

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar los sucesos de un experimento aleatorio y realizar operaciones con ellos.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Conocer las propiedades de la probabilidad.
- Hallar la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto.
- Hallar probabilidades de sucesos dependientes e independientes.
- Aplicar la probabilidad a situaciones de la vida cotidiana.

Antes de empezar.

1. Experimentos aleatorios pág. 4
Espacio muestral y sucesos
Operaciones con sucesos
Sucesos incompatibles
2. Probabilidad de un suceso pág. 6
La regla de Laplace
Frecuencia y probabilidad
Propiedades de la probabilidad
3. Experimentos compuestos pág. 8
Regla de la multiplicación
Extracciones con y sin devolución
Probabilidad condicionada
Probabilidad con diagramas de árbol

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Antes de empezar

Investiga

Imagina que estás en un concurso de televisión en el que te ofrecen tres puertas y tiene que elegir una.

Detrás de una de las puertas hay un coche y detrás de cada una de las otras dos, un burro.



Eliges una puerta, pongamos que la de la estrella verde, pero antes de abrirla, el presentador, que sabe lo que hay detrás de cada una, abre una de las dos que no has elegido, la roja, tras la que por supuesto hay un burro, y entonces te da la oportunidad de cambiar tu elección.

Naturalmente quieres llevarte el coche, ¿qué haces, cambiar de puerta o no cambiar?



Supongamos que cambias tu puerta y al final te quedas con la azul, y... ¡ganaste el coche!. En este caso salió bien cambiar la primera elección. ¿Qué opinas?, ¿conviene cambiar o es igual?, a lo largo de este tema lo descubrirás.

1. Experimentos aleatorios

Espacio muestral y sucesos.

Al extraer una carta de una baraja, lanzar una moneda, tirar un dado, y en otros ejemplos análogos, no podemos saber de antemano el resultado que se va a obtener. Son experimentos **aleatorios**, aquellos en los que no se puede predecir el resultado y de ellos se trata aquí.

El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral**, y cada uno de esos posibles resultados es un **suceso elemental**.

- ✓ Un **suceso** es cualquier subconjunto del espacio muestral, se verifica cuando ocurre cualquiera de los sucesos elementales que lo forman.

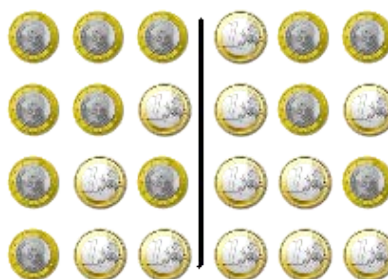
Hay un suceso que se verifica siempre, el **suceso seguro** que es el mismo espacio muestral.

- Al tirar una moneda y un dado, una forma de representar el espacio muestral es:



O bien: (cara, 1) (cara, 2),...

- Al tirar tres monedas (o una moneda tres veces) el espacio muestral es:



Operaciones con sucesos

El suceso **contrario** a uno dado A, está formado por todos los sucesos del espacio muestral que no están en A. Es el que ocurre cuando no sucede A y se indica \bar{A} .

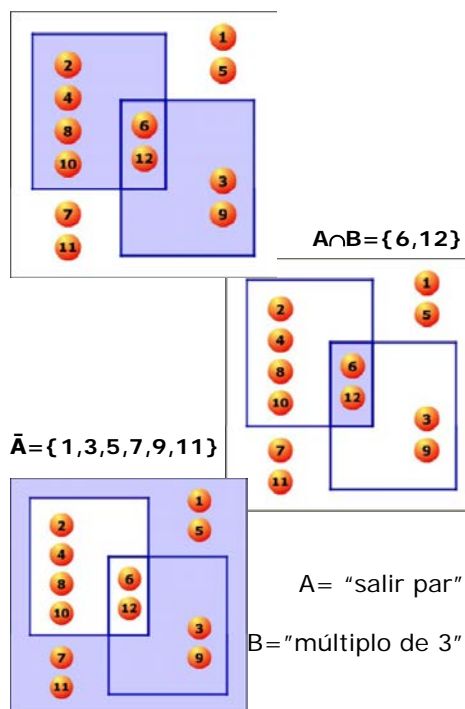
- El suceso **contrario** del **seguro** es el **suceso imposible**, que no se verifica nunca, se indica con \emptyset .

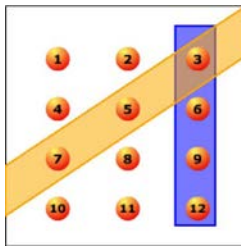
Con los sucesos de un experimento aleatorio se pueden realizar distintas operaciones. Dados dos sucesos A y B:

- La **unión** de A y B, $A \cup B$, es el suceso formado por todos los sucesos elementales de A y de B. Ocurre cuando sucede A ó sucede B ó ambos.
- La **intersección**, $A \cap B$, es el suceso formado por los sucesos elementales comunes a A y B. Se verifica cuando ocurren A y B a la vez.
- La **diferencia** de A y B, $A \setminus B$, es el suceso formado por los sucesos elementales de A que no están en B. Ocurre si sucede A pero no B.

