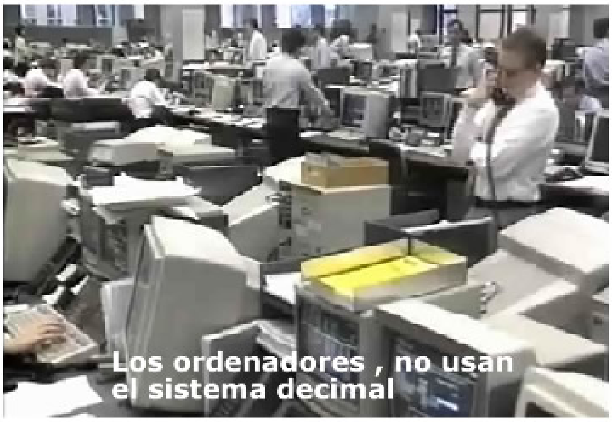
3 Polinomios

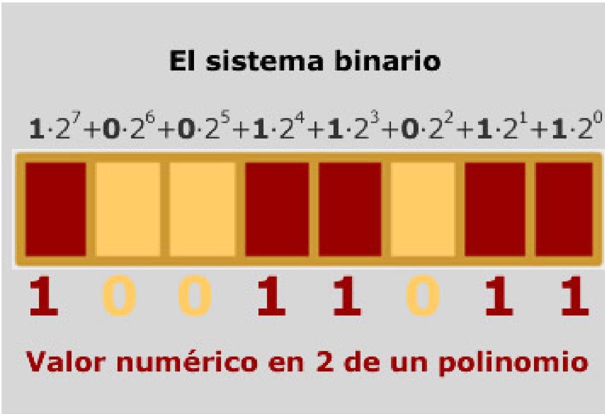
Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Hallar la expresión en coeficientes de un polinomio y operar con ellos.
- Calcular el valor numérico de un polinomio.
- Reconocer algunas identidades notables, el cuadrado y el cubo de un binomio.
- Aplicar la Regla de Ruffini y el Teorema del Resto.
- Hallar la descomposición factorial de algunos polinomios.

Antes de empezar





Utilidad de los polinomios

Los polinomios no solo están en la base de la informática, en economía los cálculos de intereses y duración de las hipotecas se realizan con expresiones polinómicas, así, el capital C a un porcentaje x en 3 años se convierte en $C\cdot(1+x)^3$ que es el cubo de un binomio.

La medicina y otras ramas de la ciencia avanzan ayudadas de esta herramienta algebraica. Investiga en la web las utilidades de los polinomios.

1. Polinomios

Grado y coeficientes

El polinomio $\mathbf{x^3+4x+2}$ está formado por la suma de tres monomios: x^3, $4x$ y 2; su grado, o máximo exponente de x, es 3 y **los coeficientes de este polinomio son 1 0 4 2**.

1 es el coeficiente de grado 3
0 es el coeficiente de grado 2
4 es el coeficiente de grado 1
2 es el coeficiente de grado 0

Se pretende que se identifique
x^3+4x+2
con su expresión en coeficientes
1 0 4 2

Valor numérico

Al sustituir la variable x de un polinomio por un número se obtiene el valor numérico del polinomio.
Así **el valor numérico en 3** del polinomio

$P(x)=2x^3-x+4$

es P(3) = $2\cdot3^3-3+4=55$

Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 7^4 se utiliza la tecla $\boxed{x^y}$,
7 $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ → 2041

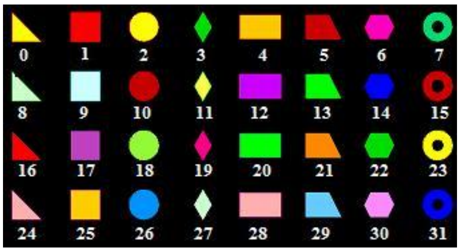
El valor numérico en 10 del polinomio de coeficientes 2 4 6 es 246 esta coincidencia del valor en 10 con los coeficientes se debe a que nuestro sistema es de base 10 y **246** es igual a $\mathbf{2}\cdot10^2+\mathbf{4}\cdot10+\mathbf{6}$.

Si el número **347** está expresado **en base 8**, su expresión en nuestro sistema usual, el decimal, es $\mathbf{3}\cdot8^2+\mathbf{4}\cdot8+\mathbf{7}=231$ que es el valor en 8 del polinomio de coeficientes **3 4 7**.

En el sistema binario las cifras empleadas son 0 y 1 aquí el valor decimal de **1**000**11**0 en binario es

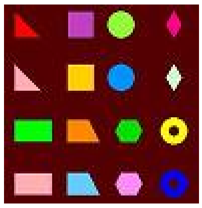
$$\mathbf{1}\cdot2^6+\mathbf{1}\cdot2^2+\mathbf{1}\cdot2=70$$

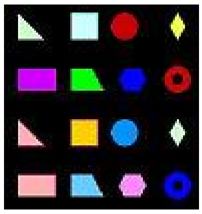
La cantidad de color se suele expresar en sistema hexadecimal o de base 16, este sistema tiene 16 cifras
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 y en este sistema la cantidad **38** de color azul equivale a $\mathbf{3}\cdot16+\mathbf{8}=56$ en decimal.

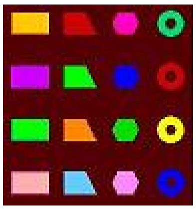


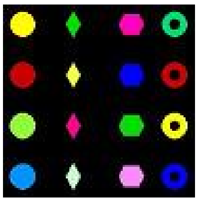
Pide a un compañero que memorice una de estas figuras pero que no diga cuál. Tu por telepatía la adivinarás.

