

## Obxectivos

Nesta quincena aprenderás a:

- Resolver ecuacións de segundo grao completas e incompletas.
- Resolver ecuacións bicadradas e outras que se poden reducir a unha de segundo grao.
- Resolver sistemas de ecuacións lineais utilizando os diferentes métodos.
- Resolver sistemas de ecuacións de segundo grao.
- Aplicar a linguaxe da álgebra á resolución de problemas.

Antes de empezar.

1. Ecuacións de segundo grao ..... páx. 4  
Ecuacións de 2º grao completas  
Ecuacións de 2º grao incompletas  
Solucións dunha ecuación de 2º grao
2. Outras ecuacións ..... páx. 5  
Ecuacións bicadradas  
Ecuacións racionais  
Ecuacións irracionais  
Ecuacións factorizadas
3. Sistemas de ecuacións lineais ..... páx. 7  
Solución dun sistema  
Sistemas compatibles e incompatibles  
Resolver sistemas por substitución  
Resolver sistemas por igualación  
Resolver sistemas por redución
4. Sistemas de segundo grao ..... páx. 9  
Do tipo:  $ax+by=c$   $x \cdot y=d$   
Do tipo:  $a_0x^2+b_0y^2=c_0$   $a_1x+b_1y=c_1$
5. Aplicacións prácticas ..... páx. 10  
Resolución de problemas

Exercicios para practicar

Para saber máis

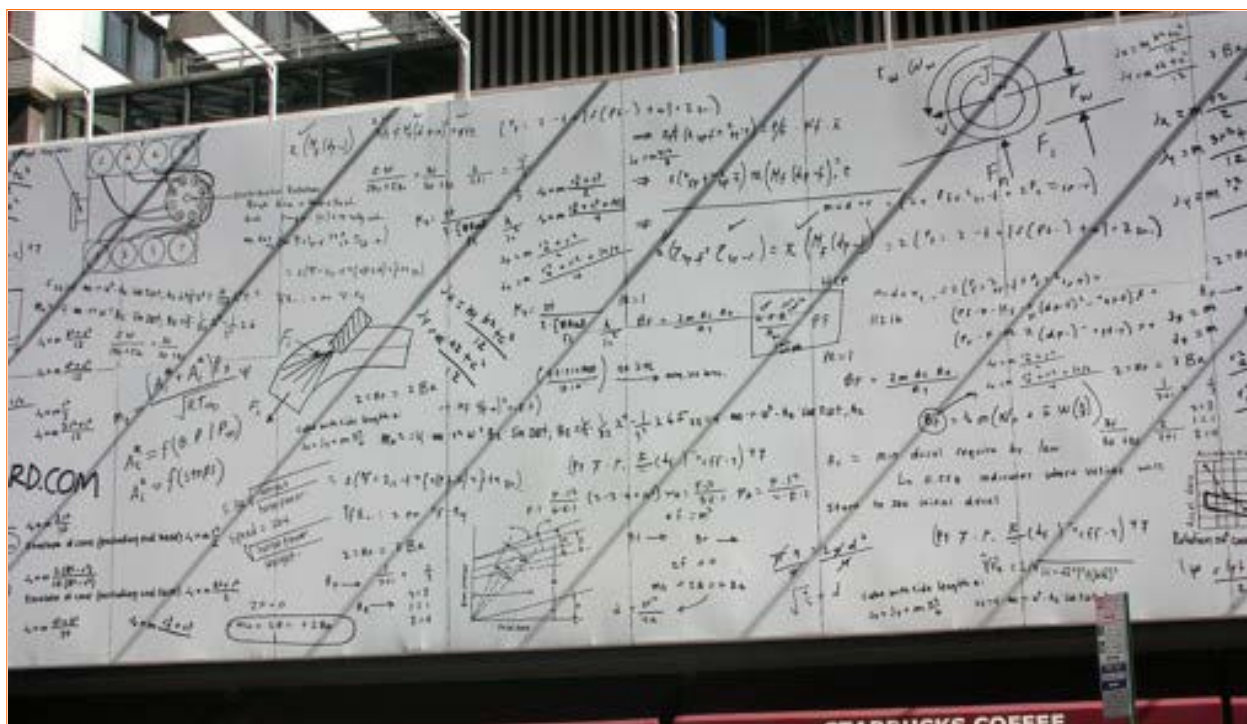
Resumo

Auto-avaliación

Actividades para enviarlle ao titor



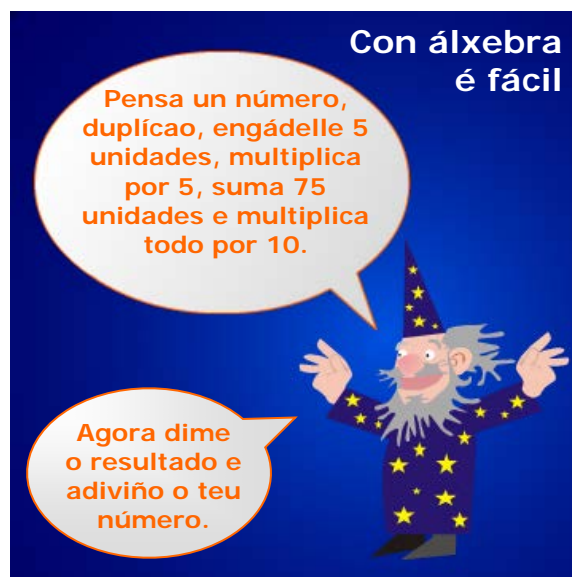
## Antes de empezar



Gran cantidade de problemas prácticos na vida real conducen á resolución dunha ecuación ou dun sistema de ecuacións. Traducir á "linguaxe da álgebra" resulta imprescindible nestas ocasións; a linguaxe alxébrica sérvenos para expresar con precisión relacións difíciles de transmitir coa linguaxe habitual.

