

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar problemas en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales.
- Calcular la función que relaciona a esas magnitudes a partir de diferentes datos y representarla gráficamente.
- Representar estas funciones de diferentes maneras.
- Comparar funciones de este tipo.
- Resolver problemas reales en los que intervienen estas funciones.
- Reconocer y representar gráficamente funciones cuadráticas $y=ax^2+bx+c$.

Antes de empezar

1. Función de proporcionalidad directa... pág. 4
Definición
Representación gráfica
2. Función afín pág. 6
Definición
Representación gráfica
3. Ecuación de la recta pág. 8
Forma punto-pendiente
Recta que pasa por dos puntos
Forma general
4. Posición relativa de dos rectas pág. 12
Análisis en forma explícita
Análisis en forma general
5. Aplicaciones pág. 14
Problemas simples
Problemas combinados
6. Funciones cuadráticas pág. 16
La función $y=ax^2$
Traslaciones de una parábola
Aplicaciones

Ejercicios para practicar

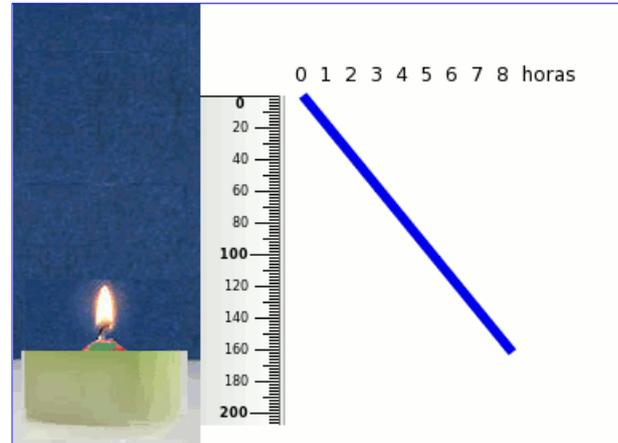
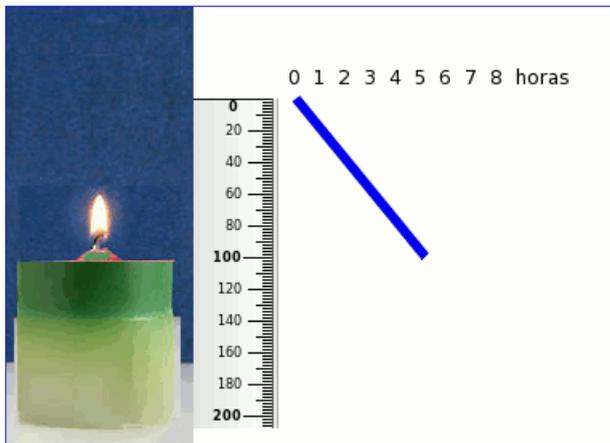
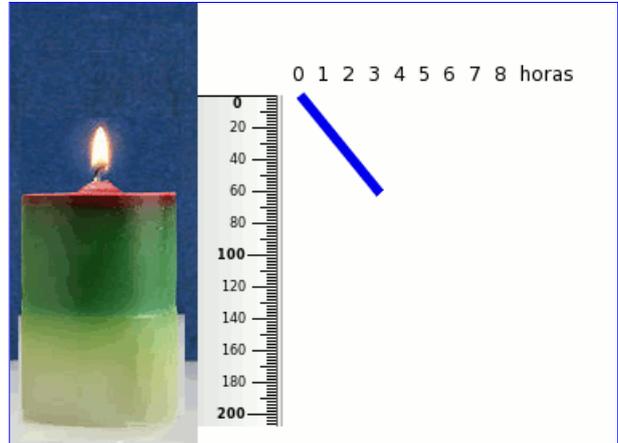
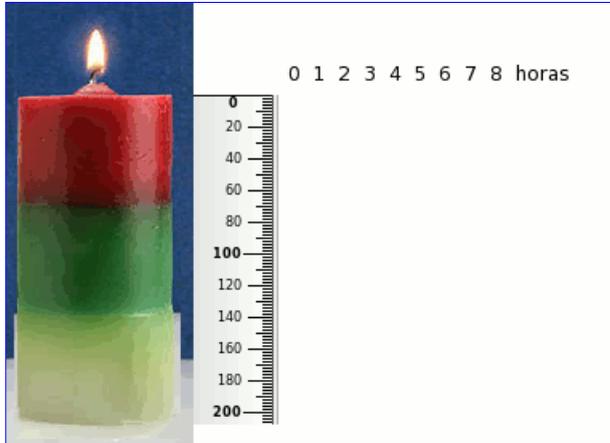
Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar



Investiga

Si una sandía pesa 3kg y otra pesa 6kg nos cobrarán el doble por la segunda. Pero, si la primera tiene un diámetro de 15 cm y la otra lo tiene de 30 cm, ¿el precio de la segunda será el doble que el de la primera?

Intenta encontrar la respuesta y dar una explicación razonada a la misma.



Funciones lineales y cuadráticas

1. Función de proporcionalidad directa



Se llama **función de proporcionalidad directa** o, simplemente, **función lineal** a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x,y). Su ecuación tiene la forma

$$y = mx \quad \text{ó} \quad f(x) = mx$$

El factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de **pendiente** de la función porque, como veremos en la siguiente sección, indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

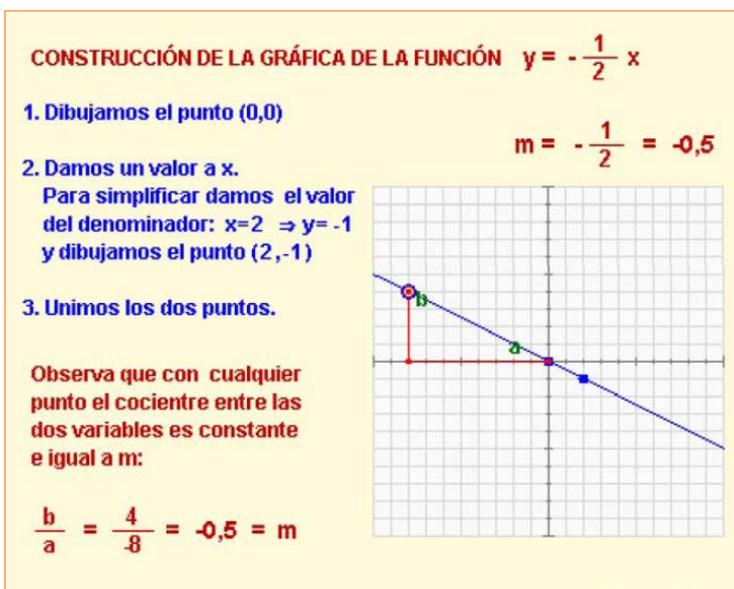
Recuerda: dos magnitudes son directamente proporcionales si su cociente es constante.

Representación gráfica

Como has visto, las funciones lineales se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como $y=mx$, si $x=0$ entonces $y=0$; por lo tanto la gráfica de todas las funciones lineales pasa por el punto (0,0).

Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x e unir ese punto con el origen de coordenadas (0,0).

Si $x=1$, entonces $y=m$, por tanto m representa la variación de la y por cada unidad de x, es decir, la inclinación o **pendiente de la recta**. Si m es positiva, representa la cantidad que sube la y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que baja.



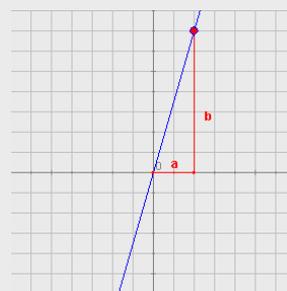
EJERCICIOS resueltos

1. Determina si las relaciones entre las parejas de magnitudes siguientes son lineales o no, escribiendo para ello la ecuación que las relaciona.
- Relación entre el precio inicial y el precio rebajado con un 10%.
 - Relación entre el peso y el volumen de un material en condiciones constantes de presión y temperatura.
 - Un banco ofrece un depósito anual al 5% con una comisión fija de 20€. Relación entre la cantidad invertida y los intereses recibidos.
 - Relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado.

