

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer e interpretar las funciones y las distintas formas de presentarlas.
- Reconocer el dominio y el recorrido de una función.
- Determinar si una función es continua o discontinua.
- Hallar la tasa de variación y la tasa de variación media de una función en un intervalo.
- Determinar el crecimiento o decrecimiento de una función y hallar sus máximos y mínimos.
- Reconocer los puntos de inflexión.
- Comprobar la simetría de algunas funciones respecto al origen y al eje OY.
- Reconocer si una función es periódica.

### 1. Funciones reales ..... pág. 4

Concepto de función  
Gráfico de una función  
Dominio y recorrido  
Funciones definidas a trozos

### 2. Propiedades de las funciones ..... pág. 8

Continuidad y discontinuidades  
Periodicidad  
Simetrías

### 3. Tasa de variación y crecimiento .... pág. 10

Tasa de variación  
Crecimiento y decrecimiento  
Máximos y mínimos  
Concavidad y puntos de inflexión

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación



## Antes de empezar

### El lenguaje de las gráficas



De las distintas formas en que puede presentarse una función, mediante un enunciado, una tabla, una expresión algebraica o una gráfica, esta última es la que nos permite ver de un sólo vistazo su comportamiento global, de ahí su importancia. En este tema aprenderás a reconocer e interpretar sus características principales.



### Investiga

Imagina que montas en una noria cuyo radio mide 30 m y para subir hay que ascender 5 m desde el suelo. La noria comienza a girar, ¿cómo es la gráfica de la función que da la altura a la que te encuentras según el ángulo de giro?. Tú vas en la cabina naranja y unos amigos en la verde, ¿cómo será su gráfica?

# Funciones y gráficas

## 1. Funciones reales

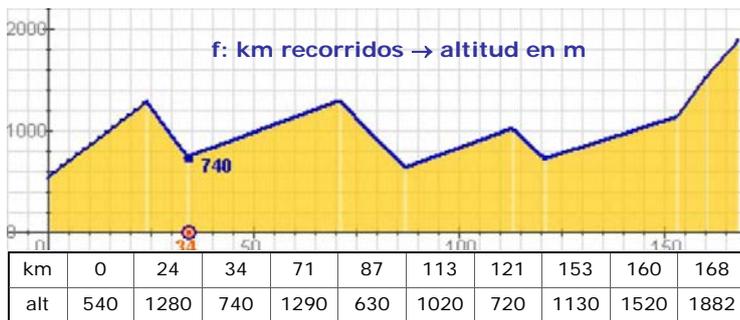
### Concepto de función

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final.

Se relacionan así dos variables numéricas que suelen designarse con  $x$  e  $y$ .

$$f: x \rightarrow y=f(x)$$

- ✓  $x$  es la variable independiente
- ✓  $y$  es la variable dependiente



El gráfico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.

A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.

### Gráfica de una función

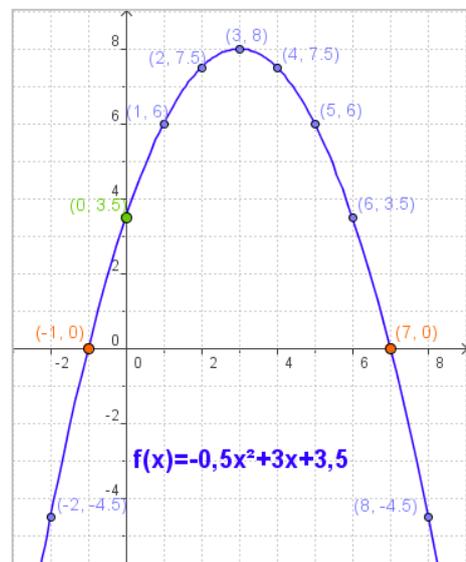
Para ver el comportamiento de una función,  $f: x \rightarrow y$ , recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la dependiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica:  $(x, f(x))$ .

En la figura está representada la función:

$$f(x) = 0,5x^2 + 3x + 3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos,  $x$  en el eje de abscisas (OX),  $f(x)$  en el de ordenadas (OY).

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados. Para calcularlos:

- ✓ Corte con el eje OY:  
Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer  $x=0$  en la fórmula de la función.
- ✓ Corte con el eje OX:  
Los puntos del eje de abscisas tienen  $y=0$ . Se resuelve la ecuación  $f(x)=0$

#### Cortes con los ejes

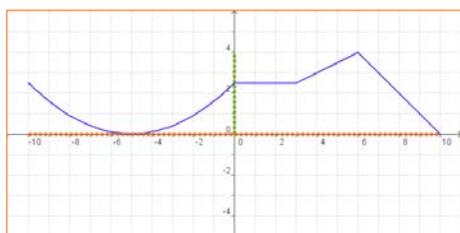
**EJE OY:**  $f(0)=3,5$  Punto  $(0, 3,5)$

**EJE OX:** Resolviendo la ecuación:  
 $0,5x^2 + 3x + 3,5 = 0$

Resulta:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos  $(7, 0)$   $(-1, 0)$



**Dom  $f = [-10, 10]$**

## Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

$$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 5]$$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Im } f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

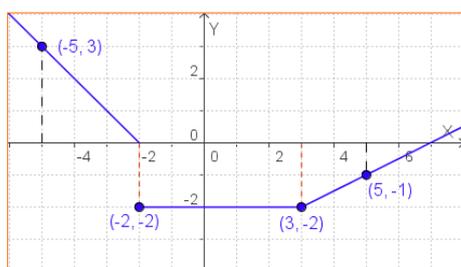
$$\text{Dom } f = [-3, +\infty)$$

$$\text{Im } f = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Dom } f = (-2, +\infty)$$

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$



$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & x < -2 \\ -2 & -2 \leq x \leq 3 \\ 0,5x - 3,5 & x > 3 \end{cases}$$

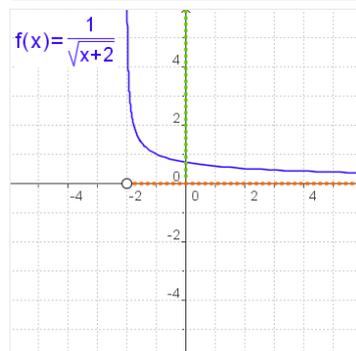
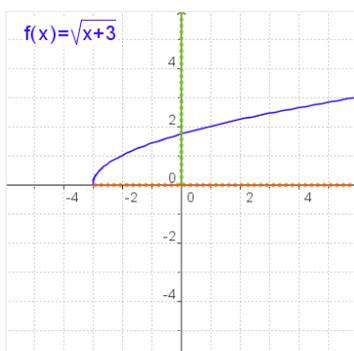
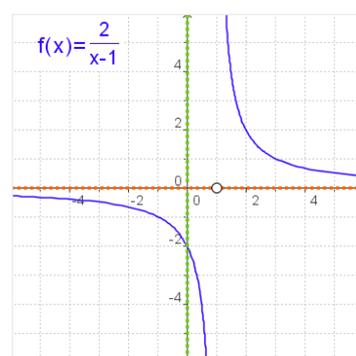
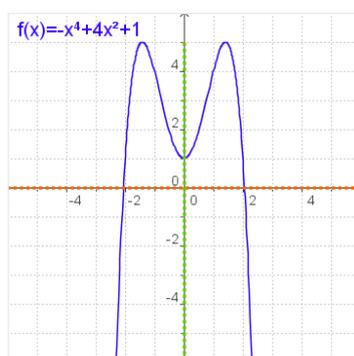
## Dominio y recorrido

Dada una función  $y=f(x)$

- Se llama **dominio** de  $f$  al conjunto de valores que toma la variable independiente,  $x$ . Se indica como **Dom  $f$** .