Proba a facerlle a algún amigo o xogo que che propón o mago, para adiviñar o número pensado abonda con lle restar 1000 ao resultado que che dea e dividir por 100, como podes comprobar se formulas unha ecuación:

Pensa un número  $x$   
 Duplica  $2x$   
 Engádelle 5 unidades  $2x + 5$   
 Multiplica por 5  $5 \cdot (2x + 5)$   
 Suma 75 unidades  $5 \cdot (2x + 5) + 75$   
 Multiplica todo por 10  $10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75]$   
 $10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75] = \text{resultado}$   
 $10 \cdot (10x + 25 + 75) = \text{resultado}$   
 $10 \cdot (10x + 100) = \text{resultado}$   
 $100x + 1000 = \text{resultado}$   
 $x = (\text{resultado} - 1000) / 100$



# Ecuacións e sistemas

## 1. Ecuacións de segundo grao

As **ecuacións de segundo grao** son da forma:

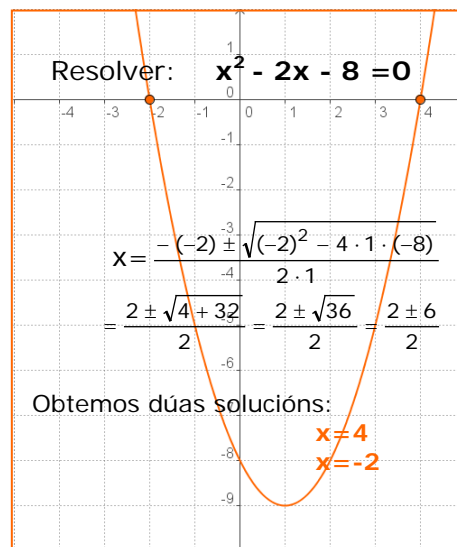
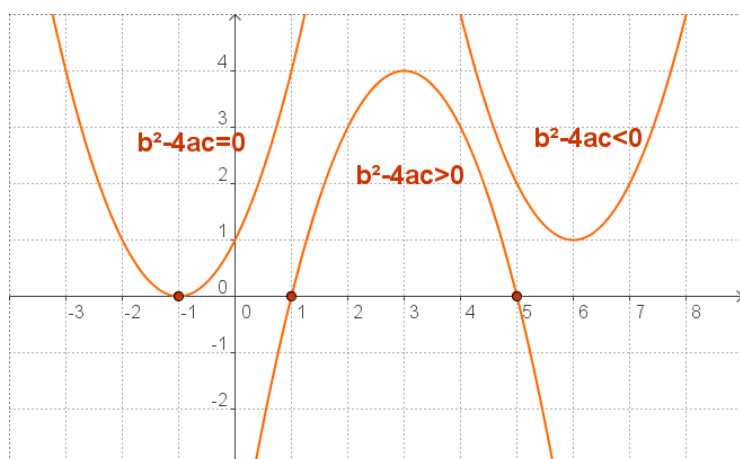
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolvelas empregamos a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas ecuacións poden ter dúas solucións, unha ou ningunha solución, segundo sexa  **$b^2 - 4ac$** , o chamado discriminante.

- **$b^2 - 4ac > 0$**  Hai dúas solucións.
- **$b^2 - 4ac = 0$**  Hai unha solución dobre:  $x = -b/2a$
- **$b^2 - 4ac < 0$**  Non hai solución.



### Como se obtén a fórmula?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pasamos  $c$  ao outro membro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos por  $4a$ :

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumámoslle  $b^2$ :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Temos un cadrado perfecto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos a raíz:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Despexamos  $x$ :

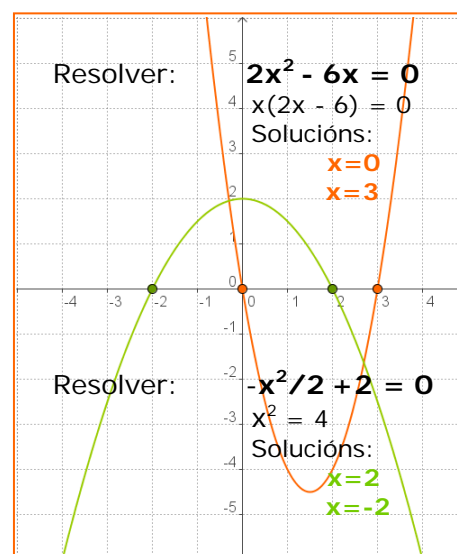
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

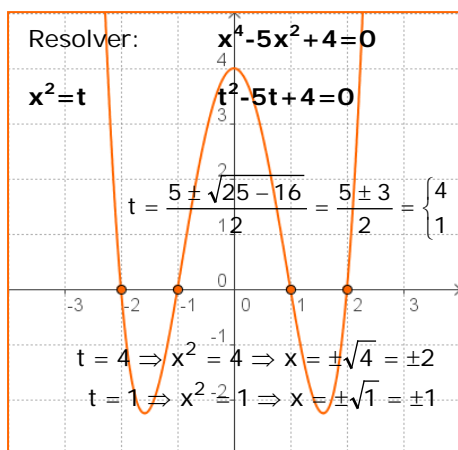
## Ecuacións incompletas

Cando  $b$ ,  $c$ , ou os dous son 0 estamos ante unha ecuación de segundo grao incompleta.

