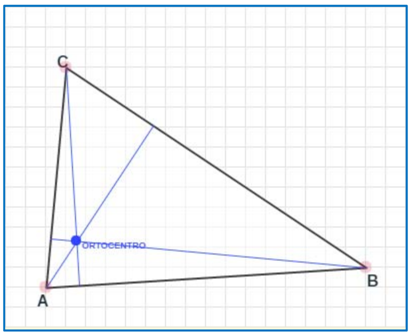
8 Geometria analítica del pla

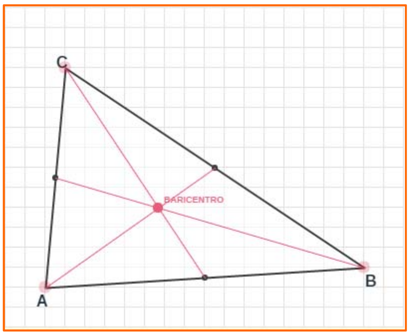
Objectius

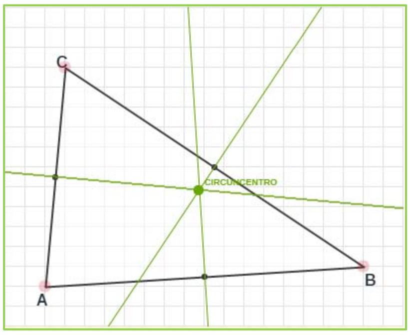
Aquesta quinzena aprendràs a:

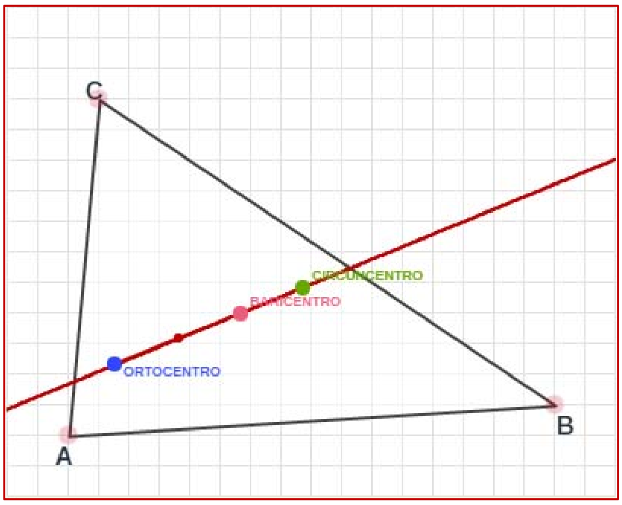
- Reconèixer els elements d'un vector identificant quan dos vectors són equipol·lents.
- Fer operacions amb vectors lliures tant analíticament com gràficament.
- Calcular el punt mitjà d'un segment i la distància entre dos punts donats.
- Conèixer i calcular les diferents formes de l'equació d'una recta.
- Esbrinar la posició relativa de dues rectes.
- Calcular rectes paral·leles i perpendiculars a una donada.

Abans de començar









La recta d'Euler

Com saps les tres altures d'un triangle es tallen en l'ortocentre, les tres mitjanes en el baricentre i les mediatrius dels costats en el circumcentre.

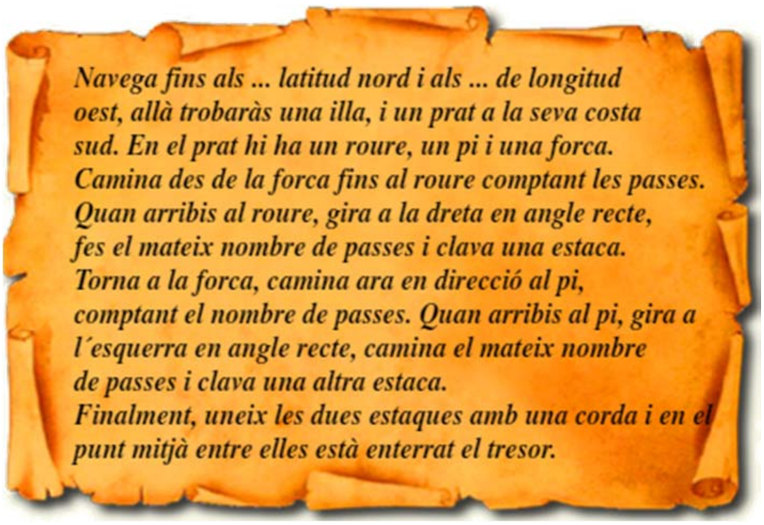
Aquests tres punts, ortocentre, baricentre i circumcentre, estan alineats en una recta anomenada **recta de Euler**.

A més a més la distància entre el baricentre i l'ortocentre és el doble de la distància entre el baricentre i el circumcentre.

Investiga

Un jove va trobar entre els papers del seu besavi, un tros de pergamí que contenia les instruccions per trobar un tresor enterrat en una illa deserta.

Seguint les instruccions el jove va trobar l'illa, el prat, el roure i el pi. Però havia passat massa temps des que es va enterrar el tresor i de la forca no en quedava cap rastre, havia desaparegut. Tot i això el va trobar, i tu, el trobaries?


Navega fins als ... latitud nord i als ... de longitud oest, allà trobaràs una illa, i un prat a la seva costa sud. En el prat hi ha un roure, un pi i una forca. Camina des de la forca fins al roure comptant les passes. Quan arribis al roure, gira a la dreta en angle recte, fes el mateix nombre de passes i clava una estaca. Torna a la forca, camina ara en direcció al pi, comptant el nombre de passes. Quan arribis al pi, gira a l´esquerra en angle recte, camina el mateix nombre de passes i clava una altra estaca. Finalment, uneix les dues estaques amb una corda i en el punt mitjà entre elles està enterrat el tresor.

Una mica d'ajuda

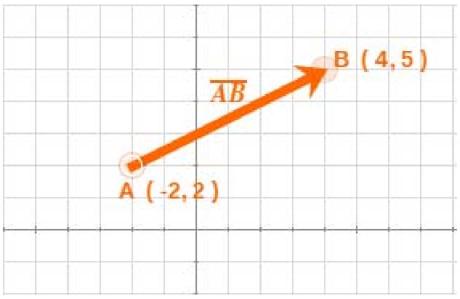
Dibuixar és fonamental per resoldre el problema, i en aquest cas triar un sistema de coordenades adequat ajuda moltíssim. Per tant situa els punts coneguts, que són el pi i el roure, sobre l'eix d'abscisses i amb l'origen al mig. La forca no se sap on estava, així doncs la pots posar al punt que vulguis. Ara utilitza vectors.