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

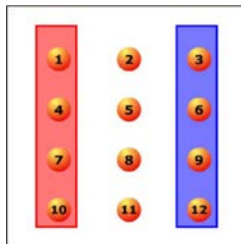
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$





Sucesos compatibles
Cuando sale 3 ocurren ambos.

Sucesos incompatibles
No ocurren a la vez, pero no son contrarios



Sucesos compatibles e incompatibles

En un experimento aleatorio hay sucesos que pueden ocurrir a la vez y sucesos que no.

- Dos sucesos se dicen **compatibles** si tienen algún suceso elemental común. En este caso $A \cap B \neq \emptyset$, pueden ocurrir a la vez.
- Dos sucesos se dicen **incompatibles** si no tienen ningún suceso elemental común, en este caso $A \cap B = \emptyset$ y no pueden ocurrir a la vez.

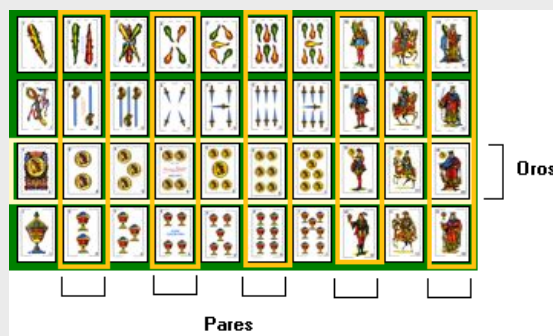
Un suceso y su contrario son siempre incompatibles, pero dos sucesos incompatibles no siempre son contrarios, como se puede ver en el ejemplo de la izquierda.

EJERCICIOS resueltos

1. En una bolsa tenemos tres bolas numeradas como 1, 2 y 3. Consideramos el experimento de extraer una bola y anotar su número. Escribe todos los sucesos posibles. Indica cuáles de ellos son los elementales.

$\{\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$. Los tres últimos son los elementales.

2. En una baraja, bajo el experimento de extraer una carta, considera los sucesos a) par, b) oros, c) par y oros, d) par u oros, e) par menos oros, f) oros menos par y g) no par



Observa la imagen,

- a) hay 20 cartas rodeadas de naranja, las pares,
- b) otras 20 que no, las impares,
- c) 10 oros.
- d) El 2, 4, 6, 10 y 12 de oros son pares.
- e) Todos los oros y pares juntos son 25 cartas (todas las rodeadas por amarillo o naranja)
- f) A los 2, 4, 6, 10 y 12 hay que quitar el 2, 4, 6, 10 y 12 de oros, a 20 cartas se le quitan 5 quedan 15
- g) El 1, 3, 5, 7 y 11 de oros.

3. Al tirar un dado consideramos los sucesos: $A = \{\text{par}\}$, $B = \{\text{mayor de } 3\}$, y $C = \{\text{impar}\}$. De los tres pares de sucesos posibles AB , AC y BC , indica cuáles son compatibles y/o incompatibles:

AB compatibles, cuando salga el 4 o el 6.

AC incompatibles, si es par no puede ser impar.

BC compatibles, cuando salga el 5.

2. Probabilidad de un suceso

La regla de Laplace

Cuando un experimento aleatorio es regular, es decir que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir ó son **equiprobables**, para calcular la probabilidad de un suceso cualquiera A, basta contar y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A (**casos favorables**) y el nº de sucesos elementales del espacio muestral (**casos posibles**).

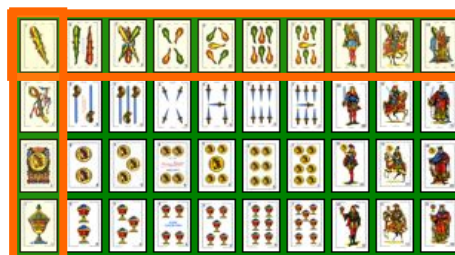
$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{casos posibles}}$$

Este resultado se conoce como **regla de Laplace**. Observa que para poder aplicarla es necesario que todos los casos posibles sean igualmente probables.

Frecuencia y probabilidad

Con la regla de Laplace podemos calcular la probabilidad de un suceso en experimentos regulares, pero si la experiencia es irregular o desconocemos la probabilidad de cada uno de los posibles resultados entonces es preciso recurrir a la **experimentación**.

Como sabes la **frecuencia absoluta** de un suceso es el número de veces que aparece cuando se repite un experimento aleatorio, y la **frecuencia relativa** es la frecuencia absoluta dividida por el número de veces, **n**, que se repite el experimento aleatorio. Cuando este número **n** es muy grande, la frecuencia relativa con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo. Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, permite definir la probabilidad de un suceso como ese número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.