Solución:

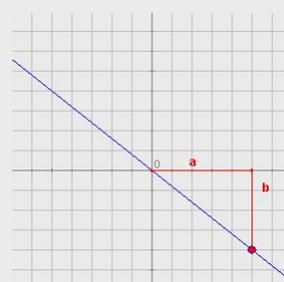
- Si el descuento es 10% pago el 90%: $P_{\text{Rebajado}} = 0.9 \cdot P_{\text{Inicial}}$ (SÍ es lineal)
- La relación entre peso (P) y volumen (V) es la densidad (d), que es constante si no cambian las condiciones de presión y temperatura: $P = d \cdot V$ (SÍ es lineal)
- Si C es la cantidad invertida e I son los intereses $I = 0.05 \cdot C - 20$ (NO es lineal, pero casi lo es. En realidad es una función afín que veremos en el siguiente capítulo)
- $A = \text{long}^2$ (NO es lineal)

2. Determina las ecuaciones de las funciones lineales cuyas gráficas son:



a.

Buscamos un punto de coordenadas enteras (no es estrictamente necesario pero es más cómodo si es posible). $a = 2$, $b = 7$. La pendiente es $m = 7/2$ y la ecuación es $y = \frac{7}{2}x$



b.

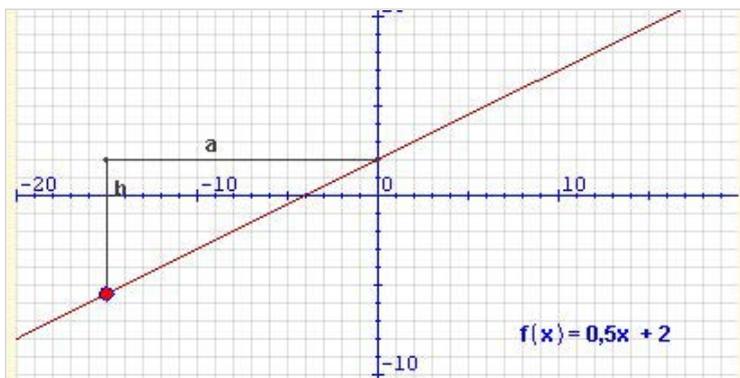
En este caso $a = 5$ y $b = -4$ (le asignamos un valor negativo porque la recta es decreciente). La pendiente es, pues, $m = -4/5$ y la ecuación $y = -\frac{4}{5}x$

2. Función afín

Definición

Si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que las liga ya no es totalmente lineal (*las magnitudes ya no son proporcionales*). Se dice que es una **función afín** y su forma es:

$$y = mx + n \quad \text{ó} \quad f(x) = mx + n$$



m es la pendiente, pero f(x) y x no son proporcionales (salvo si n=0):

$$\frac{b}{a} = \frac{-7,5}{-15} = 0,5 \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{-5,5}{-15} = 0,3666 \quad \text{No es constante.}$$

observa que n coincide con el punto de corte con el eje Y.

La **pendiente**, m, sigue siendo la constante de proporcionalidad y el término n se denomina **ordenada en el origen** porque es el valor que toma y (ordenada) cuando x vale 0 (abscisa en el origen).

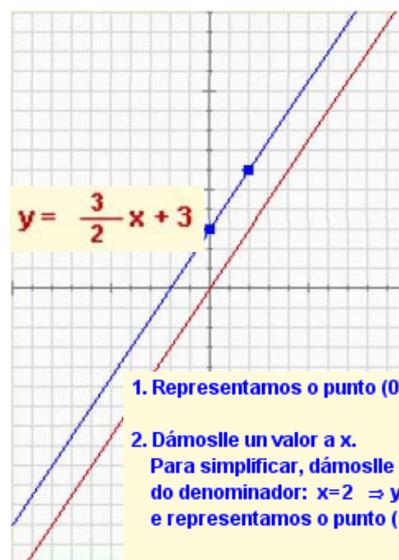
Representación gráfica

Las funciones afines se representan también mediante líneas rectas, pues el término independiente que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación hacia arriba o hacia abajo de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos.

- Uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, como hemos visto, la **ordenada en el origen**, n, nos indica que la recta pasa por el punto **(0,n)**.
- El otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y. Uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función.

Recuerda: Ahora el cociente entre f(x) y x no es constante.



1. Representamos o punto (0,3)

2. Dámosle un valor a x.
Para simplificar, dámosle o valor do denominador: $x=2 \Rightarrow y=6$
e representamos o punto (2,6)

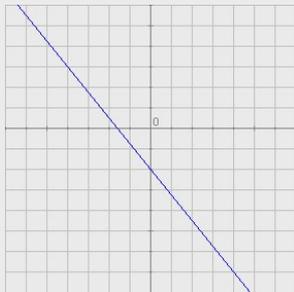
3. Unimos os dous puntos.

Compara coa gráfica de

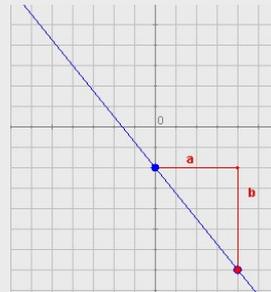
$$y = \frac{3}{2}x$$

EJERCICIOS resueltos

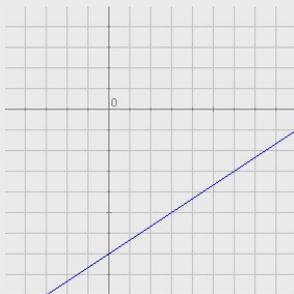
3. Determina las ecuaciones de las funciones afines cuyas gráficas son:



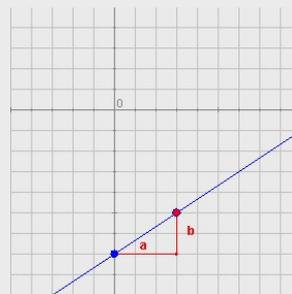
a.



Corta al eje Y en el punto $(0, -2)$, luego $n = -2$. Ahora buscamos otro punto de coordenadas enteras si es posible $(4, -7)$ y calculamos sus distancias horizontal y vertical al punto $(0, -2)$: $a = 4$, $b = -5$ (Recuerda: negativo por ser una recta decreciente). La pendiente es $m = -5/4$ y la ecuación es $y = -\frac{5}{4}x - 2$



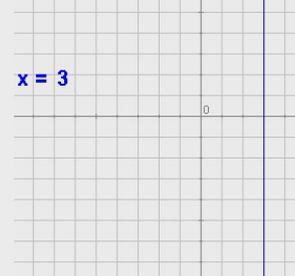
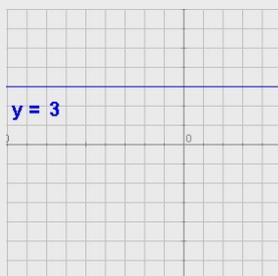
b.



En este caso $n = -7$, $a = 3$ y $b = 2$. La pendiente es, pues, $m = 2/3$ y la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 7$

4. Casos particulares:

a. Si la pendiente es cero, la ecuación es $y = n$ y la función es constante.



b. Si la recta es vertical la ecuación es $x = k$ y **no es una función**. Decimos que en este caso **la pendiente es infinita**.

Funciones lineales y cuadráticas

3. Ecuación de la recta

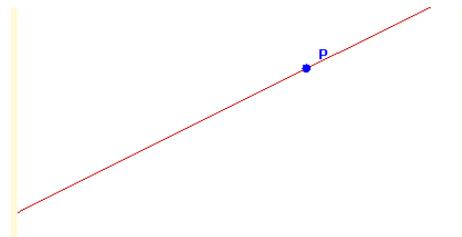
Forma punto-pendiente

La ecuación $y = mx + n$ que hemos visto se denomina **forma explícita** de la ecuación de la recta, y nos permite hallar dicha ecuación cuando conocemos la pendiente y la ordenada en el origen.

Cuando sólo conocemos la pendiente, m , y las coordenadas de otro de los puntos de la recta, (x_0, y_0) , su ecuación es

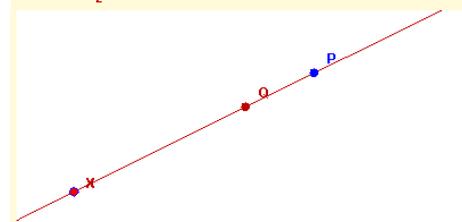
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta. En la secuencia siguiente se explica cómo se obtiene.