Nestes casos non é necesario aplicar a fórmula, senón que resulta máis sinxelo proceder do seguinte xeito:

- Se  $b=0$   **$ax^2 + c = 0$**   $\Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$   
$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$
  - Se  $-c/a > 0$  hai dúas solucións
  - Se  $-c/a < 0$  non hai solución
- Se  $c=0$   **$ax^2 + bx = 0$**   
sacando  $x$  factor común:  $x(ax+b)=0$   
 $\Rightarrow x=0, x=-b/a$  son as dúas solucións.





## Ecuacións bicadradas

As ecuacións do tipo  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  chámaselles bicadradas.

Para resolvelas abonda con facer  $x^2 = t$ , obtendo unha ecuación de segundo grao:  $at^2 + bt + c = 0$ , na que

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

Resolver:  $x - \frac{2}{1-x} = 4$

Quitamos denominadores:  $x(1-x) - 2 = 4(1-x)$

Operamos:  $x - x^2 - 2 = 4 - 4x$

Resolvemos:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

$x = 3$

$x = 2$

Son válidas ambas

## Ecuacións racionais

Son ecuacións nas que a incógnita aparece no denominador.

O proceso que se ha de seguir para a súa resolución consiste en quitar en primeiro lugar os denominadores, operamos e resolvemos a ecuación resultante.

Convén comprobar que ningunha das solucións obtidas anula o denominador, xa que nese caso non había ser válida.

Resolver:  $\sqrt{x-1} + x = 7$

Deixamos a un lado a raíz:  $\sqrt{x-1} = 7 - x$

Elevamos ao cadrado:  $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2$

$$x-1 = 49 - 14x + x^2$$

Resolvemos:  $x^2 - 15x + 50 = 0$

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobamos as solucións:

$x = 10$  non é válida

$x = 5$  é a solución

## Ecuacións irracionais

Son ecuacións nas que a incógnita aparece baixo o signo radical.

Para resolvelas déixase a un lado a raíz exclusivamente e elévanse ao cadrado os dous membros. Operando chégase a unha ecuación de segundo grao que resolvemos.

Ao elevar ao cadrado adoitan introducirse solucións "estrañas" polo que cómpre comprobalas na ecuación de partida.

Resolver:  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Aplicamos a regra de Ruffini para factorizar o polinomio:

1)	1	-6	11	-6
	1	1	-5	6
2)	1	-5	6	0
	1	2	-6	0
	1	-3	0	
	1	-3	0	

A ecuación queda:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Con que as solucións son:

$x = 1, x = 2, x = 3$

## Ecuacións factorizadas

As solucións dunha ecuación da forma:

$$a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

son as raíces do polinomio do primeiro membro.

E como sabes para calcular as raíces empregamos os procedementos que xa coñeces para descompor en factores o polinomio: sacar factor común, utilizar as identidades notables ou a regra de Ruffini.

Unha vez factorizado o polinomio, basta igualar a cero cada factor para obter as solucións buscadas, que como máximo serán  $n$  (o grao do polinomio).

## EXERCICIOS resoltos

1. Resolve as ecuacións:

$$a) x^2 + 12x + 32 = 0 \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$$

$$b) 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

2. Resolve as ecuacións:

$$a) 2x^2 + 5x = 0 \quad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0, x=-5/2$$

$$b) 2x^2 - 32 = 0 \quad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

3. Calcula o valor de m para que a ecuación  $x^2+mx+9=0$  teña unha solución dobre.

O discriminante  $\Delta=b^2-4ac$  debe ser 0,  $m^2-4\cdot 9=0 \Rightarrow m^2=36$  e  $m=\pm 6$

Se  $m=6$ ,  $x^2+6x+9=0$  e a solución  $x=-3$ ; se  $m=-6$ ,  $x^2-6x+9=0$  e a solución  $x=3$

4. Resolve as ecuacións:

$$a) x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$b) x^4 + 9x^2 - 162 = 0 \quad t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

5. Resolve a ecuación:

$$\frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1$$

$$(x-2)(1-x) - 8 \cdot 5(x+1) = 5(x+1)(x-2)$$

$$x-2-x^2+2x-40x-40=5x^2+5x-10x-10$$

$$6x^2 + 32x + 32 = 0$$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$$

Substituíndo na ecuación valen as dúas solucións

6. Resolve a ecuación:

$$\sqrt{3x+4} + 2x = 4$$

$$\sqrt{3x+4} = 4 - 2x$$

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (4 - 2x)^2 \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2$$

$$4x^2-19x+12=0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

Só vale a solución  $x=3/4$

7. Resolve a ecuación:

$$3x^4-24x^3+63x^2-54x = 0$$

Sacamos factor común  $3x$ :

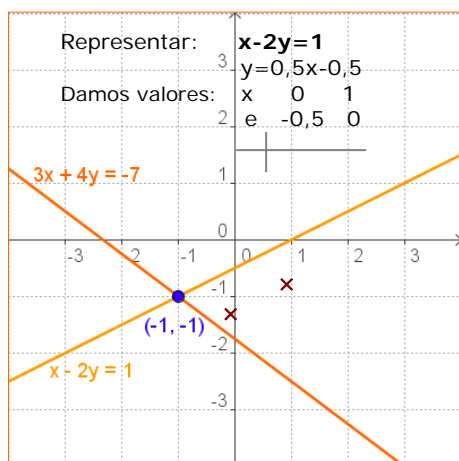
$$3x(x^3 - 8x^2 + 21x - 18) = 0$$

Aplicamos a regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 21 & -18 \\ 2) & & 2 & -12 & 18 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \\ 3) & & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$3x(x-2)(x-3)^2 = 0$$

Solucións:  $x = 0, x = 2, x = 3$  (Solución dobre)



Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada ecuación representa unha recta no plano.

