

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer situaciones que pueden resolverse con ecuaciones
- Traducir al lenguaje matemático enunciados del lenguaje ordinario.
- Conocer los elementos de una ecuación.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver ecuaciones de segundo grado
- Resolver problemas utilizando las ecuaciones.

Antes de empezar

1. Ecuaciones, ideas básicas pág. 4
Igualdades y ecuaciones
Elementos de una ecuación
Ecuaciones equivalentes
2. Reglas para la resolución.....pág. 8
Sin denominadores
Con denominadores
Resolución general de ecuaciones
3. Ecuaciones de segundo grado pág. 12
Definición. Tipos
Resolución de $ax^2+bx=0$
Resolución de $ax^2+c=0$
Resolución de $ax^2+bx+c=0$
4. Aplicaciones pág. 14
Problemas con ecuaciones

Ejercicios para practicar

Para saber más

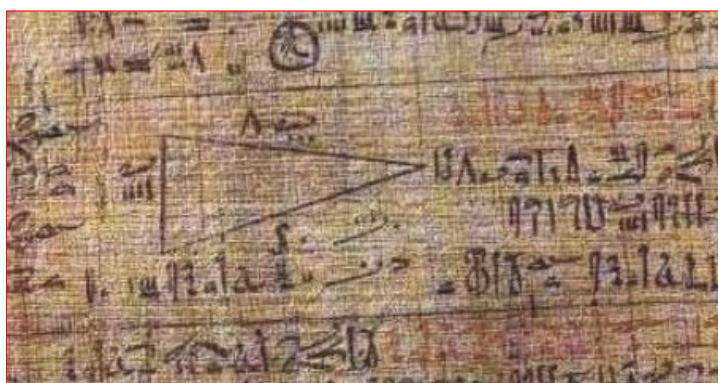
Resumen

Autoevaluación

Antes de empezar

El documento más antiguo en el que se presentan problemas que se resuelven con ecuaciones es el papiro Rhind de 1650 a.C. (en la imagen puede verse un fragmento).

Uno de esos problemas dice: ***"Un montón más la séptima parte del montón es igual a 19. ¿Cuánto hay en el montón?"***



Observa que en aquella época aún no se utilizaba la "x" para resolver las ecuaciones. El lenguaje algebraico que ahora conocemos no existía. Imagina el esfuerzo y la técnica que debían de tener para plantear y buscar soluciones a los problemas con ecuaciones.

Investiga:

La solución del problema del papiro es un número fraccionario (la puedes ver al final del Tema), pero si en vez de **19** ponemos **32** la solución es un número entero. ¿Puedes averiguar de cuántas unidades constaría el montón en ese caso?

1. Ecuaciones: ideas básicas

Igualdades y ecuaciones.

Utilizamos ecuaciones cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, desconocida, pero de la que sabemos que cumple cierta condición.

La cantidad desconocida se llama **incógnita** y se representa por "**x**" (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los que se cumple la igualdad.

Ejemplo

Situaciones que se expresan con ecuaciones

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Llamamos "**x**" al dinero que recibe el hijo pequeño, el que recibe menos

Luego el mediano recibe "**x+10**", y el mayor "**x+10+10**"

Como en total se reparten 57€, esa será la suma de "**x**" y "**x+10**" y "**x+10+10**"

Escribimos la ecuación:

$$x + (x+10) + (x+10+10) = 57$$

o, agrupando: $3x + 30 = 57$

Aún no hemos resuelto el problema, nuestro primer paso es plantear y escribirlo en forma de ecuación.

Ejemplo

Se reparten 40 € para dos personas, de manera que uno recibe 10 € más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

Llamamos "**x**" al dinero que recibe la 1ª persona, la que recibe menos.

¿Cuánto recibe entonces la 2ª persona?

La segunda persona recibiría "**x+10**".

Entre las dos se reparten en total 40 €, entonces la suma de "**x**" y "**x+10**" debe ser 40.

Escribimos la ecuación:

$$x + (x + 10) = 40$$

o agrupando:

$$2x + 10 = 40$$

Elementos de una ecuación.

Miembros: Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1º miembro. El de la derecha se llama 2º miembro.