De la recta de la imagen se conocen su pendiente y las coordenadas de uno de los puntos por los que pasa. Queremos determinar su ecuación:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5)$$



Consideremos un punto arbitrario de la recta, X y supongamos que conocemos la ordenada en el origen Q:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n)$$

EJERCICIOS resueltos

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por P (-8,-5) y de pendiente $m = 2/7$

La ecuación en forma punto-pendiente:

$$y + 5 = \frac{2}{7}(x + 8)$$

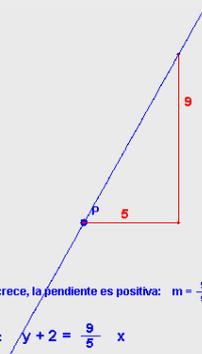
En forma explícita:

$$y + 5 = \frac{2}{7}x + \frac{16}{7}$$

$$y = \frac{2}{7}x - \frac{19}{7}$$

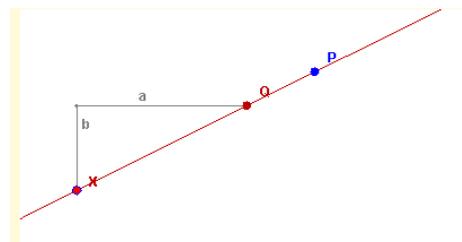
6. Determina la ecuación de esta recta:

P (0, -2)



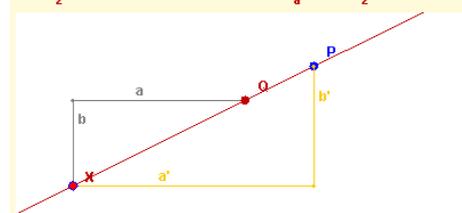
Como la recta crece, la pendiente es positiva: $m = \frac{9}{5}$

La ecuación es: $y + 2 = \frac{9}{5}x$



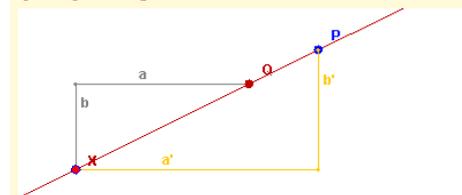
En los apartados anteriores hemos visto que aunque movamos X, el cociente entre b y a es constante e igual a la pendiente:

$$m = \frac{1}{2} \quad P = (6,5) \quad X = (x,y) \quad Q = (0,n) \quad \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$



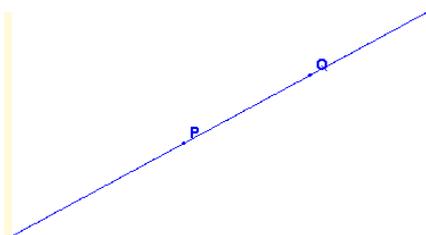
Observa los triángulos de la figura: tienen los lados paralelos, luego son semejantes, por tanto:

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} = m = \frac{1}{2}$$

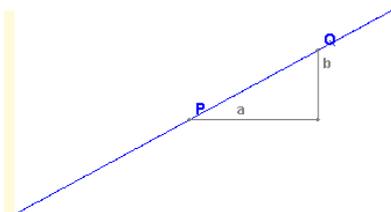


$P = (6,5) \quad X = (x,y)$
 b' es la distancia vertical entre P y X: $b' = y - 5$
 a' es la distancia horizontal entre P y X: $a' = x - 6$
 luego $\frac{b'}{a'} = \frac{y-5}{x-6} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

Funciones lineales y cuadráticas

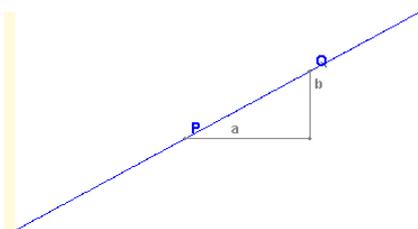


El punto P de la figura tiene coordenadas conocidas (x_0, y_0) y el punto Q (x_1, y_1) . Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos:



Procedemos como en casos anteriores:

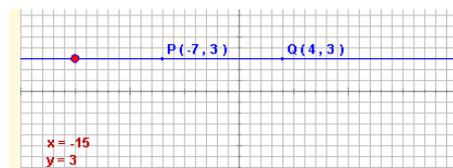
$$a = x_1 - x_0 \quad b = y_1 - y_0 \quad m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



$$m = \frac{b}{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad P = (x_0, y_0), \text{ forma punto-pendiente:}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



CASOS ESPECIALES: Ordenadas iguales.

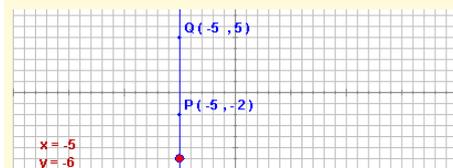
Con la fórmula anterior la ecuación de la recta que pasa por P y Q es:

$$\frac{y - 3}{3 - 3} = \frac{x + 7}{4 + 7} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{0} = \frac{x + 7}{11}$$

¡No es válida porque hay una división por cero!

Moviendo el control comprueba que todos los puntos de la recta tienen la misma ordenada, por tanto, la ecuación de la recta en este caso es:

$$y = 3$$



CASOS ESPECIALES: Abscisas iguales.

Con la fórmula anterior la ecuación de la recta que pasa por P y Q es:

$$\frac{y + 2}{5 + 2} = \frac{x + 5}{-5 + 5} \Leftrightarrow \frac{y + 2}{7} = \frac{x + 5}{0}$$

¡No es válida porque hay una división por cero!

Moviendo el control comprueba que todos los puntos de la recta tienen la misma abscisa, por tanto, la ecuación de la recta en este caso es:

$$x = -5$$

Recta que pasa por dos puntos

Sean $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ dos puntos del plano. La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **forma continua** de la ecuación de la recta. En la secuencia adjunta se explica cómo se obtiene.

EJERCICIOS resueltos

7. Halla la ecuación de la recta que pasa por P $(5, -9)$ y Q $(6, 8)$. Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es: $\frac{y - (-9)}{8 - (-9)} = \frac{x - 5}{6 - 5}$

$$\frac{y + 9}{17} = x - 5$$

La forma explícita se obtiene despejando y:

$$y = 17(x - 5) - 9 = 17x - 85 - 9 = 17x - 94$$

$$y = 17x - 94$$

La pendiente es 17
la ordenada en el origen -94

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por P $(7, 4)$ y Q $(-3, -1)$. Pasa a forma explícita y determina la pendiente y la ordenada en el origen.

La ecuación buscada es: $\frac{y - 4}{-1 - 4} = \frac{x - 7}{-3 - 7}$

$$\frac{y - 4}{-5} = \frac{x - 7}{-10}$$

La forma explícita se obtiene despejando y:

$$y = -5 \frac{x - 7}{-10} + 4 = \frac{1}{2}(x - 7) + 4 =$$

$$= \frac{x - 7}{2} + 4 = \frac{x - 7 + 8}{2} = \frac{x + 1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

La pendiente es $\frac{1}{2}$
la ordenada en el origen $\frac{1}{2}$

Funciones lineales y cuadráticas

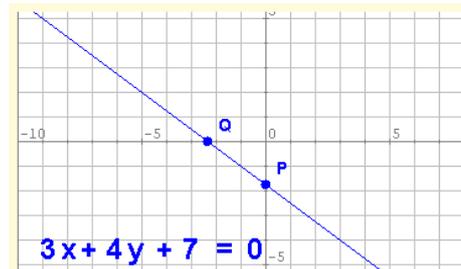
Forma general o implícita

La manera más habitual de representar rectas es la **forma general** o **implícita**:

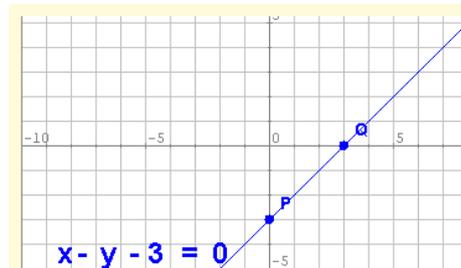
$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son números cualesquiera (al menos A ó B deben ser diferentes de cero). Si B=0 se trata de una recta vertical de ecuación $x=-C/A$. Si B no es cero la pendiente es $-A/B$.

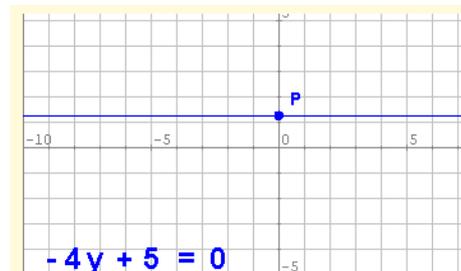
En los gráficos se muestran representaciones de rectas en forma general y el paso de otras formas a la general.



