8

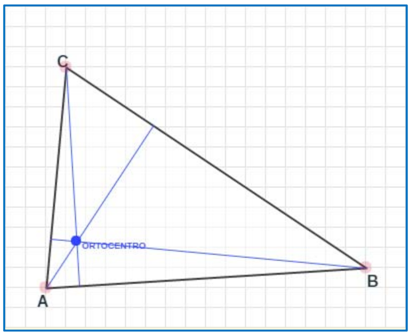
Xeometría analítica do plano

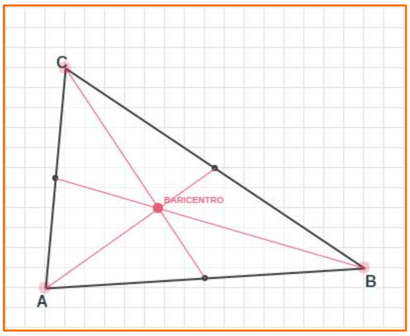
Obxectivos

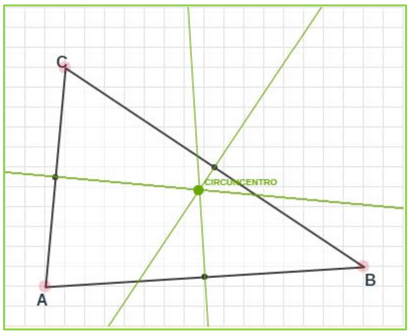
Nesta quincena aprenderás a:

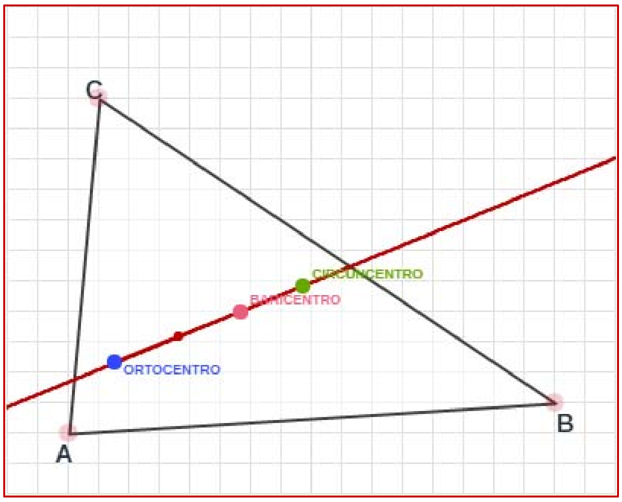
- Recoñecer os elementos dun vector identificando cando dous vectores son equipolentes.
- Facer operacións con vectores libres tanto analítica como graficamente.
- Calcular o punto medio dun segmento e a distancia entre dous puntos dados.
- Coñecer e calcular as distintas formas da ecuación dunha recta.
- Investigar a posición relativa de dúas rectas.
- Calcular rectas paralelas e perpendiculares a unha dada.

Antes de empezar









A recta de Euler

Como sabes as tres alturas dun triángulo córtanse no ortocentro, as tres medianas no baricentro e as mediatrices dos lados no circuncentro.

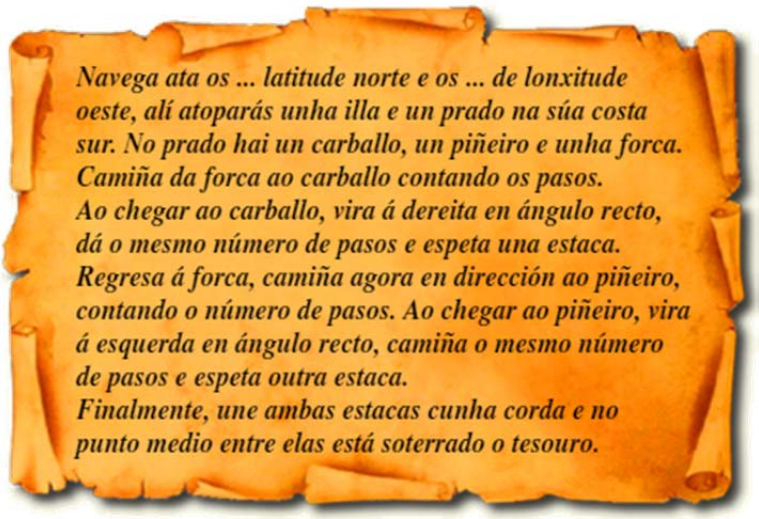
O ortocentro o baricentro e o circuncentro, están aliñados nunha recta chamada **recta de Euler**.

Ademais a distancia entre o baricentro e o ortocentro é o dobre que a distancia entre o baricentro e o circuncentro.

Investiga

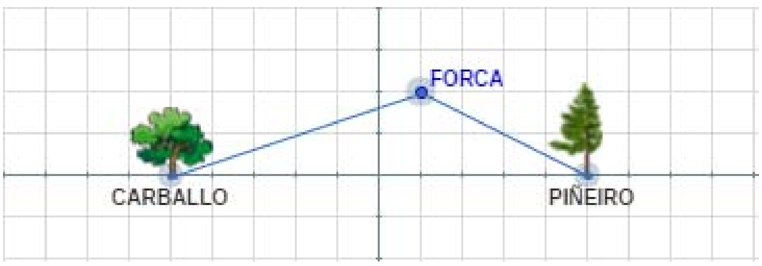
Un rapaz atopou, entre os papeis do seu bisavó, un anaco de pergameo que contiña as indicacións para encontrar un tesouro soterrado nunha illa deserta.

Seguindo as indicacións, o rapaz atopou a illa, o prado o carballo e o piñeiro. Pero transcorrera demasiado tempo desde que se soterrou o tesouro e da forca non quedaba rastro algún, desaparecera. Aínda así deu con el, e ti... atoparíalo?



Un chisco de axuda

Debuxar é fundamental para resolver o problema, e neste caso elixir un sistema de coordenadas adecuado axuda moitísimo. Así que sitúa os puntos coñecidos, que son o Piñeiro e o carballo, sobre o eixe de abscisas e coa orixe no medio. A forca non se sabe onde estaba, polo que podes poñela no punto que queiras. Agora utiliza vectores.



1. Vectores

Vectores fixos e vectores libres

Un vector fixo $\overrightarrow{AB}$ é un segmento orientado determinado por dous puntos, a **orixe** $A(x_1,y_1)$ e o **extremo** $B(x_2,y_2)$. Caracterízase por:

- O **módulo**, $|\overrightarrow{AB}|$, é a lonxitude do segmento.
- A **dirección**, a da recta na que se apoia.
- O **sentido**, o que vai da orixe ao extremo.