Discutir un sistema é estudar a situación destas rectas no plano, que poden ser:

- Secantes: o sistema ten solución única, chámase **Compatible determinado**.
- Coincidentes: o sistema ten infinitas solucións, é **Compatible indeterminado**.
- Paralelas, el sistema no tiene solución, se llama **Incompatible**.

Resolver: 
$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Por **SUBSTITUCIÓN**

Despexamos  $x$  na 2ª ecuación e substituímos na 1ª:  $x = 1 + 2y$

$$\begin{aligned} 3(1 + 2y) + 4y &= -7 \\ 3 + 6y + 4y &= -7 \Rightarrow 10y = -10 \\ y &= -1 \\ x &= 1 + 2 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

Por **IGUALACIÓN**

Despexamos  $x$  en ambas as dúas ecuacións e igualamos:

$$\begin{aligned} \frac{-4y - 7}{3} &= 1 + 2y \\ -4y - 7 &= 3(1 + 2y) \\ -4y - 6y &= 3 + 7 \Rightarrow -10y = 10 \\ y &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por **REDUCCIÓN**

$$\begin{aligned} &3x + 4y = -7 \\ \text{Multiplicamos por } 2 \rightarrow &2x - 4y = 2 \\ \text{Sumando:} &\quad \quad \quad 5x = -5 \\ \text{Daquela:} &x = -1 \\ \text{e substituíndo:} &y = -1 \end{aligned}$$

## 2. Sistemas de ecuacións

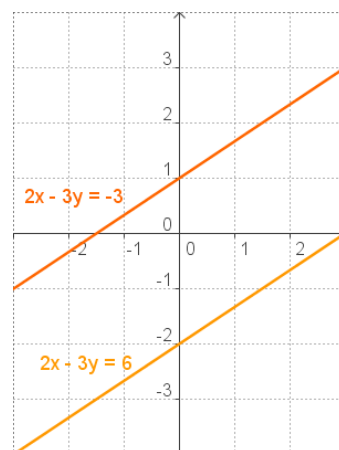
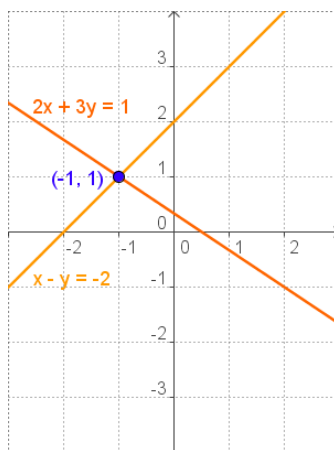
Un sistema de ecuacións lineais é un conxunto de ecuacións de primeiro grao que deben satisfacerse simultaneamente.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \text{ son números reais}$$

Unha **solución** do sistema é un par de números  $(x, y)$  que verifica ambas as dúas ecuacións do sistema.

Dous sistemas coa mesma solución dise que son **equivalentes**.

Os sistemas que teñen solución chámanse **compatibles** e os que non a teñen, **incompatibles**.



Para resolver un sistema de ecuacións utilizamos calquera dos tres métodos seguintes:

### Método de substitución

Consiste en despexar unha das incógnitas nunha das ecuacións e substituír a expresión obtida na outra ecuación, chégase así a unha ecuación de primeiro grao cunha única incógnita; despois de achar esta, calcúlase a outra.

### Método de igualación

Consiste en despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións e igualar as expresións obtidas. De novo obtemos unha ecuación de primeiro grao cunha única incógnita.

### Método de reducción

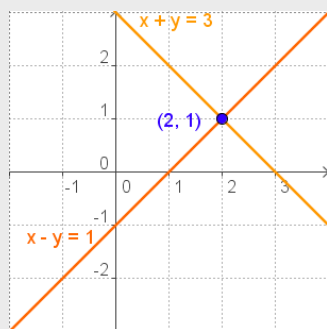
Consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícase unha das ecuacións, ou ambas as dúas, por un número de modo que os coeficientes de  $x$  ou de  $y$  sexan iguais e de signo contrario.



## EXERCICIOS resoltos

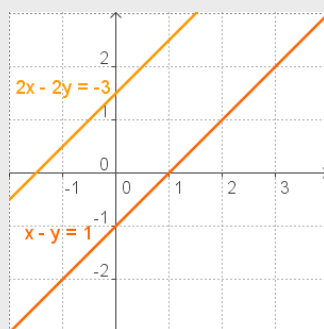
8. Representa as rectas correspondentes e discute os seguintes sistemas:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



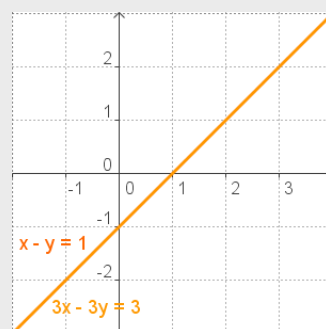
Compatible determinado

b)  $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Incompatible

c)  $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Compatible indeterminado