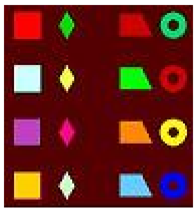
Pregúntale si la figura escogida está en cada una de las siguientes tarjetas

SI =1


NO =0


NO =0


SI =1


NO =0


Con cada respuesta afirmativa escribe 1, con la negativa un 0, para el resultado **10010**, la figura es la $\mathbf{1}\cdot2^4+\mathbf{1}\cdot2=18$, el círculo verde. Solo hay que calcular el valor en 2 del polinomio cuyos coeficientes se obtienen con 1 o 0, con Sí o No.

EJERCICIOS resueltos

1. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios $P(x)=5x^2+2x+1$; $Q(x)=x^3-3x$; $R(x)=0{,}5x^2-4$

Las respectivas expresiones en coeficientes son

P(x)→ 5 2 1; Q(x)→ 1 0 -3 0; R(x)→ 0,5 0 -4

2. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:

P(x)→ 2 1 3 -1; Q(x)→ 1 3 0 0; R(x)→ 3/4 -1 0 2

$P(x)=2x^3+x^2+3x-1$; $Q(x)=x^3+3x^2$; $R(x)=3/4\ x^3-x^2+2$

3. Completa la tabla:

EXPRESIÓN POLINÓMICA	EXPRESIÓN EN COEFICIENTES	GRADO
$-2x^3+x^5-3x^2$		
$x^2/3-1$		
	-2 π 0 0	
	-2 1,3 0 -1/7	
$3-\sqrt{2}\,x^2$		
Estos polinomios son polinomios en una variable, x, con coeficientes en el cuerpo de los números reales. El conjunto de estos polinomios se designa por IR[x].		

POLINÓMICA	COEFICIENTES	GRADO
$-2x^3+x^5-3x^2$	1 0 -2 -3 0 0	5
$x^2/3-1$	1/3 0 -1	2
πx^2-2x^3	-2 π 0 0	3
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-2 1,3 0 -1/7	3
$3-\sqrt{2}\,x^2$	$-\sqrt{2}$ 0 3	2

4. Halla el valor numérico en 1, 0 y –2 de los polinomios del ejercicio anterior

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5-2x^3-3x^2$	-4	0	-28
$x^2/3-1$	-2/3	-1	1/3
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-2x^3+1{,}3x^2-1/7$	-59/70	-1/7	737/35
$-\sqrt{2}\,x^2+3$	$-\sqrt{2}+3$	3	$-4\sqrt{2}+3$

2. Operaciones

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a sus expresiones en coeficientes, operar con estas y dar el resultado en forma polinómica.

Suma

$P(x)=8x^4+x^2-5x-4$
$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Se suman los coeficientes de igual grado:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Multiplicación

$P(x)=3x^3+5x-4$
$Q(x)=x^2-x+2$

Se multiplican coeficiente a coeficiente:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

División

$P(x)=3x^3-x^2+5x-4$
$Q(x)=x^2-3x+2$

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & -1 & 5 & -4 & \underline{1 \quad -3 \quad 2} \\
\underline{-3} & \underline{9} & \underline{-6} & & 3 \quad 8 \\
 & 8 & -1 & -4 & \\
 & \underline{-8} & \underline{24} & \underline{-16} & \\
 & & 23 & -20 &
\end{array}$$

Cociente=3x+8   Resto=23x-20

$P(x)=12x^3+6x-5$
$Q(x)=4x^2+3$

$$\begin{array}{rrrr|l}
12 & 0 & 6 & -5 & \underline{4 \quad 0 \quad 3} \\
\underline{-12} & \underline{0} & \underline{-9} & & 3 \quad 0 \\
 & 0 & -3 & -5 & \\
 & & \underline{0} & \underline{0} & \\
 & & -3 & -5 &
\end{array}$$

Cociente=3x   Resto=-3x-5

Diferencia

$P(x)=3x^3+x^2+5x+4$
$Q(x)=3x^3+3x+2$

Se restan los coeficientes de igual grado:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

Observa el grado del resultado:
$gr(P \pm Q) \leq max(gr(P), gr(Q))$

$gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)$

Dividir dos polinomios D(x), dividendo, entre d(x), divisor, es encontrar un cociente c(x) y un resto r(x) que cumplan

- Dividendo=divisor·cociente +resto
- grado de r(x)<grado de d(x)

$gr(c)=gr(D)-gr(d)$

Un ejemplo operando con la variable, comenzamos dividiendo las potencias de mayor grado

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 3x^2+x \\
\hline
\quad \dfrac{x^3}{3x^2}=\dfrac{1}{3}x &
\end{array}$$

continuamos

$$\begin{array}{l|l}
x^3+2x^2-3x+5 & 3x^2+x \\
\underline{x^3+\frac{1}{3}x^2} & \frac{1}{3}x+\frac{5}{9} \\
\quad \frac{5}{3}x^2-3x+5 & \text{cociente} \\
\quad \underline{\frac{5}{3}x^2+\frac{5}{9}x} & \\
\quad -\frac{32}{9}x+5 & \\
\quad \text{resto} &
\end{array}$$

EJERCICIOS resueltos

5. Halla P(x)+Q(x) y 2·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+x^3+3x$ $\quad$ $Q(x)=2x^3+x^2-4x+5$

P(x)→	1	1	0	3	0
Q(x)→		2	1	-4	5
P(x)+Q(x)→	1	3	1	-1	5

2·P(x)→	2	2	0	6	0
Q(x)→		2	1	-4	5
2·P(x)-Q(x) →	2	0	-1	10	-5

$$\mathbf{P(x)+Q(x)=x^4+3x^3+x^2-x+5} \qquad \mathbf{2\cdot P(x)-Q(x)=2x^4-x^2+10x-5}$$

6. ¿Cuál es el grado del cociente al dividir un polinomio de grado 5 entre otro de grado 2?