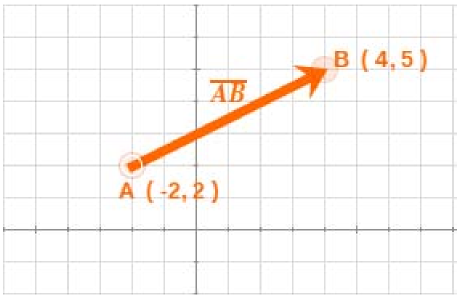
Podemos expresar o vector mediante as súas **compoñentes**, que se obteñen restando as coordenadas do extremo menos as da orixe:

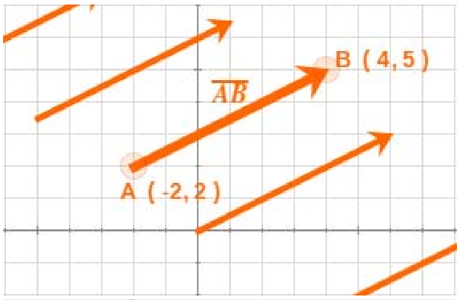
$$|\overrightarrow{AB}| = (x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

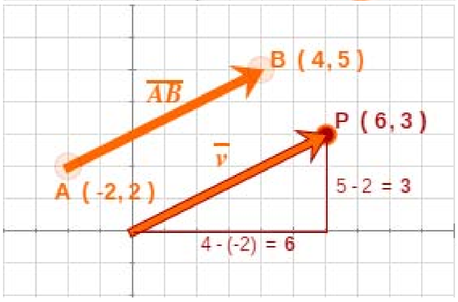
Dous vectores fixos dinse **equipolentes** se teñen o mesmo módulo, dirección e sentido. O conxunto de vectores equipolentes denomínase **vector libre**, e calquera deles sirve para representalo. Indicaremos $\vec{v}$.

Hai un único representante do vector libre $\vec{v}$ co orixe en (0, 0). O seu extremo é o punto P cuxas coordenadas son as de B menos as de A, que son tamén as **compoñentes** do vector $\vec{v}$.

✓ $\overrightarrow{OP}$ é o **vector do posición** do punto P.

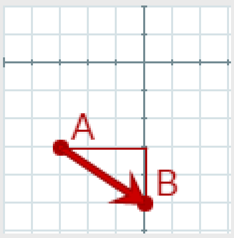






EXERCICIOS resoltos

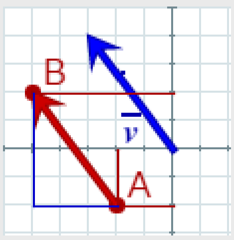
1. Dados os puntos A (-3, -3) e B (0, -5), calcula as compoñentes do vector $\overrightarrow{AB}$ e o módulo.



Solución: $\overrightarrow{AB} = (0-(-3), -5-(-3)) = (3,-2)$

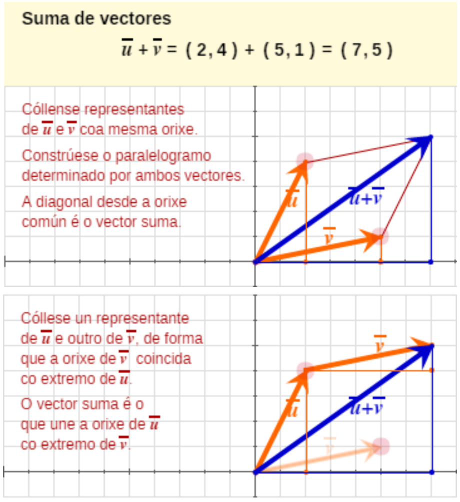
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

2. Calcula o punto extremo dun vector equipolente ao $\vec{v} = (-3, 4)$ e coa orixe no punto A(-2, -2).



Solución: $B(-2+(-3), -2+4) = B(-5,\ 2)$

Operacións con vectores

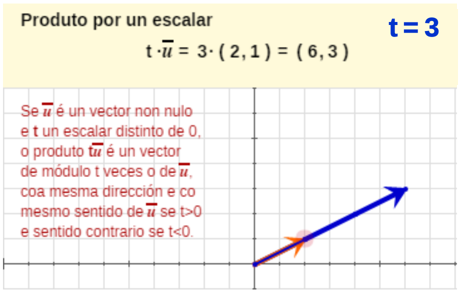


Suma de vectores. A suma de dous vectores libres $\vec{u}=(u_x,u_y)$ e $\vec{v}=(v_x,v_y)$, é o vector que se obtén sumando as súas compoñentes:

$$\vec{u}+\vec{v}=(u_x+v_x\,,\,u_y+v_y)$$

Propiedades da suma de vectores

- Propiedade conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Propiedade asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
  Considérase vector **cero**, $\vec{0}=(0,0)$, ao caso particular de vector cuxo extremo e orixe coinciden.
- Elemento oposto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
  O vector **oposto** doutro é o que ten o mesmo módulo e dirección, pero sentido contrario.



Produto dun vector por un escalar. Para multiplicar un vector libre $\vec{u}$ por un número, multiplícanse as súas dúas compoñentes por dito número:

$$t\cdot\vec{u}=(t\cdot u_x\,,\,t\cdot u_y)$$

Propiedades do produto por un escalar

- $t(s\vec{u})=(ts)\vec{u}$
- $(t+s)\vec{u}=t\vec{u}+s\vec{u}$
- $1\vec{u}=\vec{u}$

e coas dúas operacións a propiedade distributiva:

- $t(\vec{u}+\vec{v})=t\vec{u}+t\vec{v}$

EXERCICIOS resoltos

3. Dados os vectores $\vec{u}=(4,-3)$ e $\vec{v}=(-3,3)$, calcula $\vec{u}-2\vec{v}$.

Solución: $\vec{u}-3\vec{v}=(4-2\cdot(-3),-3-2\cdot 3)=(10,-9)$

4. Dados os vectores $\vec{u}=(-2,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$ e $\vec{w}=(0,2)$, calcula $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$.

Solución: $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}=(3\cdot(-2)-1+2\cdot 0,\ 3\cdot 3-(-2)+2\cdot 2)=(-7,15)$

5. Dados os vectores $\vec{u}=(-1,-1)$, $\vec{v}=(0,4)$ e $\vec{w}=(1,-4)$, calcula $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$.