El dominio está formado, por tanto, por los valores de  $x$  para los que existe la función, es decir, para los que hay un  $f(x)$ .

- El **recorrido** es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente,  $y$ , esto es el conjunto de las imágenes. Se representa como **Im  $f$** .



## Funciones definidas a trozos

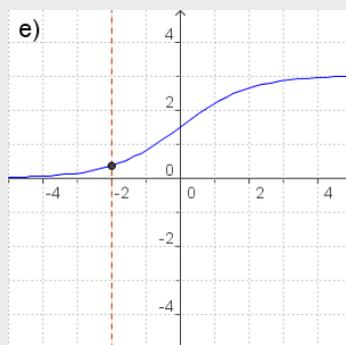
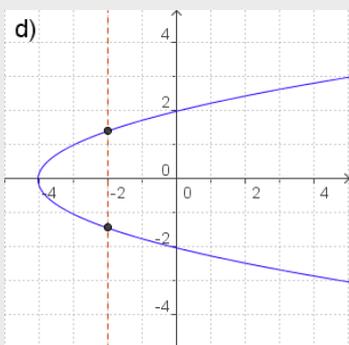
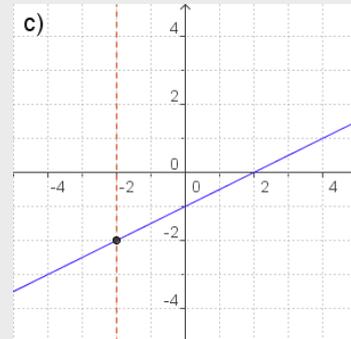
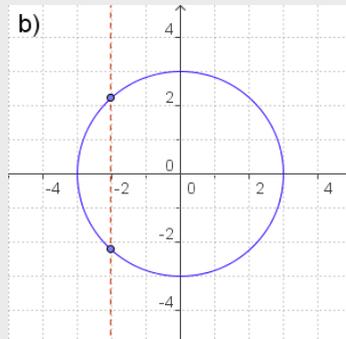
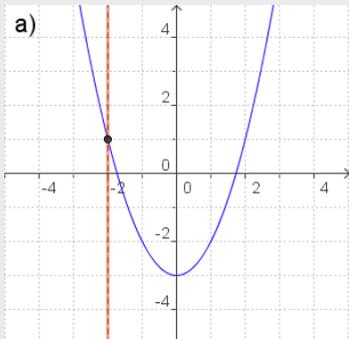
Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de  $x$ , se dice que están **definidas a trozos**.

Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de  $x$  para los que la función está definida.

En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

## EJERCICIOS resueltos

5. De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.

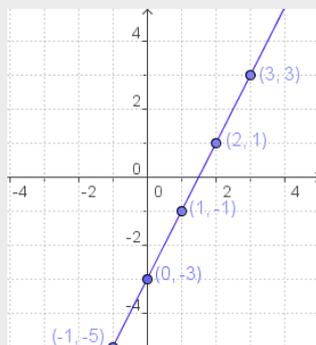


- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada  $x$  del dominio le corresponde un único valor de  $y$ .
- No son gráficas de una función b) y d)

6. Haz una tabla de valores, dibuja los puntos obtenidos y representa la función.

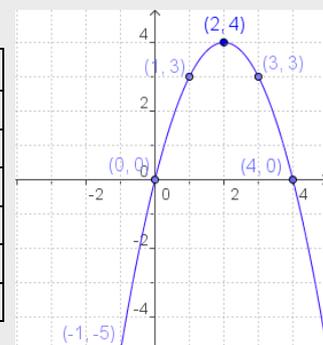
a)  $f(x) = 2x - 3$

x	f(x)
0	-3
1	-1
2	1
3	3
-1	-5
-2	-7



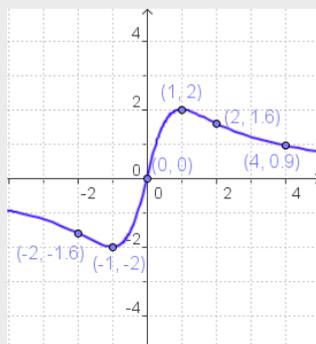
b)  $f(x) = -x^2 + 4x$

x	f(x)
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0
-1	-5



c)  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	f(x)
0	0
1	2
-1	-2
2	1,67
-2	-1,67
4	0,9



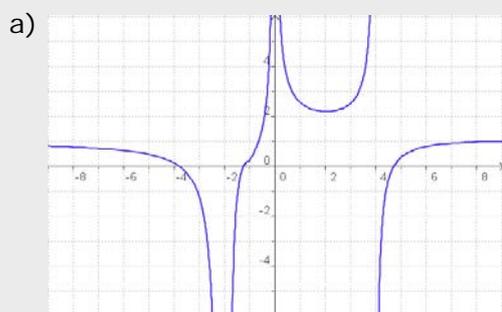
• **RECUERDA**

Para hacer una tabla de valores, a partir de la expresión de una función, sustituye en la fórmula la  $x$  por los valores que desees, opera y calcula los correspondientes de  $y=f(x)$ . En general procura alternar valores positivos y negativos.

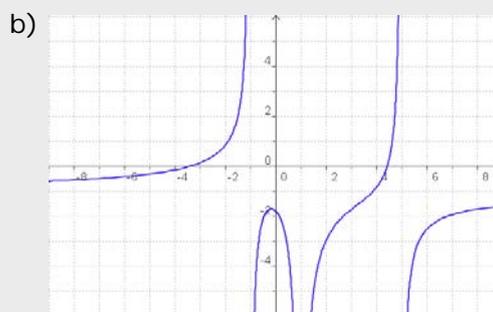
Dibuja los puntos  $(x,y)$  así obtenidos, y únelos.

## EJERCICIOS resueltos

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones.



