 6
- 100, 120, 180, 200

- Calcula la media en cada caso:

-
-

Marca	Fr
1	3
2	5
3	3
4	2

Marca	Fr
1000	3
2000	5
3000	3
4000	2

- Determina la moda y la mediana

- 50,60,60
- 12,12,22,32
- 10,20,30,40,20
- 35,25,35,25,25,25

- Calcula la moda y la mediana en cada caso:

-

Marca	Fr
100	5
200	4
300	6
400	3

-

Marca	Fr
100	2
200	7
300	9
400	2

- ¿Cuál o cuáles de los datos siguientes se puede considerar una observación atípica en cada una de las dos series?

- 4 5 6 5 7 8 4 5 8 7 5 12 6 7 6 5 4
- 8 9 1 9 8 9 7 9 6 7 8

- Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 90 de
1 1 4 3 3 4 2 2 5 3 1 2 1 2 2 4 2 2 4 3 1

- Calcula la mediana, primer y tercer cuartil y el percentil 20 de
3 1 1 1 4 1 5 3 1 3 3 4 5 5 4 4 2 1 4 4

- Calcula la media y la desviación típica en cada uno de los siguientes casos:
100 y 100, 99 y 101,
110 y 90, 120 y 80

- Completa la tabla con los datos:

190 151 193 187 158 175 165 158 184 172
197 161 157 157 183 180 150 161 182 169
162 177 160 155 188 157 189 167 186 157

Intervalo Marca Frec.

	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
[150,160)	155			
[160,170)	165			
[170,180)	175			
[180,190)	185			
[190,200)	195			

- Determina la media y la desviación típica, de los datos de la tabla anterior.

- Determina los intervalos $(\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma)$

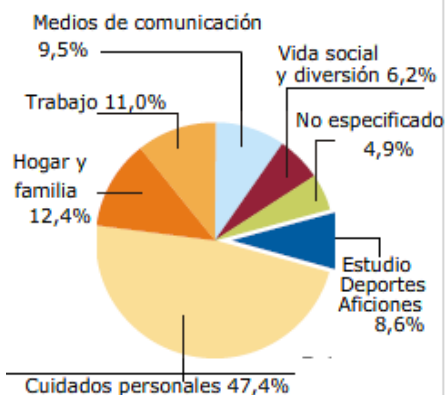
y $(\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma)$ y el número de elementos que hay en cada uno.

Marca	Fr
0	5
1	4
2	7
3	3
4	2

Estadística

20. Observa los siguientes gráficos y responde a las preguntas de cada uno

a) **Distribución del tiempo por actividades**

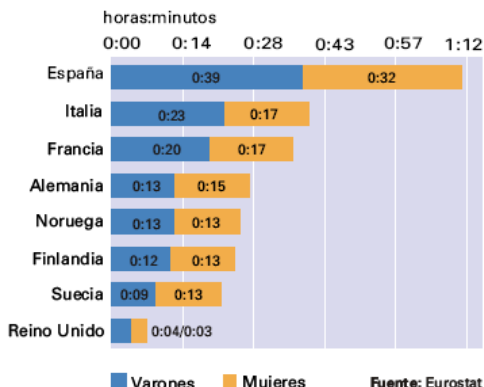


a1. ¿Cuál es la variable estudiada? ¿y la frecuencia?

a2. ¿A qué grupo de actividades dedicamos más tiempo los españoles?

a3. Calcula cuánto tiempo dedicamos al hogar y la familia ¿cuántos grados ocupa este sector en el diagrama?

b) **Tiempo dedicado a caminar o pasear**

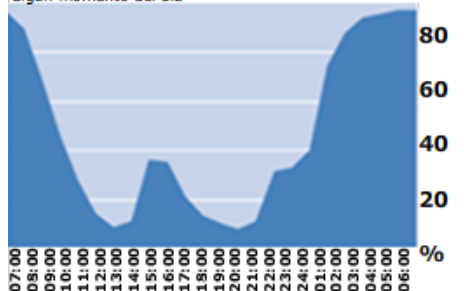


b1. ¿En qué países pasean más las mujeres que los hombres?

b2. Calcula el tiempo medio que se dedica en cada país a pasear.

b3. ¿Qué país está en el percentil 50?

c) **Cuidados personales**
Personas que realizan la actividad en algún momento del día

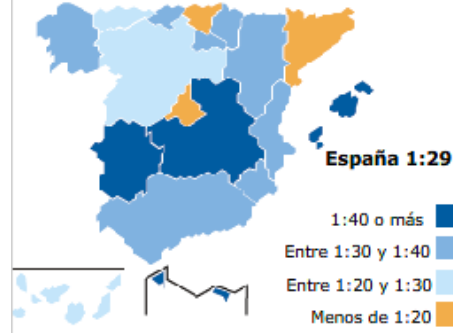


c1. ¿Crees que el dormir se ha contado como actividad de cuidado personal?