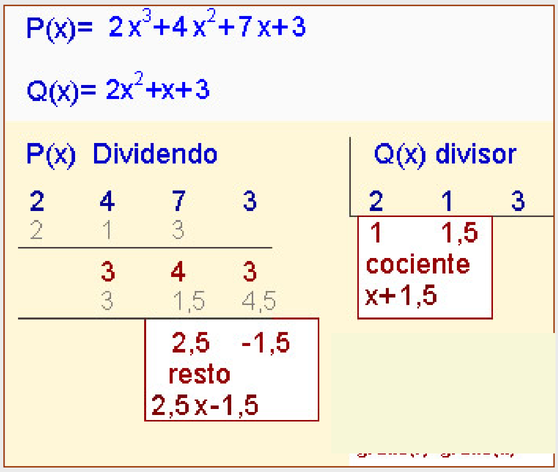
El grado del cociente es el grado del dividendo, 5, menos el del divisor, 2, luego 3.

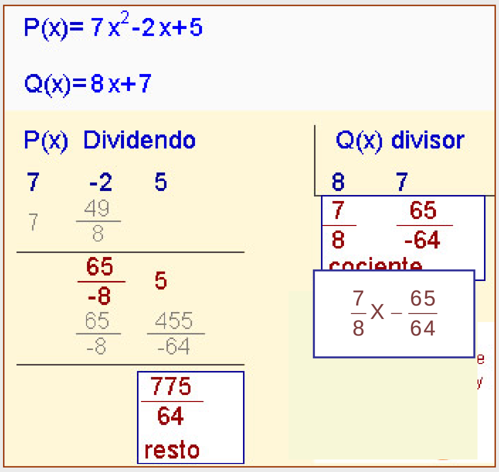
7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$$\mathbf{P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12}$$

8. Haz en cada caso la división de P(x) entre Q(x)





3. Identidades notables

Suma al cuadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & +2ab & +b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

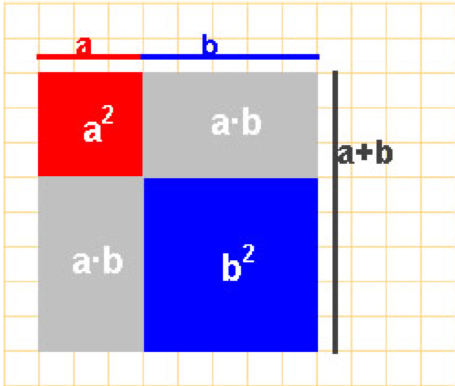
Diferencia al cuadrado

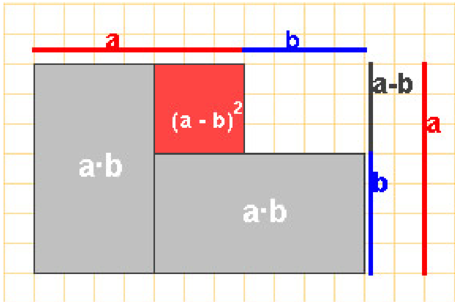
$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab & +b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º





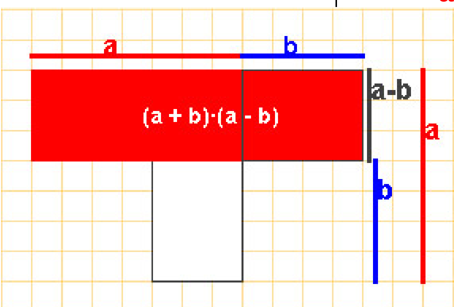
Suma por diferencia

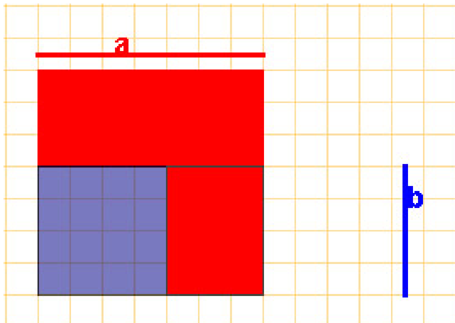
$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$

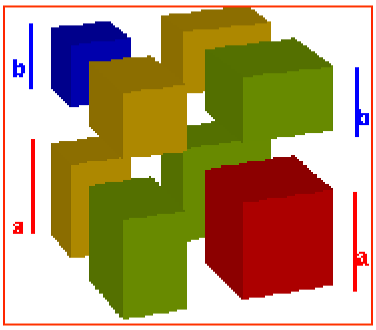




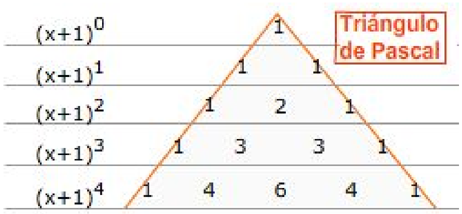
El cubo de un binomio

$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

Esta igualdad se deduce fácilmente al observar en la figura las 8 piezas en que descompone el cubo de lado (a+b)



r



Cada término de este triángulo se obtiene sumando los dos superiores.
Las filas de este triángulo son los coeficientes de las potencias de (x+1)
Así la tercera fila 1 3 3 1 son los coeficientes de $(x+1)^3$

EJERCICIOS resueltos

9. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+3)^2$
Cuadrado del 1º→x^2 Doble del 1º por el 2º→$2\cdot x\cdot 3=6x$ Cuadrado del 2º→$3^2=9$
por tanto $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Para descomponer el polinomio $x^2-10x+25$,
se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable,
al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.
$25=5^2$ y $10x$=doble de x por 5→ $x^2-10x+25=(x-5)^2$

Para descomponer el polinomio $4x^2-25$
se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados
$4x^2=(2x)^2$; $25=5^2$ → $4x^2-25=(2x+5)\cdot(2x-5)$

10. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+4)^2$	$x^2+8x+16$	$(x-2)^2$	x^2-4x+4
$(4x+3)^2$	$16x^2+24x+9$	$(3-2x)^2$	$4x^2-12x+9$
$(2x/3+5)^2$	$4x^2/9+20x/3+25$	$(x/2-3)^2$	$x^2/4-3x+9$
$(\sqrt{2}x+1)^2$	$2x^2+2\sqrt{2}x+1$	$(x-\sqrt{3})^2$	$x^2-2\sqrt{3}x+3$

11. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+4)\cdot(x-4)$	x^2-16; 1 0 -16	$(x-1/2)\cdot(x+1/2)$	1 0 -1/4
$(2x+5)\cdot(2x-5)$	4 0 -25	$(3+\sqrt{2}x)\cdot(3-\sqrt{2}x)$	-2 0 9

12. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2+10x+16=0$

Se compara la primera parte, $\mathbf{x^2+10x}$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$
Pues $(x+5)^2=\mathbf{x^2+10x}+25$, por tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$
y el primer miembro de la ecuación es $\mathbf{x^2+10x}+16=\mathbf{(x+5)^2-25}+16$,

$(x+5)^2-9=0$→ $(x+5)^2-3^2=0$→ $(x+5+3)\cdot(x+5-3)=0$ → Soluciones $x=-8$ y $x=-2$

13. Calcula el cubo de un binomio

Binomio al cubo	Solución	Binomio al cubo	Solución
$(x+2)^3$	$x^3+6x^2+12x+8$	$(x-1)^3$	x^3-3x^2+3x-1
$(2x-3)^3$	$8x^3-36x^2+18x-27$	$(3+x/3)^3$	$x^3/27+x^2+9x+27$

14. Halla la fila 5 del triángulo de Pascal, y calcula $(x+1)^5$

La fila 5 del triángulo es 1 5 10 10 5 1, que son los coeficientes de $(x+1)^5$, por
tanto, $(x+1)^5=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

4. División por x-a

Regla de Ruffini

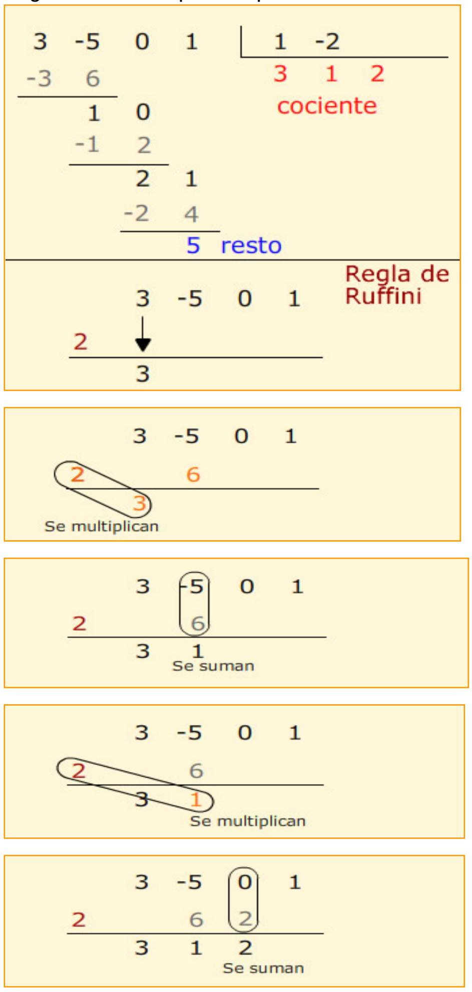
La regla de Ruffini es útil para dividir polinomios entre x-a.

En el ejemplo de la derecha se divide $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obteniendo de cociente $3x^2+x+2$ y de resto 5.
La regla explicada para **a=2**, vale también cuando **a** es un número racional o real, en el siguiente ejemplo se toma **a=-3/2** y representa la división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

cociente
4x-1

Observa la división y como se realiza la Regla de Ruffini paso a paso



Se vuelve a multiplicar y a sumar obteniendo

	3	-5	0	1
2		6	2	4
	3	1	2	5 resto

cociente

Con la calculadora

Para calcular el valor numérico de un polinomio con la calculadora, valor de $P(x)=3x^3-5x^2+1$ en x=2
Podemos aplicar la regla de Ruffini, para ello teclea la siguiente secuencia:

2 $\boxed{\text{M in}}$ $\boxed{\text{x}}$ 3 → 3
$\boxed{\text{-}}$5 $\boxed{=}$ → 1
$\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 0$\boxed{=}$ → 2
$\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$5

Obtenemos: $\boxed{5}$ que es el resto de dividir P(x) para x-2 y el valor numérico en x=2.
De paso han ido saliendo los coeficientes del cociente cada vez que se pulsaba $\boxed{=}$.

Teorema del resto

Ejemplo
Dividendo=$\mathbf{x^4-2}$; divisor=**x-4**
Haz la división en tu cuaderno

Resulta, cociente=$\mathbf{x^3+4x^2+16x+64}$ y resto=**254**
Escribe la igualdad Dividendo = divisor·cociente+resto

$\mathbf{x^4-2=(x-4)\cdot(x^3+4x^2+16x+64)+254}$
Sustituye la x por 4

$\mathbf{4^4-2=(4-4)\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254}$
$4^4-2=0\cdot(4^3+4\cdot4^2+16\cdot4+64)+254$
$4^4-2=0\cdot(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)+254$
$4^4-2=0+254$

Conclusión, **al sustituir la x por 4 en el dividendo nos da el resto de la división entre x-4**

Teorema del resto. Para calcular el resto de la división de un polinomio P(x) entre x-a basta sustituir en P(x) la x por a.