9. Resolve por substitución:

a)  $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

Despexamos x na 1ª ecuación

$x = -25 - 4y$  substituímos na 2ª

$$-10(-25 - 4y) - 5y = 5 \Rightarrow 250 + 40y - 5y = 5$$

$$35y = -245 \Rightarrow y = -7$$

$$x = -25 - 4 \cdot (-7) = 3$$

b)  $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

Despexamos e na 2ª ecuación

$y = -4x + 43$  substituímos na 1ª

$$3x + 5(-4x + 43) = 45 \Rightarrow 3x - 20x + 215 = 45$$

$$-17x = -170 \Rightarrow x = 10$$

$$y = -4 \cdot 10 + 43 = 3$$

10. Resolve por igualación:

a)  $\begin{cases} -4x + y = 20 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 20 + 4x \\ y = 6x / 9 \end{matrix}$

$$20 + 4x = \frac{6x}{9} \Rightarrow 180 + 36x = 6x$$

$$30x = -180 \Rightarrow x = -6$$

$$y = -36/9 = -4$$

b)  $\begin{cases} -3x - 4y = 31 \\ 5x - 9y = 11 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = (31 + 4y) / -3 \\ x = (11 + 9y) / 5 \end{matrix}$

$$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5} \Rightarrow 5(31 + 4y) = -3(11 + 9y)$$

$$155 + 20y = -33 - 27y \Rightarrow 47y = -188 \Rightarrow y = -4$$

$$x = (11 - 36) / 5 = -5$$

11. Resolve por redución:

a)  $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

$$5x - 10y = 25$$

$$\text{Multiplícase por 5} \rightarrow 40x + 10y = 20$$

$$\text{Sumando: } 45x = 45$$

$$x = 1 \quad y = -2$$

b)  $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

$$\text{Multiplícase por -7} \rightarrow -35x - 21y = -147$$

$$\text{Multiplícase por 5} \rightarrow 35x + 40y = 185$$

$$\text{Sumando: } 19y = 38$$

$$y = 2 \quad x = 3$$

12. Resolve:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$$

quitando denominadores e simplificando a 2ª ecuación, o sistema convértese nun equivalente.

Por REDUCCIÓN:

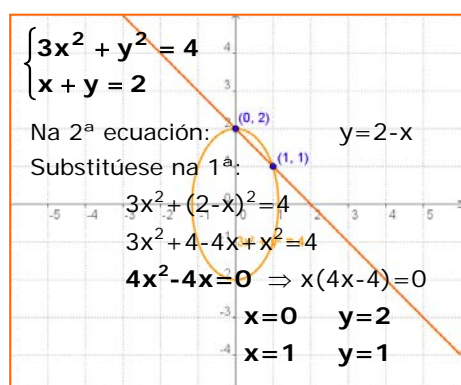
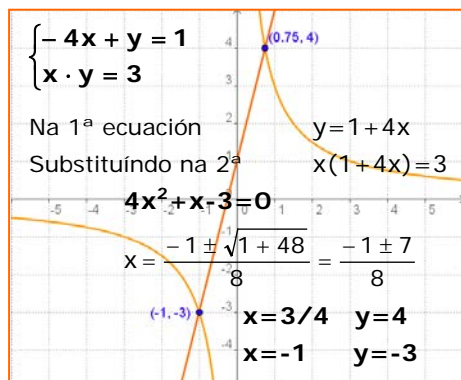
$$5x - 3y = 22$$

$$-3x + 3y = -12$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5 \quad y = 1$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}$$





## 3. Sistemas de segundo grao

Son sistemas nos que unha ou as dúas ecuacións non son lineais. Para resolvelos aplicamos os métodos xa coñecidos para ecuacións de 2º grao e sistemas lineais. Vexamos algúns exemplos.

• Tipo:  $\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$

• Tipo:  $\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Para resolver sistemas destes tipos despéxase o  $x$  ou o  $y$  nunha ecuación e substitúese na outra. Redúcese e resólvese a ecuación que queda.

Por último substitúense na ecuación despexada os valores atopados para calcular a outra incógnita

## EXERCICIOS resoltos

13. Resolve:

a)  $\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

Na 1ª ecuación:  $x = y - 1$

Na 2ª ecuación:  $(y - 1)y = 20$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

b)  $\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$

Na 2ª ecuación:  $x = 24/y$

Na 1ª ecuación:  $48/y + 3y = 30$

$$3y^2 - 30y + 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$$

14. Resolve:

a)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Na 2ª ecuación:  $x = -y - 1$

Na 1ª ecuación:  $(-y - 1)^2 + y^2 = 41$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 = 41$$

$$2y^2 + 2y - 40 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$$

b)  $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

Na 2ª ecuación:  $x = (-1 - 3y)/2$

Na 1ª ecuación:  $\frac{(-1 - 3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$

$$1 + 9y^2 + 6y - 8y^2 = 28 \quad y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$$

# Ecuacións e sistemas

## 4. Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante unha ecuación ou un sistema de ecuacións, hai que traducir á linguaxe alxébrica as condicións do enunciado e despois resolver a ecuación ou o sistema formulado.

Deseguido podes ver algúns exemplos:

- ✓ Nunha reunión cada asistente saúda a todos os demais, se o número de saúdos que se intercambian é 28, cantas persoas asisten á reunión?

$x = n^{\circ}$  asistentes

$$\begin{aligned}\frac{x(x-1)}{2} &= 28 \Rightarrow x^2 - x = 56 \\ \Rightarrow x^2 - x - 56 &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}\end{aligned}$$

Obtemos  $x = -14/2 = -7$  e  $x = 16/2 = 8$

A solución negativa non é válida xa que falamos de  $n^{\circ}$  de persoas; daquela, asisten 8 persoas.

- ✓ Dúas persoas atópanse, tendo cada unha delas un capital. Dille unha delas á outra: "Se me dás do que tes 3 unidades engádollas ao que teño e teremos as dúas igual"; ao que a outra lle replica: "Se ti me dás do que tes 6 unidades engádollas ao que teño e teremos as dúas igual". Canto ten cada unha?

$$\begin{array}{l} \text{A ten } x \\ \text{B ten } y \end{array} \quad \begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$$

Resolvemos por redución:

$$\begin{array}{r} -x + y = 6 \\ 2x - y = 18 \\ \hline x = 24 \\ y = 6 + x = 30 \end{array}$$

- ✓ Deséxase valar un terreo rectangular que linda por un dos lados cun río. Se a área do terreo é de  $2000 \text{ m}^2$  e os tres lados que se van valar miden  $140 \text{ m}$ , cales son as dimensións do terreo?