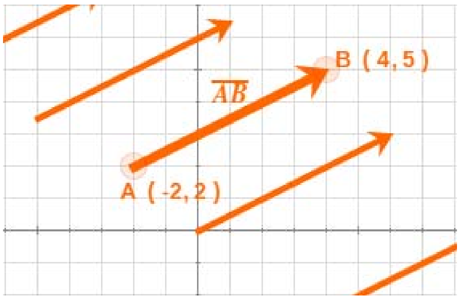
1. Vectors

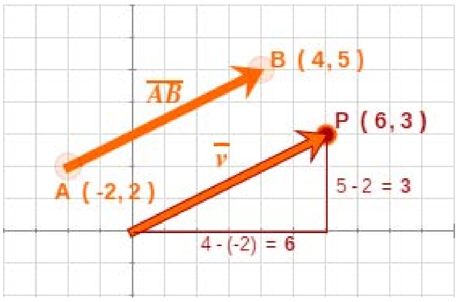
Vectors fixos i vectors lliures

Un vector fix és un segment orientat determinat per dos punts, l'**origen** $A(x_1,y_1)$ i l'**extrem** $B(x_2,y_2)$. Es caracteritza per:

- El **mòdul**, $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$, és la longitud del segment.
- La **direcció**, la de la recta on es recolza.
- El **sentit**, el que va de l'origen a l'extrem.







Podem expressar el vector per mitjà dels seus **components**, que s'obtenen restant les coordenades de l'extrem menys les de l'origen:

$$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = (x_2-x_1,\ y_2-y_1)$$

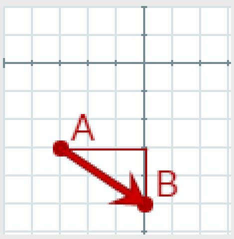
Dos vectors fixos diem que són **equipol·lents** si tenen el mateix mòdul, direcció i sentit. El conjunt de vectors equipol·lents s'anomena **vector lliure**, i qualsevol d'ells serveix per representar-lo. L'indicarem $\vec{v}$.

Hi ha un únic representant del vector lliure $\vec{v}$ amb origen en (0, 0). El seu extrem és el punt P de coordenades les de B menys les de A, que són també els **components** del vector $\vec{v}$.

✓ $\overrightarrow{OP}$ és el vector posició del punt P.

EXERCICIS resolts

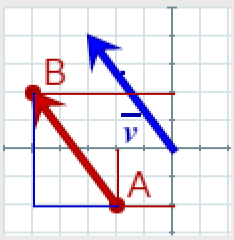
1. Donats els punts A (-3, -3) i B (0, -5), calcula els components del vector $\overrightarrow{AB}$ i el seu mòdul.



Solució: $\overrightarrow{AB} = (0-(-3), -5-(-3)) = (3,-2)$

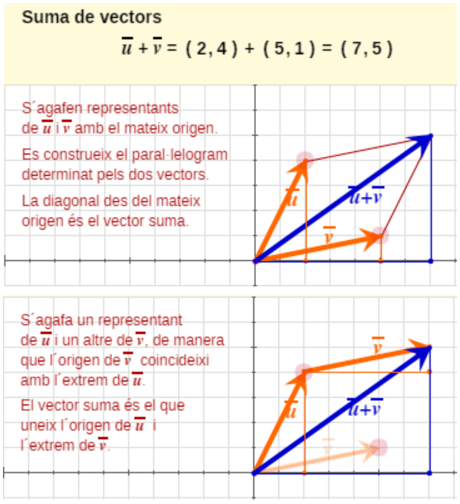
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

2. Calcula el punt extrem d'un vector equipol·lent a $\vec{v} = (-3, 4)$ i amb origen el punt A(-2, -2).



Solució: $B(-2+(-3), -2+4) = B(-5,\ 2)$

Operacions amb vectors

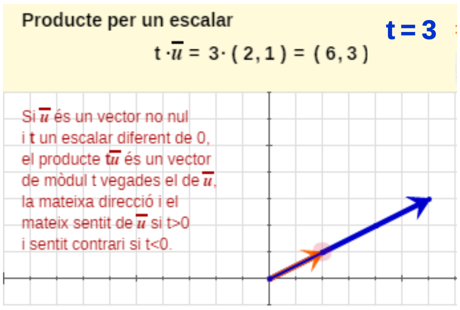


Suma de vectors. La suma de dos vectors lliures $\vec{u}$ = (u_x,u_y) i $\vec{v}$ = (v_x,v_y), és el vector que s'obté sumant el seus components:

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_x + v_x\ ,\ u_y + v_y)$$

Propietats de la suma de vectors

- Propietat commutativa: $\overline{u}+\overline{v}=\overline{v}+\overline{u}$
- Propietat associativa: $\overline{u}+(\overline{v}+\overline{w})=(\overline{u}+\overline{v})+\overline{w}$
- Element neutre: $\overline{u}+\overline{0}=\overline{u}$
  Es considera vector **zero**, $\overline{0}$ = (0, 0), el cas particular de vector l´extrem i l'origen del qual coincideixen.
- Element oposat: $\overline{u}+(-\overline{u})=\overline{0}$
  El vector **oposat** d´un altre és aquell que té el mateix mòdul i direcció i sentit contrari.



Producte d'un vector per un escalar. Per multiplicar un vector lliure $\vec{u}$ per un nombre, es multipliquen els seus dos components per aquest nombre:

$$t\cdot\vec{u} = (t\cdot u_x\ ,\ t\cdot u_y)$$

Propietats del producte per un escalar

- $t(s\overline{u})=(ts)\overline{u}$
- $(t+s)\overline{u}=t\overline{u}+s\overline{u}$
- $1\overline{u}=\overline{u}$

i amb les dues operacions, la propietat distributiva

- $t(\overline{u}+\overline{v})=t\overline{u}+t\overline{v}$

EXERCICIS resolts

3. Donats els vectors $\vec{u}=(4,-3)$ i $\vec{v}=(-3,3)$, calcula $\vec{u}-2\vec{v}$.

Solució: $\vec{u}-3\vec{v}=(4-2\cdot(-3),-3-2\cdot 3)=(10,-9)$

4. Donats els vectors $\vec{u}=(-2,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$ i $\vec{w}=(0,2)$, calcula $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$.

Solució: $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}=(3\cdot(-2)-1+2\cdot 0,\ 3\cdot 3-(-2)+2\cdot 2)=(-7,15)$

5. Donats els vectors $\vec{u}=(-1,-1)$, $\vec{v}=(0,4)$ i $\vec{w}=(1,-4)$, calcula $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$.