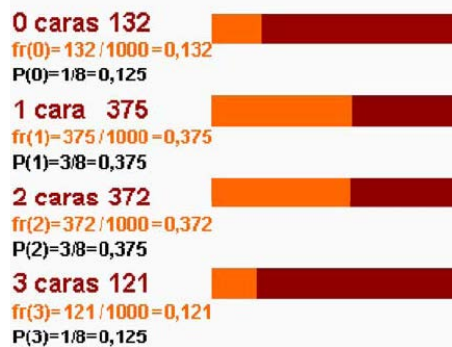
Extraemos una carta de una baraja de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

Resultados obtenidos en la simulación del lanzamiento de tres monedas 1000 veces



EJEMPLO

Sospechamos que un dado está trucado y nos entretenemos en tirarlo 1000 veces y anotar los resultados, obteniendo:

	1	2	3	4	5	6
F	203	297	146	154	98	102
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

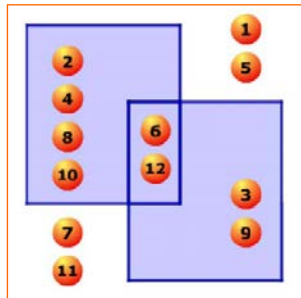
Concluiremos, $P(1)=P(2)=\dots$ ya no es $1/6$, sino aproximadamente $P(1)=0,2$; $P(2)=0,3$ etc. Aquí estaremos usando la frecuencia relativa como probabilidad, en lo sucesivo lo tendremos en cuenta al jugar con ese dado.

A="par" B="múltiplo de 3"

$P(A)=6/12=1/2$ $P(B)=4/12=1/3$

$P(\bar{A})=1/2$ $p(\bar{B})=2/3$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$



Propiedades de la probabilidad

Vista la relación entre frecuencia relativa y probabilidad, se cumple que:

- La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1.
- La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** A y B es $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Y de éstas se deduce además que:

- La probabilidad del contrario es $p(A) = 1 - P(A)$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

EJERCICIOS resueltos

4. Tenemos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los resultados posibles?

$P(1)=1/20=0,05$

$P(2)=2/20=0,1$

$P(3)=3/20=0,15$

$P(4)=4/20=0,2$

$P(5)=5/20=0,25$

$P(6)=5/20=0,25$

b) $P(\text{par}) = 11/20 = 0,55$

Hay dos 2 y cuatro 4, y cinco 6, 11 pares

c) $P(\text{mayor de 3}) = 14/20 = 0,70$

14 posibles entre 20

d) $P(\text{par y mayor de 3}) = 9/20 = 0,45$

El 4 y el 6 son pares y mayores de 3

e) $P(\text{par o mayor de 3}) = 19/20 = 0,95$

Si sale 2, 4, 5 ó 6

5. En una bolsa tenemos 7 bolas rojas, 9 bolas azules y 4 verdes. Extraemos una bola, calcula la probabilidad de que

a) No sea roja

$P(\bar{R}) = 13/20 = 0,65$

Hay 20 bolas, 7 rojas, 13 no rojas

b) Sea roja o azul

$P(R \cup A) = 16/20 = 0,8$

7+9=16 rojas ó azules

6. En una urna hay 40 bolas rojas y azules, no sabemos cuántas de cada color,. Para averiguarlo extraemos una bola, miramos el color y la devolvemos a la urna antes de sacra otra. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos 807 bolas rojas y 193 bolas azules. ¿Cuántas bolas de cada color estimas que hay en la urna?.

$P(\text{roja}) = 0,81$

$P(\text{azul}) = 0,19$

$0,81 \cdot 40 \approx 32$ rojas

$0,19 \cdot 40 \approx 8$ azules

7. En un grupo, el 40% juega baloncesto y el 60% fútbol, sabiendo que el 85% practica alguno de los dos deportes, ¿qué porcentaje juega a los dos?.

$P(F) = 0,60$ $P(B) = 0,40$ $P(F \cup B) = 0,85$

$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B)$

$0,85 = 0,60 + 0,40 - P(F \cap B)$

$P(F \cap B) = 0,15$ 15%



8. En una clase el 68% aprueba Lengua y el 66% Matemáticas, si el 43% ha aprobado las dos asignaturas, ¿qué porcentaje no aprueba ninguna de las dos?.

Aprueba al menos una de las dos: $P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) = 0,68 + 0,61 - 0,43 = 0,86$

Suspender las dos es el suceso contrario a éste, luego su probabilidad es $1 - 0,86 = 0,14$

El 14% ha suspendido las dos asignaturas.

3. Experimentos compuestos

Regla de la multiplicación

Un **experimento compuesto** es el que está formado por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva.

Para calcular el espacio muestral de un experimento compuesto conviene, en muchas ocasiones, hacer un diagrama de árbol que represente todas las opciones. Cada resultado viene dado por un camino del diagrama. Observa en el ejemplo cómo construir un diagrama de árbol.

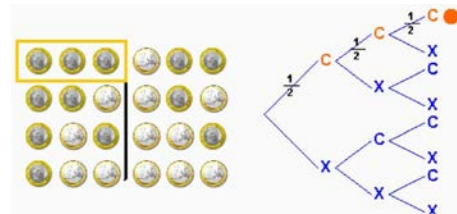
Si te fijas en el ejemplo anterior, al indicar la probabilidad de cada rama del camino, se obtiene la probabilidad de cada suceso compuesto calculando el producto de los respectivos sucesos simples.