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0, 4\}$$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1, 5\}$$

En los puntos indicados, en ambos casos, no se puede encontrar  $f(x)$  en la gráfica.

c)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$

Dom  $f = \mathbb{R}$  ya que es un polinomio

d)  $f(x) = \frac{x}{x-2}$

Dom  $f = \mathbb{R} - \{2\}$

e)  $f(x) = \sqrt{x-5}$

$$x-5 \geq 0, \quad x \geq 5 \Rightarrow \text{Dom } f = [5, +\infty)$$

f)  $f(x) = \sqrt{5-x}$

$$5-x \geq 0, \quad 5 \geq x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 5]$$

g)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4}}$

$$x+4 > 0, \quad x > -4 \Rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$$

h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$

$$2-x > 0, \quad 2 > x \Rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 2)$$

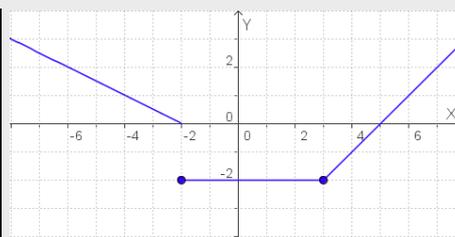
(En estos casos -4 y 2, respectivamente, no son del dominio ya que anulan el denominador)

4. En las siguientes funciones, definidas a trozos, calcula las imágenes de los valores de  $x$  indicados.

a)  $f(x) = \begin{cases} -0,5x - 1 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$x = -4$  se sustituye arriba ( $-4 < -2$ )  
 $x = -2, x = 1$  y  $x = 3$  se sustituyen en la del medio, ya que están en  $[-2, 3]$ .  
 $x = 6$  se sustituye abajo pues  $6 > 3$ .

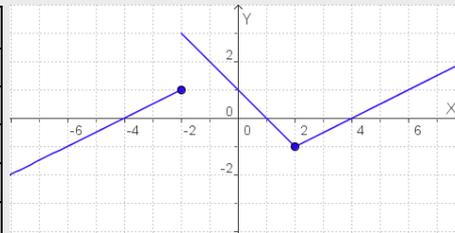
x	f(x)
-4	1
-2	-2
1	-2
3	-2
6	1



c)  $f(x) = \begin{cases} 0,5x + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ -x + 1 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0,5x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$x = -6, x = -2$  se sustituye arriba.  
 $x = 0$  se sustituye en la del medio, ya que están en  $-2 < 0 < 2$ .  
 $x = 2, x = 4$  se sustituye abajo.

x	f(x)
-6	-1
-2	3
0	1
2	-1
4	0



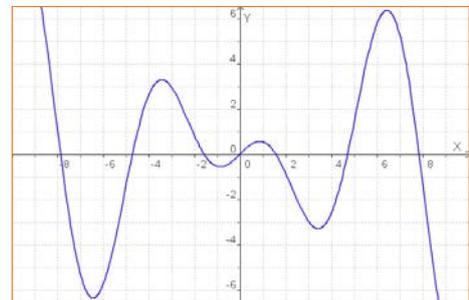
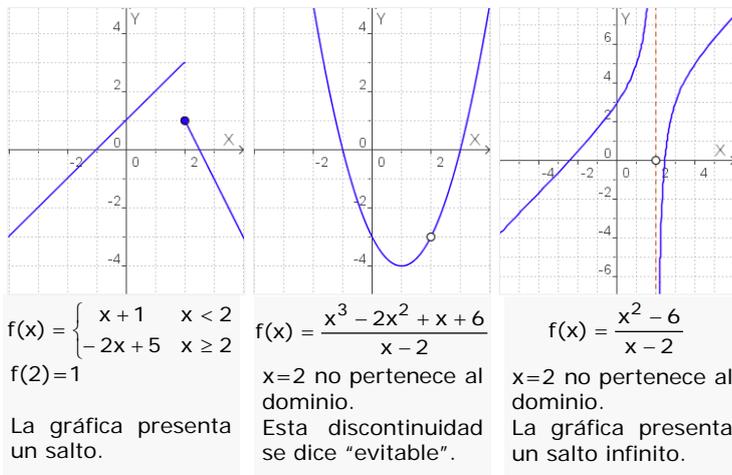
## 2. Propiedades de las funciones

### Continuidad

La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en  $x=2$ , pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



Una función  $y=f(x)$  es continua en  $x=a$  si:

- La función está definida en  $x=a$ , existe  $f(a)=b$ .
- Las imágenes de los valores próximos a  $a$  tienden a  $b$ .

Hay varias razones por las que una función no es continua en un punto:

- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) indefinidamente cuando nos acercamos al punto.

### Funciones periódicas

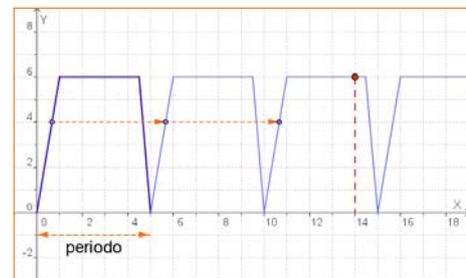
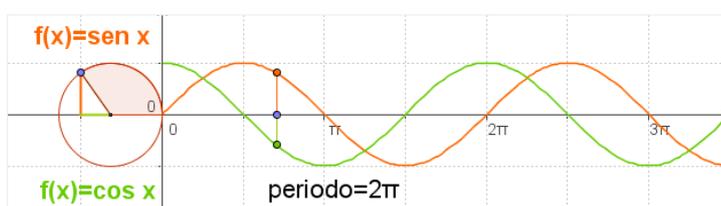
En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se dicen **periódicas**

Una **función** es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

$$f(x+\text{periodo})=f(x)$$

### Dos funciones periódicas importantes:



Una cisterna se llena y vacía automáticamente expulsando 6 litros de agua cada 5 minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que cuesta 1 minuto, permanece lleno 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Este proceso se repite periódicamente.

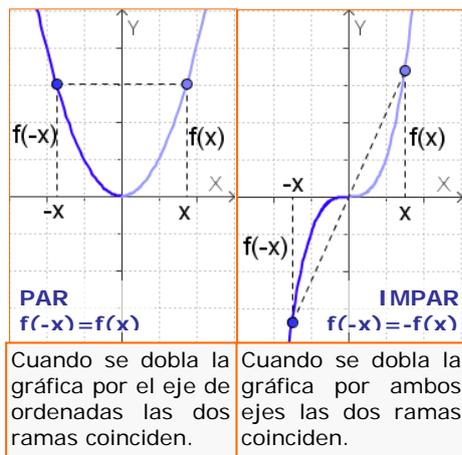
Para conocer el volumen de agua en el depósito en cada instante conocer lo que ocurre en estos primeros 5 minutos. Así a los 14 minutos, la cantidad de agua es:

$$f(14)=f(4+2 \cdot 5)=f(4)=6$$

Al dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En general, si el periodo es 5:

$$f(x+5 \cdot n)=f(x)$$



## Simetrías

La gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su dibujo.

- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **eje OY**, si  $f(-x) = f(x)$ .  
En este caso la función se dice **PAR**.
- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** cuando  $f(-x) = -f(x)$ .  
En este caso la función se dice **IMPAR**.

Observa los gráficos para reconocerlas.