Recuerda

P(x) es divisible entre x-a <=> P(a)=0

A menudo, para hallar el resto de una división entre x-a, resulta más cómodo aplicar la regla de Ruffini que sustituir la x. El teorema del resto nos sirve para resolver problemas como el siguiente, hallar m para que el polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sea divisible por x-2, que se resuelve sustituyendo la x por 2, igualando a 0 y despejando m, así m=-2.

EJERCICIOS resueltos

15. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre $x-3$

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

16. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre $x+1$

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

17. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=3x^3+5x^2-2x+1$ y $Q(x)=6x^4-2$ y entre $x+2/3$

	3	5	-2	1
-2/3)		-2	-2	8/3
	3	3	-4	11/3

Cociente $3x^2+3x-4$

Resto 11/3

	6	0	0	0	-2
-2/3)		-4	8/3	-16/9	32/27
	6	-4	8/3	-16/9	-22/27

Cociente $6x^3-4x^2+\frac{8}{3}x-\frac{16}{9}$

Resto $-22/27$

18. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre $x-2$ es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es $x-2$, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

19. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre $x+1$

El polinomio será divisible entre $x+1$ si su valor en -1 es 0, luego ha de ser

$m-2-3=0$, es decir, $m=5$

20. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por $x-2$?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot 2^2-2m\cdot 2+5=0$, lo que da una igualdad imposible $13=0$, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por $x-2$

5. Descomposición factorial

Sacar factor común una potencia de x

Se llaman divisores impropios de un polinomio P(x), con coeficientes en IR, a los números reales y a los polinomios obtenidos al multiplicar P(x) por un número real.

> Los primos de IR[x] son los polinomios de grado uno y los polinomios de grado dos, $\mathbf{ax^2+bx+c}$, con $\mathbf{b^2-4ac<0}$

Un polinomio es **primo** si no tiene divisores propios y su grado es mayor que cero (los polinomios de grado cero se llaman unidades o invertibles porque tienen inverso).

El primer paso para descomponer un polinomio en factores primos es sacar factor común una potencia de x, cuando sea posible, esto se explica en la animación de la derecha.

Ejemplos de descomposición factorial

$\mathbf{x^5-5x^4+6x^3}=x^3\cdot(x^2-5x+6)=\mathbf{x^3\cdot(x-2)\cdot(x-3)}$
Se ha sacado factor común x^3 de todos los sumandos o monomios, para el segundo paso se ha resuelto la ecuación de segundo grado $x^2-5x+6=0$, pues según el teorema del resto, x^2-5x+6 es divisible por (x-a) si a^2-5a+6 vale cero, luego a es solución de la ecuación $x^2-5x+6=0$

$\mathbf{x^2-6x+9=(x-3)^2}$ Se ha aplicado una identidad notable para descomponerlo.

$\mathbf{x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)}$ La ecuación $x^2+x+1=0$ no tiene solución real, luego el polinomio es primo.

$\mathbf{2x^2+3x+1=2\cdot(x+1)\cdot(x+1/2)}$ Las soluciones de la ecuación $2x^2+3x+1=0$ son -1 y -1/2. **Hay que tener cuidado**, en factorizaciones de este tipo, **de no olvidar el factor de x^2**.

Se llama **multiplicidad** de una raíz al número de veces que aparece en la descomposición.

$$2\boxed{x^9}+\boxed{x^6}-3x^4=$$
$$=2\cdot\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

Raíces de un polinomio

Si x-a es un divisor del polinomio P(x), se dice que **a es raíz** de P(x), por el teorema del resto sabemos que esto equivale a decir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{x}+p_0$ y **a raíz** de P(x),

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+\ldots+p_1\mathbf{a}+p_0=0,$

y despejando p_0

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-\ldots-p_1\mathbf{a}$

Por tanto, si los coeficientes de P(x) son números enteros y **a** también, p_0 es múltiplo de **a**.

> Las **raíces** no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son **divisores del coeficiente de menor grado** del polinomio.

La descomposición de un polinomio de tercer grado con raíces 4, 1 y -2 será a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

Raíz	Raíz
2	-2
Divisor	Divisor
x-2	x+2

Descomposición factorial de $\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Con la regla de Ruffini vamos viendo qué divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$\mathbf{x^4-15x^2+10x+24}=$
$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+4)$

EJERCICIOS resueltos

21. Saca factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $\quad$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $\quad$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $\quad$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $\quad$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

22. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4.
Las posibles raíces enteras de x^3-x^2**-4** son los **divisores de -4**:

1,-1, 2,-2, 4,-4

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
1)		1	0	0
	1	0	0	**-4** $\neq$ **0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	0	-4
-1)		-1	2	-2
	1	-2	2	**-6** $\neq$ **0**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

	1	-1	0	-4
2)		2	2	4
	1	1	2	**0**

2 es raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)$

23. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x$**-2** son los **divisores de -2**:

1,-1, 2,-2

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5 distinto de 0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1 distinto de 0,**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2 distinto de 0,**

2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22 distinto de 0,**

-2 no es raíz de P

$\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$ No tiene raíces enteras

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.

EJERCICIOS resueltos

25. Si los coeficientes de $P(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$ son números enteros, las posibles raíces racionales de P(x) son de la forma

$$\frac{\text{divisor de } p_0}{\text{divisor de } p_n}$$

Halla la descomposición factorial de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$

Las posibles raíces en Q de $\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}$ son los cocientes de los divisores de 6 entre los divisores de 12,

$$\frac{\text{divisores de } 6}{\text{divisores de } 12};\qquad \frac{\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm6}{\pm1\quad\pm2\quad\pm3\quad\pm4\quad\pm6\quad\pm12}$$

$$\pm1\quad\pm\frac{1}{2}\quad\pm\frac{1}{3}\quad\pm\frac{1}{4}\quad\pm\frac{1}{6}\quad\pm\frac{1}{12}\quad\pm2\quad\pm\frac{2}{3}\quad\pm3\quad\pm\frac{3}{2}\quad\pm\frac{3}{4}\quad\pm6$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ni 1, ni-1 son raíces de P.

