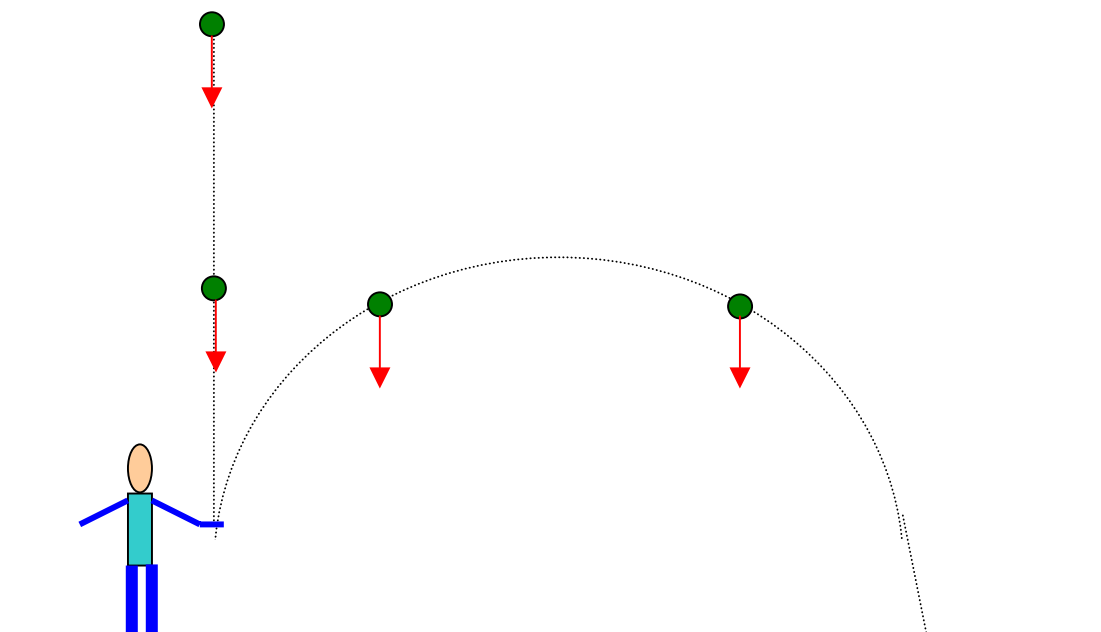




## MOVIMIENTO DE LA PELOTA

Un niño golpea una pelota de 500 gramos de manera que, sale despedida con una velocidad de 12 m/s desde una altura de 1'5 m sobre el suelo. Se pide : a) Fuerza o fuerzas que actúan sobre la pelota después de haber sido lanzada, cuando sube, cuando alcanza el punto más alto y cuando baja. b) Altura máxima alcanzada y tiempo que tarda en llegar al suelo en el caso del lanzamiento vertical y cuando la velocidad inicial forma ángulo de  $35^\circ$  con la horizontal. c) En el caso del lanzamiento vertical, si el golpe ha durado 0'1 s ¿ con qué fuerza interacciona el niño con la pelota suponiéndola constante?. d) Haz un análisis de lo que ocurre con la energía en todas las fases del proceso. Tómese  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

a) Después del golpe, con la mano del niño, la única fuerza que actúa sobre la pelota es su propio peso debido a la interacción con la Tierra. Esto ocurre cuando sube, en el punto más alto y cuando baja hasta que llega al suelo con el que interacciona. Durante el golpe, la situación es distinta , pues además del peso actúa la fuerza con la que interaccionan la pelota y la mano del niño.



b) Para saber la altura máxima alcanzada y el tiempo que tarda en llegar al suelo, vamos a hacer un estudio cinemático del movimiento en cada caso para lo cual estableceremos un sistema de coordenada xy con el eje “x” horizontal y el eje “y” vertical, tal y como indica la figura. En principio, la altura máxima alcanzada en el lanzamiento parece depender de la velocidad inicial del mismo y del ángulo del lanzamiento. Si la única fuerza que actúa sobre la pelota es su propio peso, su aceleración será:

$$F = ma = mg \quad a = g \quad \vec{a} = -10\vec{u}_y$$

Considerando el lanzamiento vertical, la velocidad inicial vendrá dada, en nuestro sistema de coordenadas como:

$\vec{v}_0 = 12\vec{u}_y$  como, sólo hay movimiento a lo largo del eje y, tendremos, que, la velocidad instantánea vendrá dada por :

$$v = v_y = 12 - 10t \quad \text{ya que} \quad a = a_y = -10 \text{ m/s}^2$$

Y la posición instantánea vendrá dada por :

$$y = 1'5 + 12t - \frac{1}{2} 10 t^2 \quad \text{ya que} \quad y_0 = 1'5 \text{ m}$$