Términos son los sumandos que forman los miembros.

Incógnitas: Son las letras que aparecen en la ecuación.

Soluciones: Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Grado de una ecuación: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ejemplos

$$3x - 5 = 7 - 2x$$

1^{er} miembro 2^a miembro

Incógnita: x

Solución: $x = \frac{12}{5}$

Grado:1

Los términos son:
3x, -5, 7, -2x

$$3x^2 = 48$$

1^{er} miembro 2^a miembro

Incógnita: x

Soluciones: $x=3, x=-3$

Grado:2

Los términos son:
 $3x^2$, 48

En el segundo ejemplo, observa que si x toma otro valor (por ej: 6, -12, 5/2,...) la igualdad no se cumple y por tanto no son soluciones.

Ecuaciones equivalentes.

Se llaman **ecuaciones equivalentes** a las que tienen las mismas soluciones.

- Si se suma o resta una cantidad, o expresión, a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente.
Regla práctica: "lo que está sumando pasa restando, o viceversa".
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número, o expresión, se obtiene otra equivalente.
Regla práctica: "lo que está multiplicando pasa dividiendo, o viceversa".

Ejemplos

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Pequeño: x Mediano: x+10 Mayor: x+10+10

Ecuación: $x+(x+10)+(x+10+10) = 57$

$3x+30 = 57$

(Haciendo: $3x+10-10 = 40-10$)

$3x = 57 - 30$

$3x = 27$

(Haciendo: $\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$)

$x = \frac{27}{3}$

$x = 9$

Pequeño:9€ Mediano:19€ Mayor:29€

Se reparten 40€ para dos personas, de manera que uno reciba 10€ más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

1ª persona recibe: x 2ª persona recibe: x+10

Ecuación: $x+(x+10) = 40$

$2x+10 = 40$

(Haciendo: $2x+10-10 = 40-10$)

$2x = 40 - 10$

$2x = 30$

(Haciendo: $\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$)

$x = \frac{30}{2}$

$x = 15$

1ª persona: 15€ 2ª persona: 25€

Ejercicios resueltos

1. Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20. ¿Cuál es el número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: **x**

Podemos plantear la siguiente ecuación: **$3x - 16 = 20$**

Agrupamos $3x = 20 + 16$, $3x = 36$

Solucionamos $x = 36/3$, $x = 12$

El número buscado es 12.

2. Pedro, que actualmente tiene 42 años, tiene 8 años más que el doble de la edad de Antonio. ¿Qué edad tiene Antonio?

SOLUCIÓN

A la edad de Antonio la llamamos: **x**

Podemos plantear la siguiente ecuación: **$2x + 8 = 42$**

Agrupamos $2x = 42 - 8$, $2x = 34$

Solucionamos $x = 34/2$, $x = 17$

La edad de Antonio es 17.

3. Al sumarle a un número 34 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 3. ¿Cuál es ese número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: **x**

Podemos plantear la siguiente ecuación: **$x + 34 = 3x$**

Agrupamos $x - 3x = -34$, $-2x = -34$

Solucionamos $x = -34/-2$, $x = 17$

El número buscado es 17.

Ejercicios resueltos

4. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al menor más 19. ¿Cuáles son estos tres números?

SOLUCIÓN

Los números que buscamos los llamamos:
Podemos plantear la siguiente ecuación:
Agrupamos

$$\begin{aligned} & \mathbf{x, x+1, x+2} \\ & \mathbf{(x) + (x+1) + (x+2) = x + 19} \\ & x + x + 1 + x + 2 = x + 19 \\ & x + x + x - x = 19 - 1 - 2 \\ & 2x = 16 \\ & x = 16/2, x = 8 \end{aligned}$$

Solucionamos

Los números buscados son 8, 9 y 10.

5. En un trabajo, Miguel ha ganado el doble de dinero que Ana, y Abel el triple de Miguel. Si en total han obtenido 144 €, ¿cuánto ha ganado cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los nombres con sus incógnitas:

Ana: **x**, Miguel: **2x**,
Abel: **3 · 2x = 6x**

Podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x + 2x + 6x = 144}$$

Agrupamos

$$9x = 144$$

Solucionamos

$$x = 144/9, x = 16$$

Ana ganó 16€ , Miguel 32€ y Abel 96€ .