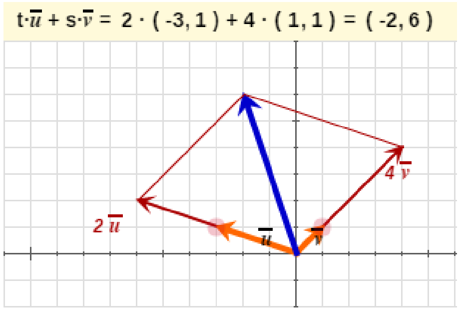
Solución: $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})=(2\cdot(-1)-1,\ 2\cdot(-1)-0)=(-3,-2)$

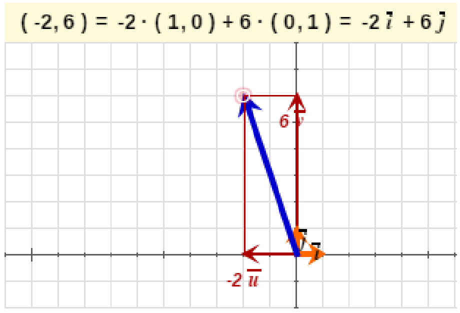
Combinación lineal de vectores

Cando dous vectores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, teñen a mesma dirección dise que son **linealmente dependentes**. Observa que se cumpre $\vec{u} = k\vec{v}$. En caso contrario son **independentes**.

Un vector $\vec{w}$ é **combinación lineal** doutros dous $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se existen dous números reais, t e s, tales que:

$$\vec{w} = \mathrm{t} \cdot \vec{u} + \mathrm{s} \cdot \vec{v}$$





Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son independentes, calquera outro vector pode pórse como combinación lineal deles. Dise que forman unha **base.**

A base que está formada polos vectores $\vec{\imath}$ = (1, 0) e $\vec{\jmath}$ = (0, 1) é a máis utilizada. Denominase base canónica e neste caso, t e s son as compoñentes do vector.

EXERCICIOS resoltos

6. Os vectores $\vec{u} = (1, -1)$ e $\vec{v} = (0, 2)$, teñen distinta dirección. Expresa o vector $\vec{w} = (-2,\ 6)$ como combinación lineal deles.

Solución: Buscamos dous números t e s, que cumpran t(1, -1) + s(0,2) = (-2, 6)

Separamos as compoñentes e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} t = -2 \\ -t + 2s = 6 \end{cases} \Rightarrow t = -2 \quad s = 2$$

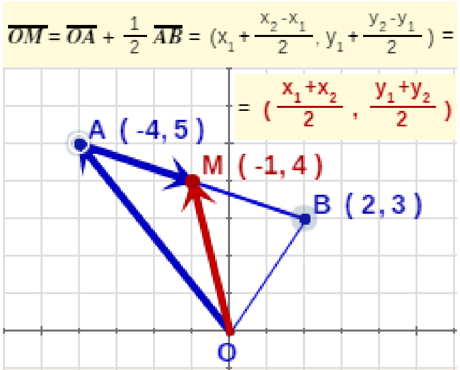
7. Os vectores $\vec{u} = (3,\ 3)$ e $\vec{v} = (1, 3)$, teñen distinta dirección. Expresa o vector $\vec{w} = (1, -3)$ como combinación lineal deles.

Solución: Buscamos dous números t e s, que cumpran t(3, 3) + s(1,3) = (1, -3)

Separamos as compoñentes e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3t + s = 1 \\ 3t + 3s = -3 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \quad s = -2$$

Punto medio dun segmento



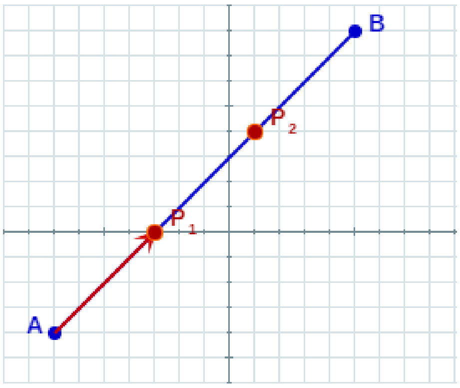
$$M\left(\frac{-4+2}{2},\frac{5+3}{2}\right)=M(-1,4)$$

Aplicando as operacións con vectores é doado calcular o punto medio dun segmento de extremos A e B dados.

As coordenadas do **punto medio** dun segmento son a semisuma das coordenadas dos extremos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2):

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

O punto medio divide ao segmento en dúas partes iguais, do mesmo xeito pódense calcular os puntos que dividen ao segmento en tres, catro ou máis partes iguais. Pódelo ver no seguinte exemplo:



Sexa A(-7, -4) e B(5, 8), calcula os puntos que dividen ao segmento AB en tres partes iguals.

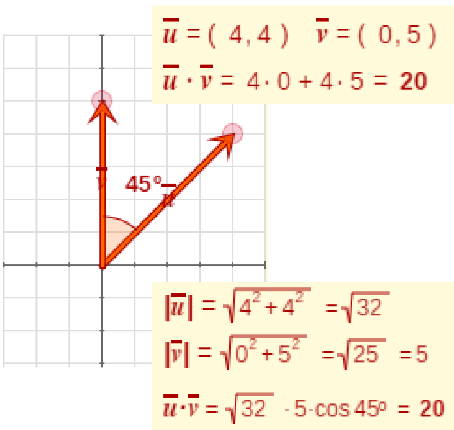
O vector AB é $\overline{AB}$ = (12,12)

O vector de posición dos sucesivos puntos é:

$$\overline{OP_1}=\overline{OA}+\frac{1}{3}\overline{AB}=\left(-7+\frac{12}{3},-4+\frac{12}{3}\right)\rightarrow P_1(-3,0)$$

$$\overline{OP_2}=\overline{OA}+\frac{2}{3}\overline{AB}=\left(-7+\frac{2\cdot 12}{3},-4+\frac{2\cdot 12}{3}\right)\rightarrow P_2(1,4)$$

Produto escalar



Propiedades

- $\overline{u}\cdot\overline{u}\geq 0$
- Conmutativa: $\overline{u}\cdot\overline{v}=\overline{v}\cdot\overline{u}$
- Homoxénea: $t(\overline{u}\cdot\overline{v})=\overline{tu}\cdot\overline{v}=\overline{u}\cdot\overline{tv}$
- Distributiva respecto da suma: $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w})=\overline{u}\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot\overline{w}$

O **produto escalar** de dous vectores, que non debes confundir co *produto por un escalar*, é unha nova operación entre dous vectores libres cuxo resultado é un número.