Veamos por la Regla de Ruffini si 1/2 es raíz de P

	12	4	-17	6
1/2)		6	5	-6
	12	10	-12	**0**

1/2 es raíz de P.

Al resolver la ecuación $12x^2+10x-12=0$, se obtiene que -3/2 y 2/3 son raíces de P.

$$\boxed{\mathbf{12x^3+4x^2-17x+6}=12\cdot(x-1/2)\cdot(x+3/2)\cdot(x-2/3)}$$

26. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$. Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

$$\frac{\text{divisores de } -4}{\text{divisores de } 1};\qquad \frac{\pm1\quad\pm2\quad\pm4}{\pm1}$$

$$\pm1\quad\pm2\quad\pm4$$

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $(\mathbf{x^2})^2-\mathbf{2}^2$ resultará fácil la descomposición factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

EJERCICIOS resueltos

27. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 4 \quad \pm 6 \quad \pm 12$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

	1	-7	4	12
-1)		-1	8	-12
	1	**-8**	**12**	**0**
2)		2	-12	
	1	-6	**0**	

$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12} = (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$

28. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2}$

Se aplican las **identidades notables**:

diferencia de cuadrados=suma por diferencia

$(2x^3+x+3/2)^2-(x^3+5x-3/2)^2 = (3x^3+6x)\cdot(x^3-4x+3)$

El primer factor $(3x^3+6x)$ descompone sacando **factor común** 3x, $(3x^3+6x)=3x\cdot(x^2+2)$; x^2+2 es primo pues la ecuación de segundo grado $x^2+2=0$ no tiene raíces reales.

Para (x^3-4x+3) **se buscan sus raíces racionales**

1 -1 3 -3

Vemos que 1 es raíz

	1	0	-4	3
1)		1	1	-3
	1	1	-3	**0**

$(x^3-4x+3)=(x-1)\cdot(x^2+x-3)$

Para descomponer x^2+x-3 se resuelve la **ecuación de segundo grado** $x^2+x-3=0$ que tiene por soluciones

$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

$$\boxed{\mathbf{(2x^3+x+\frac{3}{2})^2-(x^3+5x-\frac{3}{2})^2} = 3x\cdot(x^2+2)\cdot(x-1)\cdot(x-\frac{-1+\sqrt{13}}{2})\cdot(x+\frac{1+\sqrt{13}}{2})}$$

Para practicar

1. El número 5352 está en base 7 ¿Cuál es su valor en el sistema decimal? Se debe hallar el valor numérico en 7 del polinomio de coeficientes 5 3 5 2.

2. La cantidad de color se suele expresar en sistema hexadecimal o de base 16, este sistema tiene 16 cifras:0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, a=10, b=11, c=12, d=13, e=14, f=15 y en este sistema la cantidad **38** de color azul equivale a **3**·16+**8**=56 en decimal

Estas imágenes se pueden ver al esoger color en word. La cantidad de rojo, verde y azul define cualquier color.

Expresa en decimal las cantidades hexadecimales 62 y 5d de color azul.

3. Halla P(x)-5·Q(x) siendo $P(x)=4x^2+4x$ y $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica los polinomios $P(x)=4x^2-7x+3$ y $Q(x)=-x^2+5$.

5. Halla el cociente y el resto de la división de $-4x^3+7x^2-x-5$ entre $-2x^2-5x-2$.

6. Haz la división de $3x^3+x-4$ entre $x+2$ con la regla de Ruffini.

7. Aplica el teorema del resto para calcular el resto de la división de $3x^3-5x^2+7$ entre $x-5$.

8. a) Halla m para que $x^3+mx^2-3mx+3$ sea divisible por $x+5$

b) Halla m para que $x^3+mx^2-5mx+6$ sea divisible por $x-5$.

9. Efectúa las potencias
a) $(2x+3)^2$
b) $(2x-1)^3$
c) $(x-3)^2$
d) $(x+2)^3$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando las identidades notables:
a) $x^2+4x-21=0$
b) $x^2-10x+9=0$

11. Halla la fila 4ª del triángulo de Pascal ¿Cuál es el coeficiente de grado 2 de $(x+1)^4$?

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes polinomios
a) $4x^7+12x^6-4x^5-12x^4$
b) $3x^8+9x^7-12x^5$
c) $12x^3-16x^2-7x+6$
d) $8x^3-20x^2+22x-7$
e) $2x^3-9x^2+5x+5$

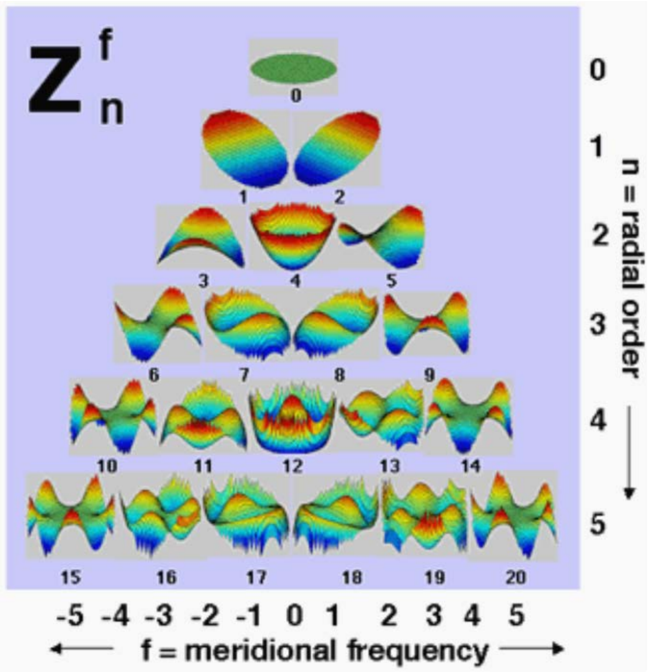
14. Aplica las identidades notables para descomponer los siguientes polinomios
a) x^4-6^4
b) $x^4-x^2-24x-12^2$
c) $x^4-98x^2+49^2$

15. Un polinomio de grado 3 tiene por raíces –1, 4 y 1. Halla su descomposición factorial sabiendo que su valor en 2 es -24.