Para calcular la probabilidad de un suceso en un experimento compuesto se **multiplican** las probabilidades de los sucesos simples que lo forman.

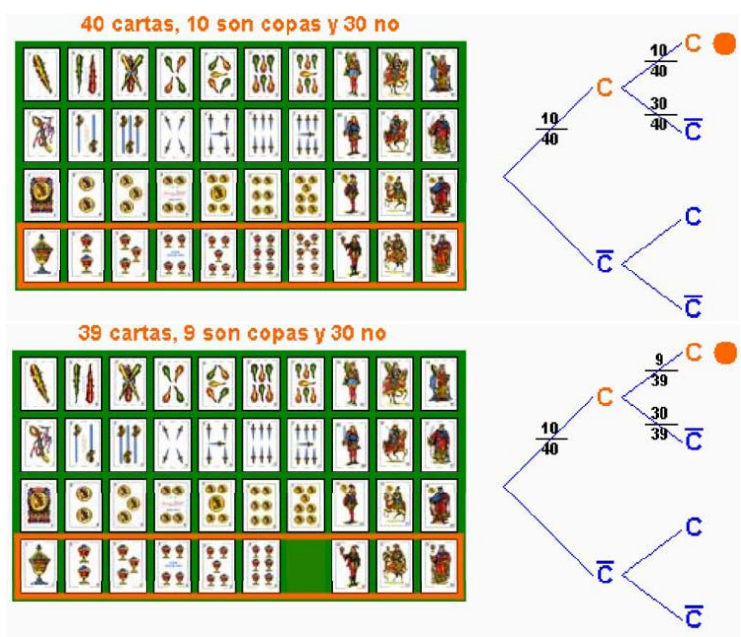
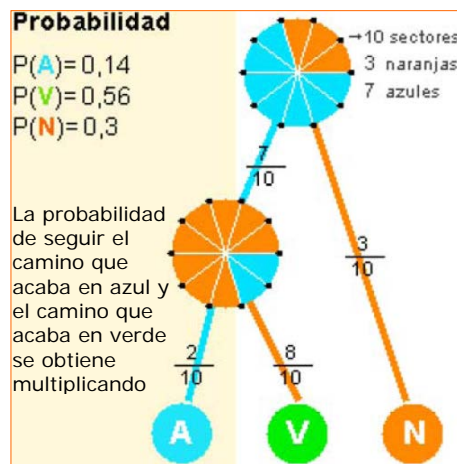
Extracciones con devolución y sin devolución

Un ejemplo de experimento compuesto lo encontramos en la extracción sucesiva de cartas o de bolas de una urna, ... , en estos casos hay que considerar si se devuelve la carta, bola, etc. antes de sacar la siguiente o no.

Tiramos una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres caras?



8 casos posibles
1 caso favorable
La probabilidad de C en cada moneda 1/2
$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$



Sacamos sucesivamente dos cartas de una baraja de 40, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean de copas?

La probabilidad de que la primera carta sea de copas es 10/40.

Para la segunda la probabilidad depende de que devolvamos la primera carta al mazo o no.

Con devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$



Sin devolución

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B ocurriendo A}}{\text{Casos posibles ocurriendo A}} = \frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables de A}}$$

$$= \frac{\frac{\text{Casos favorables de A y B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables de A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En una urna tenemos bolas rojas y azules numeradas como en la figura. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cada número?

$P(1) = 3/8$ 
 $P(2) = 3/8$ 
 $P(3) = 2/8$

Si sabemos que la bola es roja
 $P(1/R) = 2/4$ (de 4 rojas hay 2 con 1)
 $P(1) < P(1/R)$ se favorecen
 $P(2/R) = 1/4$ (de 4 rojas hay 1 con 2)
 $P(2) > P(2/R)$ se desfavorecen
 $P(3/R) = 1/4$ (de 4 rojas hay 1 con 3)
 $P(3) = P(3/R)$ son independientes.

Probabilidad condicionada

Cuando se realizan observaciones de varios sucesos puede que uno dependa del otro.

Los sucesos "el día está gris" y "llevar paraguas" influyen entre sí. Los sucesos "estudiar" y "aprobar", son sucesos que se favorecen; cuando se estudia, aumenta la probabilidad de aprobar.

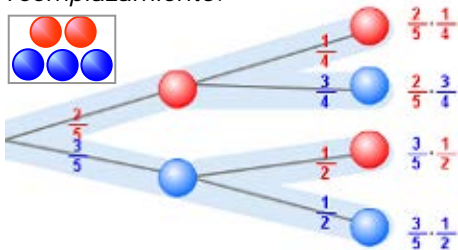
La probabilidad de que ocurra un suceso B cuando está ocurriendo otro, A, se llama **condicionada**, y se expresa $p(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dados dos sucesos, se dice que son **independientes** si la presencia del uno no influye en la probabilidad del otro, es decir, si $P(B/A) = P(B)$; en caso contrario son **dependientes**.