Dados $\vec{u}$ = (u_x,u_y) e $\vec{v}$ = (v_x,v_y), o seu produto escalar é:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y$$

Se coñecemos o módulo dos vectores e o ángulo que forman, o produto escalar tamén se pode calcular así:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos(\vec{u},\vec{v})$$

Os vectores $\vec{\imath}=(1,0)$ e $\vec{\jmath}=(0,1)$ teñen módulo 1 e son perpendiculares, por tanto cúmprese:

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=|\vec{\imath}|\cdot|\vec{\imath}|\cdot\cos 0°=1\cdot 1\cdot 1=1$$

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=|\vec{\imath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 90°=1\cdot 1\cdot 0=0$$

$$\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=|\vec{\jmath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 0°=1\cdot 1\cdot 1=1$$

Expresamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{\imath}$ e de $\vec{\jmath}$, e aplicando as propiedades do produto escalar resulta:

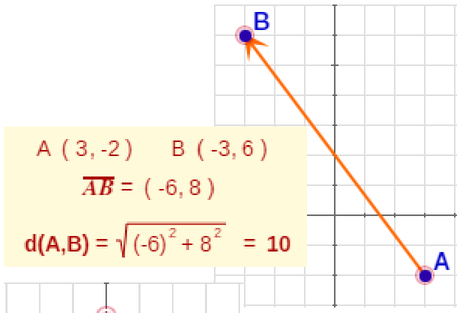
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_x\vec{\imath}+u_y\vec{\jmath})\cdot(v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath})=u_x\cdot v_v+u_y\cdot v_y$$

Aplicacións do produto escalar

Distancia entre dous puntos

Dados os puntos A(x_1, x_2) e B(y_1, y_2), a distancia entre eles é o módulo do vector que os une.

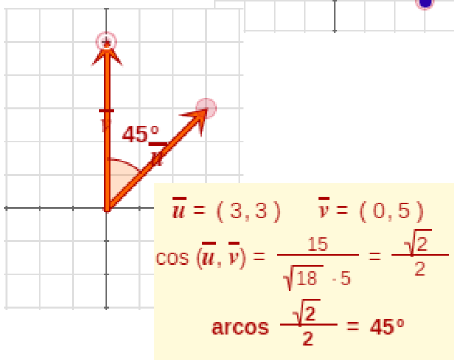
$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ángulo entre dous vectores

Dados dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, co produto escalar podemos calcular o coseno do ángulo que forman e por tanto o ángulo:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

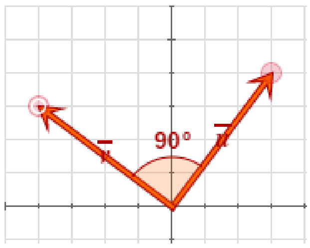


Un caso interesante é o dos vectores **ortogonais**, que forman un ángulo de 90º.

- ✓ Dous vectores son **ortogonais** se o seu **produto escalar** é **0**.

  $$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y = 0$$

  Observa que forman un ángulo de 90º e a súas direccións son **perpendiculares**.



EJERCICIOS resueltos

8. Dados os vectores $\vec{u} = (-4, 2)$ e $\vec{v} = (3, -3)$, calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = -4·3 + 2·(-3) = -18

9. Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forman un ángulo de 150º e os seus módulos son $|\vec{u}| = \sqrt{108}$ e $|\vec{v}| = 12$. Calcula o seu produto escalar.

Solución: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{108} \cdot 12 \cdot \cos 150° = \sqrt{108} \cdot 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -108$

10. Dados os vectores $\vec{u} = (2, -2)$ e $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (4, -4)$, comproba que $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

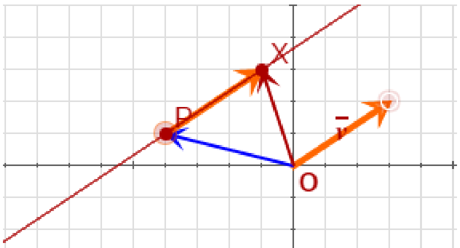
Solución: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ = (2, -2) · ((-3, 4)+(4,-4)) = (2, -2) · (1, 0) =2·1 – 2·0 = 2
$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ = (2, -2) · (-3, 4) + (2, -2) · (4, -4) = -14 + 16 = 2

11. Calcula o valor de m para que os vectores $\vec{u} = (m, 5)$ e $\vec{v} = (10, -6)$, sexan ortogonais.

Solución: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 10m – 30 = 0   entón m = 3

2. Rectas

Ecuacións dunha recta



$\overline{OX} = \overline{OP} + \overline{PX} \Rightarrow \overline{OX} = \overline{OP} + t \cdot \overline{v}$

P(-4, 1) $\vec{v}$ **= (3, 2)**

Para determinar unha recta necesitamos un punto **P(x₁,y₁)** da mesma e un vector director ou direccional $\vec{v}$ **= (**v_x**,**v_y**)** que marque a súa dirección.

Así o vector de posición dun punto calquera da recta será:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} \text{ onde t é un número real.}$$

A partir de aquí obtemos distintas formas da ecuación da recta.

✓ **Ecuación vectorial**

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t \cdot (v_x, v_y)$$

$$(x, y) = (-4, 1) + t\,(3, 2)$$

Separando as coordenadas x e y obtemos as:

✓ **Ecuacións paramétricas**

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot v_x \\ y = y_1 + t \cdot v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Illando t en cada ecuación e igualando:

✓ **Ecuación continua**

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2}$$

Operando e pasando todo ao primeiro membro:

✓ **Ecuación xeral**

$$Ax + By + C = 0$$

$$2x - 3y + 11 = 0$$

Illando y:

✓ **Ecuación explícita**

$$y = mx + n$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

EXERCICIOS resoltos

12. Emparella cada ecuación coa gráfica correspondente:

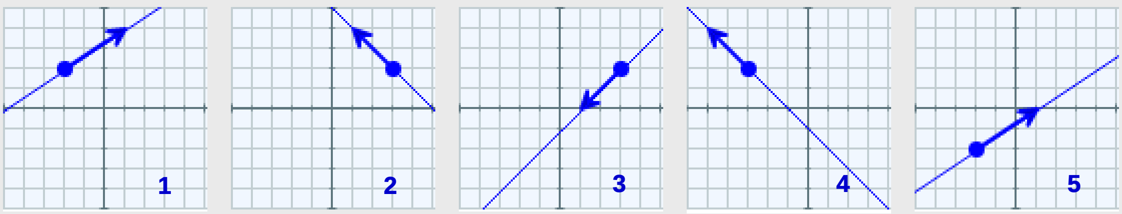
A $(x, y) = (-2, -2) + t\,(3, 2)$

B $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

C $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-2}{-2}$

D $2x + 2y - 10 = 0$

E $y = -x - 1$



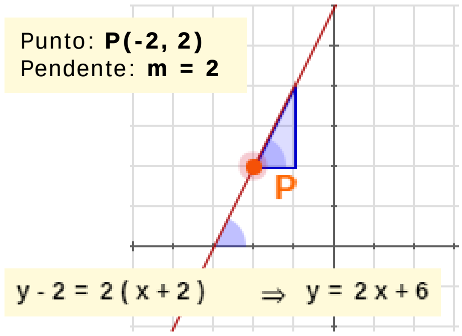
Solución: A – 5, B – 1, C – 3, D – 2, E – 4

Outras ecuacións da recta

Viches que illando y na ecuación xeral, chégase á forma explícita **y = mx + n**.