Para saber más

Los polinomios en otras ciencias

Si investigaste en la web, es probable que encontraras muchos polinomios con nombre propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto de un blog que habla de los polinomios de Zernike y su aplicación en óptica para corregir defectos visuales.



...Las matemáticas, con los polinomios de Zernike, nos ofrecen un método para descomponer superfices complejas en sus componentes más simples. **Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales**. Un esquema que está presente con mucha frecuencia en las consultas de cirugía refractiva es el de las diferentes aberraciones agrupadas y jerarquizadas:

Lo de la jerarquía es fundamental, porque según cuál sea el grupo de la aberración, tendrá más o menos importancia, será más o menos fácil de corregir, etc. Por ejemplo, el número 4 corresponde a la miopía (y su inverso, la hipermetropía), y el 3 y 5 corresponden al astigmatismo...

Extracto de la página
http://ocularis.es/blog/?p=29

Algoritmo de Euclides

La descomposición factorial de números o de polinomios sirve para simplificar fracciones.

Numéricas	Polinómicas
$\frac{18}{30}=\frac{2\cdot 3^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{3}{5}$	$\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{x}{x+2}$

Pero no resulta fácil con este método simplificar cualquier fracción, ya que la descomposición factorial puede resultar difícil de calcular. El algoritmo de Euclides, es un método seguro para hallar el m.c.d. y poder así simplificar cualquier fracción, se basa en que el m.c.d. del Dividendo y del divisor es el m.c.d. del divisor y del resto.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$$

Dividendo =divisor·cociente+resto
Por tanto
m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)
Así se reducen los elementos de los que calcular el m.c.d.
Recuerda esta igualdad

Hallar el **m.c.d. de 1219 y 299**

$$\begin{array}{r|l} 1219 & 299 \\ \hline 23 & 4 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)** luego basta calcular el **m.c.d.(299,23)**

$$\begin{array}{r|l} 299 & 23 \\ \hline 69 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

m.c.d.(299,23)=m.c.d.(13,0)=13

Hallar el **m.c.d. de $x^4+2x^3+7x^2+6x+9$ y $x^4+2x^3+6x^2+5x+6$**

Hacemos la división

$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 7\ 6\ 9 & 1\ 2\ 6\ 5\ 6 \\ \hline 0\ 1\ 1\ 3 & 1 \end{array}$$

Aplicamos que **m.c.d.(D,d)=m.c.d.(d,r)** y volvemos a dividir

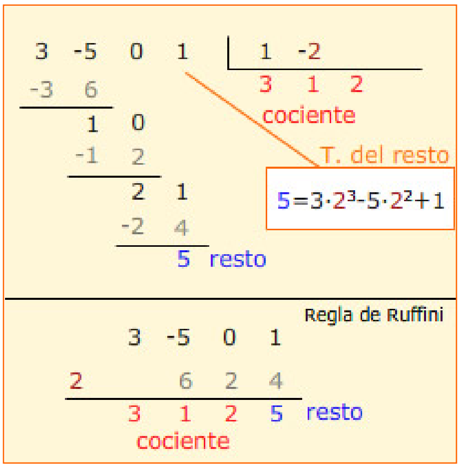
$$\begin{array}{r|l} 1\ 2\ 6\ 5\ 6 & 1\ 1\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 5 & 1\ 1\ 2 \\ 2\ 2\ 6 & \\ 0\ 0 & \end{array}$$