- ✓ A y B independientes: $P(B/A) = P(B)$ y al tener en cuenta la formula anterior para $p(B/A)$,
A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

En una urna hay 2 bolas rojas y 3 azules, extraemos dos bolas sin reemplazamiento.



Suma = 1

Probabilidad de que las dos sean **rojas**:

$$P(R_1 R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

Probabilidad de que las dos sean **azules**:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

Probabilidad de que sean del mismo color:

$$P(R_1 R_2 \cup A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$$

Probabilidad de que sean de distinto color:

$$P(R_1 A_2 \cup R_2 A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$$

Probabilidad con diagramas de árbol

Como has podido ver, en los experimentos compuestos se puede hacer un diagrama en árbol, y cada resultado viene dado por un camino en dicho árbol.

Para calcular una probabilidad solo hay que dibujar el camino correspondiente, y el producto de las probabilidades de todas las ramas que lo forman será el valor que buscamos.

Así si ocurre A y luego B:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

En un diagrama de árbol:

- ✓ La suma de las probabilidades de todos los caminos es igual a 1
- ✓ La probabilidad de un suceso compuesto por varios caminos es la suma de las probabilidades de los caminos respectivos.

EJERCICIOS resueltos

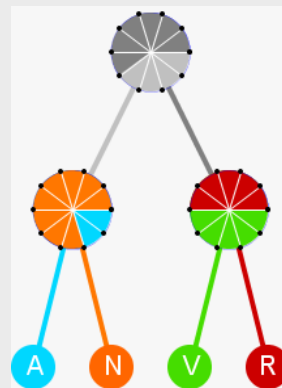
9. En las ruletas de la figura adjunta, calcula la probabilidad de cada uno de los caminos.

$$P(\text{azul}) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08$$

$$P(\text{naranja}) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$$

$$P(\text{verde}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$

$$P(\text{rojo}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,30$$



10. Lanzamos un dado de 4 caras $\{1,2,3,4\}$ y otro de 10 $\{1,2,2,3,3,3,4,4,4,4\}$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos 3?. ¿Y dos 4?

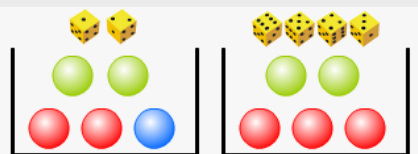
$$P(3 \text{ y } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0.075$$

$$P(4 \text{ y } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0.1$$

11. Lanzamos un dado, si sale 1 ó 2 sacamos una bola de la urna A y si no de la B, ¿Cuál es la probabilidad de sacar la bola azul?

La bola azul está en la urna A, para que salga ha tenido que salir antes en el dado un 1 o un 2.

$$P(A) = 1/3 \cdot 1/5 = 1/15$$



12. En una bolsa tenemos 5 bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos dos bolas, a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 y un 3 si no devolvemos las bolas sacadas?. b) ¿Y cuál si las devolvemos?

Sin devolución $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$

Con devolución $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

13. En una caja hay 6 bolas blancas y 4 bolas negras, ¿qué probabilidad hay de que al extraer dos bolas sean las dos blancas?. Hazlo sin devolución y con devolución.

a) Sin devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 5/9 = 30/90 = 1/3$

b) Con devolución: $P(BB) = 6/10 \cdot 6/10 = 36/100 = 18/50$

14. En una caja hay 12 bolas de tres colores, rojas, azules y verdes. Están huecas y en algunas hay premio y en otras no. La distribución de premios y colores es la que se indica en la tabla. Calcula las probabilidades siguientes e indica si los sucesos "premio" y "color" son dependiente o independientes en cada caso.

	●	●	●	TOTAL
CON PREMIO	1	1	2	4
SIN PREMIO	1	2	5	8
TOTAL	2	3	7	12

$$P(V) = 3/12 = 1/4$$

$$P(V \cap \text{premio}) = 1/12$$

$$P(\text{premio} / V) = 1/3$$

$$P(A) = 7/12$$

$$P(A \cap \text{premio}) = 2/12$$

$$P(\text{premio} / A) = 2/7$$

$$P(R) = 2/12 = 1/6$$

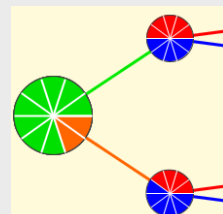
$$P(R \cap \text{premio}) = 1/12$$

$$P(\text{premio} / R) = 1/2$$

$P(\text{premio}) = 4/12 = 1/3$ Los sucesos "premio" y "verde" son independientes, mientras que "premio" y "roja", "premio" y "azul" son dependientes.