c2. A las 15:00 hay un máximo local en la gráfica ¿a qué se debe?

c3. A la hora de la comida el 38% de las personas se dedica al cuidado personal. Significa esto que un 62% de las personas no come?

d) **Vida social y diversión** Horas: minutos



d1. ¿Cuáles son las comunidades en las que se dedica menos tiempo a la vida social y a la diversión?

d2. ¿Cuánto tiempo dedican a la diversión o a la vida social la mayor parte de las comunidades?

d3. ¿Cuál es el tiempo medio que se dedica en España a esta actividad?

21. Las notas de 8 alumnos en Lengua e Inglés fueron:

Lengua (X)	4	4	4	5	7	8	9	9
Inglés (Y)	3	5	6	5	8	9	10	9

Dibuja la nube de puntos y calcula el coeficiente de correlación lineal.

22. Las horas semanales que dedican 10 personas al deporte y a ver TV son:

Dep (X)	1	3	5	6	7	8	9	10	11	12
TV (Y)	14	14	13	10	8	9	4	8	5	5

Dibuja la nube de puntos y calcula el coeficiente de correlación lineal.

23. De una distribución bidimensional conocemos $\bar{x} = 8, \bar{y} = 7, \sigma_x = 1,5, \sigma_y = 2,7$ y $\sigma_{xy} = 3,28$. Calcula el coeficiente de correlación lineal, la recta de regresión de Y sobre X y el valor estimado de y para $x = 8$.

24. De una distribución bidimensional conocemos $\bar{x} = 8, \bar{y} = 5, \sigma_x = 1,9, \sigma_y = 2,5$ y $r = 0,83$. Calcula la recta de regresión de Y sobre X y el valor estimado de y para $x = 10$. ¿Es fiable esta predicción?



Para saber más

La profesión de enfermería.

Florence Nightingale (1820-1910), conocida por ser la fundadora de la profesión de enfermería. Durante la guerra de Crimea se percató de que la causa principal de las muertes de heridos en combate era la falta de medidas sanitarias. Al aplicarlas, la tasa de mortalidad pasó de un 42,7% a un 2,2%. Gracias a un uso eficaz de los datos consiguió modificar el sistema de atención sanitaria a su vuelta a Gran Bretaña. Cambió el sistema de registro de datos y fue una de las primeras personas en utilizar los gráficos estadísticos para representar los datos de una forma sencilla de forma que hasta los parlamentarios y generales pudieran entender.

Para Florence, los datos no eran algo abstracto, eran una forma de poder salvar vidas humanas.

El padre de la estadística.

Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) está considerado el padre de la estadística. Los escritos de Fisher ayudaron a organizar la estadística como campo de estudio preciso cuyos métodos se aplican a problemas prácticos de muchas disciplinas. Como casi todos los pioneros en la estadística, sus trabajos nacieron de la necesidad de resolver problemas prácticos.

Inferencia estadística

La estadística desarrollada en este tema es lo que se conoce como estadística descriptiva, en ella se recoge información y se hacen cálculos que describen como están repartidos. Pongamos el caso que una muestra elegida al azar nos da una media. ¿La verdadera media está próxima a la de la muestra? Si considero un intervalo alrededor de la media muestral, la verdadera ¿con qué probabilidad estará o no en él? De estas preguntas y otras se encarga la inferencia estadística.

Principales campos de aplicación de la estadística



La estadística se aplica en muchos campos como en **Industria y empresas**. Para el control de calidad en la producción en cadena, para el análisis de mercados, para el estudio de precio de venta al público de los artículos fabricados, en gestión financiera,...

En la parte derecha se citan algunas otras de sus aplicaciones.

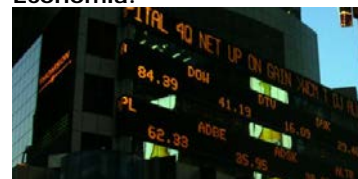
Algunos campos de aplicación de la estadística

Administración pública



A través de las Delegaciones territoriales y provinciales, se recogen datos para analizarlos y someterlos a procesos estadísticos. De esta forma se conocen datos referidos a nacimientos, defunciones, matrimonios, precios, salarios, trabajo, enseñanza, sanidad,... Todos estos datos se suelen publicar por el INE.

Economía.



En este campo es imprescindible, sobre todo en macro-magnitudes.

Psicología.



La mayor parte de los trabajos científicos en psicología experimental tienen como principal herramienta de trabajo la estadística.

Medicina.