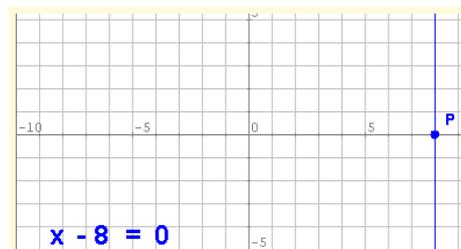
REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenemos dos puntos dando valores a una de las variables.
Lo más sencillo es dar a las variables el valor 0:
 $x=0 \Rightarrow y = -\frac{7}{4}$ $P = \left(0, -\frac{7}{4}\right)$
 $y=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$ $Q = \left(-\frac{7}{3}, 0\right)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Obtenemos dos puntos dando valores a una de las variables.
Lo más sencillo es dar a las variables el valor 0:
 $x=0 \Rightarrow y = -3$ $P = (0, -3)$
 $y=0 \Rightarrow x = 3$ $Q = (3, 0)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Como ya sabemos, en este caso es una recta horizontal.
La ordenada en el origen nos dice a qué altura pasa:
 $y = \frac{5}{4}$ $P = \left(0, \frac{5}{4}\right)$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN FORMA GENERAL:
Como ya sabemos, en este caso es una recta vertical.
El valor de x nos indica por dónde pasa:
 $x = 8$ $P = (8, 0)$

PASO DE CUALQUIER FORMA A FORMA GENERAL:

a) Función lineal en forma explícita:

$$y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0 \quad (A = m, B = -1, C = 0) \quad m = -\frac{A}{B}$$

b) Función afín en forma explícita:

$$y = mx + n \Leftrightarrow mx - y + n = 0 \quad (A = m, B = -1, C = n) \quad m = -\frac{A}{B}$$

c) Función constante (paralela al eje X):

$$y = n \Leftrightarrow y - n = 0 \quad (A = 0, B = 1, C = -n) \quad m = -\frac{A}{B} = 0$$

d) Recta vertical:

$$x = n \Leftrightarrow x - n = 0 \quad (A = 1, B = 0, C = -n) \quad \text{No se puede hallar } m.$$

e) Forma punto pendiente:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Leftrightarrow mx - y + y_0 - mx_0 = 0 \quad m = -\frac{A}{B}$$

$$(A = m, B = -1, C = y_0 - mx_0)$$

f) Forma continua:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \Leftrightarrow (y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0) \Leftrightarrow$$

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0) = 0$$

$$(A = y_1 - y_0, B = -(x_1 - x_0), C = y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)) \quad m = -\frac{A}{B}$$

EJERCICIOS resueltos

9. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-7) y cuya pendiente es $-2/3$. Después pasa a forma general.

Solución: En forma punto pendiente la ecuación es $y + 7 = -\frac{2}{3}(x - 1)$.

Quitando denominadores y paréntesis queda $3y + 21 = -2x + 2$. Pasando todo al primer miembro queda $2x + 3y + 19 = 0$. También sería válido el resultado con todos los signos cambiados: $-2x - 3y - 19 = 0$

10. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-4,-2) y de pendiente 0. Después pasa a forma general.

Solución: La ecuación en la forma punto pendiente ya es la ecuación general: $y + 2 = 0$

11. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(2,-2) y Q(-8,3). Luego pasa a forma general.

Solución: En forma continua la ecuación es $\frac{y + 2}{3 + 2} = \frac{x - 2}{-8 - 2}$.

Quitando denominadores queda: $-10y - 20 = 5x - 10$.

Pasando todo al primer miembro: $-5x - 10y - 10 = 0$. Así bastaría, pero como todos los términos son múltiplos de 5 podemos simplificar: $-x - 2y - 2 = 0$. También es válido cambiar todos los términos de signo: $x + 2y + 2 = 0$.

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(5,-2) y Q(3,-2). Luego pasa a forma general.

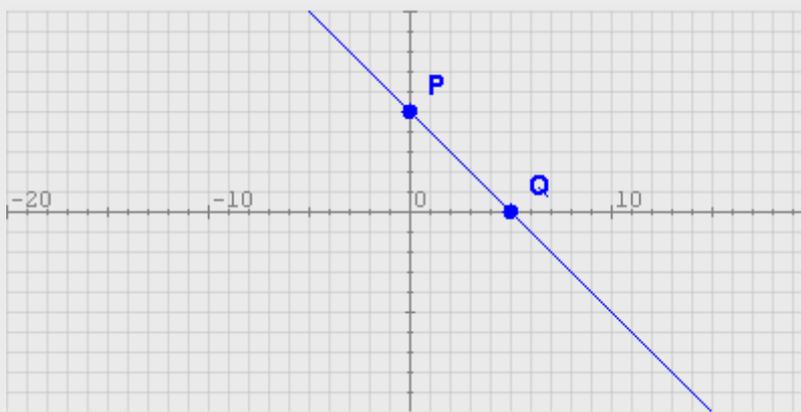
Solución: Como los puntos P y Q tienen igual ordenada, se trata de la recta horizontal $y = -2$, o en forma general: $y + 2 = 0$.

13. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(6,5) y Q(6,-2). Luego pasa a forma general.

Solución: Como los puntos P y Q tienen igual abscisa, se trata de la recta vertical $x = 6$. En forma general queda $x - 6 = 0$.

14. Representa gráficamente la recta cuya ecuación general es $x + y - 5 = 0$.

Solución: Despejamos la y para obtener la forma explícita: $y = -x + 5$. Por tanto, la pendiente es -1 y la ordenada en el origen es 5. Es decir, la recta pasa por el punto (0,5). Calculamos otro punto dando, por ejemplo, el valor 5 a x. Entonces $y = -5 + 5 = 0$. La recta pasa también por el punto (5,0). Dibujamos los puntos y unimos con la regla:



4. Posición relativa de dos rectas

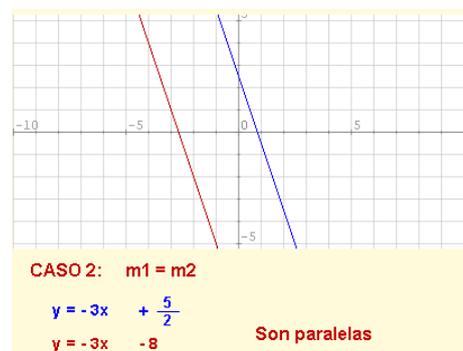
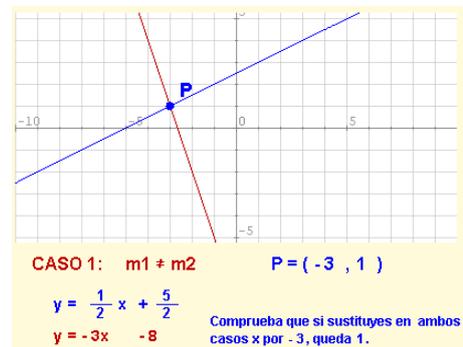
Análisis en forma explícita

Dadas dos rectas

$$y = m_1x + n_1 \quad y = m_2x + n_2$$

Si $m_1 \neq m_2$ las rectas se cortan en un punto cuyas coordenadas se obtienen resolviendo el sistema. Se dice que las rectas son **secantes**.

Si $m_1 = m_2$ las rectas son **paralelas**. Si, además, $n_1 = n_2$ las rectas son **coincidentes**.



Análisis en forma general

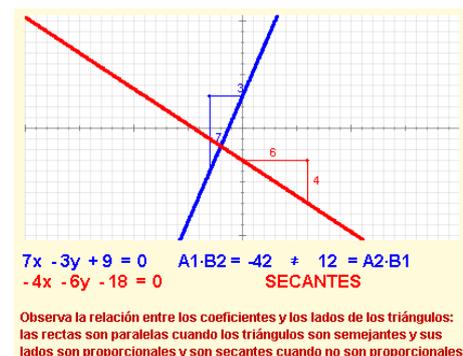
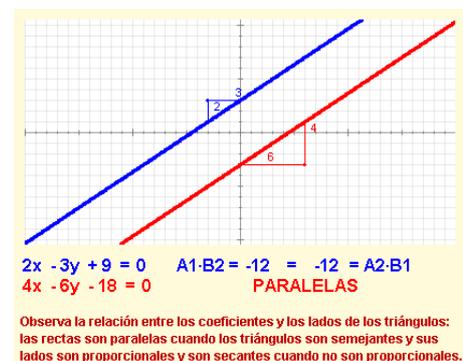
Dadas dos rectas

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Si $A_1B_2 \neq A_2B_1$ son **secantes**. Al igual que antes las coordenadas del punto de corte se obtienen resolviendo el sistema.

Si $A_1B_2 = A_2B_1$ las rectas son **paralelas**.