Solució: $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})=(2\cdot(-1)-1,\ 2\cdot(-1)-0)=(-3,-2)$

Combinació lineal de vectors

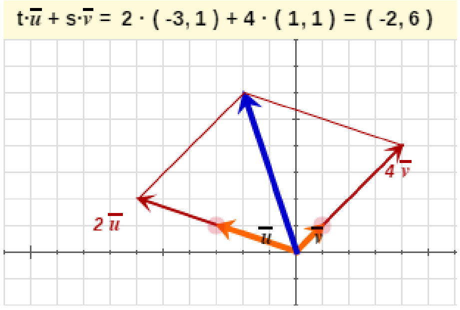
Quan dos vectors, $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tenen la mateixa direcció es diu que són **linealment dependents**. Observa que es compleix $\vec{u} = k\vec{v}$.
En cas contrari són **independents**.

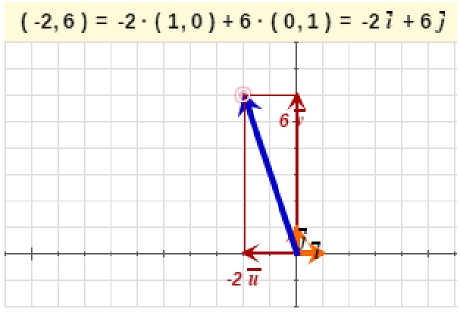
Un vector $\vec{w}$ és **combinació lineal** d'uns altres dos $\vec{u}$ i $\vec{v}$, si existeixen dos nombres reals, t i s, tals que:

$$\vec{w} = t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són independents, qualsevol altre vector es pot posar com a combinació lineal seva. Es diu que formen una **base.**

La base més utilitzada és la formada pels vectors $\vec{i}$ = (1, 0) i $\vec{j}$ = (0, 1). S'anomena base canònica i en aquest cas, t i s són els components del vector.





EXERCICIS resolts

6. Els vectors $\vec{u} = (1, -1)$ i $\vec{v} = (0, 2)$, tenen diferent direcció. Expressa el vector $\vec{w} = (-2,\ 6)$ com a combinació lineal seva.

Solució: Busquem dos nombres t i s, que compleixin t(1, -1) + s(0,2) = (-2, 6)
Separem els components i resolem el sistema:

$$\begin{cases} t = -2 \\ -t + 2s = 6 \end{cases} \Rightarrow t = -2 \quad s = 2$$

7. Els vectors $\vec{u} = (3,\ 3)$ i $\vec{v} = (1, 3)$, tenen diferent direcció. Expressa el vector $\vec{w} = (1, -3)$ com a combinació lineal seva.

Solució: Busquem dos nombres t i s, que compleixin t(3, 3) + s(1,3) = (1, -3)
Separem els components i resolem el sistema:

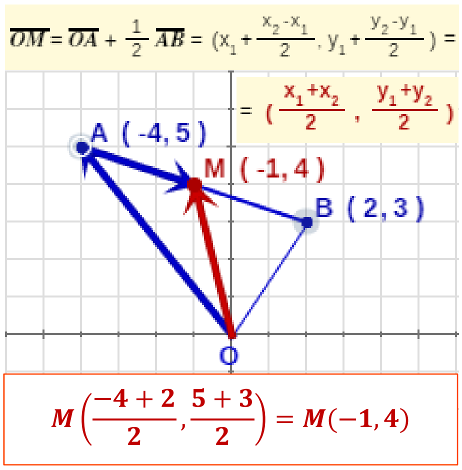
$$\begin{cases} 3t + s = 1 \\ 3t + 3s = -3 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \quad s = -2$$

Punt mitjà d'un segment

Aplicant les operacions amb vectors és fàcil calcular el punt mitjà d'un segment d'extrems A i B donats.

Les coordenades del **punt mitjà** d'un segment són la semisuma de les coordenades dels extrems A(x_1, y_1) i B(x_2, y_2):

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



El punt mitjà divideix el segment en dues parts iguals, de la mateixa manera es poden calcular els punts que divideixen el segment en tres, quatre o més parts iguals. Ho pots veure en el següent exemple:

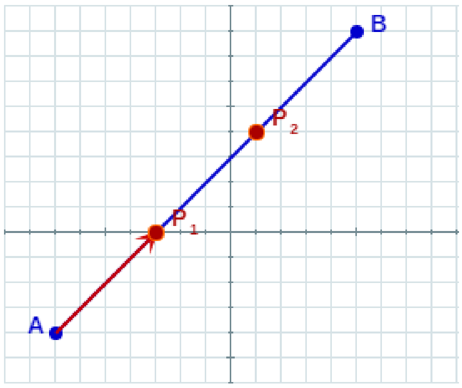
Si A(-7, -4) i B(5, 8), calcula els punts que divideixen el segment AB en tres parts iguals.

El vector AB és $\overline{AB}$ = (12, 12)

El vector posició dels successius punts és:

$$\overline{OP_1} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB} = \left(-7+\frac{12}{3}, -4+\frac{12}{3}\right) \rightarrow P_1(-3,0)$$

$$\overline{OP_2} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AB} = \left(-7+\frac{2\cdot 12}{3}, -4+\frac{2\cdot 12}{3}\right) \rightarrow P_2(1,4)$$



Producte escalar

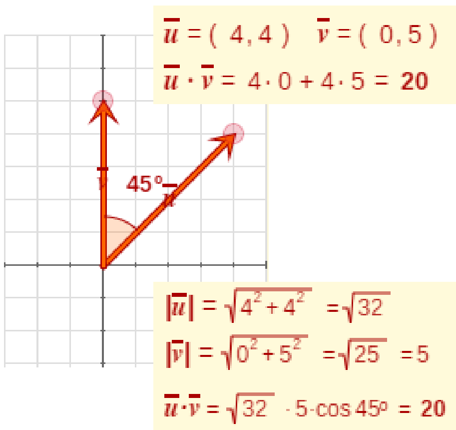
El **producte escalar** de dos vectors, que no has de confondre amb el *producte per un escalar*, és una nova operació entre dos vectors lliures el resultat de la qual és un nombre.