6. Tres hermanos se reparten 89€ . El mayor debe recibir el doble que el mediano y éste 7€ más que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los hermanos con sus incógnitas:

Pequeño: **x**, Mediano: **x+7**,
Mayor: **2(x+7)**

Podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\mathbf{(x) + (x+7) + (2(x+7)) = 89}$$

Agrupamos

$$x + x + 7 + 2x + 14 = 89$$

Solucionamos

$$\begin{aligned} 4x + 21 &= 89 \\ 4x &= 89 - 21 \\ 4x &= 68 \\ x &= 68/4, x = 17 \end{aligned}$$

El pequeño recibió 17€ , mediano 24€ y mayor 48€ .

2. Reglas para resolver una ecuación

Ecuación sin denominadores.

Para este tipo de ecuaciones seguimos los siguientes pasos:

1º Agrupar los monomios que lleven la incógnita ("las x") en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro.

2º Despejar la incógnita: Dejar la incógnita sola en un miembro de la ecuación.

Ejemplos

Sin paréntesis

$$3x - 2 = -7x + 9$$

$$3x + 7x = 9 + 2$$

$$10x = 11$$

$$x = \frac{11}{10}$$

$$0 = 8x - 6 + 4x - 3$$

$$6 + 3 = 8x + 4x$$

$$9 = 12x$$

$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Con paréntesis

$$(-3)(7 - 6x) = 9x - 8(3x - 7)$$

$$-21 + 18x = 9x - 24x + 56$$

$$18x - 9x + 24x = 56 + 21$$

$$33x = 77$$

$$x = \frac{77}{33} = \frac{7}{3}$$

$$x + 5(6 - 8x) - 4 = 4 + 5x - 2$$

$$x + 30 - 40x - 4 = 4 + 5x - 2$$

$$x - 40x - 5x = 4 - 2 - 30 + 4$$

$$(-44)x = -24$$

$$x = \frac{-24}{-44} = \frac{6}{11}$$

Ecuación con denominadores.

En el caso de haber denominadores hay que tratarlos antes, hacemos:

1º Se calcula el mínimo común múltiplo de **todos** los denominadores de la ecuación.

2º Se reduce a común denominador: cada término se transforma en una fracción equivalente cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

3º Se eliminan los denominadores (Explicación: al multiplicar ambos miembros por el denominador común se obtiene una ecuación equivalente).

4º Se resuelve la ecuación, ya sin denominadores.

Ejemplo

Con denominadores y sin paréntesis

$$-7 + \frac{x}{6} = \frac{7x}{2} - \frac{5}{3}$$

$$-\frac{42}{6} + \frac{1x}{6} = \frac{21x}{6} - \frac{10}{6}$$

$$-42 + 1x = 21x - 10$$

$$-21x + 1x = 42 - 10$$

$$-20x = 32$$

$$x = \frac{32}{-20} = -\frac{8}{5}$$

Resolución general de ecuaciones de primer grado.

En el caso general podemos encontrar paréntesis y denominadores. Debemos primero trabajar con ellos.

Teniendo en cuenta los apartados anteriores seguiremos los siguientes pasos:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los monomios que llevan la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Despejar la incógnita.

Ejemplo

$$\frac{5}{2}(7+x) = \frac{7x}{8} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{35}{2} + \frac{5}{2}x = \frac{7x}{8} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{140}{8} + \frac{20x}{8} = \frac{7x}{8} + \frac{10}{8}$$

$$140 + 20x = 7x + 10$$

$$-7x + 20x = -140 + 10$$

$$13x = -130$$

$$x = \frac{-130}{13} = -\frac{10}{1}$$

$$x = -10$$

Ejemplo

Sea la ecuación siguiente, resuélvela explicitando paso a paso.

$$\frac{5}{4} - \frac{x-3}{2} = 2\left(\frac{7x}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Nuestro primer paso es quitar paréntesis, recordamos que el número delante del paréntesis, el 2, multiplica a todo el interior de éste.

$$\frac{5}{4} - \frac{x-3}{2} = \frac{14x}{4} + \frac{2}{2}$$

Ahora debemos quitar denominadores. Buscamos el m.c.m de los denominadores, de esta forma los hacemos iguales a través de fracciones equivalentes.

$$\frac{5}{4} - \frac{2x-6}{4} = \frac{14x}{4} + \frac{4}{4}$$

Una vez que tenemos los denominadores iguales, los podemos quitar para quedarnos sólo con los numeradores, ya que si los denominadores son iguales, entonces los numeradores deben ser iguales.