## EJERCICIOS resueltos

5. Calcula el valor de  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas en el punto en que cambia la gráfica:

a)  $f(x) = \begin{cases} 0,5x + k & x \leq 4 \\ x - 3 & x > 4 \end{cases}$

$f(4) = 0,5 \cdot 4 + k = 2 + k$

Si se hubiera definido en el otro tramo sería:

$f(4) = 4 - 3 = 1$

como ambos tramos deben coincidir:

$2 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - 2 = -1$

b)  $f(x) = \begin{cases} k & x \leq 1 \\ -x + 1 & x > 1 \end{cases}$

$f(1) = k$

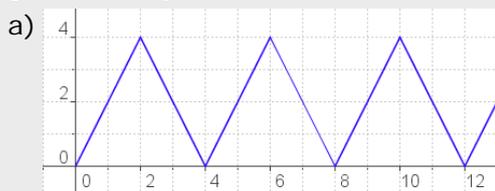
Si estuviera definida en el otro tramo sería:

$f(1) = -1 + 1 = 0$

como ambos tramos deben coincidir:

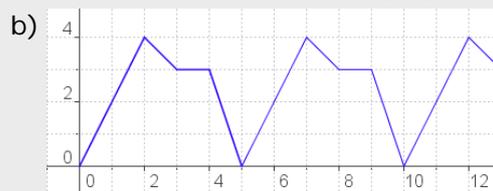
$k = 0$

6. ¿Cuál es el periodo de las funciones siguientes?. En cada caso calcula  $f(45)$ .



Periodo = 4

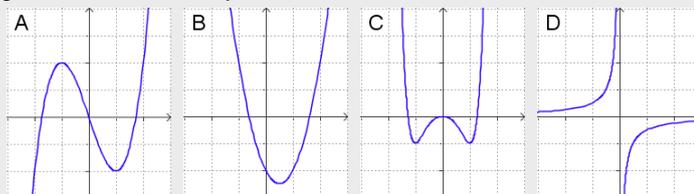
$45 = 4 \cdot 11 + 1 \quad f(45) = f(1) = 2$



Periodo = 5

$45 = 5 \cdot 9 \quad f(45) = f(0) = 0$

7. De entre las siguientes gráficas selecciona las que corresponden a funciones pares y a funciones impares.



Par: C

Impares: A y D

B no es par ni impar

8. ¿Las funciones siguientes (corresponden a las de ej. 7) son pares ó impares?

a)  $f(x) = x^3 - 3x$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$

IMPAR

b)  $f(x) = 2x^2 - 2x - 2$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 2(-x) - 2 = 2x^2 + 2x - 2$

Ni PAR ni IMPAR

c)  $f(x) = x^6 - x^4 - x^2$

$f(-x) = (-x)^6 - (-x)^4 - (-x)^2 = 2x^6 - x^4 - x^2 = f(x)$

PAR

d)  $f(x) = -1/x$

$f(-x) = -1/(-x) = 1/x = -f(x)$

IMPAR

# Funciones y gráficas

## 3. Tasa de variación y crecimiento

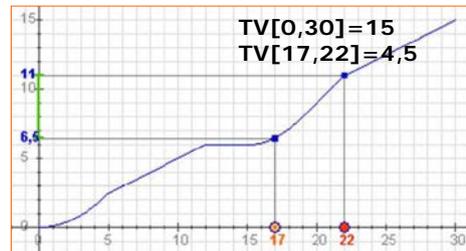
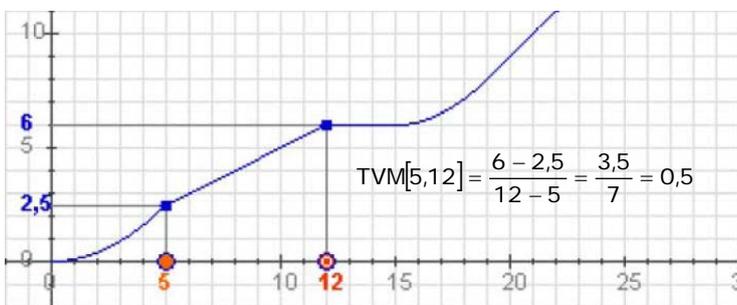
### Tasa de variación de una función

La **tasa de variación** o **incremento** de una función es el aumento o disminución que experimenta una función al pasar la variable independiente de un valor a otro.

$$TV[x_1, x_2] = f(x_2) - f(x_1)$$

De más utilidad resulta calcular la llamada **tasa de variación media**, que nos indica la variación relativa de la función respecto a la variable independiente:

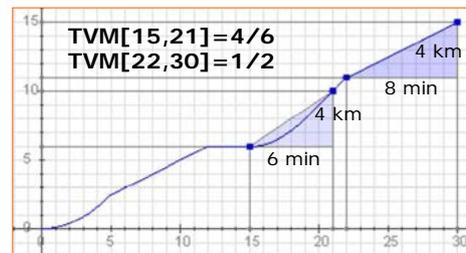
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La gráfica representa la distancia en km recorrida de un ciclista en función del tiempo, en minutos, empleado.

La TV corresponde a la distancia recorrida en un intervalo de tiempo.

La TVM es la velocidad media en un intervalo de tiempo determinado.



### Crecimiento y decrecimiento

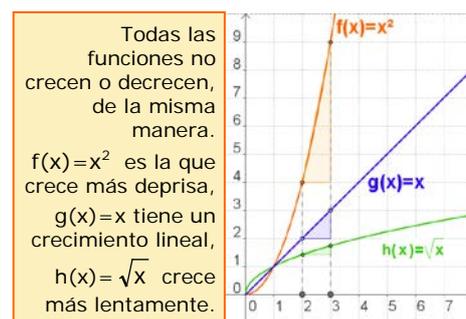
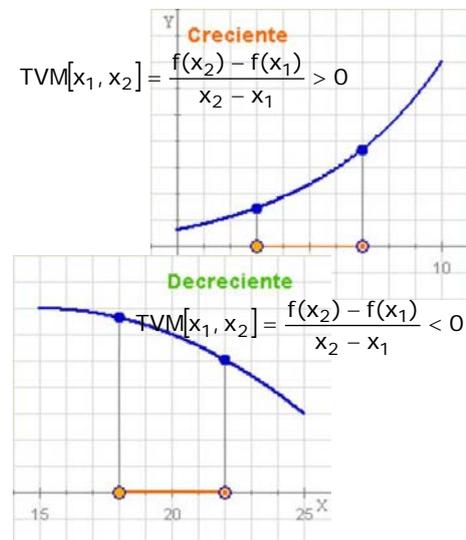
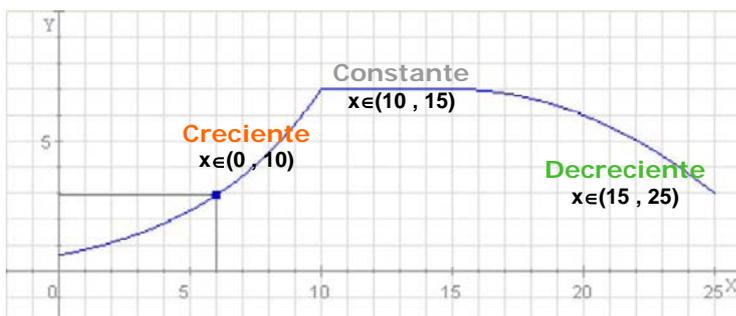
Una característica de las funciones que se puede visualizar fácilmente en las gráficas es la monotonía. Cuando al aumentar el valor de  $x$  aumenta el valor de  $y=f(x)$ , la gráfica "asciende" y se dice que la función es **creciente**. Si por el contrario al aumentar  $x$  disminuye  $y$ , la gráfica "desciende", y la función **decrece**. Precizando un poco más:

Una **función** es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo

- Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) < f(x_2)$

Y será **decreciente**:

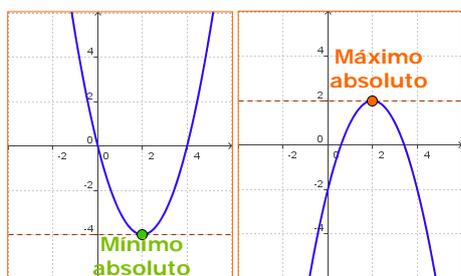
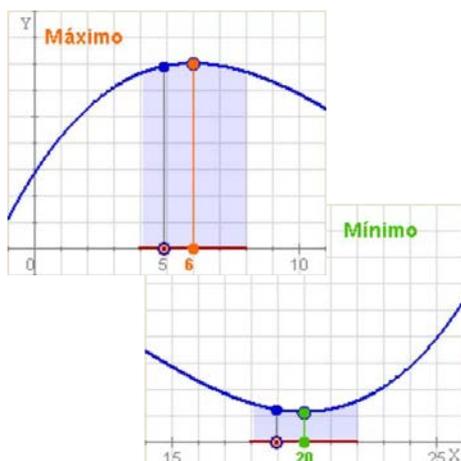
- Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) > f(x_2)$



## Máximos y mínimos

Dada una función continua en un punto  $x=a$ , se dice que presenta un **máximo relativo**, si a la izquierda de dicho punto la función es creciente y a la derecha la función es decreciente.

Si, por el contrario, la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha hay un **mínimo relativo**.



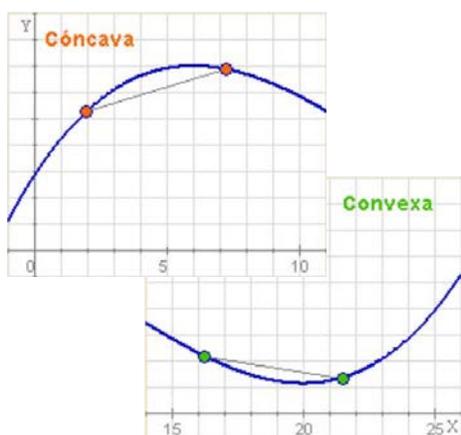
Si se verifica que  $f(a) > f(x)$  para cualquier valor  $x$  del dominio, y no sólo para los valores de "alrededor", se habla de **máximo absoluto** en  $x=a$ .

Y análogamente se dice que en  $a$  hay un **mínimo absoluto** si  $f(a) < f(x)$  para cualquier  $x$  del dominio.

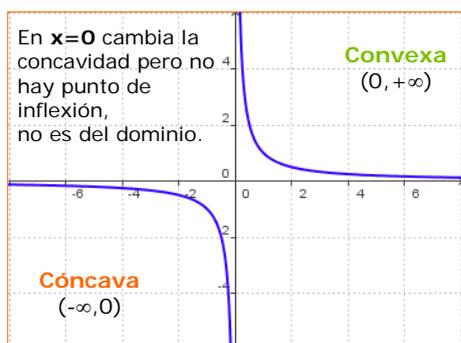
## Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Otra característica de interés en las gráficas de las funciones es la concavidad, estudiar los intervalos en los que la gráfica se curva hacia abajo o hacia arriba.

- ✓ Una función es **cóncava** en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de la curva queda debajo de ella, y **convexa** si queda por encima.



Los puntos del dominio en los que la función pasa de cóncava a convexa o viceversa, se llaman **puntos de inflexión**.



## EJERCICIOS resueltos

9. Calcula la tasa de variación media de las funciones siguientes entre los puntos indicados. Comprueba en la figura que en las funciones cuyo gráfico es una recta la TVM es constante.



a)  $y=2x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{9-5}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

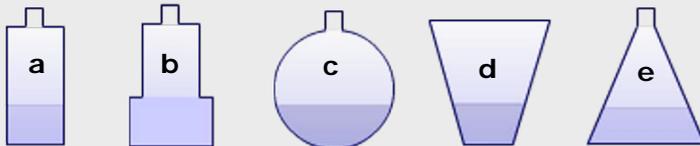
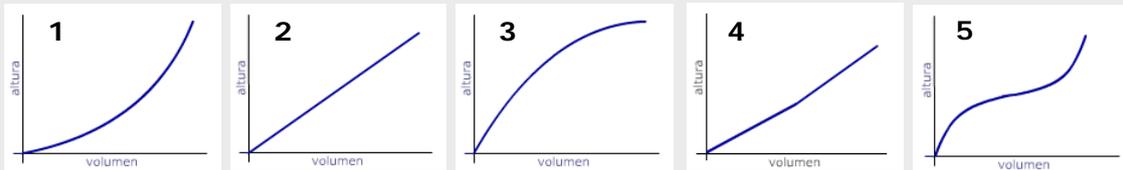
b)  $y=0,5x+3$

$$TVM[1,3] = \frac{4,5-3,5}{2} = 0,5$$

$$TVM[-5,-2] = \frac{-1+7}{-2+5} = \frac{6}{3} = 2$$

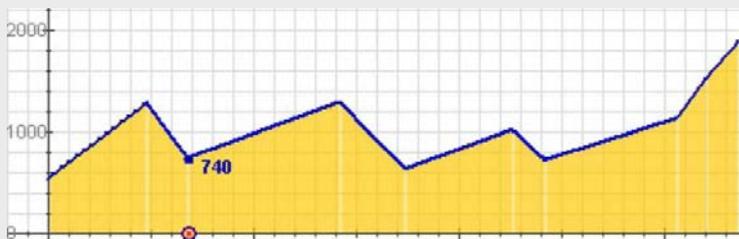
$$TVM[-3,0] = \frac{3-1,5}{3} = 0,5$$

10. Las gráficas representan el llenado de los distintos recipientes, ¿qué gráfica corresponde a cada uno?



- a → 2
- b → 4
- c → 5
- d → 3
- e → 1

11. Recuerda la función que daba el “perfil” de una etapa de la Vuelta, que viste en el primer capítulo, a) escribe los intervalos de crecimiento o decrecimiento; b) ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los máximos relativos?, ¿qué valor toman?, ¿y los mínimos?; c) Hay máximo ó mínimo absoluto?



km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882



- a)  
Creciente:  $(0,24) \cup (34,71) \cup (87,113) \cup (121,168)$   
Decreciente:  $(24,34) \cup (71,87) \cup (113,121)$

- b)  
MÁX:  $x=24, y=1280$   
 $x=71, y=1290$   
 $x=113, y=1020$   
MÍN:  $x=34, y=740$   
 $x=87, y=630$   
 $x=121, y=720$

- c)  
En este caso la función tiene máximo y mínimo absolutos, que se alcanzan ambos en los extremos del dominio, mín en  $x=0$  de valor 540 m, máx en  $x=168$  de valor 1882 m.