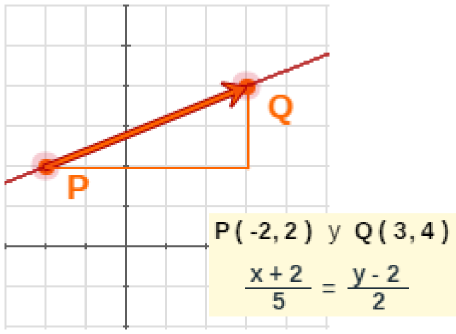
- **m** $= -\frac{B}{A} = \frac{v_y}{v_x}$ é a pendente da recta. É a tanxente do ángulo que a recta forma co eixe X.
- **n** é a ordenada na orixe. É a ordenada do punto onde a recta corta ao eixe Y.

Coñecidos un punto **P(x_1, y_1)** e a pendente **m** da recta é doado chegar á ecuación explícita.



✓ **Ecuación punto-pendente:** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Se se coñecen dous puntos da recta, **P** e **Q**, chega coller un deles e como vector director $\overrightarrow{PQ}$.



✓ **Ecuación por dous puntos:** $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

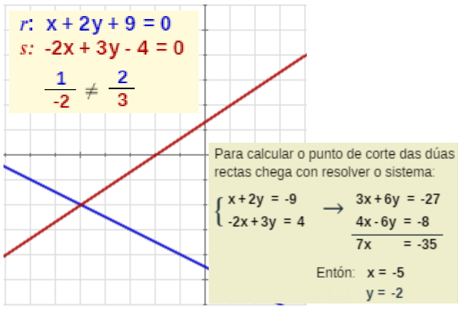
Posicións relativas de dúas rectas

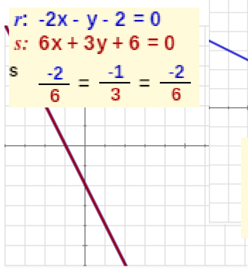
Dúas rectas ***r***: **Ax+By+C=0** e ***s***: **A'x+B'y+C'=0** poden ser:

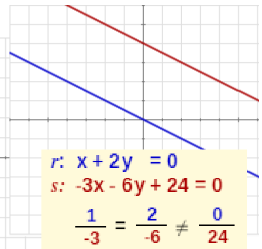
- **Secantes** se teñen un único punto en común. Teñen distinta dirección e distinta pendente.
- **Paralelas** se non teñen ningún punto en común. Teñen a mesma dirección e a mesma pendente pero diferente ordenada na orixe.
- **Coincidentes** se teñen todos os seus puntos comúns. Teñen a mesma pendente e a mesma ordenada na orixe.

En casa caso cúmprese:

Secantes	Paralelas	Coincidentes
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$







EXERCICIOS resoltos

13. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos P(-5, -2) e Q(3, 2). Escribe tamén a súa ecuación en forma explícita.

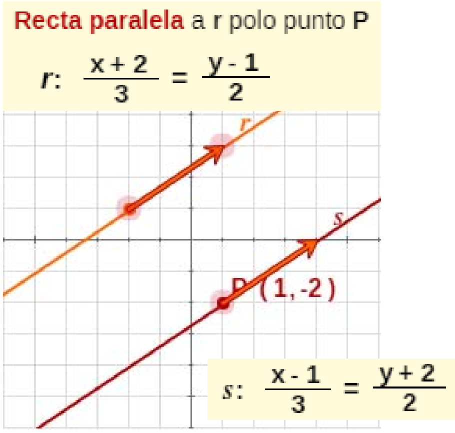
Solución: m $= \frac{2+2}{3+5} = \frac{1}{2}$

A ecuación en forma punto-pendente : $y + 2 = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

14. Unha recta *r* ten como vector director $\vec{v} = (-1,2)$ e pasa polo punto P(-5, -2), outra *s* ten pendente m = -2 e pasa polo punto N(0, 5). Como son estas rectas?

Solución: Teñen a mesma pendente -2, $r:\ y + 2 = -2(x + 5)\ \rightarrow\ 2x + y + 12 = 0$

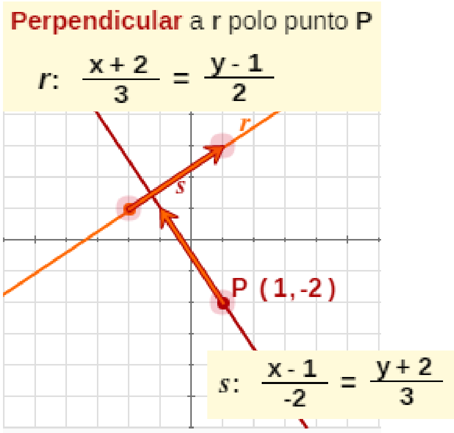
$s:\ 2x + y - 5 = 0$, son paralelas



Recta paralela a outra por un punto

Dúas rectas son paralelas se teñen a mesma dirección e por tanto a mesma pendente.

- Para escribir a ecuación dunha recta paralela a outra por un punto P, bastará tomar este punto e o vector director, ou a pendente segundo conveña, desta outra.



Recta perpendicular a outra por un punto

Dúas rectas son perpendiculares se o son os seus vectores directores e por tanto o seu produto escalar é 0.