Ten cuidado con los signos delante de la fracción, mira que le ha pasado al término:

$$-\frac{2x-6}{4} \text{ se convierte en } -2x+6$$

queda:

$$5 - 2x + 6 = 14x + 4$$

Agrupamos los monomios a un lado y los números al otro.

$$-14x - 2x = -5 + 4 - 6$$

$$-16x = -7$$

Despejamos la x o incógnita.

$$x = \frac{-7}{-16} = \frac{7}{16}$$

Ejercicios resueltos

(Resuelve las siguientes ecuaciones)

7. $4 - 7(2x - 3) = 3x - 4(3x - 5)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}4 - 14x + 21 &= 3x - 12x + 20 \\-14x - 3x + 12x &= 20 - 4 - 21 \\-5x &= -5 \\x &= \frac{-5}{-5} \\x &= 1\end{aligned}$$

8. $4 - \frac{3-2x}{5} = 7$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{20}{5} - \frac{3-2x}{5} &= \frac{35}{5} \\20 - 3 + 2x &= 35 \\2x &= 35 - 20 + 3 \\2x &= 18 \\x &= \frac{18}{2} \\x &= 9\end{aligned}$$

9. $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(x - \frac{7}{3} \right)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{x}{3} - \frac{7}{9} \\\frac{12x}{18} - \frac{9}{18} &= \frac{6x}{18} - \frac{14}{18} \\12x - 9 &= 6x - 14 \\12x - 6x &= -14 + 9 \\6x &= -5 \\x &= -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ejercicios resueltos

(Resuelve las siguientes ecuaciones)

10. $2\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{3}\right) - \frac{3x}{10} = 3\left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{5}\right) - 1$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{2x}{5} + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{10} &= 1 + \frac{6x}{5} - 1 \\ \frac{2x}{5} + \frac{2x}{3} - \frac{3x}{10} &= \frac{6x}{5} \\ \frac{12x}{30} + \frac{20x}{30} - \frac{9x}{30} &= \frac{36x}{30} \\ 12x + 20x - 9x - 36x &= 0 \\ -13x &= 0 \\ x &= \frac{0}{-13} \\ \mathbf{x = 0}\end{aligned}$$

11. $\frac{1-x}{3} - \frac{x-1}{12} = \frac{3x-1}{4}$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\frac{4-4x}{12} - \frac{x-1}{12} &= \frac{9x-3}{12} \\ 4-4x-x+1 &= 9x-3 \\ 4+1+3 &= 9x+4x+x \\ 8 &= 14x \\ x &= \frac{8}{14} \\ \mathbf{x = \frac{4}{7}}\end{aligned}$$

12. $5 - 2\left(\frac{x}{5} + 1\right) = \frac{x}{10} + 3\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}5 - \frac{2x}{5} - 2 &= \frac{x}{10} + \frac{3x}{2} - 3 \\ \frac{50}{10} - \frac{4x}{10} - \frac{20}{10} &= \frac{x}{10} + \frac{15x}{10} - \frac{30}{10} \\ 50 - 4x - 20 &= x + 15x - 30 \\ 50 - 20 + 30 &= x + 15x + 4x \\ 60 &= 20x \\ x &= \frac{60}{20} \\ \mathbf{x = 3}\end{aligned}$$

3. Ecuaciones de segundo grado

Definición. Tipos

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$.

- Los **coeficientes** de la ecuación son a y b . El **término independiente** es c .
- Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, se dice que la ecuación es **completa**.
- Si $b=0$ ó $c=0$ la ecuación es **incompleta**.