## Para practicar

1. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su cuadrado menos 1. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 2. Calcula también los cortes con los ejes.

2. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su mitad más 3. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -1, 1 y 3. Calcula también los cortes con los ejes.

3. Considera la función que a cada  $n^\circ$  le asigna su doble menos 5. Escribe su expresión analítica y calcula la imagen de -2, -1 y 1. Calcula también los cortes con los ejes.

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

b)  $f(x) = \frac{2x}{2x - 4}$

c)  $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 12}$

d)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 20}$

e)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x - 4}}$

5. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$     b)  $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

a)  $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$  en  $x=1$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$  en  $x=0$

c)  $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$  en  $x=-1$

d)  $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x \leq -1 \\ 4 & x > -1 \end{cases}$  en  $x=-1$

7. Estudia la simetría de las funciones:

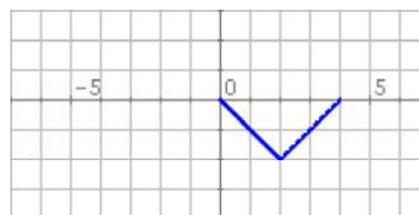
a)  $f(x) = x^3 + 2x$     b)  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{5x^2}$

c)  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1}$     d)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

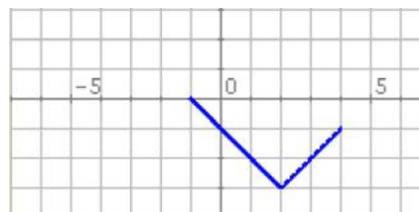
e)  $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{2x}$     f)  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3$

8. En cada caso la gráfica representa un tramo o periodo de una función periódica, representa otros tramos, indica el periodo y calcula la imagen del punto de abscisa que se indica:

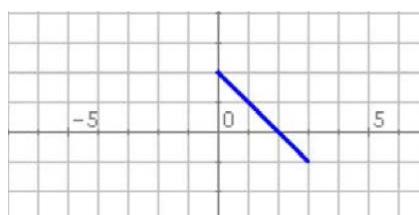
a)  $f(-2)$



b)  $f(-3)$

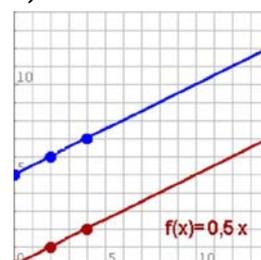


c)  $f(-1)$

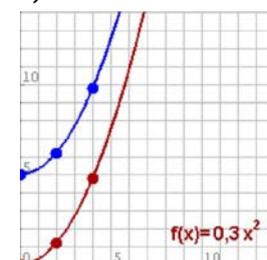


9. Calcula las TVM de las funciones de la gráfica en los intervalos  $[0,4]$  y  $[2,4]$ .

a)

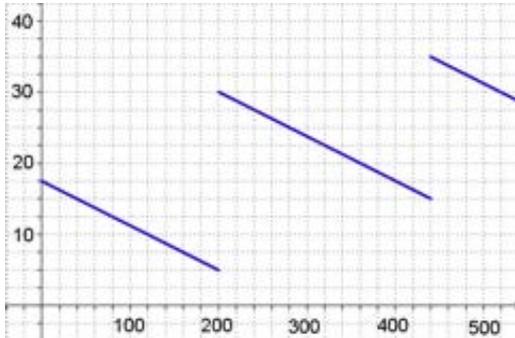


b)

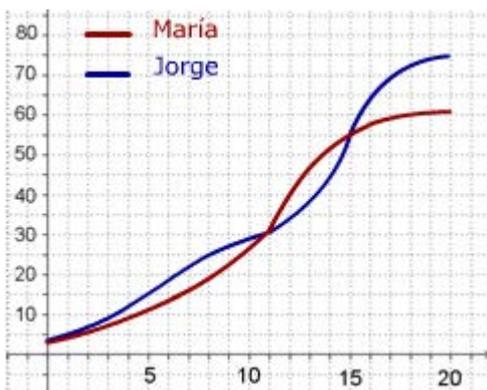


# Funciones y gráficas

10. El gráfico muestra cómo varía la gasolina que hay en mi coche durante un viaje de 520 km por una autovía.

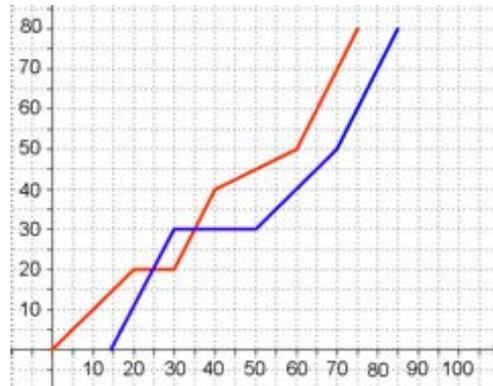


- a) ¿Cuánta gasolina había al cabo de 240 km?. En el depósito caben 40 litros, ¿cuándo estaba lleno más de medio depósito?
- b) ¿En cuántas gasolineras paré?, ¿en qué gasolinera eché más gasolina?. Si no hubiera parado, ¿dónde me habría quedado sin gasolina?
- c) ¿Cuánta gasolina usé en los primeros 200 km?. ¿Cuánta en todo el viaje?. ¿Cuánta gasolina gasta el coche cada 100 km en esta autovía?
11. María y Jorge son dos personas más o menos típicas. En la gráfica puedes comparar como ha crecido su peso en sus primeros 20 años



- a) ¿Cuánto pesaba Jorge a los 8 años?, ¿y María a los 12?. ¿Cuándo superó Jorge los 45 kg?
- b) ¿A qué edad pesaban los dos igual?. ¿Cuándo pesaba Jorge más que María?, ¿y María más que Jorge?
- c) ¿Cuál fue el promedio en kg/año de aumento de peso de ambos entre los 11 y los 15 años?. ¿En qué periodo creció cada uno más rápidamente?

12. El gráfico da el espacio recorrido por dos coches que realizan un mismo trayecto.



- a) ¿Cuál es la distancia recorrida?. ¿Si el primer coche salió a las 10:00, a qué hora salió el 2º?. ¿Cuánto le costó a cada uno hacer el recorrido?
- b) ¿Cuánto tiempo y dónde estuvo parado cada coche?. ¿En qué km adelantó el 2º al 1º?, ¿y el 1º al 2º?
- c) ¿Qué velocidad media llevaron en el trayecto total?, ¿en qué tramo la velocidad de cada coche fue mayor?
13. Las gráficas siguientes corresponden a las funciones I y II.

I)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$     II)  $f(x) = -\frac{x^2 + 1}{x}$



Calcula en cada una:

- a) El dominio.
- b) Los puntos de corte con los ejes.
- c) Los valores de  $x$  para los que la función es positiva y negativa.
- d) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- e) Los máximos y mínimos.
- f) ¿Cuántos puntos de inflexión tienen?
- g) Los intervalos de concavidad y convexidad.