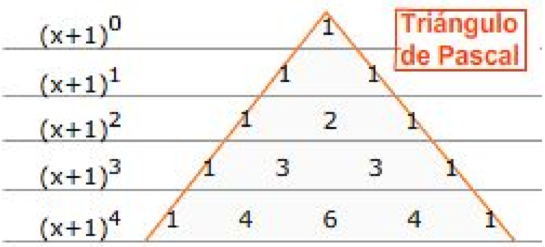
El m.c.d. pedido es 1 1 3 = x^2+x+3

Recuerda lo más importante

Operaciones con polinomios
Regla de Ruffini y Teorema del resto

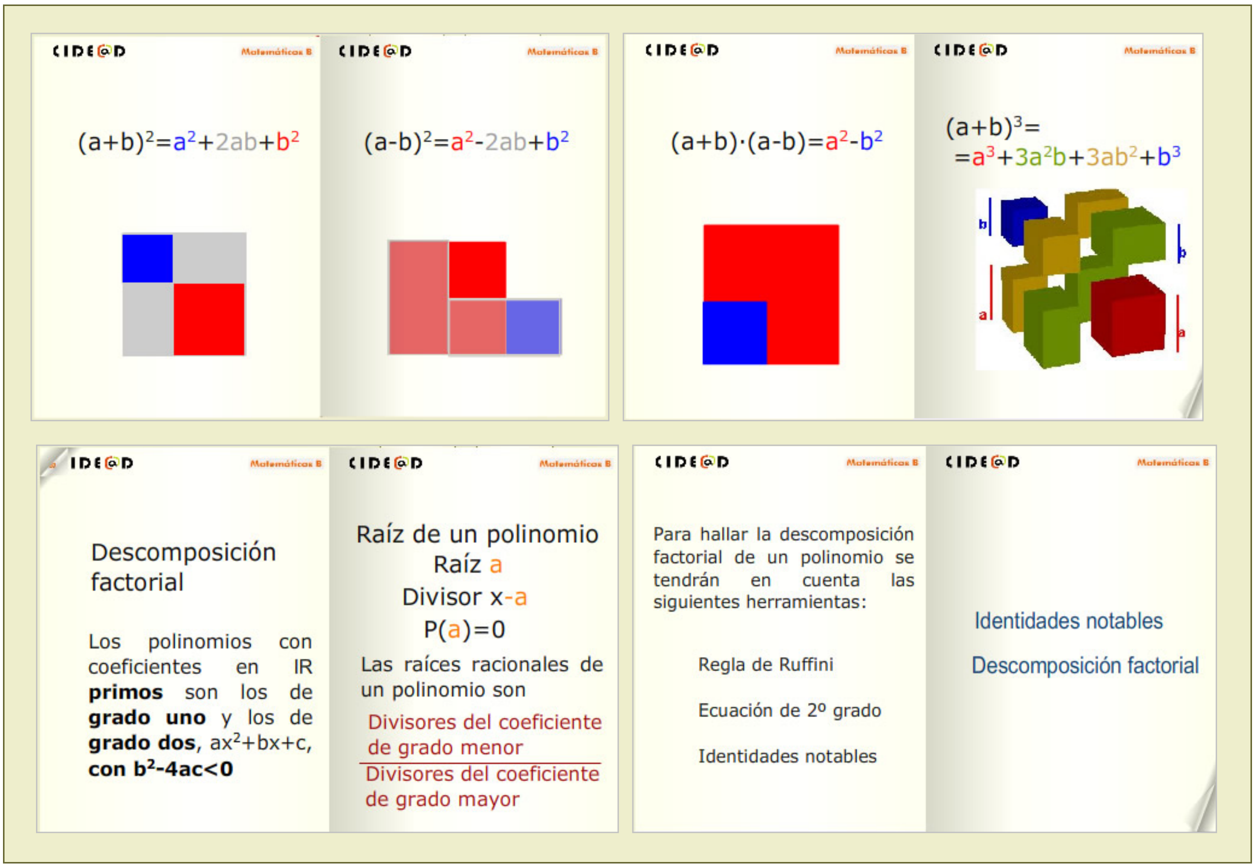
El resto de la división por x-a es el valor numérico del dividendo en a





Raíces de un polinomio

Raíz 2	Raíz -2
Divisor x-2	Divisor x+2
P(2)=0	P(-2)=0



Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+ P(x)\cdot R(x)$ siendo $P(x)=2x+1$, $Q(x)=5x^2-5$ y $R(x)=x^2+11x$.

2. Calcula el cociente y el resto de la división de $6x^3-5x^2+4$ entre x^2+3.

3. ¿Cuáles son los coeficientes de $(x+4)^3$?

4. ¿Es cierta la igualdad $4x^2+10x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que el resto de la división de $8x^2+mx+3$ entre $x+2$ sea 3.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ y $a\cdot 6^2+b\cdot 6=4$, ¿cuál es el resto de la división de P(x) entre x-6?

7. Halla una raíz entera del polinomio x^3+5x^2+6x+8

8. Halla una raíz racional de $4x^3+5x^2+25x+6$

9. El polinomio $5x^3+7x^2-28x-12$ tiene por raíces 2 y –3 ¿Cuál es la otra raíz?

10. Las raíces de un polinomio de grado 3 son –5, 0 y 6. Calcula el valor numérico del polinomio en 7 sabiendo que su coeficiente de mayor grado es 3.

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 1899
2. 98, 93
3. $-26x^2-6x$
4. $-4x^5+7x^4-17x^2-35x+15$
5. Cociente$=2x-17/2$, resto$=$ $\dfrac{-79}{2}x-22$
6. Cociente 3 -6 13 **resto -30**
7. $3\cdot 5^3-5\cdot 5^2+7=257$
8. a) $m=61/20$,

   b) No puede ser divisible entre x-5
9. a) $4x^2+12x+9$

   b) $8x^3-12x^2+6x-1$

   c) x^2-6x+9

   d) $x^3+6x^2+12x+8$
10. a) $(x+2)^2-5^2=(x+2+5)\cdot(x+2-5)$; -7 y 3

    b) $(x-5)^2-4^2=(x-5+4)\cdot(x-5-4)$; 1 y 9
11. 1 4 **6** 4 1
12. a) $\dfrac{x+4}{3}$

    b) $\dfrac{3x+6}{x-2}$

    c) $\dfrac{2x+1}{6x-3}$
13. a) $4x^4\cdot(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

    b) $3x^5\cdot(x+2)^2\cdot(x-1)$

    c) $12\cdot(x+2/3)\cdot(x-3/2)\cdot(x-1/2)$

    d) $(x-1/2)\cdot(8x^2-16x+14)$

    e) $(x+\frac{1}{2})\cdot 2\cdot(x-\frac{5-\sqrt{5}}{2})\cdot(x-\frac{5+\sqrt{5}}{2})$
14. a) $(x^2+36)\cdot(x+6)\cdot(x-6)$

    b) $(x^2+x+12)\cdot(x-4)\cdot(x+3)$

    c) $(x+7)^2\cdot(x-7)^2$
15. $4\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 12 28 1 -5
2. Cociente $6x-5$, resto $-18x+19$
3. 1 12 48 64
4. No, $(2x+5)^2=4x^2+20x+25$
5. $m=16$
6. 9
7. -4
8. $-1/4$
9. $-2/5$
10. 252