EJERCICIOS resueltos

22. Determina la posición relativa de las rectas $y = -4x + 1$, $y = 4x$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: la pendiente de la primera recta es $m_1 = -4$ y la de la segunda es $m_2 = 4$. Como las pendientes son distintas las rectas son **secantes**. Hallamos ahora el punto de corte resolviendo el sistema:

$$-4x + 1 = 4x; \quad 1 = 8x; \quad x = 1/8; \quad y = 4 \cdot (1/8) = 4/8 = 1/2; \quad P = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right)$$

23. Determina la posición relativa de las rectas $y = -2x + 3$, $y = -2x - 2$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: La pendiente de ambas rectas es -2 y la ordenada en el origen es diferente, por tanto son dos rectas **paralelas**.

24. Determina la posición relativa de las rectas $x - 3y - 1 = 0$, $4x + y + 1 = 0$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de x e y son proporcionales: $A_1=1$, $B_1=-3$, $A_2=4$, $B_2=1$, entonces $A_1 \cdot B_2 = 1$ y $A_2 \cdot B_1 = -12$. Son diferentes, por lo tanto las rectas son **secantes**. Vamos a hallar las coordenadas del punto de corte. Hay varias maneras de hacerlo, una de ellas es despejar y en ambas ecuaciones (pasar a forma explícita) y repetir lo hecho en el ejercicio 15 más arriba:

$$y = \frac{1-x}{-3}; \quad y = -1 - 4x; \quad \frac{1-x}{-3} = -1 - 4x; \quad 1-x = 3 + 12x; \quad -2 = 13x; \quad x = -\frac{2}{13}$$

Ahora sustituimos el valor obtenido para x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$y = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{13} \right) = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}$$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de corte son $P = \left(-\frac{2}{13}, -\frac{5}{13} \right)$

Vamos a comprobar que el resultado es correcto sustituyendo los dos valores en ambas ecuaciones y viendo que en ambos casos las igualdades se verifican:

$$-\frac{2}{13} - 3 \left(-\frac{5}{13} \right) - 1 = -\frac{2}{13} + \frac{15}{13} - 1 = \frac{13}{13} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$4 \left(-\frac{2}{13} \right) + \left(-\frac{5}{13} \right) + 1 = -\frac{8}{13} - \frac{5}{13} + 1 = -\frac{13}{13} + 1 = -1 + 1 = 0$$

25. Determina la posición relativa de las rectas $2x - 5y - 1 = 0$, $-4x + 10y + 1 = 0$. En caso de que sean secantes, determina las coordenadas del punto de corte.

Solución: Como están en forma general debemos comprobar si los coeficientes respectivos de x e y son proporcionales: $A_1=2$, $B_1=-5$, $A_2=-4$, $B_2=10$, entonces $A_1 \cdot B_2 = 20$ y $A_2 \cdot B_1 = 20$. Son iguales, por lo tanto las rectas son **paralelas**.

Funciones lineales y cuadráticas

5. Aplicaciones

Problemas simples

Las funciones lineales describen fenómenos en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales. La representación gráfica será una recta cuya pendiente nos informa de la rapidez de la variación de una magnitud con respecto a la otra y la ordenada en el origen nos informa sobre las condiciones iniciales.

En las imágenes de la derecha tienes un par de ejemplos de cómo obtener la ecuación (de una función lineal o afín) a partir de dos puntos conocidos o a partir de un punto y la pendiente y, a partir de ellas, hacer predicciones y cálculos de situaciones desconocidas.

En la descripción de fenómenos reales es frecuente que las magnitudes que se relacionan vengan dadas por números de tamaños muy diferentes, por lo que al representarlas gráficamente habrá que escoger unas escalas adecuadas en los ejes correspondientes.

En los países anglosajones suelen usar la escala Fahrenheit para medir temperaturas. En esta escala el punto de congelación del agua se alcanza a 32°F, y el de ebullición a 212°F.

Nosotros usamos la escala Celsius en la que esos puntos se alcanzan a 0°C y 100°C respectivamente.

Halla la ecuación que relaciona °C con °F y dibújala.
¿A cuántos °C equivalen 80°F? ¿A cuántos °F equivalen 36°C?

Pasa por los puntos P = (32,0) Q = (212,100)

La ecuación en forma continua es: $\frac{y - 0}{100 - 0} = \frac{x - 32}{212 - 32}$

En forma explícita $y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$

$x = 80^\circ\text{F} \Rightarrow y = 62,2^\circ\text{C}$

$y = 36^\circ\text{C} \Rightarrow x = \frac{9}{5} \left(y + \frac{160}{9} \right) = x = 96,8^\circ\text{F}$

Problemas combinados

Donde realmente resulta interesante la aplicación de funciones lineales es en el estudio de varias funciones de manera simultánea de forma que podamos compararlas con facilidad.

Debajo tienes un ejemplo ilustrativo:

¿Qué compañía me interesa más?

La compañía A me ofrece una cuota fija de 15€ al mes más 0,05€/min.
La compañía B me ofrece pagar sólo por el consumo a 0,25€/min.
La compañía C me ofrece una cuota de 0,15€/min con un mínimo de 15€.



Si llamamos x a los minutos de consumo y y al importe total, la función que describe el gasto con cada compañía es:

A: $y = 0,05x + 15$
B: $y = 0,25x$
C: $y = \begin{cases} 15 & \text{si } x \leq 100 \\ 0,15x & \text{si } x > 100 \end{cases}$ (porque si hablamos menos de 100 minutos nos cobran 15€)

Sus gráficas según el color son:

Si hablo menos de 60 min al mes la más barata es la compañía B.

Si hablo entre 60 y 150 minutos al mes, es mejor la C.

Si hablo más de 150 minutos al mes la mejor es la A.



Han llegado las rebajas.

En un comercio aplican un 18% de descuento a todos sus productos.

Halla la ecuación que relaciona el precio rebajado con el original y dibújala.

¿Cuánto cuesta una camisa que antes costaba 72€?
He pagado 65,60€ por unos pantalones ¿cuánto costaban antes?

Si el descuento es del 18%, cada producto cuesta el 82% de su precio original. Por tanto la ecuación es $y = 0,82 \cdot x$ función lineal de pendiente 0,82.

Pasa por los puntos P = (0,0) Q = (100,82)

$x = 72\text{€} \Rightarrow y = 0,82 \cdot 72 = 59,04\text{€}$

$y = 65,60\text{€} \Rightarrow x = 65,60 / 0,82 = 80\text{€}$

EJERCICIOS resueltos

19.

En una ciudad tienen implantada la Ordenanza de Regulación de Aparcamiento (O.R.A.). La norma indica que se debe pagar cierta cantidad por cada minuto y que no hay un mínimo.



Juan pone 1,35€ y el parquímetro indica que dispone de 45 minutos. Sara con 0,84€ tiene 28 minutos.

Halla la ecuación que relaciona el precio con el tiempo y dibújala. ¿Cuánto hay que pagar por un aparcamiento de 55 minutos? Si pago 2,40€ ¿de cuánto tiempo dispongo?

Elegimos las escalas de manera que el tiempo está en minutos y el precio en céntimos de euro.

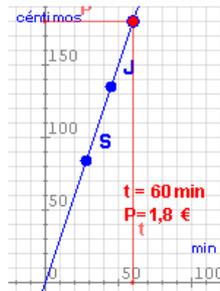
Pasa por los puntos
J = (45,135) S = (28,84)

Como pasa por el origen es lineal y la pendiente es $m = 135/45 = 3$

La ecuación es $y = 3x$

$x = 55 \text{ min} \Rightarrow y = 3 \cdot 55 = 165 \text{ c} = 1,65\text{€}$

$y = 2,40\text{€} \Rightarrow x = 240/3 = 80 \text{ min}$



20.

En un banco nos ofrecen un plazo fijo al 5% anual con una comisión de mantenimiento de 20€ anuales, sea cual sea la inversión realizada.



Halla la ecuación que relaciona el interés producido con el capital invertido.

¿Cuánto producirán 3000€ en un año?

¿Cuánto se ha invertido si se han recibido 117,50€ de intereses?

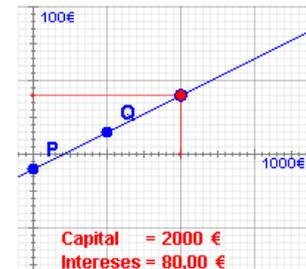
El interés es proporcional al capital invertido. La constante de proporcionalidad es $5\% = 0,05$. Hay unas condiciones iniciales que restan 20€, luego es una función afín de ecuación $y = 0,05 \cdot x - 20$

Pasa por los puntos P = (0,-20) Q = (1000,30)

$x = 3000\text{€} \Rightarrow$
 $y = 0,05 \cdot 3000 - 20 = 130\text{€}$

$y = 117,50\text{€} \Rightarrow$
 $x = \frac{y+20}{0,05} = 2750\text{€}$

Observa las escalas: cada unidad en horizontal son 1000€ y cada unidad vertical son 100€. Comprueba que solo hay beneficio si la inversión es superior a 400€.