Ecuación de segundo grado **completa**: $3x^2 + 4x + 2 = 0$

$a=3$; $b=4$; $c=2$

Ecuación de segundo grado **incompleta**: $3x^2 + 2 = 0$

$a=3$; $b=0$; $c=2$

Resolución de $ax^2+bx=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo $ax^2+bx=0$ tiene dos soluciones: $x_1=0$ y $x_2=-b/a$

Se resuelve sacando factor común a la x e igualando los dos factores a cero.

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$x(3x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Resolución de $ax^2+c=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo $ax^2+c=0$, puede no tener solución ó tener dos soluciones distintas de la forma $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

Resolución de $ax^2+bx+c=0$

La ecuación de segundo grado **completa** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma $ax^2+bx+c=0$, siendo a , b y c números reales y $a \neq 0$

Para obtener las soluciones utilizamos la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

EJERCICIOS resueltos

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 6x = 0 \quad \text{Sol: } x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 + 27x = 0 \quad \text{Sol: } x(x + 27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = -27 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x = 0 \quad \text{Sol: } x(3x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 36 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } 4x^2 - 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^2 + 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = -9 \rightarrow \text{No hay solución}$$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

$$\text{a) } x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } 3x^2 + 17x + 20 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \text{No hay solución}$$

4. Aplicaciones

Problemas que dan lugar a ecuaciones.

Para traducir un problema al lenguaje algebraico y encontrar su solución, lo primero y más importante es leer con mucha atención el enunciado entendiéndolo completamente, después hay que dar los siguientes pasos:

- 1) Establecer con precisión cuál será la incógnita.
- 2) Expresar como una ecuación la relación contenida en el enunciado.
- 3) Resolver la ecuación.
- 4) Interpretar la solución de la ecuación en el contexto del enunciado.
- 5) Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones del enunciado.

Ejemplo

Una parcela rectangular tiene una superficie de 7500 m². Si mide el triple de largo que de ancho ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

Llamamos: **x al ancho de la parcela**

El largo es el triple del ancho: **3x**

Escribimos la ecuación: **3x · x = 7500**

Que resolvemos,

$$3x^2 = 7500 \rightarrow x^2 = \frac{7500}{3} = 2500 \rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{2500} = \begin{cases} x = 50 \\ x = -50 \text{ No vale} \end{cases}$$

La solución es 50 m de ancho por 150 m de largo, en efecto $50 \cdot 150 = 7500 \text{ m}^2$.

El último paso, la comprobación, es muy importante para verificar que hemos resuelto bien el ejercicio.

Ejemplo

Una pluma es 3 € más cara que un bolígrafo. Por dos plumas y 4 bolígrafos pagamos 11´4 €. ¿Cuánto cuesta la pluma y cuánto el bolígrafo?

Para establecer la incógnita debo fijarme en la pregunta, muchas veces me ayuda a saber quien es la x.

El bolígrafo es el artículo de menor precio, lo escogemos como la incógnita.

x = precio del bolígrafo

Entonces la pluma costará $x + 3$

Escribimos la ecuación prestando atención a las relaciones establecidas en el enunciado.

$$2(3+x) + 4x = 11´4$$

Para resolver la ecuación, quitamos paréntesis y denominadores si los hay. Agrupamos:

$$\begin{aligned} 6 + 2x + 4x &= 11´4 \\ 6x &= 11´4 - 6 \\ 6x &= 5´4 \end{aligned}$$

Despejamos x,

$$x = \frac{5´4}{6} = 0´9$$

Interpretamos la solución de la ecuación.

El bolígrafo cuesta 0´9 € y la pluma vale 3´9 €.

Comprobamos, dos plumas cuestan 7´80 €, 4 bolígrafos 3´60 €. En total pagamos 11´40 €.

Para practicar



NOTA IMPORTANTE

No olvides comprobar las soluciones e interpretarlas dentro de los enunciados de los problemas.