En cualquier estudio experimental de estas áreas Existe una asignatura específica llamada Bioestadística para cubrir esos estudios experimentales. En Genética y antropometría encontramos dos de los campos de mayor aplicación.



Recuerda lo más importante

Población. Alumnos de un instituto ficticio.

Muestra. Alumnos encuestados

Variables estadísticas: Cualitativa, color preferido; Cuantitativa discreta, nº de hermanos y cuantitativa continua, altura.

Consideremos las dos muestras siguientes:

Nº de hermanos: 4 3 2 3 1 2 0 2 0 1 2 3 1 2 4 0 1 1 4 1 1 4 0 4 2 0 4 1

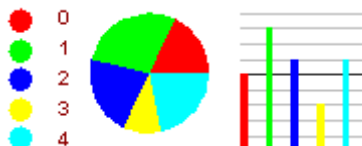
Altura: 182 172 157 194 150 166 163 196 167 199 172 185 172 168 173 160 162 173 161 192 156 164 173 180 193 172

Recuento de datos:

Marca		Intervalo	Xi	Fi
0	5	[150,160[155	3
1	8	[160,170[165	8
2	6	[170,180[175	7
3	3	[180,190[185	3
4	6	[190,200[195	5
	28	Total		26

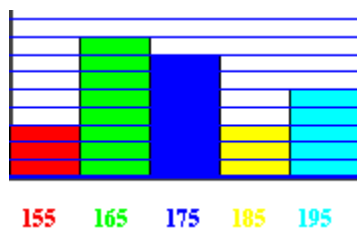
Gráficos de **sectores y barras**

Nº de hermanos



Altura

Histograma



Media y moda y desviación típica

xi	fi	xi·fi	fi·(xi- \bar{x}) ²
0	5	0	0
1	8	8	6,37
2	6	12	0,06
3	3	9	3,67
4	6	24	26,64
Total	28	53	54,67

Media:

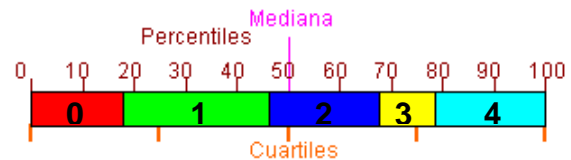
$$\bar{x} = \frac{53}{28} = 1,89$$

Moda = 1

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\frac{54,67}{28}} = 1,39$$

Cuartil, mediana, percentil

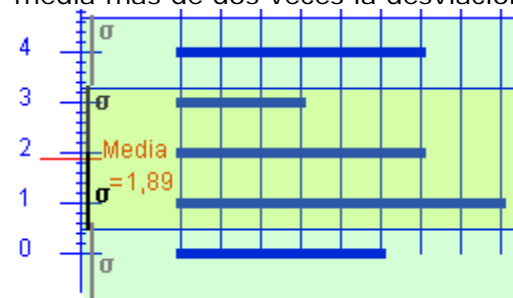


$$Me=2, Q1=1, Q3=3,$$

$$P20=1, P60=2, P90=4$$

Recorrido. De 0 a 4, de amplitud 4

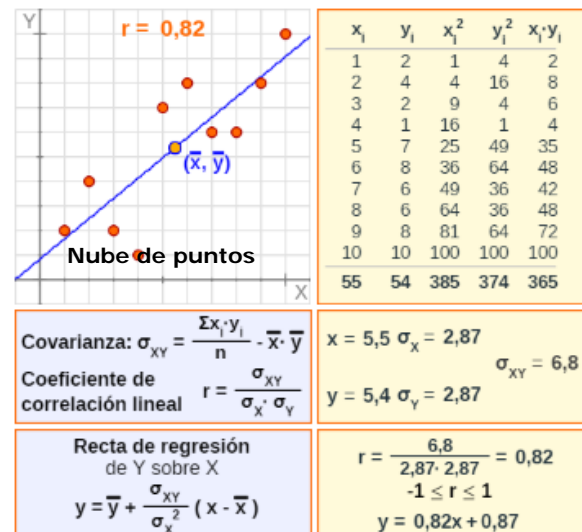
Media y desviación En nuestro ejemplo, 17 de 28 datos no se alejan de la media más de una desviación típica, son el 60,7%, y el 100% no se alejan de la media mas de dos veces la desviación.



Representatividad

Una muestra es representativa de la población cuando en ella podemos encontrar las mismas proporciones de las características de estudio que en el conjunto de la población.

Distribuciones bidimensionales



Autoevaluación



1. ¿Cuántos grados corresponden al valor de la frecuencia 3?

X_i	F_i
0	1
1	2
2	3
3	8
4	2

2. ¿La mediana de la distribución anterior es?
3. ¿Cuál es la moda?

X_i	F_i
3	1
4	3
5	4
6	2

4. ¿Cuál es el porcentaje de la muestra que corresponde a las dos primeras marcas ?