21.

Final de etapa.

En una etapa con final en alto un escapado está a 8 km de la meta y circula a 10 km/h. Un grupo perseguidor se encuentra a 10 km del final corriendo a 15 km/h. ¿Alcanzarán al escapado si mantienen las velocidades? En caso afirmativo ¿cuánto tardarán y a qué distancia de la meta?

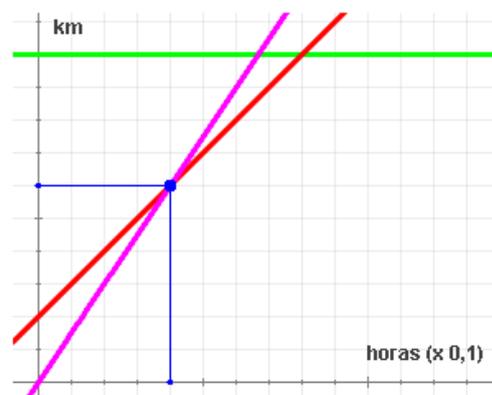


Llamemos x al tiempo transcurrido desde ahora (medido en horas) e y a la distancia recorrida desde este momento (medida en km). El escapado está 2 km por delante, luego la función que describe el desplazamiento con respecto al tiempo en cada caso es:

Escapado: $y = 10x + 2$ Grupo perseguidor: $y = 15x$ Meta: $y = 10$

Sus gráficas según el color son:

Lo alcanzan en 0,4 horas (24 minutos) a 4 km de la meta.

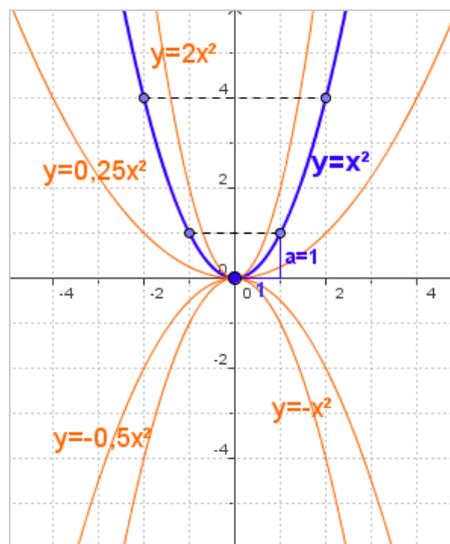


6. Funciones cuadráticas

La parábola $y = ax^2$

Las **funciones cuadráticas** son las que su expresión es un polinomio de segundo grado. Comenzamos por la más sencilla, $f(x)=ax^2$ o $y=ax^2$. Observa en la figura cómo se construye su gráfica y cómo cambia según los valores y el signo de a .

- ✓ La gráfica de $y=ax^2$ es una curva llamada **parábola**.
- ✓ El **vértice** es el origen de coordenadas y es **simétrica** respecto del eje OY.
- ✓ Si $a>0$ la curva se abre hacia arriba y si $a<0$ hacia abajo. La curva es tanto más cerrada cuanto más se aleja de 0 el valor de a .



Traslaciones de una parábola

Como puedes ver a la derecha si se traslada el vértice de la parábola $y = ax^2$ de $(0,0)$ a otro punto del plano, se obtiene la gráfica de una función cuadrática cualquiera $y = ax^2+bx+c$.

- Si se traslada el vértice de la parábola verticalmente, c unidades ($c>0$ hacia arriba, $c<0$ hacia abajo) obtenemos la parábola de expresión: $y = ax^2 + c$
- Si se traslada el vértice de la parábola horizontalmente k unidades ($k>0$ hacia la derecha, $k<0$ hacia la izquierda) obtenemos la parábola de expresión: $y = a(x - k)^2$

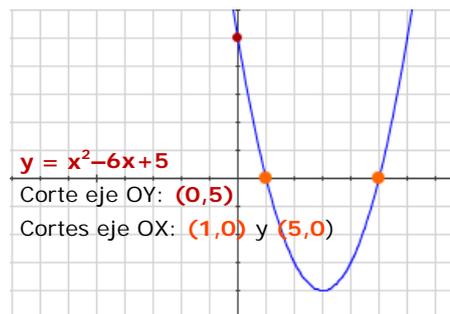
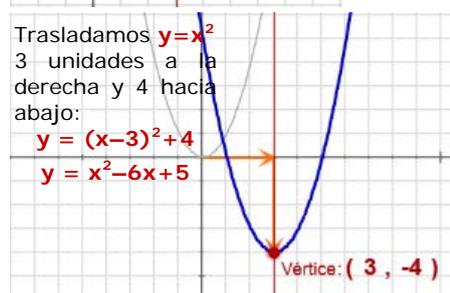
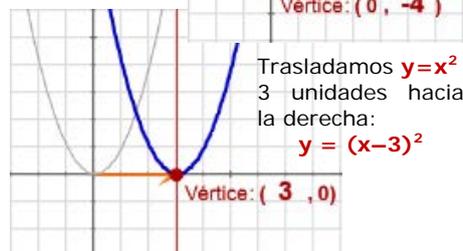
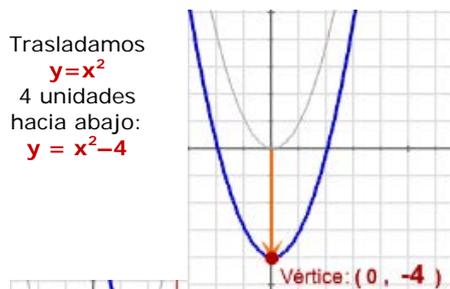
Combinando los dos movimientos, al trasladar el vértice de $(0, 0)$ al punto (x_v, y_v) obtenemos:

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v \text{ y operando } y = ax^2 + bx + c$$

La gráfica de $y=ax^2+bx+c$ es una **parábola** de la misma forma que la $y=ax^2$, eje vertical y **vértice** $(-b/2a, f(-b/2a))$.

Al igual que en otras representaciones gráficas es interesante hallar los puntos de corte con los ejes,

- El corte con el eje **OY** es **c**
- Los cortes con el eje **OX** son las soluciones (si existen) de la ecuación $ax^2+bx+c=0$



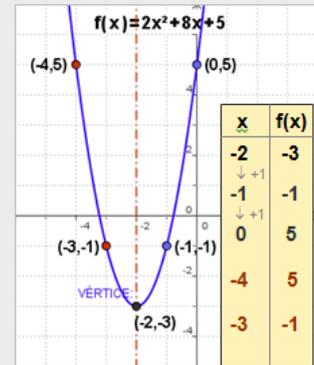
EJERCICIOS resueltos

22. Representa la función: $y = 2x^2 + 8x + 5$

Comenzamos por colocar su vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -2, \quad y_v = f(-2) = -3$$

Se dibuja el eje de simetría y a continuación hacemos una tabla de valores aumentando en una unidad el valor de x cada vez. Cuando tenemos algunos puntos dibujamos los simétricos.



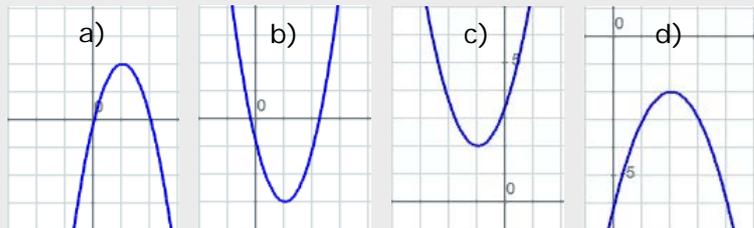
23. Representa las funciones:

a) $y = -2x^2 + 4x$

b) $y = 2x^2 - 4x - 1$

c) $y = 1,5x^2 + 3x + 3,5$

d) $y = 2x^2 - 4x - 1$



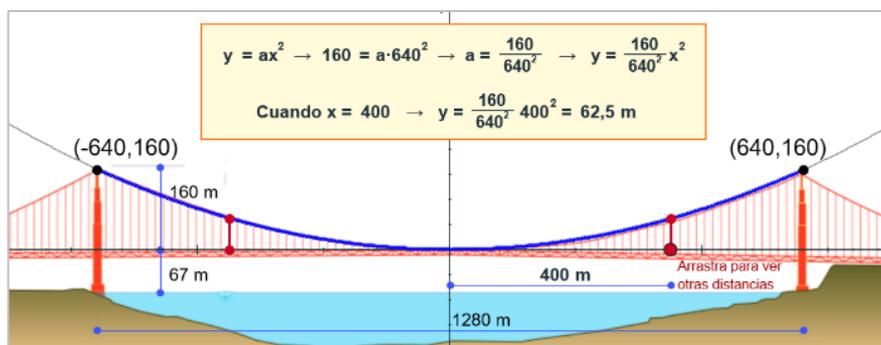
Aplicaciones

Estas funciones tienen numerosas aplicaciones en el mundo real. Veamos algunas:

1) Puente colgante

El Golden Gate, el famoso puente colgante de San Francisco, está suspendido de dos enormes cables que adoptan forma de parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Sus medidas se indican en la figura.