Donats $\vec{u}$ = (u_x,u_y) i $\vec{v}$ = (v_x,v_y), el producte escalar és:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Si coneixem el mòdul dels vectors i l'angle que formen, el producte escalar també es pot calcular així:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos(\vec{u},\vec{v})$$



Propietats

- $\overline{u}\cdot\overline{u} \geq 0$
- Commutativa: $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{v}\cdot\overline{u}$
- Homogènia: $t(\overline{u}\cdot\overline{v}) = \overline{tu}\cdot\overline{v} = \overline{u}\cdot\overline{tv}$
- Distributiva respecte de la suma: $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w}) = \overline{u}\cdot\overline{v} + \overline{u}\cdot\overline{w}$

Els vectors $\vec{\imath} = (1,0)$ i $\vec{\jmath} = (0,1)$ tenen mòdul 1 i són perpendiculars, per tant es compleix:

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = |\vec{\imath}|\cdot|\vec{\imath}|\cdot\cos 0^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = |\vec{\imath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 90^\circ = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$
$$\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = |\vec{\jmath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 0^\circ = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Expressem $\vec{u}$ i $\vec{v}$ com a combinació lineal de $\vec{\imath}$ i de $\vec{\jmath}$, i aplicant las propietats del producte escalar resulta:

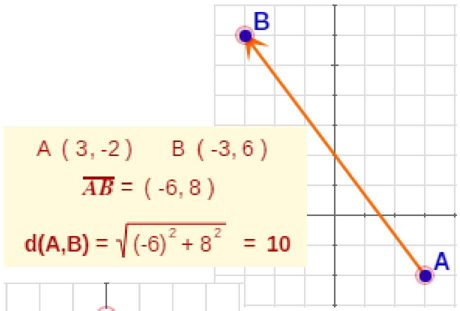
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath})\cdot(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}) = u_x\cdot v_v + u_y\cdot v_y$$

Aplicacions del producte escalar

Distància entre dos punts

Donats els punts A(x_1, x_2) i B(y_1, y_2), la distància entre ells és el mòdul del vector que els uneix.

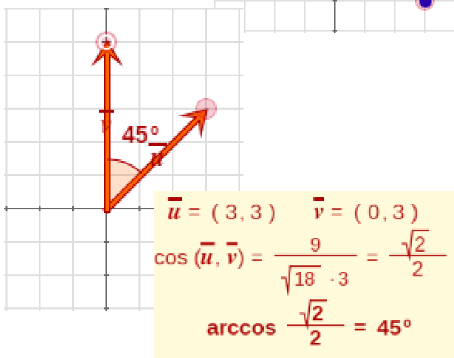
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Angle entre dos vectors

Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, amb el producte escalar podem calcular el cosinus de l'angle que formen i per tant l'angle:

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

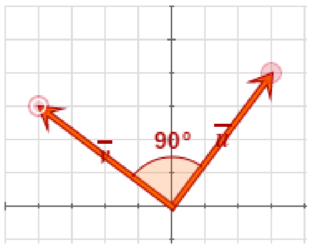


Un cas interesant és el dels vectors **ortogonals**, que formen un angle de 90º.

- ✓ Dos vectors són **ortogonals** si el seu **producte escalar** és **0**.

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y = 0$$

  Observa que formen un angle de 90º i les seves direccions són **perpendiculars**.



EXERCICIS resolts

8. Donats els vectors $\vec{u}=(-4,2)$ i $\vec{v}=(3,-3)$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solució: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = -4·3 + 2·(-3) = -18

9. Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen un angle de 150º i els seus móduls són $|\vec{u}|=\sqrt{108}$ i $|\vec{v}|=12$. Calcula el seu producte escalar.

Solució: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{108}\cdot 12\cdot\cos 150°=\sqrt{108}\cdot 12\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-108$

10. Donats els vectors $\vec{u}=(2,-2)$, $\vec{v}=(-3,4)$ i $\vec{w}=(4,-4)$, comprova que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Solució: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ = (2, -2) · ((-3, 4)+(4,-4)) = (2, -2) · (1, 0) =2·1 – 2·0 = 2

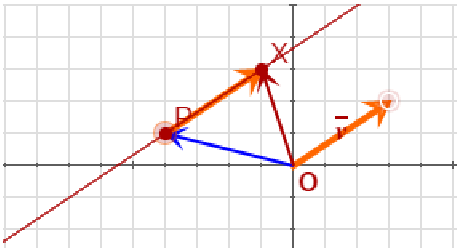
$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ = (2, -2) · (-3, 4) + (2, -2) · (4, -4) = -14 + 16 = 2

11. Calcula el valor de m perquè els vectors $\vec{u}=(m,5)$ i $\vec{v}=(10,-6)$, siguin ortogonals.

Solució: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 10m – 30 = 0   per tant   m = 3

2. Rectes

Equacions d'una recta



$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$

P(-4, 1) $\quad \vec{v}$ **= (3, 2)**

Per determinar una recta necessitem un punt **P(x_1,y_1)** de la recta i un vector director o direccional $\vec{v}$ **= (v_x,v_y)** que indiqui la seva direcció.

Així el vector posició d'un punt qualsevol de la recta serà:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} \quad \text{on t és un nombre real.}$$

A partir d'aquí obtenim diferents formes de l'equació de la recta.

✓ **Equació vectorial**

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t \cdot (v_x, v_y)$$

$(x, y) = (-4, 1) + t\,(3, 2)$

Separant les coordenades x i y obtenim les:

✓ **Equacions paramètriques**

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot v_x \\ y = y_1 + t \cdot v_y \end{cases}$$

$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Aïllant t i igualant:

✓ **Equació contínua**

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

$\dfrac{x+4}{3} = \dfrac{y-1}{2}$

Operant i passant tot al primer membre:

✓ **Equació general**

$$Ax + By + C = 0$$

$2x - 3y + 11 = 0$

Aïllant y:

✓ **Equació explícita**

$$y = mx + n$$

$y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{11}{3}$

EXERCICIS resolts

12. Aparella cada equació amb la recta adequada:

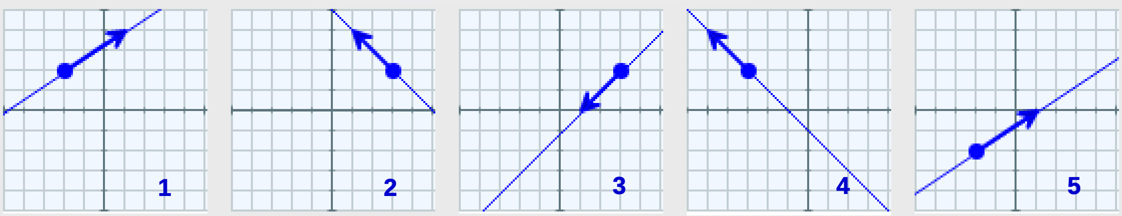
A $(x,y) = (-2, -2) + t\,(3, 2)$

B $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

C $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-2}{-2}$

D $2x + 2y - 10 = 0$

E $y = -x - 1$

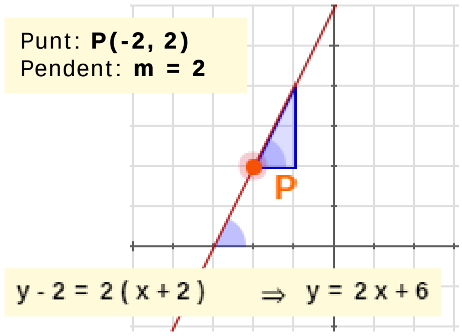


Solució: A – 5, B – 1, C – 3, D – 2, E – 4

Altres equacions de la recta

Has vist que aïllant y a l'equació general, s'arriba a la forma explícita **y = mx + n**.