15. Calcula la probabilidad de obtener rojo en las ruletas de la figura.

$$P(R) = 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,48$$

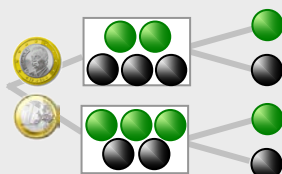


16. Lanzamos una moneda, si sale cara sacamos una bola de una urna con 2 bolas verdes y 3 bolas negras; si sale cruz de otra urna con 3 bolas verdes y 2 bolas negras. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea verde.

$$P(C \text{ y } V) = 1/2 \cdot 2/5 = 1/5 = 0,2$$

$$P(X \text{ y } V) = 1/2 \cdot 3/5 = 3/10 = 0,3$$

$$P(V) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$





Para practicar

1. Lanzamos un dado de doce caras y anotamos el número de la cara superior. Describe los sucesos:

A="Sacar un n° par"

B="Sacar un número mayor que 6"

C="Sacar un número menor que 3"

D="Sacar múltiplo de 3"

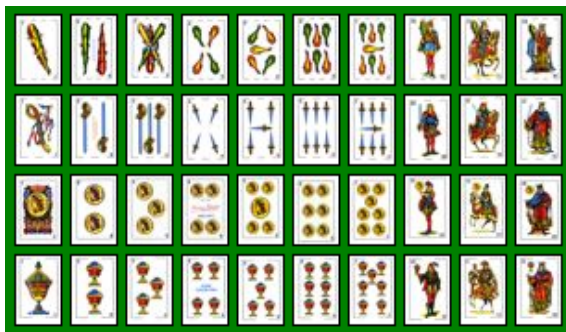
Señala que pares de estos sucesos son incompatibles.

2. Elegimos una ficha de dominó al azar, describe los sucesos: A="La suma de los puntos es mayor que 7"; B="La suma de los puntos es múltiplo de 5". Escribe $A \cap B$ y $A \cap \bar{B}$.

3. En el experimento de sacar una carta de una baraja española, considera los sucesos:

A="Sacar una figura", B="Sacar copas"

Obtén los sucesos: $A \cap B$ y $\bar{A} \cap B$



4. En la escuela municipal de un pueblo hay clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol y voleibol. Hay 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto y 40 a fútbol y baloncesto. ¿Cuántos van sólo a voleibol?

5. Con un diagrama de árbol construye el espacio muestral del experimento de lanzar 4 monedas. Considera los sucesos:

A="Salir una cara"

B="Salir al menos dos cruces"

Escribe $A \cup B$, $A \cap B$ y el suceso contrario de B

6. De un juego de dominó quitamos todas las fichas dobles, luego sacamos una ficha al azar, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea múltiplo de 5.

7. Formamos todos los números posibles de tres cifras con el 3, el 5 y el 6, repetidas o no. Elegimos uno de esos números al azar, calcula la probabilidad de que acabe en 5.

8. En una caja hay 3 bolas rojas, 3 bolas verdes y 2 azules; en otra caja hay 2 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules. ¿En qué caja es mayor la probabilidad de extraer una bola azul?

9. Se elige al azar un número del 1 al 30. Calcula la probabilidad de elegir:

a) un n° mayor que 3 y menor que 17

b) un múltiplo de 3

10. Encima de la mesa tenemos las dos cartas que aparecen debajo, sacamos otra carta, calcula la probabilidad de que sea de oros.



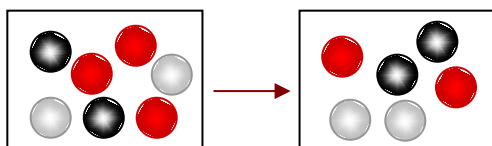
11. Para corregir un examen de probabilidad un profesor benévolo ha decidido hacerlo de la siguiente manera:

Tira dos dados y se fija en la mayor de las puntuaciones obtenidas, si es menor que 4 pone Insuficiente y en los otros casos Suficiente.

Con este método, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

Probabilidad

12. La probabilidad de un suceso A es 0,15, ¿cuál es la probabilidad del suceso contrario?.
13. Un dado está trucado de forma que las caras con número impar tienen triple probabilidad de salir que las caras con número par. Calcula la probabilidad de cada una de las caras y la de sacar número impar.
14. La probabilidad de un suceso A es 0,14 y la de otro B es 0,39. Si la probabilidad de que ocurran los dos a la vez es 0,13. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos.
15. Considera dos sucesos A y B de un experimento aleatorio con $P(A)=0,16$ y $P(A\cup B)=0,65$; $P(A\cap B)=0,02$; calcula la probabilidad de A-B y de B-A.
16. En una urna hay bolas blancas, rojas y negras, pero no sabemos cuántas ni en qué proporción. En 1000 extracciones, devolviendo la bola cada vez, se ha obtenido bola blanca 223 veces, roja 320 veces y negra 457 veces. Al hacer una nueva extracción, ¿qué probabilidad hay de sacar una bola roja?. Si en la urna hay 23 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada color?
17. En una caja hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 2 bolas negras. Se extraen dos bolas, calcula la probabilidad de que las dos sean del mismo color si la extracción se hace:
- con devolución
 - sin devolución.
18. En una caja, A, hay 3 bolas rojas, 2 bolas blancas y 2 negras, en otra caja, B, hay 2 bolas de cada color. Se extrae una bola de la caja A y se pone en la B, después se saca una bola de B. Calcula la probabilidad de que esta última bola sea negra.