Dimensións:  $x$  (ancho), e  $y$  (longo)

$$\begin{cases} 2x + y = 140 \\ x \cdot y = 2000 \end{cases}$$

Na 1ª ecuación:  $y = 140 - 2x$   
Substituíndo na 2ª:  $x \cdot (140 - 2x) = 2000$   
Resolvemos a ecuación:  $2x^2 - 140x + 2000 = 0$   
 $x = 50 \quad y = 40$   
 $x = 20 \quad y = 100$

### Para resolver problemas

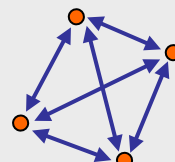
- 1º) Comprender o enunciado.
- 2º) Identificar as incógnitas.
- 3º) Traducir á linguaxe alxébrica.
- 4º) Resolver a ecuación ou sistema.
- 5º) Comprobar as solucións.

Número de asistentes:  $x$

Cada un saúda a todos os demais que son:  $x-1$

O saúdo A  $\rightarrow$  B é o mesmo que o saúdo B  $\rightarrow$  A, daquela, o número total de saúdos:

$$x \cdot (x-1) / 2$$



Comprobación:

8 persoas, cada unha saúda as outras 7;  
 $8 \cdot 7 = 56$  é a metade 28.

A persoa A ten:  $x$   
A persoa B ten:  $y$

	B dálle 3 a A	A dálle 6 a B
A ten $x$	$x+3$	$x-6$
B ten $y$	$y-3$	$y+6$
	As dúas igual	B dobra A

Fala A:  $x+3 = y-3$

Fala B:  $y+6 = 2(x-6)$

Comprobación:

	B dálle 3 a A	A dálle 6 a B
A: $x=24$	$24+3=27$	$24-6=18$
B: $y=30$	$30-3=27$	$30+6=36$
	As dúas igual	B dobra A

$x$ : ancho  
 $y$ : longo

Perímetro para valar:  
 $2x + y = 140 \text{ m}$

Superficie (base  $\times$  altura):  
 $x \cdot y = 2000 \text{ m}^2$

Comprobación:

$x=50 \quad y=40 \quad x \cdot y = 50 \cdot 40 = 2000$   
 $x=20 \quad y=100 \quad x \cdot y = 20 \cdot 100 = 2000$



## Para practicar

1. Resolve as ecuacións:

- a)  $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$
- b)  $3x^2 + 8x + 14 = -5x$
- c)  $(x-6)(x-10)=60$
- d)  $(x+10)(x-9)=-78$

2. Resolve as ecuacións:

- a)  $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$
- b)  $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$
- c)  $x^4 - 81 = 0$
- d)  $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Resolve as ecuacións:

- a)  $\frac{9}{2-x} + \frac{4}{2-3x} = 5$
- b)  $\frac{5+x}{2+2x} - \frac{2}{4-3x} = 2$
- c)  $3-x - \frac{6x+6}{7x+5} = 1$
- d)  $\frac{3+x}{3x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 5$

4. Resolve as ecuacións:

- a)  $2\sqrt{9x} - x = 9$
- b)  $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$
- c)  $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Resolve os sistemas:

- a)  $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = -\frac{3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Resolve os sistemas:

- a)  $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$
- b)  $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. O produto de dous números enteiros é 192 e a súa diferenza 4. Que números son?

8. A suma dos cadrados de dous números naturais consecutivos é 342, cales son?

9. Ao sumar unha fracción de denominador 3 coa súa inversa obtense  $109/30$ , cal é a fracción?

10. O cadrado dun  $n^\circ$  máis 6 é igual a 5 veces o propio  $n^\circ$ , que número é?

11. Busca un número positivo tal que 6 veces a súa cuarta potencia máis 7 veces o seu cadrado sexa igual a 124.

12. A idade de Xoán era, hai 9 anos, a raíz cadrada da que terá dentro de 11. Determinar a idade actual.

13. O numerador dunha fracción positiva é 4. Se lle engadimos 9 unidades ao denominador, o valor da fracción diminúe nunha unidade. Cal é o denominador orixinal?

14. Dúas billas manando xuntas tardan en encher un depósito 2 horas, canto tardarán por separado se unha delas tarda 3 horas máis ca a outra?

**PISTA:** Se unha billa tarda  $x$  horas en encher o depósito, nunha hora enche  $1/x$  do depósito.

15. Atopa  $m$  para que  $x^2 - mx + 121 = 0$  teña unha solución dobre.

16. Dous números suman 400 e o maior é igual a 4 veces o menor, que números son?

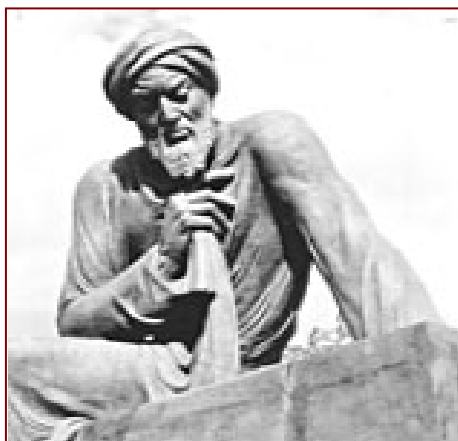
17. Xiana pagou 272 € por 4 entradas para un concerto e 8 para o teatro, Luísa pagou 247 € por 9 entradas para o concerto e 3 para o teatro. Canto custa a entrada a cada espectáculo?