- Se $\vec{v}$ = (v_x,v_y) é o vector director dunha recta, o dunha perpendicular é $\vec{v'}$ = (v_y,-v_x).
- En canto ás pendentes, se **m** é a pendente dunha recta e **m'** a dunha perpendicular:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m'} = \frac{-\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{v_y}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$$

EXERCICIOS resoltos

15. Calcula o valor de $\boldsymbol{a}$ para que as rectas *r* e *s* sexan paralelas:

$$r\!: 2x + 3y + 23 = 0 \qquad\qquad s\!: \boldsymbol{a}x + 3y + 46 = 0$$

Solución: Para que sexan paralelas os coeficientes de x e de y respectivos deben ser proporcionais logo $\boldsymbol{a}$ = 2

16. Calcula o valor de $\boldsymbol{a}$ para que as rectas *r* e *s* sexan paralelas:

$$r\!: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-2} \qquad\qquad s\!: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{\boldsymbol{a}}$$

Solución: Para que sexan paralelas as compoñentes dos seus vectores directores deben ser proporcionais logo $\boldsymbol{a}$ = 2

17. Calcula o valor de $\boldsymbol{a}$ para que as rectas *r* e *s* sexan perpendiculares:

$$r\!: x + y = 0 \qquad\qquad s\!: \boldsymbol{a}x + y + 5 = 0$$

Solución: Para que sexan perpendiculares débese cumprir:
$1 \cdot \boldsymbol{a} + 1 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = -1$

18. Calcula o valor de $\boldsymbol{a}$ para que as rectas *r* e *s* sexan perpendiculares:

$$r\!: \frac{x+4}{3} = \frac{y-4}{4} \qquad\qquad s\!: \frac{x+5}{-4} = \frac{y-6}{\boldsymbol{a}}$$

Solución: Para que sexan perpendiculares débese cumprir:
$3 \cdot (-4) + 4 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = 3$

3. Circunferencias

Ecuación dunha circunferencia

Unha circunferencia de centro **C(a, b)** e raio **r** é o lugar xeométrico dos puntos **P(x, y)** do plano cuxa distancia a **C** é **r**. Isto lévanos á ecuación:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Desenvolvendo esta expresión obtemos:

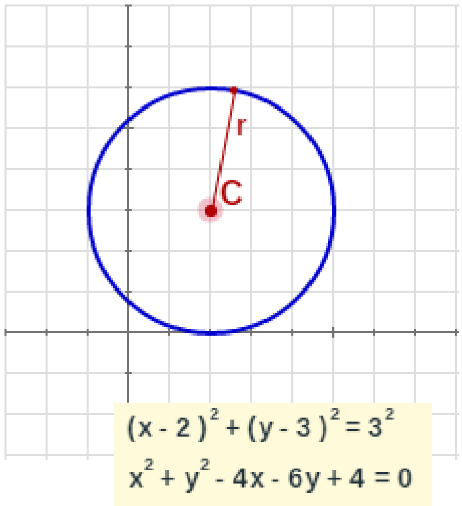
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Que podemos escribir:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

onde **A = -2a**, **B = -2b** e **C = a^2 + b^2 - r^2**

Así podemos calcular as coordenadas do centro ou o valor do raio a partires da ecuación.



EXERCICIOS resoltos

19. Acha a ecuación da circunferencia de centro C(-3, 3) e raio 5.

Solución: $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
Operando e pasando todo ao primeiro membro: $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$

20. Cal é o centro da circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$?

Solución: Sexan a e b respectivamente a abscisa e a ordenada do centro.
Se nos fixamos nos coeficientes de x e de y: $a = -\frac{-4}{2}$ $b = -\frac{6}{2}$
entón o centro está en C(2, -3)

21. Cal é o raio da circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$?

Solución: Se nos fixamos na ecuación vemos que o centro está no punto (-1, -3)
e ademais $(-1)^2 + (-3)^2 - r^2 = -6$ entón $r^2 = 16$ y $r = 4$

22. Acha a ecuación da circunferencia que pasa polo punto (-7, 1) e ten o centro en C(-2, -1).

Solución: A distancia entre o centro e P é o raio: $r=\sqrt{(-7+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{29}$
entón $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 29 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 24 = 0$

Para practicar

1. Dados os puntos A(-4,3), B(3,1), C(4,6) e D(-3,8), calcula os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DC}$.
Cáles son equipolentes?

2. Os puntos A(-5, 2), B(0, -2) e C(1, 2) son tres vértices consecutivos dun paralelogramo, acha o cuarto vértice, D, aplicando a suma de vectores.

3. Dados os vectores $\vec{u}=(-4,1), \vec{w}=(2,-4)$ e $\vec{w}=(-4,-2)$. Calcula:

a) $\vec{u}-3(\vec{v}+\vec{w})$ b) $2\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

4. Calcula o punto onde se cortan as diagonais do paralelogramo de vértices A(-4, 2), B(1, -2), C(2, 2), D(-3, 6). Calcula tamén a medida das diagonais.

5. Comproba que o triángulo de vértices A(-5, 2), B(1, -2), C(-2, 6) e o de vértices os puntos medios dos seus lados, son semellantes.

6. Calcula o simétrico do punto A(-3, 1) respecto do P(0,-1). Comproba tamén que a distancia entre A e P é a metade da distancia entre A e o seu simétrico.

7. Os puntos A(-2, 1), B(6, -4), C(9, 1), D(4, 4) son os vértices dun trapezoide. Comproba que os puntos medios de cada lado forman un paralelogramo.

8. Calcula as compoñentes do vector $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ sabendo que $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ e $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$

9. Expresa o vector $\vec{w}=-4\vec{i}-6\vec{j}$ como combinación lineal de $\vec{u}=4\vec{i}+\vec{j}$ e de $\vec{v}=-2\vec{i}+2\vec{j}$

10. Dados os vectores $\vec{u}=(5,4)$ e $\vec{v}=(-3,2)$ calcula o seu produto escalar, os seus módulos e o ángulo que forman.

11. Comproba mediante vectores e co Teorema de Pitágoras que o triángulo de vértices A(-4, 2), B(5, -1) e C(-2, 8) é rectángulo.

12. Dada a recta *r* indica que tipo de ecuación é, represéntaa e calcula un punto, un vector director e a pendente.

a) $r: \begin{cases} x=2-3t \\ y=5+3t \end{cases}$ c) $r: \frac{x+5}{5}=\frac{y+1}{4}$

b) $r: -x+2y-1=0$ d) $r: y=-x-7$

13. A recta r pasa polo punto P(2, 2) e ten como vector director $\vec{v}=(-4,2)$. Acha a súa ecuación en forma:

a) vectorial; b) continua; c) xeral.

14. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polos puntos P(-3,-4) e Q(-1,-2)

15. A recta *r* pasa polo punto P(5, -1) e ten pendente 2. Acha a súa ecuación en forma: a) punto-pendente; b) explícita; c) xeral.

16. Acha a posición relativa das rectas:

a) $r: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-3t \end{cases}$ $s: \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{4}$

b) $r: -x+4y+1=0$ $s: x-4y+3=0$

17. Acha a ecuación da recta paralela a $r: 4x+3y+8=0$ polo punto P(2, 3)

18. Acha a ecuación da perpendicular a $r: 4x-3y+8=0$ polo punto P(-1, 7)

19. Comproba que as rectas $x+6y+8=0$, $5x-6y+40=0$, $x+2=0$, forman un triángulo e calcula os seus vértices.

20. Dado o triángulo de vértices A(-5,-3), B(2,-5) e C(-2,2), calcula as ecuacións das alturas e as coordenadas do ortocentro.