¿Cuál es la altura de los cables a 400 m del centro del puente?



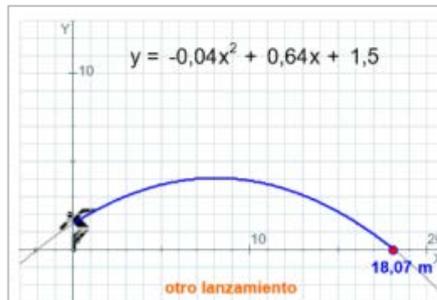
2) Tiro parabólico

Un lanzador de peso tira la bola siguiendo una trayectoria de ecuación

$$y = -0,04x^2 + 0,64x + 1,5$$

donde x es la distancia recorrida por la bola en metros, e y la altura que alcanza también en m.

¿Qué distancia alcanza la bola?



Quando la bola llega a tierra $y=0$, luego hemos de calcular los puntos de corte con el eje OX:

$$-0,04x^2 + 0,64x + 1,5 = 0$$

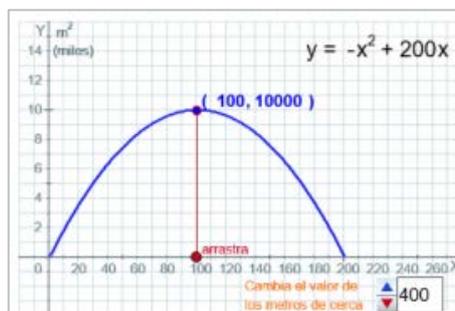
$$x = \frac{-0,64 \pm \sqrt{0,64^2 - 4 \cdot (-0,04) \cdot 1,5}}{2 \cdot (-0,04)} = \begin{cases} -2,07 \\ 18,07 \end{cases}$$

De las dos soluciones la que buscamos es la positiva, la distancia no puede ser negativa, luego alcanza **18,07 m**.

3) Área máxima

Un granjero tiene un campo muy grande en el que desea vallar una zona de forma rectangular.

Si dispone de 400 m de cerca, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede vallar?, ¿cuál es ese área?



Si llamamos x a la longitud respectiva de dos lados paralelos, la longitud de cada uno de los otros dos lados será $200-x$, y el área $y = x \cdot (200 - x)$

El área máxima se alcanza en el vértice de la parábola:

Abscisa: $x = 100 \text{ m}$

Ordenada: $y = 10000 \text{ m}^2$

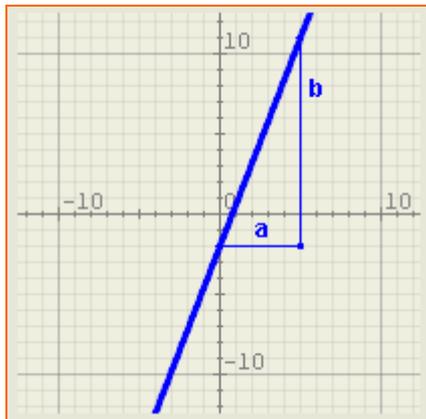
Por tanto se trata de un cuadrado de lado 100 m y área 10000 m².

Funciones lineales y cuadráticas



Para practicar

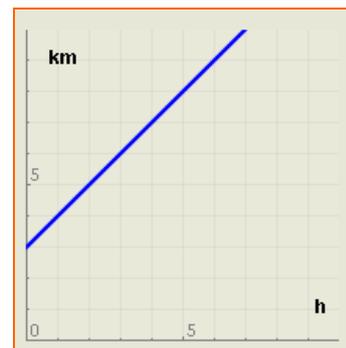
- Representa gráficamente las rectas de ecuaciones $y=2x/5$ y $5x+y+5=0$.
- Halla la ecuación de la recta de la imagen:



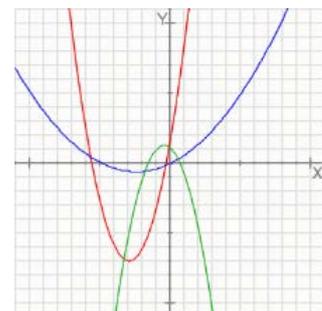
- Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3,-2) y cuya pendiente es $m=-2$.
- Calcula la forma general de la ecuación de la recta que pasa por los puntos P (3,-2) y Q (-2,-1).
- Determina la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de ecuación $3x+2y-2=0$.
- Determina la posición relativa de las rectas $y=3x-2$ e $y=-2x-2$. Si se cortan halla también las coordenadas del punto de corte.
- Averigua si los puntos A(-2,-4), B(0,-2) y C(3,1) están alineados.
- Halla la ecuación de la recta paralela a $y=3x-4$ que pasa por el punto (-3,-10)
- Dos agricultores de zonas diferentes cultivan maíz con los rendimientos y costes que se indican debajo. Averigua cuántas ha debe tener cada uno para empezar a tener beneficios y quién tiene más beneficio en función del número de ha cultivadas.

| | |
|--|-------------|
| Agricultor 1: | |
| Rendimiento: | 7,28 Tm/ha. |
| Costes por riego, abono, etc: | 219 €/ha. |
| Costes fijos (seguro, impuestos, etc): | 5525 € |
| Agricultor 2: | |
| Rendimiento: | 3,03 Tm/ha. |
| Costes por riego, abono, etc: | 52 €/ha. |
| Costes fijos (seguro, impuestos, etc): | 2000 € |
| Precio del maíz: | 201 €/Tm |

- La arena contenida en un reloj de arena ocupa un volumen de 563 cm^3 y el fabricante indica que la velocidad de caída de la arena es de $7 \text{ cm}^3/\text{s}$. Averigua cuánto tarda en haber la misma cantidad de arena en las dos partes del reloj.
- Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a 3 km de mi y se acerca a 2 km/h".
- Halla la ecuación de la función que describe la siguiente frase: "Un móvil está a mi lado durante 1 hora y luego se aleja a 2 km/h".
- La gráfica siguiente representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a mi en relación con el tiempo transcurrido. Expresa con una frase su significado.



- Calcula el valor de b para que la gráfica de la función $y = 2x^2 + bx + 4$ pase por el punto (3, 31)
- Escribe la ecuación de la parábola que tiene coeficiente $a = -1$, corta al eje de ordenadas en (0, -5) y su vértice es el punto (4, 11).
- Calcula el vértice y los puntos de corte con los ejes de la parábola $y = -2x^2 - 2x + 4$. A partir de estos datos esboza su gráfica.
- Asocia cada parábola con su correspondiente expresión algebraica:
 - $y = x^2 + 6x + 2$
 - $y = 0,1x^2 - 0,5x$
 - $y = -x^2 - x + 1$



Para saber más



Relaciones no lineales

Recuerda el problema que se te planteaba al principio: Si una sandía pesa el doble que otra, su precio será el doble. Pero, si el radio de una sandía es el doble del de otra ¿su precio también será el doble?

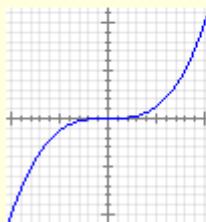


Supongamos que 1kg cuesta 0'75€.

El coste de una sandía de x kg es $y = 0'75x$. Es una función lineal. El precio es directamente proporcional al peso.

Por su parte, el peso es directamente proporcional al volumen y el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, luego si el radio de la primera es r y el de la segunda es $2r$ el volumen de la primera es proporcional a r^3 y el de la segunda a $(2r)^3 = 8r^3$. Por tanto, el volumen, el peso y , en definitiva, el precio de la segunda es 8 veces mayor que el de la primera.