18. Dous números suman 241 e a súa diferenza é 99. Que números son?
19. Dous números suman 400 e o maior é igual a 4 veces o menor, que números son?
20. Pedro ten 335 € en billetes de 5€ e de 10€; se en total ten 52 billetes, cantos ten de cada clase?
21. Nun hotel hai 67 cuartos entre dobres e individuais. Se o número total de camas é 92, cantos cuartos hai de cada tipo?
22. Deséxase mesturar viño de 1 €/litro con viño de 3 €/litro para obter unha mestura de 1,2 €/litro. Cantos litros deberemos poñer de cada prezo para obter 2000 litros de mestura?
23. Nun almacén hai dous tipos de candelabros, os do tipo A que utilizan 2 lámpadas e os do tipo B que utilizan 7 lámpadas. Se en total no almacén hai 25 candelabros e 160 lámpadas, cantos candelabros hai de cada tipo?
24. Nun parque de atraccións subir á nora costa 1 € e subir á montaña rusa 4 €. Ana sobe un total de 13 veces e gasta 16 €, cantas veces subiu a cada atracción?
25. Nun curral hai ovellas e pitas en número de 77 e se contamos as patas obtemos 274 en total. Cantas ovellas e cantas pitas hai?
26. Atopa un número de dúas cifras sabendo que a suma destas é 7 e a diferenza entre o número e o que resulta ao intercambialas é 27.
- PISTA: Se  $x$  é a cifra das decenas e  $y$  a cifra das unidades o número é  $10x+y$ , e o que resulta ao intercambiar as cifras é  $10y+x$
27. A suma de dous números naturais é 24 e o seu produto 135, que números son?
28. Calcula as lonxitudes dos lados dun rectángulo sabendo que a diagonal mide 58 cm e o lado maior excede en 2 cm o menor.
29. A suma de dous números naturais é 13 e a dos seus cadrados 109, acha os números.
30. A diferenza entre dous números enteiros é 6 e o seu produto 247. Que números son?
31. A suma das idades de dúas persoas é 18 anos e o produto 77. Que idade ten cada unha?
32. Calcula as lonxitudes dos lados dun triángulo rectángulo de perímetro 48 cm, se a suma dos catetos é 28 cm.
33. O produto das dúas cifras dun número é 14 e a suma da cifra das unidades co dobre da das decenas é 16. Acha o número.
34. A suma das áreas de dous cadrados é  $100\text{ cm}^2$  e a suma dos seus perímetros é 56, canto miden os lados?
35. Nun triángulo isóscele os lados iguais miden 13 cm e a altura é 2 cm máis longa cá base. Calcula a área.

*"Para resolver un problema referente a números ou relacións abstractas de cantidades, non hai nada como traducir este problema do inglés ou doutra lingua á linguaxe da álgebra"*

Newton (Aritmetica Universalis)

## Para saber máis



### O "inventor" da álgebra

Mohamed ibn-Musa al-Jwarizmi, que viviu aproximadamente entre os anos 780-850, traballou na Casa da Sabedoría en Bagdad.

Cinco das súas obras chegaron ata nós, entre elas "*al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala*", o primeiro tratado de álgebra coñecido.

Al-Jwarizmi clasifica as ecuacións en seis tipos distintos e resolve cada caso por separado utilizando métodos xeométricos, como o que podes ver no gráfico.

### Clasificación das ecuacións según Al-Jwarizmi

cadrado da cousa = cousa

$$ax^2 = bx$$

cadrado da cousa = n°

$$ax^2 = c$$

cousa = n°

$$ax = b$$

cadrado da cousa + cousa = n°

$$ax^2 + bx = c$$

cadrado da cousa + n° = cousa

$$ax^2 + c = bx$$

cadrado da cousa = cousa + n°

$$ax^2 = bx + c$$

$$\begin{array}{c}
 x^2 + 8x = 33 \\
 \begin{array}{|c|c|c|}
 \hline
 2^2 & 2x & 2^2 \\
 \hline
 2x & x^2 & 2x \\
 \hline
 2^2 & 2x & 2^2 \\
 \hline
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 \text{2} \\
 \text{x} \\
 \text{2}
 \end{array}
 \end{array}
 = 33 + 16$$

$$(x+4)^2 = 49$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 8x &= 33 \\
 x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x &= 33 \\
 x^2 + 2 \cdot 4x + 16 &= 33 + 16 \\
 (x+4)^2 &= 49 \\
 x+4 &= 7 & x+4 &= -7 \\
 x &= 3 & x &= -11
 \end{aligned}$$



### Por que o x?

Os árabes chamaban a incógnita "shay" (cousa). A primeira tradución ao latín foi feita en España (Roberto de Chester, Toledo, 1145), e como a palabra árabe "cousa" soa algo parecido ao x medieval, chamárona x e así segue. En Italia traducíuse como "cosa", abreviándoa como *co* e aos que resolvían ecuacións chamábanos *cosistas*.

# Ecuacións e sistemas



**Lembra  
o máis importante**

## Ecuacións de segundo grao

- Completas:  $ax^2+bx+c=0$

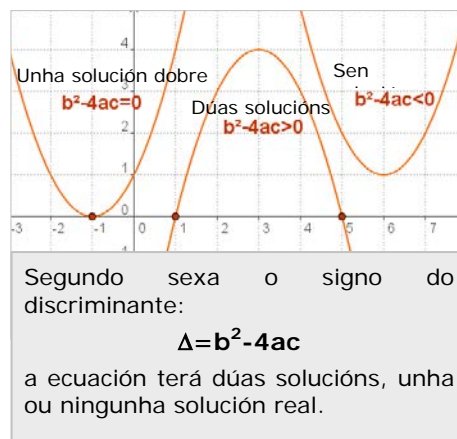
Resólvense coa fórmula:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Incompletas:  $ax^2+c=0$