En este caso del lanzamiento vertical (a lo largo del eje “y”), la pelota alcanzará la máxima altura cuando su velocidad sea cero, por tanto, esto ocurrirá a los :

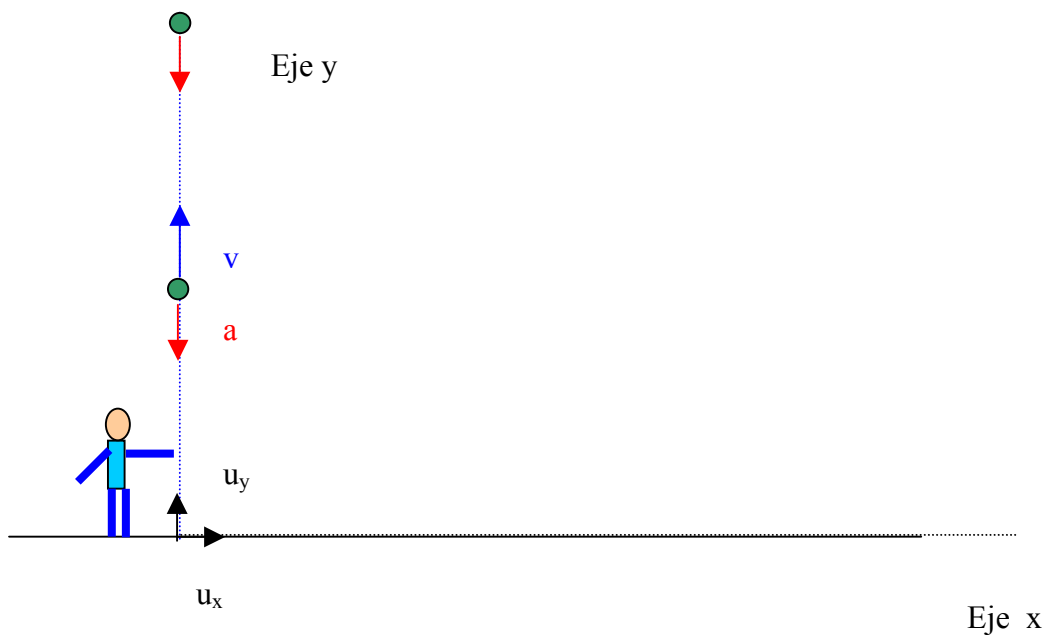
$$0 = 12 - 10t \quad t = 1'2 \text{ s} \quad \text{y, entonces su posición será}$$

$$y = 1'5 + 12 \cdot 1'2 - 5 \cdot 1'2^2 \quad y = 8'7 \text{ m}$$

y, el tiempo que tardará en llegar al suelo, será cuando  $y = 0$  por tanto:

$$0 = 1'5 + 12 \cdot t' - 5t'^2 \quad \text{de donde} \quad t' = 2'52 \text{ s} \quad \text{y, la velocidad con la que}$$

$$\text{llegará al suelo será} \quad v = v_y = 12 - 10 \cdot 2'52 = - 13'2 \text{ m/s}$$



Consideremos ahora, el caso del lanzamiento de la pelota formando un ángulo de  $35^\circ$  con la horizontal ( es decir con el eje x de nuestro sistema de coordenadas). La velocidad inicial de 12 m/s , tendrá dos componentes, una a lo largo del eje “x” , y otra a lo largo del eje “y”. Estas componentes serán :

$$\vec{v}_{0x} = v_0 \cos 35^\circ \vec{u}_x = 12 \cos 35^\circ \vec{u}_x = 9'83 \vec{u}_x \quad v_{0x} = 9'83 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{0y} = v_0 \sin 35^\circ \vec{u}_y = 12 \sin 35^\circ \vec{u}_y = 6'88 \vec{u}_y \quad v_{0y} = 6'88 \text{ m/s}$$

Y, recordemos que la aceleración sólo tiene componente “y”

$$\vec{a} = \vec{a}_y = -10 \vec{u}_y$$

Con lo cual, el movimiento a lo largo del eje “x” será uniforme ( sin aceleración) y, el movimiento a lo largo del eje “y” será uniformemente acelerado. Las ecuaciones de la velocidad instantánea y de la posición a lo largo de ambos ejes será:

$$\text{Eje “x”} \quad v_x = v_{0x} = 9'83 \text{ m/s} \quad \text{constante}$$

$$x = v_x t = 9'83 t$$

Eje "y"  $v_y = v_{0y} + a_y t = 6'88 - 10 t$   
 $y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 1'5 + 6'88 t - \frac{1}{2} 10 t^2$