Para saber más



## La primera función

El primero en construir una función fue **Galileo** (1564-1642). Desde lo alto de la torre inclinada de Pisa tiró dos bolas, una de hierro y otra de madera y comprobó que a pesar de la diferencia de peso, ambas llegaban al suelo a la vez, había descubierto la ley de caída de los cuerpos.

Continuando su estudio y empleando un curioso artilugio, comprobó que el espacio recorrido depende del cuadrado del tiempo, escribiendo la primera función de la historia. Pulsando aquí puedes leer más sobre el tema.

La primera definición formal de función se debe a **Euler**, quien en el libro *Introductio in analysis infinitorum*, publicado en 1748, dice:

*“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constantes”.*

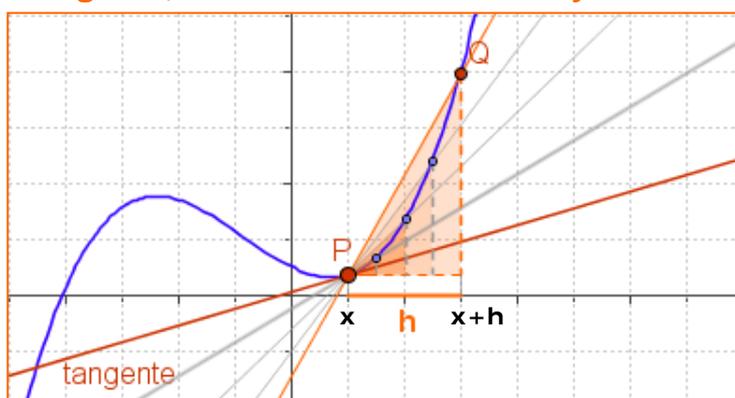
En 1755 en *Institutiones calculi differentialis*, vuelve sobre el tema acercándose más a la que hoy utilizamos.

## Una función curiosa

La llamada función de Dirichlet, es la que a cada número real le asigna el 1 si es racional y el 0 si es irracional. Es discontinua en todos sus puntos.

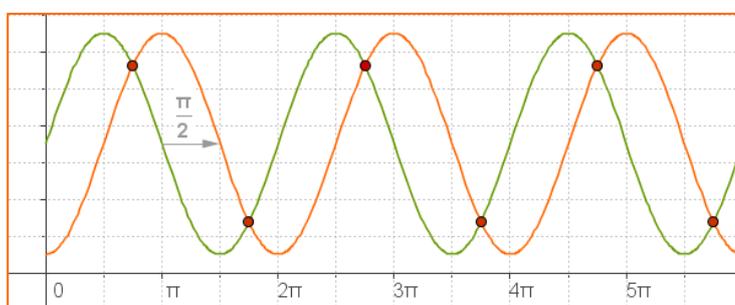
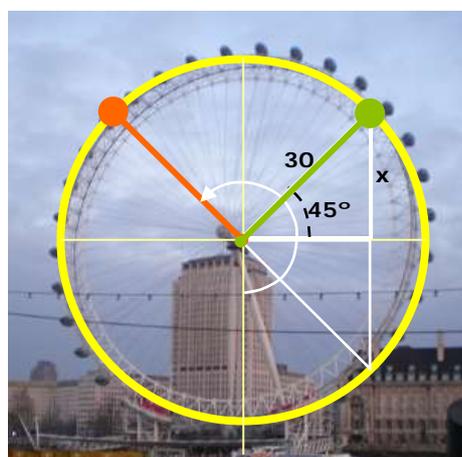
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

## Tangente, tasa de variación media y derivada



Cuando el punto  $P \rightarrow Q$ , la recta secante  $PQ$  tiende a la recta **tangente** a la curva  $y=f(x)$  en  $P$ . La pendiente de la secante es la TVM $[P,Q]$  que tiende a la de la tangente.

Es la **derivada** de la función que  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$   
Estudiarás en cursos posteriores.

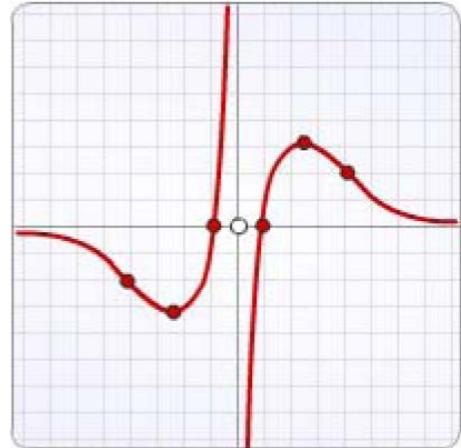


Observa las dos gráficas, ambas funciones son periódicas de periodo  $2\pi$ , la gráfica verde está desfasada  $\pi/2$  respecto a la naranja; fijate donde alcanzan los máximos y los mínimos. Cuando coinciden las dos gráficas, ¿a qué altura están?,  
 $x = r \cdot \sin 45^\circ = 21,21$  m; 1)  $35 - 21,21 = 13,79$  2)  $35 + 21,21 = 56,21$



## Recuerda lo más importante

- ✓ Una **función** es una relación entre dos variables  $x$  e  $y$ , de modo que a cada valor de la variable independiente,  $x$ , le asocia un único valor de la variable  $y$ , la dependiente.
- ✓ El **dominio** de una función es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar  $x$ .
- ✓ La **gráfica** de una función es el conjunto de puntos  $(x, f(x))$  representados en el plano.
- ✓ Una función es **continua** si puede representarse con un solo trazo. Es **discontinua** en un punto si presenta un "salto" o no está definida en ese punto.
- ✓ Una función es **periódica** de periodo  $t$ , si su gráfica se repite cada  $t$  unidades,  $f(x+t)=f(x)$ .
- ✓ Una función es **simétrica** respecto al eje OY, función par, si  $f(x)=f(-x)$ ; y es simétrica respecto al origen, función impar, si  $f(-x)=-f(x)$ .
- ✓ La **tasa de variación** de una función entre dos puntos es la diferencia:  $TV[x_1, x_2]=f(x_2)-f(x_1)$   
La **tasa de variación media** es:
 
$$TVM[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
- ✓ Una función es **creciente** en un intervalo, cuando dados dos puntos cualesquiera del mismo
  - Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) < f(x_2)$
 Y es **decreciente**
  - Si  $x_1 < x_2$  entonces  $f(x_1) > f(x_2)$
- ✓ Una función continua en un punto  $x=a$ , presenta un **máximo** relativo, si a la izquierda de dicho punto es creciente y la derecha es decreciente. Si, por el contrario, es decreciente antes y creciente después hay un **mínimo** relativo.
- ✓ La gráfica de una función puede ser **cóncava** (hacia abajo) o **convexa** (hacia arriba). Los puntos del dominio en los que cambia la concavidad, se llaman **puntos de inflexión**.



### Dominio

Todos los reales excepto el 0

### Continuidad

No es continua, en 0 presenta una discontinuidad de salto infinito.