Despéxase  $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Incompletas:  $ax^2+bx=0$

Dúas solucións:  $x=0$ ,  $x=-b/a$



## Sistemas de ecuacións lineais

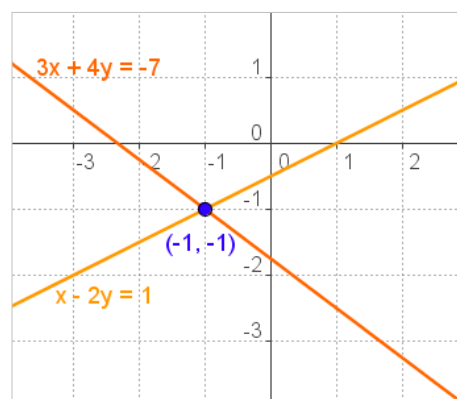
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  Nun sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas cada ecuación represéntase cunha recta no plano. O punto de corte  $(x,y)$ , se existe, é a **solución** do sistema.

Para resolver un sistema empregamos os métodos de:

**Substitución:** Despéxase unha das incógnitas nunha das ecuacións e substitúese na outra.

**Igualación:** Despéxase a mesma incógnita nas dúas ecuacións e iguálense as expresións obtidas.

**Redución:** Multiplícase unha das ecuacións ou as dúas polos números axeitados de maneira que, ao sumalas, se elimine unha das incógnitas.



- Sistemas **equivalentes** son os que teñen a mesma solución.
- Un sistema é **compatible** se ten solución, e **incompatible** se non a ten.

## Sistemas de ecuacións de 2º grao

Son sistemas nos que unha das ecuacións, ou as dúas, son de segundo grao nunha das incógnitas, ou nas dúas.

Habitualmente resólvense despexando unha das incógnitas na ecuación de primeiro grao e substituíndo na outra, o que dá lugar a unha ecuación de 2º grao.

### Para resolver problemas

- ✓ Comprender o enunciado.
- ✓ Identificar as incógnitas.
- ✓ Traducir á linguaxe alxébrica.
- ✓ Resolver a ecuación ou sistema.
- ✓ Comprobar as solucións.



## Auto-avaliación



1. Resolve a ecuación:  $x^3 + x^2 - 16x - 16 = 0$
2. Resolve a ecuación:  $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$ .
3. Resolve a ecuación:  $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$ .
4. Resolve a ecuación:  $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$
5. Resolve o sistema: 
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$$
6. Resolve o sistema: 
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
7. Atopa dous números naturais consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 1105.
8. Temos 13 € en moedas de 2 € e de 50 céntimos, se en total hai 14 moedas, cantas hai de cada tipo?
9. Para valar un terreo rectangular de 720 m<sup>2</sup> utilizáronse 112 m de valado. Calcula as dimensións do terreo.
10. Atopa unha ecuación de 2º grao tal que a suma das súas raíces sexa 7 e o produto 12.



## Solucións dos exercicios para practicar

1. a)  $x=5$ ,  $x=-31/6$  b)  $x=-2$ ,  $x=-7/3$   
c)  $x=16$ ,  $x=0$  d)  $x=21$ ,  $x=1$
2. a)  $x=\pm\sqrt{12}$  b)  $x=\pm 2$   
c)  $x=\pm 3$  d)  $x=0$ ,  $x=\pm 3$
3. a)  $x=5$ ,  $x=-2$  b)  $x=19/9$ ,  $x=0$   
c)  $x=1$ ,  $x=-4/7$  d)  $x=0$ ,  $x=-9/11$
4. a)  $x=9$  b)  $x=-1/8$ ,  $x=-1/2$   
c)  $x=3$ ,  $x=9/4$  No es válida
5. a)  $x=7$   $y=8$  b)  $x=1$   $y=5$   
c)  $x=4$   $y=2$  d)  $x=4$   $y=0$
6. a)  $x=-3$   $y=3$ ;  $x=-9/2$   $y=2$   
b)  $x=-5$   $y=-8$ ;  $x=-4$   $y=-10$   
c)  $x=-5$   $y=3$ ;  $x=-1$   $y=1$   
d)  $x=-4$   $y=7$ ;  $x=7$   $y=-4$
7. 12 e 16 ó -16 e -12
8. 18 e 19
9.  $3/10$
10. 3 e 2
11. O denominador é 3
12. 14 anos
13. 24 (A solución negativa non vale)
14. Una billa 3 h e a outra 2 h
15. 22 e -22
16. 320 e 80
17. Teatro: 25€, concerto: 18€
18. 170 e 71
19. 80 e 320
20. 15 de 10€ e 37 de 5€
21. 25 dobres e 42 individuais
22. 1800 litros de 1€ e 200 litros de 3€
23. 3 de tipo A e 22 de tipo B
24. 12 veces á noria e 1 á montaña
25. 17 pitas e 60 ovellas
26. O nº 52
27. 9 e 15
28. 40 e 42
29. 10 e 3
30. 13, 19 e -13,-19
31. 11 e 7
32. Os catetos 12 e 16, a hipotenusa 20
33. 72
34. 1 e 8
35. altura=12, base=10; área 60

### Solucións AUTO-AVALIACIÓN

1.  $x=-1$ ,  $x=4$ ,  $x=-4$
2.  $x=\pm 6$ ,  $x=\pm 1$
3.  $x=8$ ;  $x=15$
4.  $x=\pm 8$
5.  $x=30$   $y=8$
6.  $x=6$   $y=9$   
 $x=2$   $y=1$
7. 23 e 24
8. 4 de 2 € e 10 de 0,50€
9. 36 m x 20 m
10.  $x^2 - 7x + 12=0$   
Solucións 3 e 4