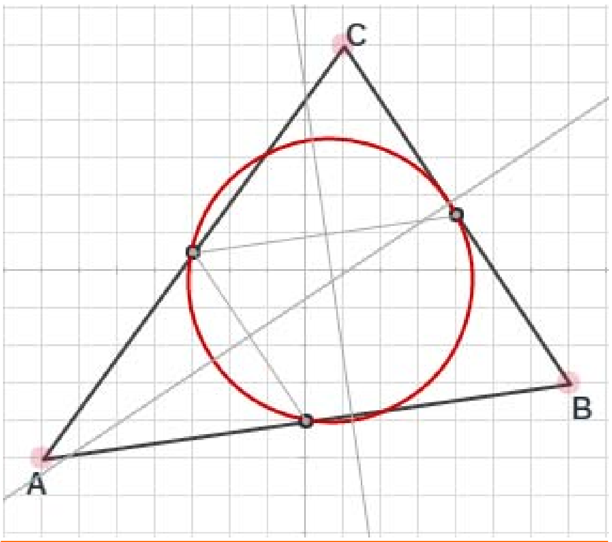
21. Dado o triángulo de vértices A(-7,0), B(0,-2) e C(-3,7), calcula as ecuacións das mediatrices de cada lado e as coordenadas do circuncentro.

22. Dado o triángulo de vértices A(-3,-4), B(7,-5) e C(0, 3), calcula as ecuacións das medianas e as coordenadas do baricentro.

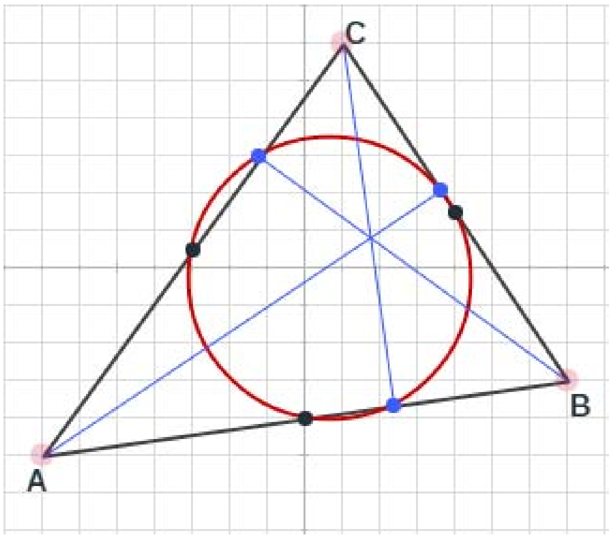
Para saber máis

A circunferencia dos nove puntos

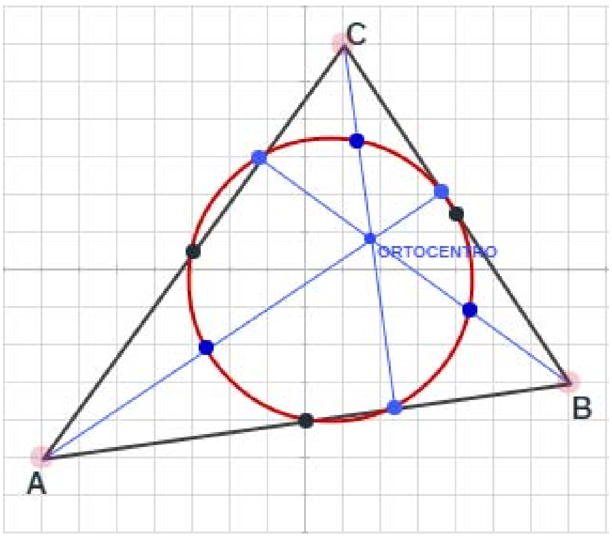
Un triángulo sempre nos depara sorpresas. Ao principio do tema falabamos dunha recta curiosa, a de Euler, agora imos ver unha circunferencia que tamén resulta sorprendente, a de **Freuenbach** ou dos **nove puntos**.



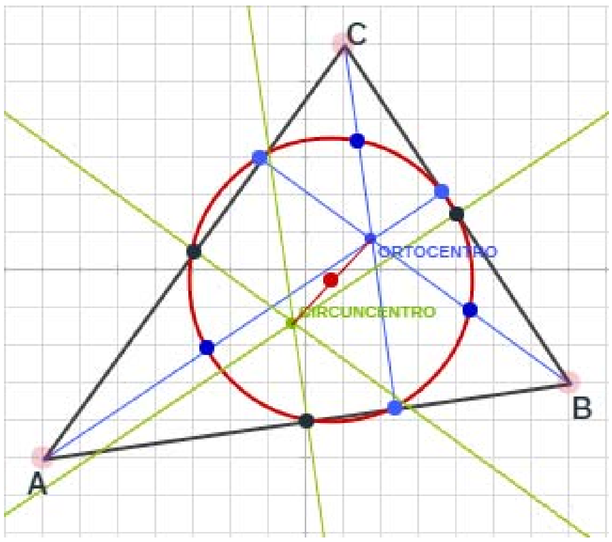
Dado un triángulo calquera ABC, collemos os **puntos medios** dos sues lados e debuxamos a circunferencia que pasa por eles. Sempre hai unha circunferencia que pasa por tres puntos non aliñados.



Se agora trazamos as **alturas** do triángulo, observamos que a circunferencia tamén pasa polos puntos nos que cada altura corta ao lado sobre o que foi trazada. Xa hai seis puntos polos que pasa.



Pero aínda hai máis, se marcamos os **puntos medios** entre o ortocentro e cada un dos vértices, tamén están nesa circunferencia, logo xa temos nove puntos polos que pasa, de aí o seu nome.



E cal é o centro da circunferencia? Debuxamos o **circuncentro**, no **punto medio** do segmento que une o **ortocentro** e o **circuncentro** está o centro da nosa circunferencia.