En este caso, para alcanzar la altura máxima ( máximo valor de la coordenada "y") debe hacerse cero la velocidad a lo largo del eje de las "y", luego, esto ocurrirá cuando:

$$0 = 6'88 - 10 t \quad t = 0'69 \text{ s}$$

y, la altura máxima alcanzada será:

$$y_{\max} = 1'5 + 6'88 \cdot 0'69 - 5 \cdot 0'69^2 = 3'87 \text{ m}$$

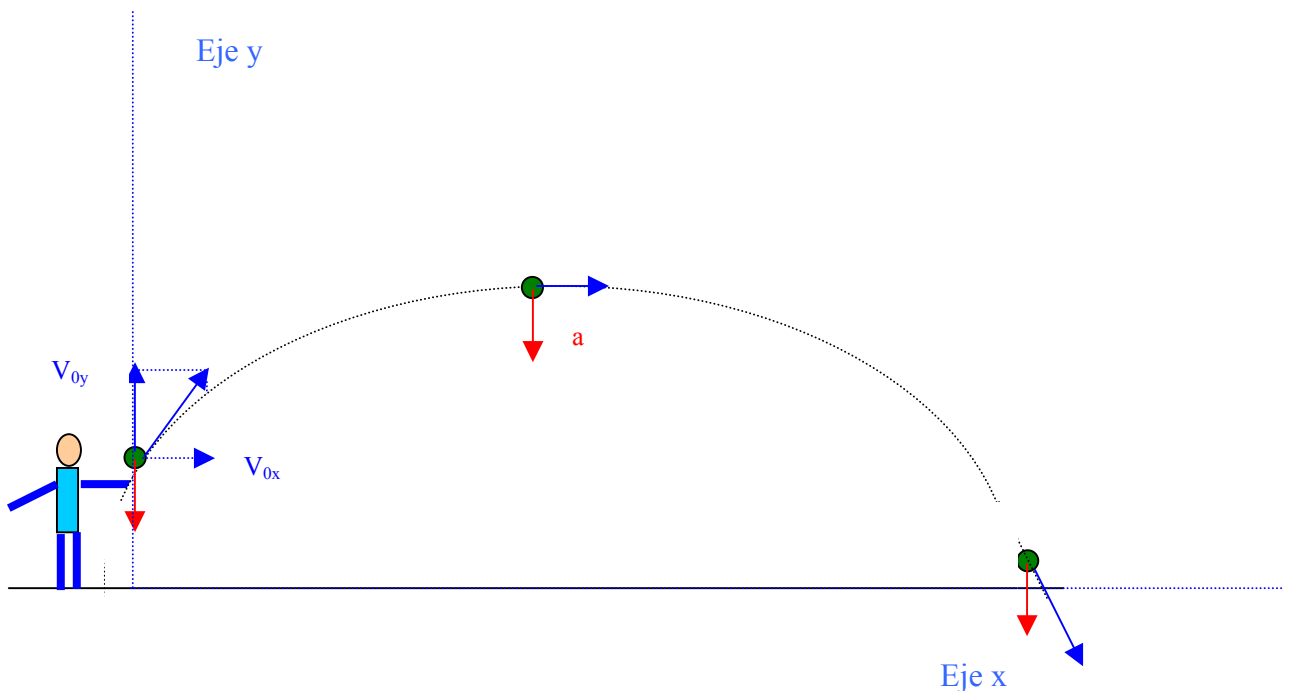
A esa altura, la velocidad será  $v = v_x = 9'83 \text{ m/s}$

Y, el tiempo que tardará en llegar al suelo, significa hacer la coordenada "y" de la posición de la pelota cero . Así :

$$0 = 1'5 + 6'88 t - 5 t^2 \quad \text{de donde} \quad t = 1'57 \text{ s}$$

y, incidirá sobre el suelo a una distancia del niño de :

$$x = 9'83 \cdot 1'57 = 15'43 \text{ m}$$



Para comprobar las previsiones que habíamos hecho sobre la altura máxima alcanzada en el tiro, utilizaremos las expresiones generales que establecimos para la coordenada “y” y la velocidad “v<sub>y</sub>”.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2} g t^2 = y_0 + v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g t = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g t$$

Como, alcanzar la altura máxima supone hacer v<sub>y</sub>=0, el tiempo en el que esto ocurre, será :

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \quad y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g^2 \cdot 2} = y_0 + \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$$

y, como vemos, la altura máxima depende de v<sub>0</sub> y del ángulo de lanzamiento α, siendo máxima cuando α= 90°, es decir, con el lanzamiento vertical.