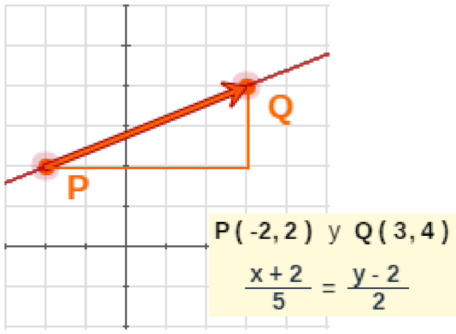
- **m** $= -\frac{B}{A} = \frac{v_y}{v_x}$ és el pendent de la recta. És la tangent de l'angle que la recta forma amb l'eix OX.
- **n** és l'ordenada a l'origen. És l'ordenada del punt on la recta talla l'eix OY.



Coneguts un punt **P(x_1, y_1)** i el pendent **m** de la recta és fàcil arribar a l'equació explícita.

✓ **Equació punt-pendent:** $y - y_1 = m(x - x_1)$

Si es coneixen dos punts de la recta **P** i **Q**, és suficient agafar-ne un d'ells i com a vector director $\overrightarrow{PQ}$.



✓ **Equació per dos punts:** $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

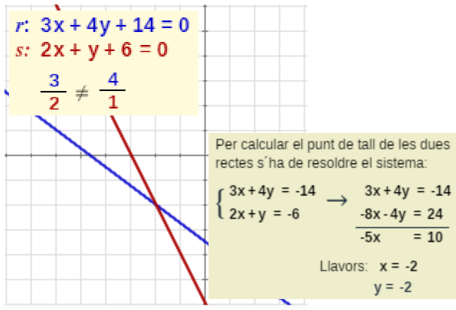
Posicions relatives de dues rectes

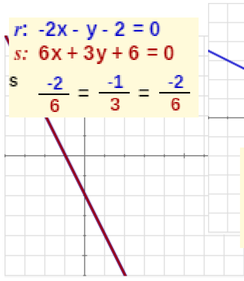
Dues rectes ***r***: **Ax+By+C=0** i ***s***: **A'x+B'y+C'=0** poden ser:

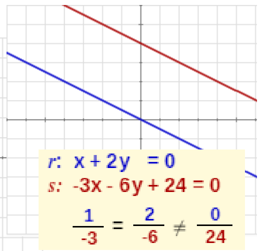
- **Secants** si tenen un únic punt en comú. Tenen diferent direcció i diferent pendent.
- **Paral·leles** si no tenen cap punt en comú. Tenen la mateixa direcció i el mateix pendent però diferent ordenada a l'origen.
- **Coincidents** si tenen tots els seus punts comuns. Tenen el mateix pendent i la mateixa ordenada a l'origen.

En cada cas es compleix:

Secants	Paral·leles	Coincidents
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$







EXERCICIS resolts

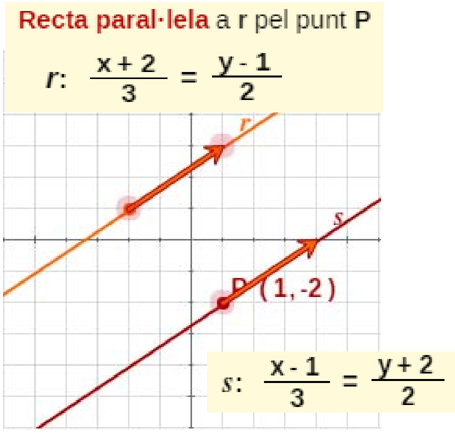
13. Troba el pendent de la recta que passa pels punts P(-5, -2) i Q(3, 2). Escriu també la seva equació en forma explícita.

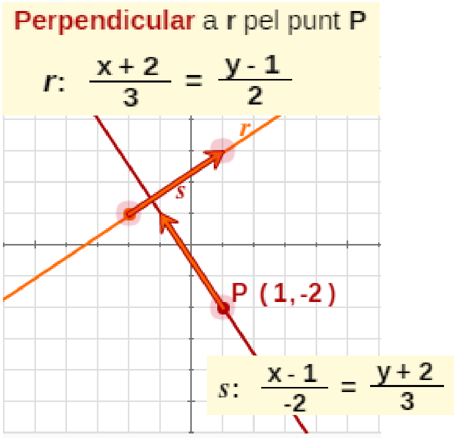
Solució: m $= \frac{2+2}{3+5} = \frac{1}{2}$

L'equació en forma punt-pendent : $y + 2 = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

14. El vector director d'una recta r és $\vec{v} = (-1,2)$ i passa pel punt P(-5, -2), una altra recta s té pendent m = -2 i passa pel punt N(0, 5). Com són aquestes rectes?

Solució: Tenen el mateix pendent -2, r: $y + 2 = -2(x + 5) \rightarrow 2x + y + 12 = 0$
s: $2x + y - 5 = 0$, son paral·leles





Recta paral·lela a una altra per un punt

Dues rectes són paral·leles si tenen la mateixa direcció i per tant el mateix pendent.

- Per escriure l'equació d'una recta paral·lela a una altra per un punt P, és suficient agafar aquest punt i el vector director, o el pendent segons convingui, d'aquesta altra.

Recta perpendicular a una altra per un punt

Dues rectes són perpendiculars si ho són els seus vectors directors i per tant el seu producte escalar és 0.