Recorda o máis importante

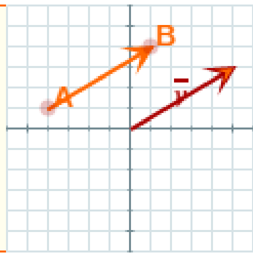
Vector fixo

Orixe: A (x_1, y_1) Extremo: B (x_2, y_2)

Compoñentes: $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Vector libre

Conxunto de vectores equipolentes a un vector fixo



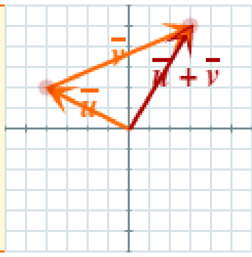
Caracterizan a un vector:
- o **módulo**
- a **dirección**
- o **sentido**

Operacións con vectores

$\overline{u} = (u_x, u_y)$

$\overline{v} = (v_x, v_y)$

- **Suma:**
  $\overline{u} + \overline{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- **Produto por un escalar:**
  $t \cdot \overline{u} = (t \cdot u_x, t \cdot u_y)$



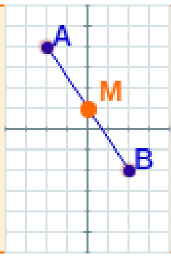
Produto escalar

Dúas formas de calculalo:
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v})$

Punto medio dun segmento

A (x_1, y_1) B (x_2, y_2)

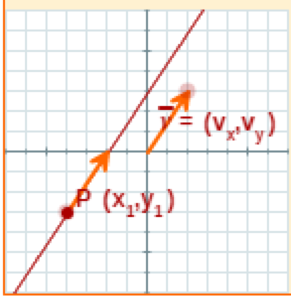
M $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$



- **Módulo dun vector** $|\overline{v}| = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- **Distancia entre dous puntos** $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **Ángulo entre dous vectores** $\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \dfrac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|}$

Ecuacións da recta

$(x,y) = (x_1, y_1) + t\,(v_x, v_y)$



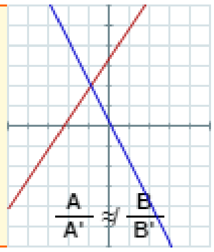
vectorial
paramétricas
continua
xeral
explícita
punto-pendente

Posicións relativas de dúas rectas

$Ax + By + C = 0$

$A'x + B'y + C' = 0$

secantes
paralelas
coincidentes



Ecuación da circunferencia

Centro: **C(a, b)**

Raio: **r**

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Auto-avaliación

1. Dados os puntos A(-1, -2) e B(-7,-6), calcula o módulo do vector $|\overrightarrow{AB}|$

2. Un vector equipolente a $\vec{v} = (5, -4)$ ten a súa orixe no punto A(3, 3). Calcula o seu extremo.

3. Dados os vectores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-4, -3)$, calcula $3\vec{u} + \vec{v}$

4. Dados os vectores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-4, -3)$, calcula o seu produto escalar.

5. Dados os puntos A(-4, 8) e B(0, 4), calcula a distancia da orixe de coordenadas ao punto medio do segmento $\overline{AB}$.

6. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polo punto P(-4, 8) e ten como vector director $\vec{v} = (1, -1)$

7. Cal é a posición relativa das duás rectas seguintes?
   r: x – 2y – 10 = 0   *s*: 2x – 4y – 50 = 0

8. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polo punto P(-4, -4) e que é paralela á recta x – 2y – 10 = 0

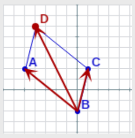
9. Acha a ecuación xeral da recta que pasa polo punto P(-4, -4) e que é perpendicular á recta x – 2y – 10 = 0

10. Acha a ecuación da circunferencia de centro C(-5, 4) e que pasa polo punto P(-5, 0).

Solucións dos exercicios para practicar

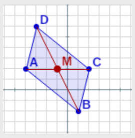
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ = (7,-2) equipolentes
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ = (1, 5) equipolentes

2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ = (-5.4)
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ = (-4,6)

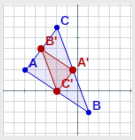


3. a) (2, -17)
b) (-8, -3)

4. M(-1, 2)
d(A,C)=6   d(B,D)=8,94



5. C'(-2,0) B'(-3,5, 4) A'(-0,5,-2)
$\overrightarrow{AB}$=(6,-4) $\overrightarrow{A'B'}$=(-3,2)
$\overrightarrow{AC}$=(3, 4) $\overrightarrow{A'C'}$ = (-1,5,-2)
$\overrightarrow{BC}$=(-3, 8) $\overrightarrow{B'C'}$=(1,5,-4)



6. A'(3,-3)
d(A,P) =$\sqrt{52}/2$ d(A,A') =$\sqrt{52}$

7. AB: M(2, -1,5)   BC: N(7,5, 3)
CD: P(6,5, 2,5)   AD: Q(1, 2,5)
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ = (5,5, 0)
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ = (-1,4)

8. $\vec{w}$ = (3, 0)

9. $\vec{w} = -2\vec{u} - 2\vec{v}$

10. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = -7 $|\vec{u}| = \sqrt{41}$ $|\vec{v}| = \sqrt{13}$
cos $(\vec{u},\vec{v})$ =-0,3032 ángulo=107,65º

11. $\overrightarrow{AB}$ =(9,-3) $\overrightarrow{AC}$ = (2,6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = 0
$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$ = 90+40 = 130 = $|\overrightarrow{BC}|^2$

12. a) Paramétricas; P(2, 5); $\vec{v}$= (-3, 3); m=1
b) Xeral; P(-1, 0); $\vec{v}$= (2, 1); m=1/2
c) Continua; P(-5, -1); $\vec{v}$= (5, 4); m=4/5
d) Explícita; P(0, -7); $\vec{v}$= (1, -1); m=-1

13. a) (x, y) = (2, 2) + t(-4, 2)
b) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{2}$
c) x + 2y – 6 = 0

14. x – y – 1 = 0

15. a) y + 1 = 2(x – 5)
b) y = 2x – 11
c) 2x – y – 11 = 0

16. a) secantes
b) paralelas

17. 4x + 3y – 17 = 0

18. 3x + 4y – 25 = 0

19. Son secantes dous a dous.
Vértices: A(-8, 0), B(-2, -1), C(-2, 5)

20. Altura lado AB: 7x- 2y +18 = 0
Altura lado BC: -4x + 7y + 1 = 0
Altura lado AC: 3x + 5y + 19 = 0
Ortocentro: H(-3,12, -1,93)

21. Mediatriz lado AB: 14x - 4y +45 = 0
Mediatriz lado BC: -x + 3y – 9 = 0
Mediatriz lado AC: 8x + 14y – 9 = 0
Circuncentro: P(-2,61, 2,13)

22. Mediana lado AB: 7x- 2y +18 = 0
Mediana lado BC: -4x + 7y + 1 = 0
Mediana lado AC: 3x + 5y + 19 = 0
Baricentro: G(1,33, -2)

Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1. 7,21

2. B(8, -1)

3. (2, -12)

4. 1

5. 6,32

6. – x – y + 4 = 0

7. Paralelas

8. x – 2y – 4 = 0

9. 2x + y + 12 = 0

10. $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$