1. Resuelve la ecuación:

$$-6 - 7(8x - 4) = -(7 - 9x) - (x - 9)$$

2. Pablo es 4 años más joven que su hermana María y 2 años mayor que su hermano Federico. Entre los tres igualan la edad de su madre, que tiene 59 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

3. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{2} - \frac{x}{8} = \frac{7x}{4} - \frac{1}{4}$$

4. Lorenzo gasta la mitad de su dinero en un videojuego, y la séptima parte en ir al cine. ¿Cuánto dinero tenía si aún le quedan 15 €?

5. Hallar los lados de un rectángulo de 27 cm de perímetro si la base es $\frac{2}{7}$ de la altura.

6. Resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{2} = \frac{5x+1}{5} - \frac{9-2x}{4}$$

7. Paloma, Pablo y Andrés reciben 1638 € como pago por un trabajo que han realizado. Si Pablo ha trabajado el triple de días que Andrés y Paloma el triple que Pablo, ¿cómo harán el reparto del dinero?

8. Resuelve la ecuación:

$$(-2)(2 - 4x) = 3x - 7(7x - 2)$$

9. La edad de Federico es triple de la de María y la de Pablo es la tercera parte de la de María. La suma de las edades de Federico y Pablo es 80 años. Averiguar las edades de los tres.

10. Resuelve la ecuación:

$$7 + x = \frac{7x}{2} - \frac{1}{2}$$

11. La suma de las edades de dos amigos es 44. Sabemos que uno de ellos es 2 años mayor que el otro. Averiguar la edad de cada uno.

12. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{4} + \frac{x-2}{4} = 2 \left(\frac{7x}{6} - \frac{5}{2} \right)$$

13. Dentro de 10 años Juan duplicará la edad que tenía hace 4 años. ¿Cuál es su edad actual?

14. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{2}(-5x + \frac{1}{4}) = \frac{5}{2} + \frac{x}{8}$$

15. Si a la tercera parte de un número le sumamos su quinta parte y además le añadimos 14, obtenemos dicho número. ¿De qué número se trata?

16. El precio de 2 yogures griegos y 4 yogures de coco es 3 €. El yogur griego vale 30 céntimos más que el de coco. Calcular el precio de cada uno.

17. Tres hermanos se reparten 96 € de la siguiente manera: El mediano recibe 12 € menos que el mayor. Y el pequeño recibe la tercera parte que el mediano. ¿Cuánto recibe cada uno?

Ecuaciones

18. Paloma, Pablo y Andrés comparten la propiedad de un terreno de 1638 Ha. Pablo tiene el doble de terreno que Andrés y Paloma el triple que Pablo. ¿Qué superficie de terreno tiene cada uno?

19. Hemos recorrido la tercera parte de un camino y aún nos quedan 2 Km para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?

20. La suma de tres números consecutivos excede en 10 unidades al doble del mayor de los tres. ¿Cuáles son esos números?

21. Resuelve la ecuación:

$$\frac{1}{2}(7+x) = \frac{7x}{6} - \frac{5}{2}$$

22. Resuelve la ecuación:

$$\frac{5}{2}(-5 - \frac{x}{2}) = \frac{5x}{2} + \frac{5}{4}$$

23. Resuelve la ecuación:

$$\frac{5}{2} + \frac{x-2}{2} = 2\left(\frac{5x}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

24. Resuelve la ecuación:

$$\frac{9}{4} - \frac{x-1}{2} = \frac{5x}{6}$$

25. Resuelve la ecuación:

$$5+x = \frac{7x}{4} + \frac{1}{2}$$

26. Resuelve la ecuación:

$$\frac{7}{3} - \frac{x}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{1}{3}$$

27. Resuelve la ecuación:

$$-5 + \frac{x}{6} = \frac{7x}{6} + \frac{1}{3}$$

28. Resuelve la ecuación:

$$x+7(8-9x)-8 = 5+6x-8$$

29. Resuelve la ecuación:

$$(-5)(4-5x) = 7x-3(3x-9)$$

30. Resuelve la ecuación:

$$-2-2(3x-8) = -(1-9x)-(x-3)$$

31. Resuelve

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $x^2 + 3x = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

d) $x^2 + 5 = 0$

32. Resuelve

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 3x - 4 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$

33. La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

34. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.

35. Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades sabiendo que su producto es 44.

36. Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto 24

37. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de 7000 m², halla sus dimensiones.

38. Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?.

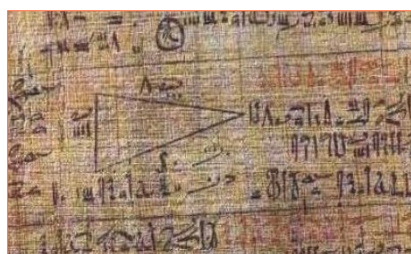
Para saber más



El problema del papiro Rhind planteado al principio del tema corresponde a la ecuación:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

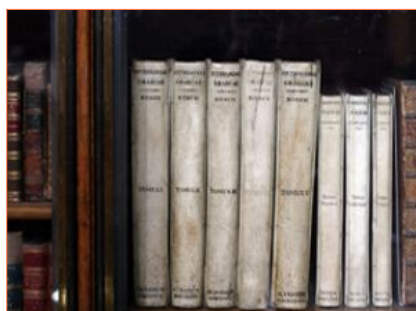
cuya solución es $x = \frac{133}{8}$
(ó como consta en el papiro $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).



Papiro Rhind

Desde el papiro Rhind, y a lo largo de más de 3000 años, hay testimonios escritos de muchos problemas que pueden resolverse con ecuaciones de primer grado.

En la Antología Palatina o Antología Griega, del siglo V, se recogen más de 40 problemas de ese tipo.



Antología Palatina, British Museum de Londres

Te proponemos tres de estos problemas llamados "clásicos".

1) Diofanto fue un geómetra griego que vivió en el siglo III a.C. Su juventud ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte, su mejilla se cubrió de vello; pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y su hijo nació cinco años después. Al alcanzar éste la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre le sobrevivió cuatro años más. ¿A qué edad murió Diofanto?

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$\frac{14x}{84} + \frac{7x}{84} + \frac{12x}{84} + \frac{420}{84} + \frac{42x}{84} + \frac{336}{84} = \frac{84x}{84}$$

$$x = 84$$

2) La quinta parte de un enjambre de abejas se posó sobre la flor de la jara, la tercera en la flor del romero, el triple de la diferencia entre estos dos números voló sobre una flor de lavanda, y una abeja quedó sola en el aire atraída por el perfume de un jazmín. ¿Cuántas abejas tenía el enjambre?

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + 3\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) + 1 = x$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + x - \frac{3x}{5} + 1 = x$$

$$\frac{3x}{15} + \frac{5x}{15} - \frac{9x}{15} + \frac{15}{15} = 0$$

$$x = 15$$

3) Los reyes de una dinastía tuvieron nueve nombres diferentes. La tercera parte del total de estos reyes llevó el primero de estos nombres; la cuarta parte, el segundo; la octava parte, el tercero; la doceava parte, el cuarto; y cada uno de los nombres restantes los llevó un solo rey. ¿Cuántos reyes tuvo la dinastía?

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{12} + 5 = x$$

$$\frac{8x}{24} + \frac{6x}{24} + \frac{3x}{24} + \frac{2x}{24} + \frac{120}{24} = \frac{24x}{24}$$