19. En una caja, A, hay 2 bolas rojas, 3 bolas blancas y 3 negras, en otra caja, B, hay 2 bolas de cada color, rojo, blanco, negro. Se tira un dado, si sale un número mayor que 4, se saca una bola de la urna A y si no de la B. Calcula la probabilidad de que la bola sea roja.
20. De una baraja española de 40 cartas, se extraen dos cartas sin devolución, calcula la probabilidad de que
- las dos sean del mismo palo
 - una sea de oros y otra de copas.
21. En un instituto hay 450 estudiantes, de los que 290 son chicos y el resto chicas. El 20% de los chicos y el 10% de las chicas lleva gafas. Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve gafas?
22. Llevo en un bolsillo 6 monedas de 10 céntimos, 2 de 20 céntimos y 2 de 1 €. Saco dos monedas al azar, qué probabilidad hay de que:
- las dos sean de 1 euro
 - saque 1,10 euros.
23. En una empresa trabajan 190 hombres y 130 mujeres. Hay 19 hombres y 26 mujeres que son fumadores. Elegida una persona de esa empresa al azar, calcula la probabilidad de que:
- sea una mujer fumadora
 - sea una mujer sabiendo que fuma.

AYUDA: Completa la tabla

	FUMA	NO FUMA	
HOMBRES	19		190
MUJERES	26		130
TOTAL			

24. Un jugador de baloncesto suele encestar el 80% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si tira tres veces, calcula la probabilidad de que:
- enceste dos veces
 - no enceste ninguna vez

Para saber más



Un poco de historia

La probabilidad nació en torno a los juegos de azar. En las civilizaciones antiguas (Egipto, Grecia, Roma) se usaba un hueso a modo de dado para diversos juegos donde intervenía el azar (de ahí proviene un juego tradicional: las tabas). Pero incluso restos arqueológicos de hace más de 40.000 años se han interpretado como elementos de juegos de azar.

En Grecia y Roma se practicaban con verdadero celo y pasión. Homero (900 a. C.) cuenta que cuando Patroclo era pequeño, se enfadó tanto con un oponente jugando con el astrágalo que casi le mató.



- Fue Girolamo Cardano (1501-1576) quien en 1565, escribió la primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en los juegos de azar. Se llamaba *Libro de los juegos de azar*.
- Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverendo Thomas Bayes (1702-1761) y Joseph Lagrange (1736-1813) desarrollaron fórmulas y técnicas para el cálculo de la probabilidad. En el siglo XIX, Pierre Simon, marqués de Laplace (1749--1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de la probabilidad.
- La probabilidad ha seguido evolucionando con matemáticos como Poisson (1781-1840), P.Chebyshev(1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), y creando escuela para superar estancamientos; Andrei N. Kolmogorov de la escuela rusa, (1903-1987), Norbert Wiener (1894-1964) de la americana. En la actualidad estadística y la probabilidad se unen y se desarrollan juntas.

ABRIR Y GANAR

1º) Eliges una puerta con un: 2º) Abren una puerta que tiene detrás un burro.

3º) ¿Te quedas con la primera opción o cambias?

COCHE		te la quedas → ganas un COCHE		la cambias → ganas un BURRO
BURRO		te la quedas → ganas un BURRO		la cambias → ganas un COCHE
BURRO		te la quedas → ganas un BURRO		la cambias → ganas un COCHE

Este problema llamado de **Monty Hall** está inspirado en el concurso televisivo estadounidense "Let's Make a Deal" (*Hagamos un trato*), famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador del mismo, Monty Hall.

Si has jugado bastantes veces habrás comprobado, quizás con cierta sorpresa, que la probabilidad de ganar un coche cambiando la primera elección, es superior a la probabilidad de ganarlo sin cambiar de puerta.

Observando el diagrama de árbol o aplicando lo que ya sabes sobre probabilidad condicionada verás que:

- $P(\text{coche}/\text{con cambio}) = 2/3$
- $P(\text{coche}/\text{sin cambio}) = 1/3$



Recuerda lo más importante

Experimentos aleatorios

No puede predecirse el resultado por mucho que lo hayamos experimentado.

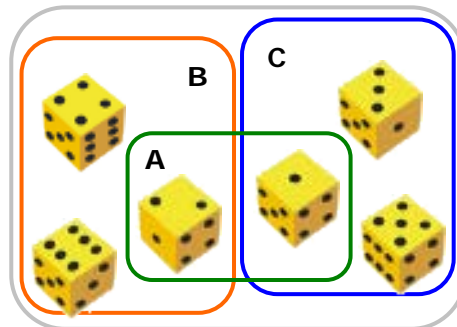


Por ejemplo, lanzar un dado.

- Espacio **muestral** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ y $\{6\}$
- Otros **sucesos**: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$
- Suceso **seguro**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Suceso **imposible**: $\emptyset = \{ \}$
- Suceso **contrario** de A: $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Sucesos **compatibles**: Son los que pueden ocurrir a la vez, como A y B ó A y C.

Sucesos **incompatibles**: Si no pueden ocurrir a la vez, como par e impar, B y C.