- Si $\vec{v}$= (v_x, v_y) és el vector director d'una recta, el d'una perpendicular és $\vec{v'}$ = $(v_y, -v_x)$.
- Pel que es refereix als pendents, si **m** és el pendent d'una recta i **m'** la d'una perpendicular:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m'} = \frac{-\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{v_y}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$$

EXERCICIS resolts

15. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ perquè les rectes *r* i *s* siguin paral·leles:

$$r: 2x + 3y + 23 = 0 \qquad s: \boldsymbol{a}x + 3y + 46 = 0$$

Solució: Perquè siguin paral·leles els coeficients de x i de y han de ser proporcionals, per tant $\boldsymbol{a}$ = 2

16. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ perquè les rectes *r* i *s* siguin paral·leles:

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-2} \qquad s: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{\boldsymbol{a}}$$

Solució: Perquè siguin paral·leles els coeficients de x i de y han de ser proporcionals, per tant $\boldsymbol{a}$ = 2

17. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ perquè les rectes *r* i *s* siguin perpendiculars:

$$r: x + y = 0 \qquad s: \boldsymbol{a}x + y + 5 = 0$$

Solució: Perquè siguin perpendiculars s'ha de complir:
$1 \cdot \boldsymbol{a} + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = -1$

18. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ perquè les rectes *r* i *s* siguin perpendiculars:

$$r: \frac{x+4}{3} = \frac{y-4}{4} \qquad s: \frac{x+5}{-4} = \frac{y-6}{\boldsymbol{a}}$$

Solució: Perquè siguin perpendiculars s'ha de complir:
$3 \cdot (-4) + 4 \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = 3$

3. Circumferències

Equació d'una circumferència

Una circumferència de centre **C(a, b)** i radi **r** és el lloc geomètric dels punts **P(x, y)** del pla la distància dels quals a **C** és **r**. Això ens porta a l'equació:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Desenvolupant aquesta expressió obtenim:

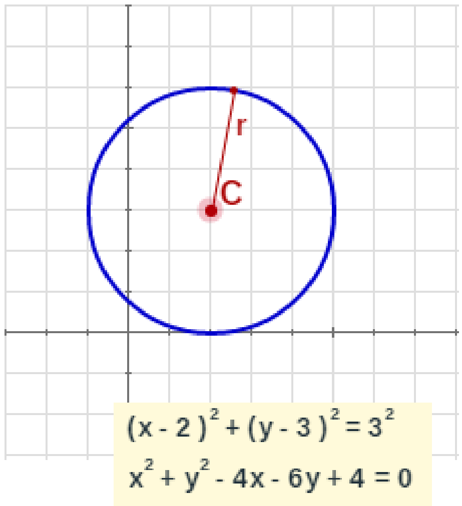
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Que podem escriure:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

on **A = -2a**, **B = -2b** i **C = $\mathbf{a^2 + b^2 - r^2}$**

Així podem calcular les coordenades del centre o el valor del radi a partir de l'equació.



EXERCICIS resolts

19. Troba l'equació de la circumferència de centre C(-3, 3) i radi 7.

Solució: $(x + 3)^2 + (y – 3)^2 = 5^2$
Operant i passant tot al primer membre: $x^2 + y^2 + 6x – 6y - 7 = 0$

20. Quin és el centre de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 3 = 0$?

Solució: Siguin a i b respectivament l'abscissa i l'ordenada del centre.
Si ens fixem en els coeficients de x i de y: $a = -\frac{-4}{2}$ $b = -\frac{6}{2}$
llavors el centre està a C(2, -3)

21. Quin és el radi de la circumferència d'equació $x^2 + y^2 + 2x + 6y – 6 = 0$?

Solució: Si ens fixem en l'equació veiem que el centre està en el punt (-1, -3)
i a més a més $(-1)^2 + (-3)^2 – r^2 = -6$ llavors $r^2 = 16$ i $r = 4$

22. Troba l'equació de la circumferència que passa pel punt (-7, 1) i té el centre a C(-2, -1).

Solució: La distància entre el centre i P és el radi: $r=\sqrt{(-7+2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{29}$
llavors $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 29 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y – 24 = 0$

Per practicar

1. Donats els punts A(-4,3), B(3,1), C(4,6) i D(-3,8), calcula els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{DC}$.
Quins són equipol·lents?

2. Els punts A(-5, 2), B(0, -2) i C(1, 2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram, troba el quart vèrtex, D, aplicant la suma de vectors.

3. Donats els vectors $\vec{u}=(-4,1)$, $\vec{w}=(2,-4)$ i $\vec{w}=(-4,-2)$. Calcula:
a) $\vec{u}-3(\vec{v}+\vec{w})$ b) $2\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

4. Calcula el punt on es tallen les diagonals del paral·lelogram de vèrtexs A(-4, 2), B(1, -2), C(2, 2), D(-3, 6). Calcula també la mesura de les diagonals.

5. Comprova que el triangle de vèrtexs A(-5, 2), B(1, -2), C(-2, 6) i el de vèrtexs els punts mitjans dels seus costats, són semblants.

6. Calcula el simètric del punt A(-3, 1) respecte de P(0,-1). Comprova també que la distància entre A i P és la meitat de la distància entre A i el seu simètric.

7. Els punts A(-2, 1), B(6, -4), C(9, 1), D(4, 4) són els vèrtexs d'un trapezoide. Comprova que els punts mitjans de cada costat formen un paral·lelogram.

8. Calcula els components del vector $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ sabent que $\vec{u}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$ i $\vec{v}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$

9. Expressa el vector $\vec{w}=-4\vec{\imath}-6\vec{\jmath}$ com a combinació lineal de $\vec{u}=4\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ i de $\vec{v}=-2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$

10. Donats els vectors $\vec{u}=(5,4)$ i $\vec{v}=(-3,2)$ calcula el seu producte escalar, els seus mòduls i l'angle que formen.

11. Comprova mitjançant vectors i amb el Teorema de Pitàgores que el triangle de vèrtexs A(-4, 2), B(5, -1) i C(-2, 8) és rectangle.

12. Donada la recta *r* indica, en cada cas, quin tipus d'equació és, representa-la i calcula un punt, un vector director i el pendent.
a) $r\!:\begin{cases}x=2-3t\\ y=5+3t\end{cases}$ c) $r\!:\ \frac{x+5}{5}=\frac{y+1}{4}$
b) $r\!:\ -x+2y-1=0$ d) $r\!:\ y=-x-7$

13. La recta r passa pel punt P(2, 2) i té vector director $\vec{v}=(-4,2)$. Troba la seva equació en forma:
a) vectorial; b) contínua; c) general.

14. Troba l'equació general de la recta que passa pels punts P(-3,-4) i Q(-1,-2)

15. La recta *r* passa pel punt P(5, -1) i té pendent 2. Troba la seva equació en forma: a) punt-pendent; b) explícita; c) general.

16. Troba la posició relativa de les rectes:
a) $r\!:\begin{cases}x=1+3t\\ y=-2-3t\end{cases}$ $s\!:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-2}{4}$
b) $r\!:\ -x+4y+1=0$ $s\!:\ x-4y+3=0$

17. Troba l'equació de la recta paral·lela a $r\!: 4x+3y+8=0$ pel punt P(2, 3)

18. Troba l'equació de la perpendicular a $r\!: 4x-3y+8=0$ pel punt P(-1, 7)

19. Comprova que les rectes $x+6y+8=0$, $5x-6y+40=0$, $x+2=0$, formen un triangle i calcula el seus vèrtexs.

20. Donat el triangle de vèrtexs A(-5,-3), B(2,-5) i C(-2,2), calcula les equacions de les altures i les coordenades de l'ortocentre.

