EL MUELLE. LAS FUERZAS ELÁSTICAS

En una pista horizontal completamente lisa, se encuentra un muelle de 30 cm de longitud y de constante elástica 100 N/m. Se comprime 20 cm y se sitúa una masa de 500 g frente a él. Al soltarse el muelle y separase del mismo, la masa recorre 90 cm por una superficie horizontal y rugosa. Se pide:

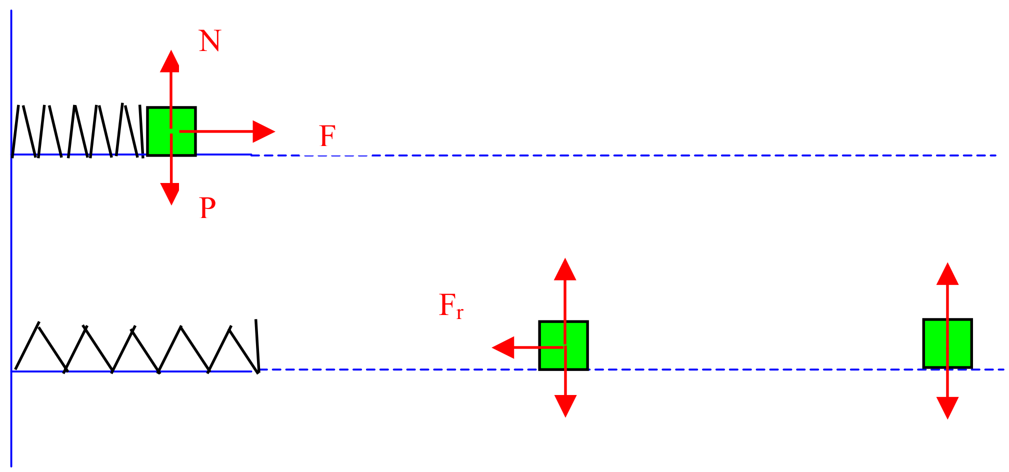
a) Fuerzas que actúan sobre la masa cuando está junto al muelle y cuando se separa de él.
b) Velocidad con la que sale lanzada y características de la superficie rugosa.
c) ¿ Qué ocurriría si la superficie fuera completamente lisa?. Explícalo.

d) Si la masa está ligada al muelle, describir el movimiento resultante de la misma. Suponer la superficie horizontal completamente lisa.

$g=9'8\ m/s^2$

Las fuerzas que actúan sobre la masa cuando está junto al muelle siendo empujada por él son: el peso P, debido a la interacción con la Tierra, la reacción del plano N debida a la interacción con el suelo horizontal y, la fuerza recuperadora del muelle F que la empuja hacia delante.

Cuando se separa del muelle hasta pararse, sobre la masa actúan P, N, y una fuerza de rozamiento con el suelo (ya que nos dicen que es rugoso) y que será en sentido contrario al del movimiento. Esta fuerza le comunica una aceleración que hace que la masa acabe parándose.



b) Para averiguar la velocidad con la que sale lanzada la masa al separarse del muelle, hemos de pensar que la fuerza resultante sobre la misma en ese intervalo de tiempo, es la fuerza de recuperación elástica del muelle, y como sabemos, no es constante sino que depende de la deformación del mismo. A medida que vaya recuperando su longitud, la fuerza irá disminuyendo. Recordemos que esta fuerza es proporcional a la deformación y de signo contrario, siendo la constante de proporcionalidad, la llamada constante elástica del muelle K.

$F = -Kx$ Siendo "x" la deformación del muelle.

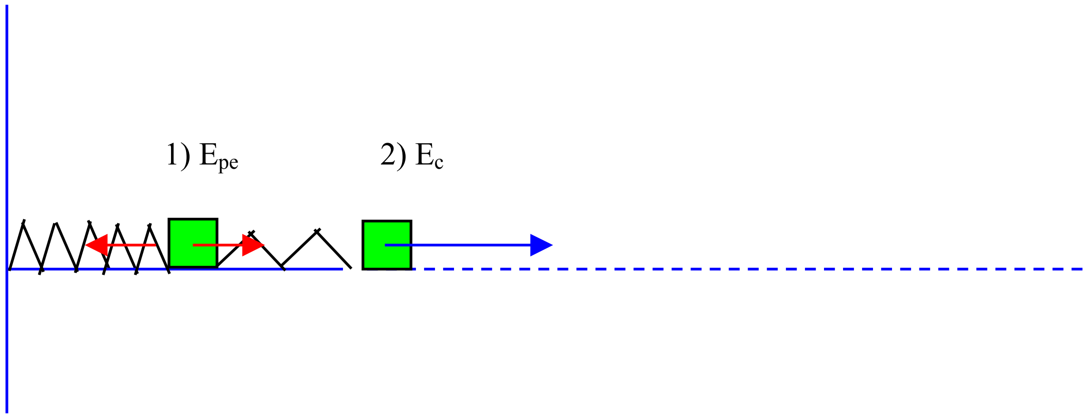
Como no es una fuerza constante, sino que depende de la posición de la masa, nos interesa hacer un razonamiento energético y no cinemático. Esto ocurrirá siempre que F =f(posición).