Operaciones con sucesos

Unión: $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$

Intersección: $A \cap B = \{2\}$

Diferencia: $A - B = \{1\}$

Probabilidad de sucesos

$P(\text{Suceso seguro}) = P(E) = 1$

$P(\text{Suceso imposible}) = P(\emptyset) = 0$

$0 \leq P(\text{suceso}) \leq 1$

Probabilidad de la unión:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son incompatibles

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ A y B compatibles.

Regla de Laplace

Cuando los sucesos elementales son equiprobables:

$$P = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Si el experimento no es regular se recurre a la experimentación, tomando como probabilidad la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Experimentos compuestos

Están formados por varios experimentos simples realizados de forma consecutiva. Para calcular la probabilidad de multiplican las de los sucesos simples que lo forman.

En sucesos consecutivos pueden producirse dos situaciones:

1) **Independientes**, no influyen en el otro.

Como en las extracciones con devolución

2) **Dependientes**, cada suceso está condicionado por el anterior

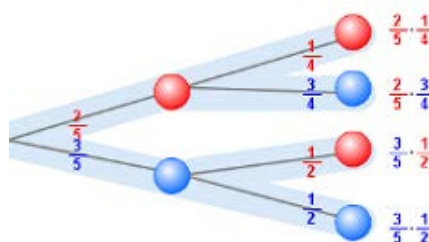
Como en las extracciones sin devolución.

Con un diagrama de árbol es fácil calcular la probabilidad de un experimento compuesto:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Probabilidad condicionada

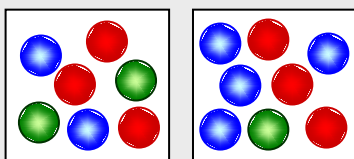
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Autoevaluación



1. Escribimos cada una de las letras de la palabra ENSEÑANZA en un papel y sacamos una al azar. Escribe el suceso "salir vocal"
2. Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cruz es doble que la probabilidad de salir cara, ¿qué probabilidad hay de sacar cara?
3. En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 0 al 99, se extrae una bola calcula la probabilidad de que en sus cifras no esté el 9.
4. Se elige una ficha de dominó, considera los sucesos A ="salir una ficha doble", B ="la suma de los puntos es múltiplo de 4". ¿Cuál es la probabilidad de $A \cup B$?
5. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A)=0,42$; $P(B)=0,30$ y $P(A \cap B)=0,12$. Calcula la probabilidad de que no ocurra ni A ni B .
6. Se lanza una moneda y un dado, calcula la probabilidad de que salga "cara" y "número impar"
7. Tenemos dos urnas con bolas rojas, verdes y azules, como en la figura. Sacamos una bola de cada urna, calcula la probabilidad de las dos bolas sean rojas.
8. Los resultados de un examen realizado por dos grupos de 4º ESO se muestran en la tabla de la izquierda. Se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que sea del grupo A si sabemos que ha aprobado.
9. Tengo en un cajón 6 calcetines de color blanco y 14 de color negro. Si cojo dos calcetines sin mirar, ¿qué probabilidad hay de que sean del mismo color?
10. Se sacan dos cartas de una baraja de 40, una tras otra. Si la extracción se hace con devolución, calcula la probabilidad de que una sea copas y otra de bastos.



	aprueban	suspenden
4ºA	14	7
4ºB	15	14

Soluciones de los ejercicios para practicar

- $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $C = \{1, 2\}$
 $D = \{3, 6, 9, 12\}$
Incompatibles B y C, C y D
- $A = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6, 6-6\}$
 $B = \{0-5, 1-4, 2-3, 4-6, 5-5\}$
 $A \cap B = \{4-6, 5-5\}$
 $A \cap \bar{B} = \{2-6, 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 5-6, 6-6\}$
- $A \cap B = \{10C, 11C, 12C\}$
 $\bar{A} \cap B = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C\}$
- $A \cup B = B$
 $A \cap B = A$
 $\bar{B} = \{CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC\}$
- $4/21 = 0,19$
- $9/27 = 1/3$
- En la segunda (2/7)
- a) 13/30 b) 9/30
- 9/38
- $27/36 = 0,75$
- 0,85
- $P(1) = P(3) = P(5) = 3/12$
 $P(2) = P(4) = P(6) = 1/12$
 $P(\text{impar}) = 3 \cdot 3/12 = 9/12$
- $P(\text{ni A ni B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,40 = 0,60$
- $P(A - B) = 0,14$
 $P(B - A) = 0,49$
- $P(\text{roja}) \approx 0,32$
5 blancas, 7 rojas, 11 negras.
- a) 17/49 b) 10/42
- 16/49
- 22/72
- a) 9/39 b) 5/78
- 0,84
- a) 2/90 b) 4/15
- a) $P(M \cap F) = 26/320$
b) $P(M/F) = 26/45$
- a) $3 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,384$
b) $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- {A, E}
- 1/3
- $481/100 = 0,81$
- 11/28
- $1 - 0,60 = 0,40$
- $1/4 = 0,25$
- 9/56
- 14/29
- 53/95
- 1/8