X_i	F_i
0	1
1	2
2	3
3	8
4	2

5. ¿Cuál es el percentil más pequeño que deja por debajo los valores menores que 3?

X_i	F_i
0	1
1	2
2	3
3	8
4	2

6. ¿Cuál es la media?

X_i	F_i
155	2
165	2
175	8
185	1
195	5

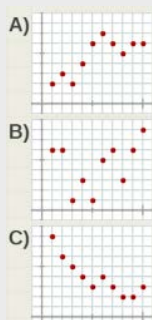
7. ¿Cuál es la desviación típica de los datos anteriores?

8. Asocia cada nube de puntos (A, B, C) con su coeficiente de correlación:

1) 0.32 2) 0.79 3) -0,88

9. En la distribución de la izquierda calcula la covarianza.

10. El centro de gravedad de una distribución bidimensional es (4,5 , 3,75) y la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es 0,57. Estima el valor de y para $x = 7$



x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$
1	1	1
2	2	4
3	3	9
4	5	20
5	4	20
6	5	30
7	5	35
8	5	40

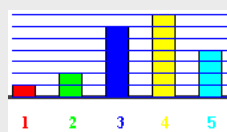
Soluciones de los ejercicios para practicar

1. Cualitativas: d) h)
Cuantitativas discretas c) e) g)
C. continuas: a) b) f)
2. Propulsión, Carga, Tipo de travesía
3. N° de pasajeros, n° ruedas, n° ventanas
4. Velocidad máxima, carga máxima, potencia.
5. $R \rightarrow 108^\circ$, $V \rightarrow 72^\circ$, $A \rightarrow 144^\circ$ y $T \rightarrow 36^\circ$

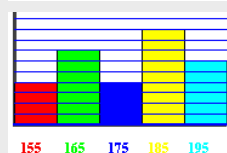
6. $R \rightarrow 5$,
 $A \rightarrow 3$,
 $V \rightarrow 2$,
 $N \rightarrow 2$



7. $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 6$,
 $4 \rightarrow 7$, $5 \rightarrow 4$



8. Intervalo X_i f_i
[150,160) 155 4
[160,170) 165 7
[170,180) 175 4
[180,190) 185 9
[190,200) 195 6

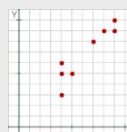


9. a) 6 b) 6 c) 150
10. a) 2.3 b) 2307
11. a) $Mo=60$, $Me=60$ b) $Mo=12$, $Me=17$
c) $Mo=20$, $Me=20$ d) $Mo=25$, $Me=25$
12. a) $Mo=300$, $Me=250$
b) $Mo=300$, $Me=300$
13. a) 12 b) 1
14. $Me=2$, $Q1=2$, $Q3=3$, $P90=4$
15. $Me=3$, $Q1=1$, $Q3=4$ y $P20=1$
16. La media es 100 en los 4, y la desviación 0, 1, 10 y 20.

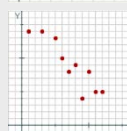
Intervalo	Marca	Frec.		
	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i(X-x_i)^2$
[150,160)	155	9	1395	2401
[160,170)	165	7	1155	280,77
[170,180)	175	3	525	40,33
[180,190)	185	8	1480	1494,22
[190,200)	195	3	585	1680,33
		30	5140	5896,66

17. $\bar{x} = 171$, $\hat{\sigma} = 14,02$
18. En (0,42, 2,9) hay 11, y en (-0,88, 4,14) todos
20. a1) variable: actividades. Fr: porcentaje de tiempo diario que se dedica a cada actividad
a2) cuidados personales
a3) 2h 58m 34s 44,64°
b1) Alemania, Suecia y Finlandia
b2) E35,5 I20, F18,5 A14 N13 F12,5 S11 R3,5 en minutos
b3) Francia
c1) Sí. c2) Comida y Siesta
c3) No, el pico ocupa dos horas y algunos comen en media hora
d1) País Vasco, Cataluña y Madrid
d2) entre 1:30 y 1:40 horas: minutos
d3) 1:29

21. $r = 0,93$



22. $r = -0,91$



23. $r = 0,81$
 $y = 1,46x - 1,66$
 $x = 8$, $y' = 7$
24. $y = 1,09x - 3,73$
 $x = 10$, $y' = 7,18$ Bastante fiable

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- | | |
|---------------|----------------|
| 1. Sol 67,5° | 6. Sol 177,78 |
| 2. Sol 3 | 7. Sol 12,83 |
| 3. Sol 5 | 8. 1-B 2-A 3-C |
| 4. Sol 18,75% | 9. Sol 3 |
| 5. Sol 37 | 10. Sol 5,18 |