En el razonamiento energético, consideramos como "sistema" la masa y el muelle. Las fuerzas entre ellos serán interiores, y el peso P y N serán exteriores. Como las fuerzas exteriores no realizan trabajo, la energía del "sistema" debe permanecer constante. La energía del sistema puede ser energía potencial elástica del muelle al estar deformado y, energía cinética de la masa.

$E_{pe} + E_c = constante$ por tanto $\frac{1}{2}Kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$

Siendo "x" la deformación inicial y "v" la velocidad final de la masa cuando x=0. De donde:

$v = \sqrt{\frac{Kx^2}{m}}$ en nuestro caso $v = \sqrt{\frac{100.0'2^2}{0'5}} = 2'83 m/s$



Una vez se separa del muelle con la velocidad instantánea de 2´83 m/s se desliza por una superficie rugosa, por lo que sobre ella aparece una fuerza de rozamiento en sentido contrario al del movimiento debida a una interacción con dicho suelo rugoso. Como esta fuerza de rozamiento por deslizamiento es constante, comunicará a la masa una aceleración constante, por lo que podemos utilizar razonamientos cinemáticos pues conocemos las ecuaciones del movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. También podríamos utilizar razonamientos energéticos, pero en este caso utilizaremos los cinemáticos.

La fuerza de rozamiento recordemos que es: $F_r = \mu N = \mu P = \mu mg$

Siendo μ el coeficiente de rozamiento y N=P = mg

Según esto, la aceleración de la masa, en el sentido contrario al del movimiento será:

$a = -\mu g$ Y las ecuaciones del movimiento serán:

$v = v_0 + at$ y $e = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ que con nuestros valores serán

$v = 2'83 + at$ y $e = 2'83t + \frac{1}{2}at^2$ como en el instante final v=0 y e= 0´9 m, tenemos:

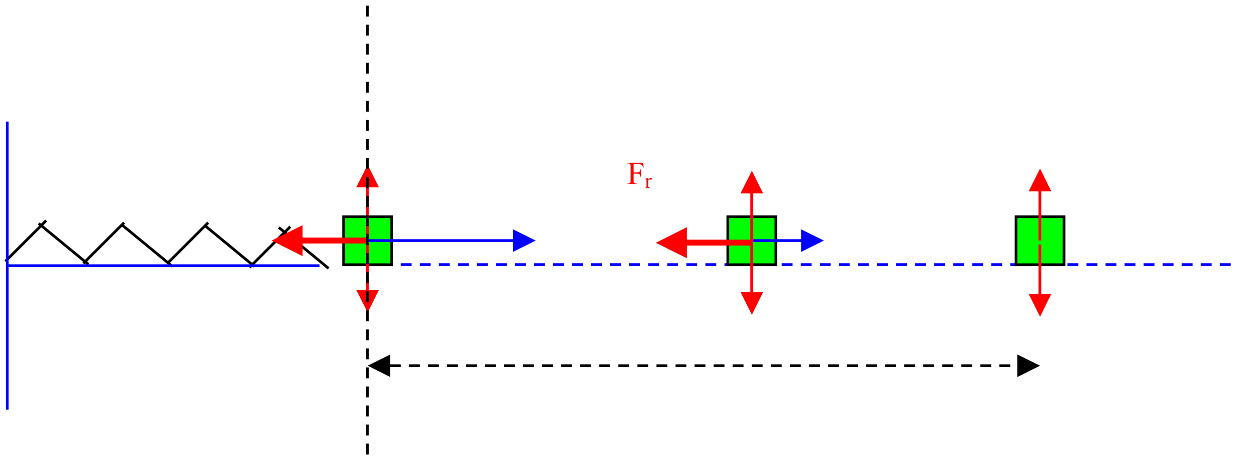
$0 = 2'83 + at$ $at = -2'83$ $0'9 = 2'83t - \frac{1}{2}2'83t$ de donde:

t = 0´64 s y a = -4´42 m/s^2

Conocida la aceleración, el coeficiente de rozamiento con el plano será

$-4'42 = -\mu.9'8$ de donde μ = 0´45

Si el plano fuese más rugoso (con un coeficiente de rozamiento mayor) el recorrido de la masa, hasta pararse, hubiese sido menor.



c) Si la superficie fuese completamente lisa, sin rozamiento, (F_r=0), sobre la masa no actuaría ninguna fuerza resultante, su aceleración sería nula y mantendría su velocidad. No se pararía nunca, el recorrido sería infinito si el plano horizontal fuese suficientemente largo.