La ecuación de la “trayectoria” y=f(x) podemos obtenerla eliminando la variable tiempo “t” de las ecuaciones que nos dan x=f(t) y y=f(t). Así:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad y = y_0 + \frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g \cdot x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = y_0 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

### Ecuación de una parábola

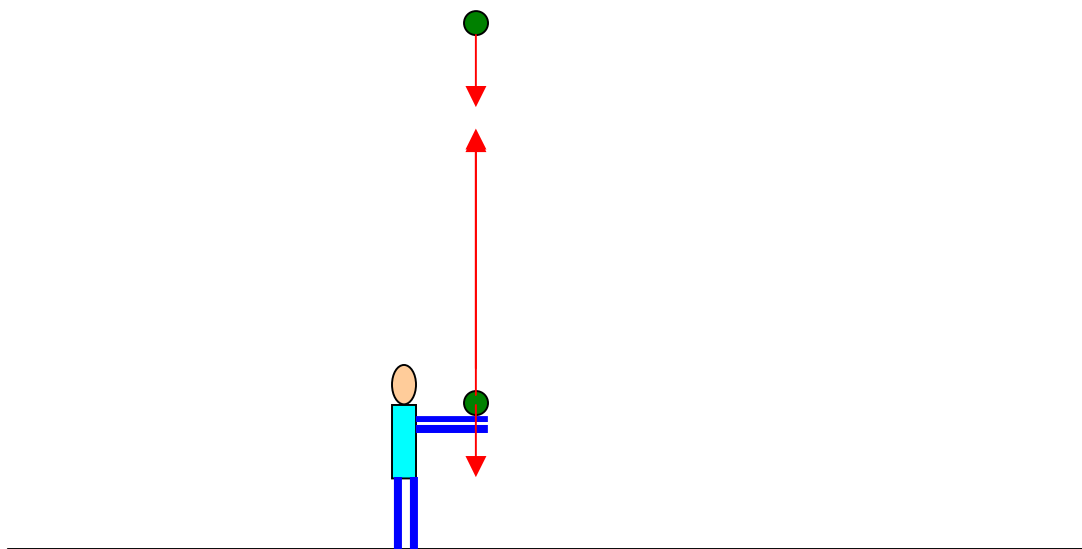
c) Durante el tiempo en el que el niño golpea la pelota ( 0'1 s) además de la fuerza peso resultado de la interacción con la Tierra, debemos considerar la fuerza con la que interaccionan la mano del niño y la pelota, es decir, las fuerzas resultado del golpe o choque entre la mano y la pelota. Suponiendo esta fuerza constante, recordemos que :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{siendo } F \text{ la fuerza resultante sobre la pelota}$$

Como dicha fuerza será la suma de la fuerza que ejerce la mano del niño F' y el peso P, considerando el caso del lanzamiento vertical, éstas serán en la misma dirección ( eje “y”) y de sentido contrario, por lo que :

$$F' - P = \frac{mv - 0}{t - 0} \quad \text{de donde} \quad F' - 0'5 \cdot 10 = \frac{0'5 \cdot 12 - 0}{0'1}$$

$$F' = 65 \text{ N}$$



d) Para hacer un estudio energético del proceso, lo primero que debemos hacer es “delimitar” el sistema de cuya energía vamos a hablar. En nuestro caso el “sistema” estará constituido por : la pelota y la Tierra. El niño está pues fuera del sistema, por lo que no consideraremos su energía.

Recordemos que, el principio de conservación de la energía nos dice que, el trabajo exterior realizado sobre el sistema, varía la energía del mismo, ya sea cinética o potencial.

$$W_{\text{ex}} = \Delta E_c + \Delta E_p$$

Durante el golpe, al actuar el niño sobre la pelota, realiza un trabajo ( que será exterior) sobre la misma por lo que aumenta sus energías, fundamentalmente cinética y algo de potencial. El niño pierde la energía que transfiere a la pelota.

Después del golpe, el “sistema pelota-Tierra” está aislado. Sobre ambos cuerpo solo actúan fuerzas interiores (  $P$  sobre la pelota y  $-P$  sobre la Tierra ) por lo que el trajo exterior será cero.

$$0 = \Delta E_c + \Delta E_p \quad \text{por tanto} \quad E_c + E_p = \text{constante}$$

Esto supone que , la energía cinética ganada en el golpe, se vaya convirtiendo en energía potencial y aumentando la altura. En el caso del lanzamiento vertical, toda la energía cinética se convierte en energía potencial en el punto más alto , y , luego la energía potencial se convierte en cinética en la caída.

En el caso del lanzamiento parabólico, no toda la energía cinética ganada se convierte en potencial en el punto más alto ( en el que conserva velocidad y por tanto energía cinética) debido a que, además del principio de conservación de la energía que estamos aplicando , se debe cumplir el principio de conservación del momento angular.

$$\text{Subiendo} \quad E_c \rightarrow E_p \quad \quad \quad \text{Bajando} \quad E_p \rightarrow E_c$$

Pero siempre :  $E_c + E_p = \text{constante}$

En el siguiente applet consideraremos todas las posibilidades de lanzamiento con distintas velocidades y ángulos, así como las variaciones de energía que tienen lugar en el proceso.