### Simetría

Es simétrica respecto al origen de coordenadas, función impar.

### Cortes con los ejes

Al eje de abscisas en  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ ; no corta al eje de ordenadas.

### Crecimiento y decrecimiento

Es creciente en  $(-\infty, -2,5) \cup (2,5, +\infty)$   
Y decreciente en  $(-2,5, 0) \cup (0, 2,5)$

### Máximos y mínimos

Máximo en  $(2,5, 3)$ ;  
Mínimo en  $(-2,5, 3)$

### Concavidad y convexidad

#### Puntos de inflexión

Es cóncava en  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$   
Y convexa en  $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$   
 $(-3, 0)$  y  $(3, 0)$  son puntos de inflexión.  
En  $x=0$  cambia la concavidad pero no hay punto de inflexión ya que no es del dominio.



1. Calcula la imagen de  $x=0$  en la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

2. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

3. ¿Cuál de los puntos siguientes:  $(1,-2)$   $(3,-15)$   $(4,-26)$  no pertenece a la gráfica de la función  $f(x)=-x^2-3x+2$ ?

4. Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta  $y=-0,25x-0,75$ .

5. Si  $y=f(x)$  es una función impar y  $f(3)=-2$ , ¿cuánto vale  $f(-3)$ ?

6. La gráfica muestra el primer tramo de una función periódica de periodo 5 y expresión  $f(x)=-x^2+5x$  ( $0 \leq x < 5$ ). Calcula  $f(28)$ .

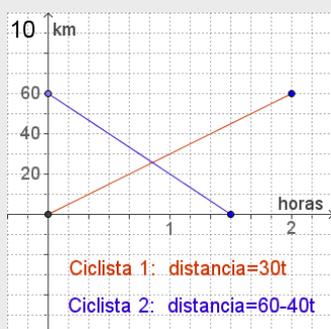
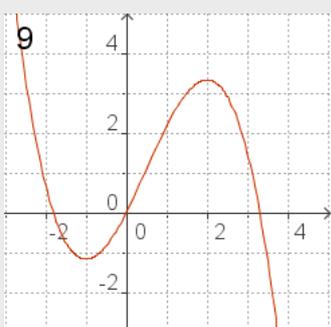
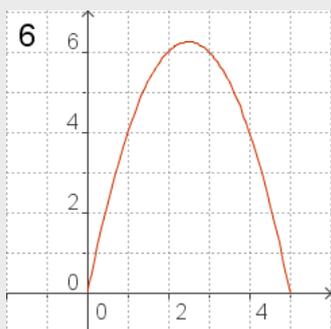
7. Averigua el valor de  $a$  para que la función sea continua en  $x=3$ .

$$f(x) = \begin{cases} 2x + k & x \leq 3 \\ 6 & x > 3 \end{cases}$$

8. Calcula la TVM $[-3,0]$  de la función  $f(x)=-0,25x^2-3x+1$ .

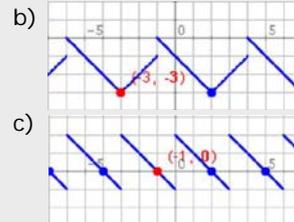
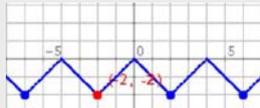
9. Determina el intervalo en que la función de la gráfica es creciente.

10. Un ciclista sale de un punto A hacia otro B distante 60 km a una velocidad constante de 30 km/h. A la vez otro ciclista sale de B en dirección a A, a 40 km/h. Observa la gráfica y calcula a cuántos km del punto A se cruzan en la carretera.



## Soluciones de los ejercicios para practicar

- $f(x)=x^2-1$   $f(-1)=0$ ,  $f(2)=3$ ,  $f(1)=0$   
Corte OY: -1 Corte OX: 1 y -1
- $y=\frac{x}{2}+3$   
 $f(-1)=2,5$   $f(1)=3,5$   $f(3)=4,5$   
Corte OY: 3 Corte OX: -6
- $f(x)=2x-5$   
 $f(-2)=-9$ ,  $f(-1)=-7$ ,  $f(1)=-5$   
Corte OY: -5 Corte OX: 2,5
- a) Es un polinomio,  $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$   
b) Todos los reales excepto el 2  
c)  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$   
d) Todos los reales  
e)  $(2, +\infty)$
- a) Es discontinua en  $x=3$   
b) Es discontinua en  $x=-3$
- a) Discontinua en 1.  
A la izda: 3; A la dcha: 1  
b) Continua en 0.  
A la izda: 2; A la dcha: 2  
c) Continua en -1.  
A la izda: 4; A la dcha: 4  
c) Continua en -1.  
A la izda: 4; A la dcha: 4
- a) e) son impares; b) c) y f) son pares; d) no es par ni impar
- a)  $\text{TVM}[0,4]=\text{TVM}[2,4]=0,5$   
b)  $\text{TVM}[0,4]=1,2$ ;  $\text{TVM}[2,4]=1,8$
- a)



- a) 27,5 litros; entre los km 200 y 360 y del 440 hasta el 520.  
b) En dos, una en el km 200 y otra en el 440; eché más en la 1ª; a los 280 km  
c) 12,5 l; 32,5 l; 6,25 l/100 km
- a) J. 25 kg, M. 35 kg ; a los 14 años  
b) A los 11 (30 kg) y a los 15 (55 kg)  
J más que M: hasta los 11 y desde los 15;  
M más que J: de los 11 a 15  
c) 25kg; 6,25 kg/año; M entre los 11 y 12 (10 kg/año); J entre los 12-14 (10 kg/año)
- a) 80 km; a las 10:15; 75 y 70 min  
b) 10 min en km 20, 20 min en km 30; en el km 20 y en 30 respectivamente.  
c) 64 km/h y 68,6 km/h; 1º: min 60-75  
2º: min 15-30 y min 70-85
- I) a)  $\mathbb{R}$ ; b)  $(0,0)(3,0)$   
c)  $y>0$   $(0, +\infty)$ ;  $y<0$   $(-\infty, 0)$ ;  
d) crec:  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ , decrec:  $(1, 3)$ ;  
e) max  $x=1$ , mín  $x=3$ ;  
f) Uno; conc:  $(-\infty, 2)$  conv:  $(2, +\infty)$   
II) a)  $\mathbb{R}-\{0\}$ ; b) No corta  
c)  $y<0$   $(0, +\infty)$ ;  $y>0$   $(-\infty, 0)$ ;  
d) decrec:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , crec:  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ ;  
e) max  $x=1$ , mín  $x=-1$ ;  
f) Ninguno; conv:  $(-\infty, 0)$  conc:  $(0, +\infty)$

### Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- $f(0)=-1$
- $\mathbb{R} - \{2, -2\}$
- $(3, -15)$
- $(0, -0,75)$   $(-3, 0)$
- $f(-3)=2$
- $f(28)=f(3)=6$
- $k=0$
- $\text{TVM}[-3, 0] = -2,25$
- $(-3, 1)$
- A partir de 4,25 min la A.