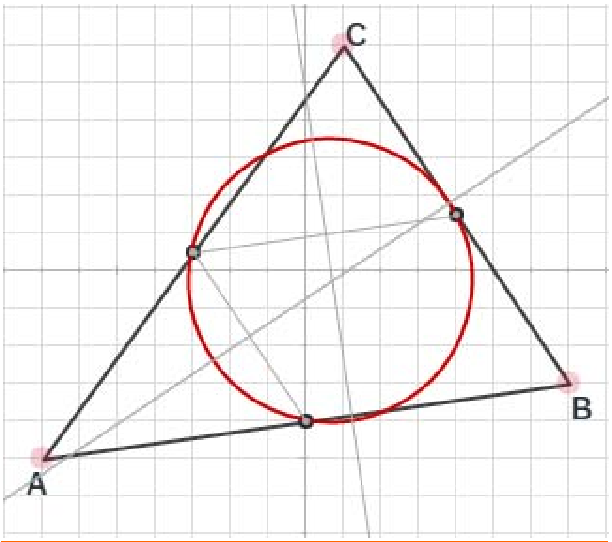
21. Donat el triangle de vèrtexs A(-7,0), B(0,-2) i C(-3,7), calcula les equacions de les mediatrius de cada costat i les coordenades del circumcentre.

22. Donat el triangle de vèrtexs A(-3,-4), B(7,-5) i C(0, 3), calcula les equacions de les mitjanes i les coordenades del baricentre.

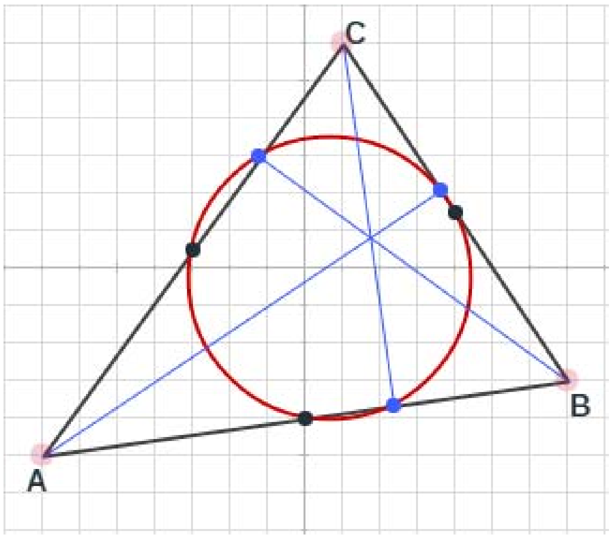
Per saber-ne més

La circumferència dels nou punts

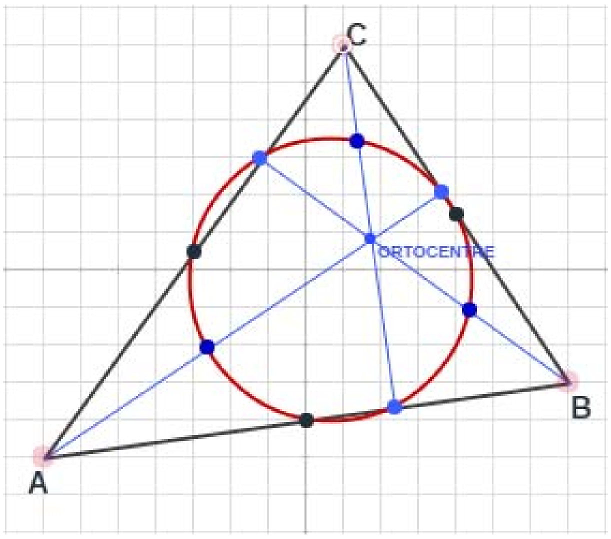
Un triangle sempre ens pot donar sorpreses. Al principi del tema et plantejàvem una recta curiosa, la d'Euler, ara veuràs una circumferència que també resulta sorprenent, la de **Freuenbach** o dels **nou punts**.



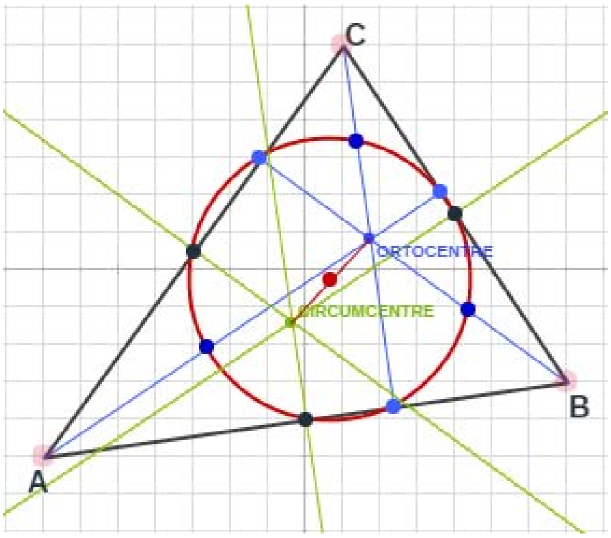
Donat un triangle qualsevol ABC, agafem els **punts mitjans** del seus costats i dibuixem la circumferència que passa per ells. Sempre hi ha una circumferència que passa per tres punts no alineats.



Si ara tracem les **altures** del triangle, observem que la circumferència també passa pels punts on cada altura talla el costat sobre el qual ha estat traçada. Ja hi ha sis punts pels quals passa.



Però encara hi ha més, si marquem els **punts mitjans** entre l'ortocentre i cadascun dels vèrtexs, també estan a la circumferència, d'aquesta manera ja tenim nou punts pels quals passa, d'aquí el seu nom.



I quin és el centre de la circumferència? Dibuixem el **circumcentre**, en el **punt mitjà** del segment que uneix l'**ortocentre** i el **circumcentre** està el centre de la nostra circumferència.