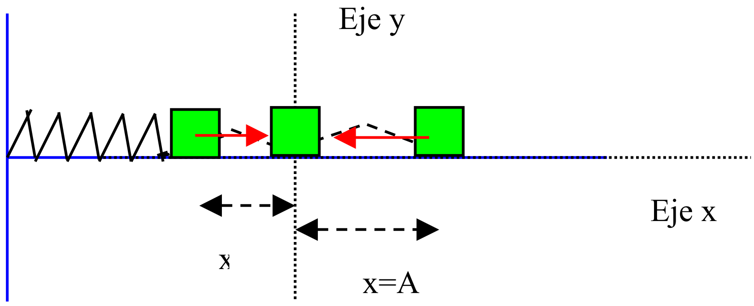
d)Si la masa está ligada al muelle sobre una superficie perfectamente lisa y se comprime el muelle dejando el sistema en libertad, la situación es muy diferente. La primera parte es como en el caso anterior: el muelle empuja la masa con una fuerza que depende de su deformación, hasta que adquiere su longitud normal. A partir de ahí, la masa dotada de velocidad estira el muelle y este frena la masa con una fuerza que como hemos dicho depende de la deformación del mismo. Esto ocurre hasta anular la velocidad de la masa y estando el muelle lo mas estirado posible. A partir de aquí el muelle tira de la masa que cambia el sentido de su velocidad y la aumenta hasta que el muelle vuelve a alcanzar su longitud propia cuando la velocidad de la masa es máxima. Por ultimo la masa dotada de velocidad comprimirá el muelle hasta la posición inicial. El proceso se repite indefinidamente.

Como hemos dicho, debe tratarse de un movimiento periódico (que se repite a intervalos constantes de tiempo). Bajo el punto de vista energético el sistema muelle-masa mantiene su energía (ya que las fuerzas exteriores no realizan trabajo) transformándose la energía potencial del muelle deformado en cinética de la masa y viceversa, de manera que su suma permanezca constante.

$$E_{pe} + E_{cmasa} = constante$$

Pero vamos a tratar de hacer un estudio cinemático del proceso. La fuerza elástica recuperadora del muelle (la que el muelle ejerce sobre la masa) viene dada por:

$F = -Kx$ siendo x la deformación del muelle en sistema de coordenadas siguiente:



Como el movimiento sólo es a lo largo del eje x, la aceleración sólo tendrá componente x (como la fuerza) y podremos escribir:

$$m.a = -kx \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Como vemos en la anterior expresión, la función x= f(t) debe ser tal que, su segunda derivada sea igual a la función original multiplicada por una constante. Este tipo de funciones, son o la función seno o la función coseno de un ángulo, cuya amplitud sea función lineal del tiempo. Podremos escribir que:

$$x = A\cos wt$$

Hemos elegido la función coseno porque cuando t=0 la masa se encuentra separada al máximo de la posición de equilibrio, posición que llamaremos amplitud A del movimiento. Para averiguar el valor de la constante w, derivamos la anterior expresión hasta llegar a la aceleración:

$$v = \frac{dx}{dt} = -Awsenwt \qquad \text{y} \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -Aw^2\cos wt = -w^2x$$

De donde la constante del movimiento, w, resulta ser:

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ y como w (llamada pulsación del movimiento) está relacionado con el periodo de dicho movimiento, tenemos que:

$w = \dfrac{2\pi}{T}$ de donde el periodo del movimiento será:

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ y en nuestro caso concreto el periodo del movimiento será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0'5}{100}} = 0'44s$$

movimiento muy rápido, que podemos disminuir utilizando una masa mayor o un muelle de constante elástica menor

En el applet del problema, puedes variar los valores de constante elástica del muelle K, de masa m, de coeficiente de rozamiento del plano, así como de compresión inicial del muelle, tanto en la opción del plano rugoso con la masa libre, como en el caso de la masa ligada al muelle. Podrás ver las variaciones que implican en el movimiento en cada caso