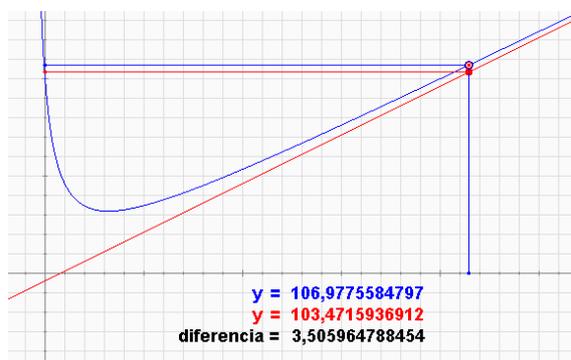
La relación entre peso (o precio) y longitud no es, por tanto, lineal. Puesto que el peso es proporcional, no a la longitud, sino al cubo de la longitud, decimos que la relación entre estas dos magnitudes es **cúbica**. Su gráfica tiene este aspecto:



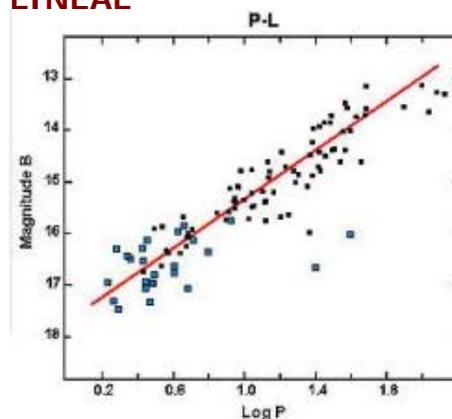
$$y = x^3$$

Comportamiento asintótico

Algunas funciones no lineales tienen la propiedad de que cuanto más grande es el valor de x más se parecen a una función lineal o afín (es decir, una línea recta). Esto facilita el estudio de su tendencia a largo plazo. Esta recta recibe el nombre de **asíntota** y se dice que la función tiene un comportamiento **asintótico**.

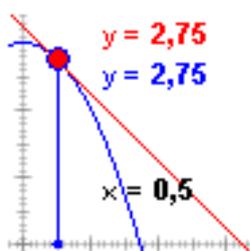


REGRESIÓN LINEAL



Es una de las técnicas más usadas por la ciencia. Si se quiere estudiar la relación que existe entre dos magnitudes se hacen muchas observaciones asignando una pareja de valores a cada una. Se obtiene una nube de puntos que puede o no mostrar una tendencia.

En el ejemplo parece existir un cierto comportamiento lineal.



Derivadas:

Comportamiento lineal de una función no lineal. La función azul de la imagen no es lineal. La roja es una función afín tangente en un punto de la primera. Cerca del punto $x = 0,5$ los valores de ambas funciones son muy parecidos. Lejos del punto son muy diferentes. Cuando estamos estudiando una función cerca de un punto es más fácil hacer cálculos con una función lineal o afín que se aproxime a ella. La recta tangente a una función en un punto recibe el nombre de **función derivada** en el punto y aprenderás a calcularla en cursos superiores.

Funciones lineales y cuadráticas

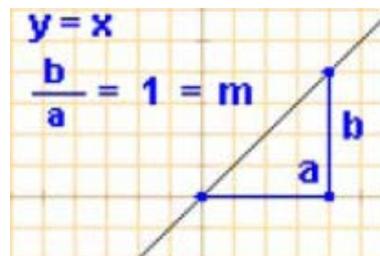


Recuerda lo más importante

Funciones lineales

Son las funciones que relacionan magnitudes directamente proporcionales y su ecuación es de la forma $y = mx$

Su representación gráfica es siempre una línea recta que pasa por el origen. La pendiente, m , es la constante de proporcionalidad.

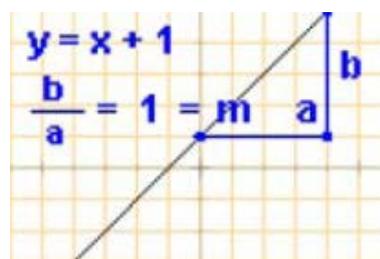


Funciones afines

Relacionan magnitudes directamente proporcionales sometidas a alguna condición inicial. Tienen la forma

$$y = mx + n$$

Su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el punto $(0, n)$ (n es la **ordenada en el origen**).



Ecuación de la recta

- **Forma explícita:** $y = mx + n$
- **Forma punto-pendiente:** si se conoce la pendiente, m , y las coordenadas de un punto (x_0, y_0) la ecuación es:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

- **Recta por dos puntos:** si se conocen las coordenadas de dos puntos $P(x_0, y_0)$, $Q(x_1, y_1)$ la ecuación es:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- **Forma general:** Simplificando cualquiera de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$Ax + By + C = 0$$

la pendiente es $m = -A/B$ si $B \neq 0$

Casos particulares

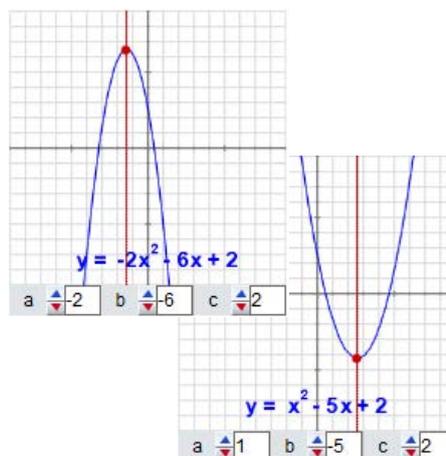


Funciones cuadráticas

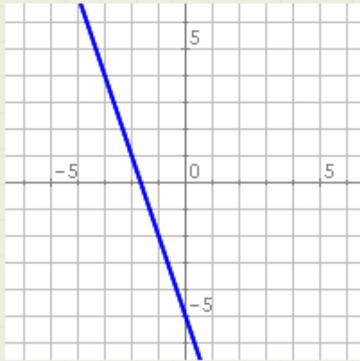
$$y = ax^2 + bx + c \text{ con } a \neq 0$$

Su gráfica es una **parábola** de eje de simetría vertical y vértice: $(-b/2a, f(-b/2a))$

- El valor de a indica hacia donde se abre la curva y si es más abierta o cerrada.
- El valor de c indica el corte con el eje OY.

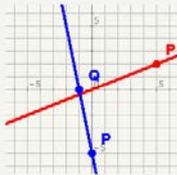


Autoevaluación



1. Escribe la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de la imagen.
2. Calcula la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto $(-4, -1)$ y cuya pendiente es -3 .
3. Calcula la ordenada en el origen de la recta de ecuación $-3x - 3y + 2 = 0$
4. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-5, -4)$ y $Q(-4, -2)$.
5. Calcula el vértice de la parábola $y = -2x^2 + 20x - 42$
6. Calcula los puntos en que la parábola $y = 2x^2 - 20x + 48$ corta al eje de abscisas.
7. Determina la posición relativa de las rectas de ecuaciones $4x - 3y + 5 = 0$ y $-8x + 6y + 1 = 0$.
8. Halla las coordenadas del punto de corte de las rectas de ecuaciones $y = -x + 5$ e $y = 2x - 7$.
9. Averigua si los puntos $A(-3, -1)$, $B(0, -1)$ y $C(6, -4)$ están alineados.
10. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = -x + 5$ que pasa por el punto $(4, -2)$.

Soluciones de los ejercicios para practicar



- 1.
2. $y = \frac{13}{5}x - 2$
3. $2x + y - 4 = 0$
4. $x + 5y + 7 = 0$
5. $m = -3/2, n = 1$
6. Son secantes y se cortan en el punto (0, -2)
7. Sí están alineados. (Halla la ecuación de la recta que pasa por A y por B y comprueba que también pasa por C).
8. $y = 3x - 1$
9. El primero obtiene beneficios a partir de 4,43 ha. El segundo a partir de 3,58 ha. El primero gana más que el segundo a partir de 5,13 ha.

10. 40,2 segundos.

11. $y = 2x + 3$

12. $y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

13. Está a tres km de mí y se aleja a 1 km/h.

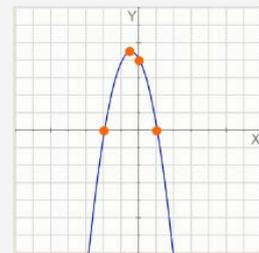
14. $b = 3$

15. $y = -x^2 + 8x - 5$

16. Eje OY: (0, 4)

Eje OX: (-2, 0) (1, 0)

Vértice (-0,5, 4,5)



17. a) $y = x^2 + 6x + 2$

b) $y = 0,1x^2 - 0,5x$

c) $y = -x^2 - x + 1$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. $m = -3, n = -5$
2. $n = -13$
3. $n = 2/3 \approx 0,66$
4. $m = 2$
5. $V(5, 8)$
6. (4, 0) y (6, 0)
7. Son paralelas porque $A1 \cdot B2 = A2 \cdot B1$
8. $x = 4, y = 1$
9. No están alineados.
10. $y = -x + 2$