$$x = 24$$



Recuerda lo más importante

Ecuaciones: ideas básicas

- Cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, **la incógnita**, que sabemos que cumple una condición, representamos la cantidad desconocida por "x" (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos **ecuación**.
- **Resolver** una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los que se cumple la igualdad.
- **Miembros:** Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1er miembro. El de la derecha se llama 2º miembro.
- **Términos:** son los sumandos que forman los miembros.
- **Soluciones:** Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.
- **Grado** de una ecuación: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones.	Para resolver ecuaciones
<ul style="list-style-type: none"> • Se llaman ecuaciones equivalentes a las que tienen las mismas soluciones. • Si se suma o resta una cantidad o expresión a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente. • Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número (o una expresión algebraica) se obtiene otra equivalente. <p><i>Reglas prácticas:</i></p> <p>“lo que está sumando pasa restando y lo que está restando pasa sumando”</p> <p>“lo que está multiplicando pasa dividiendo y lo que está dividiendo pasa multiplicando”</p> <p>Para resolver problemas, después de comprender el enunciado:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Establecer con precisión cuál será la incógnita. • Expresar como una ecuación la relación contenida en el enunciado. • Resolver la ecuación. • Interpretar la solución de la ecuación en el contexto del enunciado. • Comprobar que la solución obtenida cumple las condiciones del enunciado. 	<p>Para resolver ecuaciones de primer grado los pasos a seguir son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Quitar paréntesis. • Quitar denominadores. • Agrupar los monomios que llevan la incógnita en un miembro y los términos independientes en el otro. • Despejar la incógnita. <p>Ecuación de segundo grado</p> <p><u>Completas:</u> $ax^2+bx+c=0$</p> $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <ul style="list-style-type: none"> • Si $b^2-4ac > 0$ tiene 2 soluciones • Si $b^2-4ac = 0$ tiene 1 solución doble • Si $b^2-4ac < 0$ no tiene solución <p><u>Incompletas:</u> Si $b=0$ ó $c=0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $ax^2+c=0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ <ul style="list-style-type: none"> • $-c/a > 0$, dos soluciones • $-c/a < 0$, no hay solución • $c=0$, una solución doble, $x=0$ • $ax^2+bx=0$ Soluciones: $x=0$, $x=-b/a$

Autoevaluación



1. Resuelve la ecuación $(x-8) \cdot 14 = -28$
2. En un rectángulo de perímetro 38 cm la base es 3 cm más larga que la altura. Calcular la longitud de la base.
3. Hemos recorrido la séptima parte de un camino y aún nos faltan 8 Km para llegar a la sexta parte. ¿Qué longitud tiene el camino?
4. Resuelve la ecuación; $2x^2 - 72 = 0$
5. Resuelve la ecuación: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(x + \frac{2}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}$
6. Resuelve la ecuación: $x^2 + 6x - 160 = 0$
7. Resuelve la ecuación: $\frac{x-2}{7} - \frac{7-x}{2} = 2$
8. Por 4 pantalones y 3 camisetas pagamos 87 €. Si un pantalón cuesta 6 € más que una camiseta, ¿cuánto cuesta una camiseta?
9. El cuadrado de un número positivo más el doble de su opuesto es 15. ¿Cuál es ese número?
10. La superficie de una finca es de 156 Ha. Un Olivar ocupa la mitad que un Encinar, y el Trigo ocupa la tercera parte que el Encinar. También hay una superficie de 2 Ha. Dedicada a Huerta. ¿Cuánto ocupa el Encinar?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $5/16$
2. Federico: 17 años; Pablo: 19 años; María: 23 años
3. 2
4. 442 €
5. Altura=10,5 cm; base=3 cm
6. $17/10$
7. Andrés recibe 126 €; Pablo, 378 €; Paloma, 1134 €
8. $1/3$
9. María: 24 años; Federico: 72 años; Pablo: 8 años
10. 3
11. Un amigo tiene 21 años y el otro 23 años
12. 3
13. 18 años
14. $-13/141$
15. 30
16. Yogur de coco: 0,40 €; yogur griego: 0,70€
17. Mayor: 48 €; mediano: 36 €; pequeño: 12€
18. Andrés: 182 Ha; Pablo: 364 Ha; Paloma: 1092 Ha.
19. 12 Km
20. 11, 12 y 13
21. 9
22. $-11/3$
23. $1/4$
24. $33/16$
25. 6
26. $8/3$
27. $-16/3$
28. $3/4$
29. $47/27$
30. $6/7$
31. a) $x=0$ $x=5$ b) $x=3$ $x=-3$
c) $x=0$ $x=-3$ d) No hay solución
32. a) $x=2$ $x=3$ b) $x=-1$ $x=4$
c) $x=2$ $x=-5$ d) $x=3$ $x=3$
33. 12
34. 6
35. 8 y 6
36. 11 y 4
37. 6 y 4
38. 100 y 70

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 6
2. 8 cm
3. 336 Km
4. 6 y -6
5. 3
6. 10 y -16
7. 9
8. 9 €
9. 5
10. 84 Ha