Recorda el més important

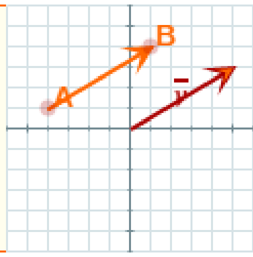
Vector fix

Origen: A (x_1, y_1) Extrem: B (x_2, y_2)

Components: $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Vector lliure

Conjunt de vectors equipol·lents a un vector fix



Caracteritzen un vector:

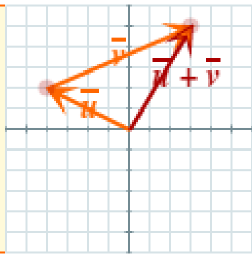
- el mòdul
- la direcció
- el sentit

Operacions amb vectors

$\overline{u} = (u_x, u_y)$

$\overline{v} = (v_x, v_y)$

- Suma:
  $\overline{u} + \overline{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- Producte per un escalar:
  $t \cdot \overline{u} = (t \cdot u_x, t \cdot u_y)$



Producte escalar

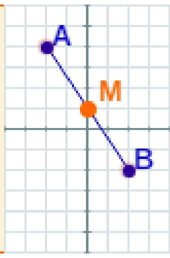
Dues formes de calcular:

- $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v})$

Punt mitjà d´un segment

A (x_1, y_1) B (x_2, y_2)

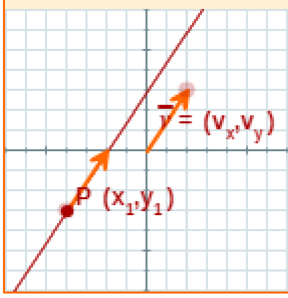
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



- **Mòdul d´un vector** $|\overline{v}| = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- **Distància entre dos punts** $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **Angle entre dos vectors** $\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \dfrac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|}$

Equacions de la recta

$(x,y) = (x_1, y_1) + t\,(v_x, v_y)$



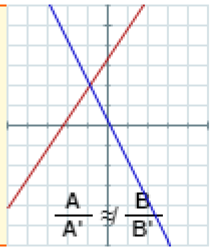
vectorial
paramétricas
continua
general
explícita
punto-pendiente

Posicions relatives de dues rectes

$Ax + By + C = 0$

$A'x + B'y + C' = 0$

secantes
paralelas
coincidentes



Equació de la circumferència

Centre: **C(a, b)**

Radi: **r**

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Autoavaluació

1. Donats els punts A(-1, -2) i B(-7,-6), calcula el mòdul del vector $|\overrightarrow{AB}|$

2. Un vector equipol·lent a $\vec{v} = (5, -4)$ té el seu origen en el punt A(3, 3). Calcula el seu extrem.

3. Donats els vectors $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (-4, -3)$, calcula $3\vec{u} + \vec{v}$

4. Donats els vectors $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (-4, -3)$, calcula el seu producte escalar.

5. Donats els punts A(-4, 8) i B(0, 4), calcula la distància de l'origen de coordenades al punt mitjà del segment $\overline{AB}$.

6. Troba l'equació general de la recta que passa pel punt P(-4, 8) i té com a vector director $\vec{v} = (1, -1)$

7. Quina és la posició relativa de les rectes següents?
   r: x – 2y – 10 = 0 *s*: 2x – 4y – 50 = 0

8. Troba l'equació general de la recta que passa pel punt P(-4, -4) i és paral·lela a la recta x – 2y – 10 = 0

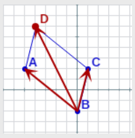
9. Troba l'equació general de la recta que passa pel punt P(-4, -4) i és perpendicular a x – 2y – 10 = 0

10. Troba l'equació de la circumferència de centre C(-5, 4) i que passa pel punt P(-5, 0).

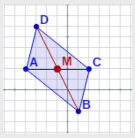
Solucions dels exercicis per practicar

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ = (7,-2) equipol·lents
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ = (1, 5) equipol·lents

2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ = (-5.4)
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ = (-4,6)

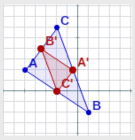


3. a) (2, -17)
b) (-8, -3)



4. M(-1, 2)
d(A,C)=6 d(B,D)=8,94

5. C'(-2,0) B'(-3,5, 4) A'(-0,5,-2)
$\overrightarrow{AB}$=(6,-4) $\overrightarrow{A'B'}$=(-3,2)
$\overrightarrow{AC}$=(3, 4) $\overrightarrow{A'C'}$ = (-1,5,-2)
$\overrightarrow{BC}$=(-3, 8) $\overrightarrow{B'C'}$=(1,5,-4)



6. A'(3,-3)
d(A,P) = $\sqrt{52}/2$ d(A,A') = $\sqrt{52}$

7. AB: M(2, -1,5) BC: N(7,5, 3)
CD: P(6,5, 2,5) AD: Q(1, 2,5)
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ = (5,5, 0)
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ = (-1,4)

8. $\vec{w}$ = (3, 0)

9. $\vec{w} = -2\vec{u} - 2\vec{v}$

10. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = -7 $|\vec{u}| = \sqrt{41}$ $|\vec{v}| = \sqrt{13}$
cos $(\vec{u},\vec{v})$ =-0,3032 angle=107,65º

11. $\overrightarrow{AB}$ =(9,-3) $\overrightarrow{AC}$ = (2,6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = 0
$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$ = 90+40 = 130 = $|\overrightarrow{BC}|^2$

12. a) Paramètriques.; P(2, 5); $\vec{v}$= (-3, 3);m=1
b) General; P(-1, 0); $\vec{v}$= (2, 1); m=1/2
c) Contínua; P(-5, -1); $\vec{v}$= (5, 4); m=4/5
d) Explícita; P(0, -7); $\vec{v}$= (1, -1); m=-1

13. a) (x, y) = (2, 2) + t(-4, 2)
b) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{2}$
c) x + 2y – 6 = 0

14. x – y – 1 = 0

15. a) y + 1 = 2(x – 5)
b) y = 2x – 11
c) 2x – y – 11 = 0

16. a) secants
b) paral·leles

17. 4x + 3y – 17 = 0

18. 3x + 4y – 25 = 0

19. Secants dues a dues.
Vèrtexs: A(-8, 0), B(-2, -1), C(-2, 5)

20. Altura costat AB: 7x- 2y +18 = 0
Altura costat BC: -4x + 7y + 1 = 0
Altura costat AC: 3x + 5y + 19 = 0
Ortocentre: H(-3,12, -1,93)

21. Mediatriu costat AB: 14x - 4y +45 = 0
Mediatriu costat BC: -x + 3y – 9 = 0
Mediatriu costat AC: 8x + 14y – 9 = 0
Circumcentre: P(-2,61, 2,13)

22. Mitjana costat AB: 7x- 2y +18 = 0
Mitjana costat BC: -4x + 7y + 1 = 0
Mitjana costat AC: 3x + 5y + 19 = 0
Baricentre: G(1,33, -2)

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. 7,21

2. B(8, -1)

3. (2, -12)

4. 1

5. 6,32

6. – x – y + 4 = 0

7. Paral·leles

8. x – 2y – 4 = 0

9. 2x + y + 12 = 0

10. $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$