8

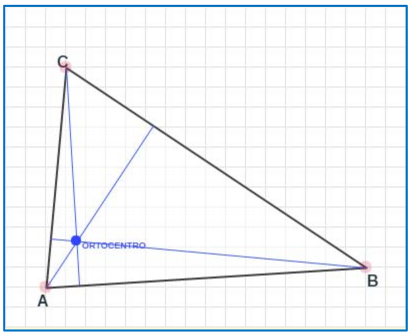
Geometría analítica del plano

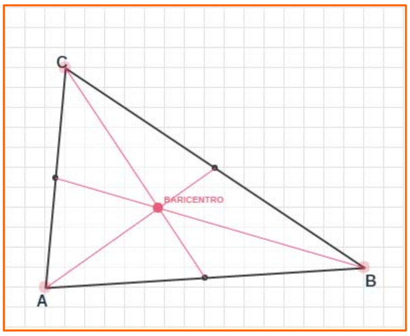
Objetivos

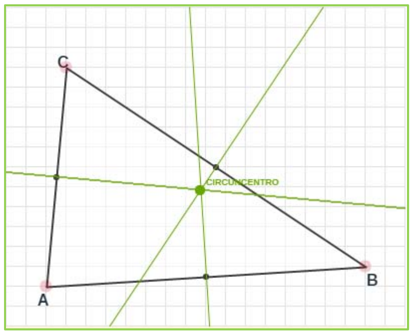
En esta quincena aprenderás a:

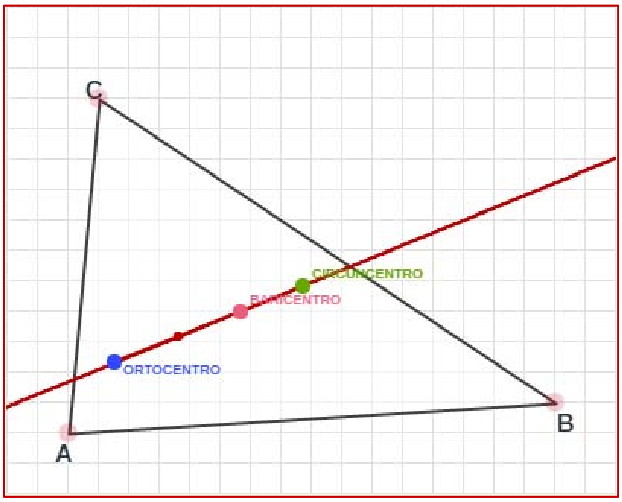
- Reconocer los elementos de un vector identificando cuando dos vectores son equipolentes.
- Hacer operaciones con vectores libres tanto analítica como gráficamente.
- Calcular el punto medio de un segmento y la distancia entre dos puntos dados.
- Conocer y calcular las distintas formas de la ecuación de una recta.
- Averiguar la posición relativa de dos rectas.
- Calcular rectas paralelas y perpendiculares a una dada.

Antes de empezar









La recta de Euler

Como sabes las tres alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro, las tres medianas en el baricentro y las mediatrices de los lados en el circuncentro.

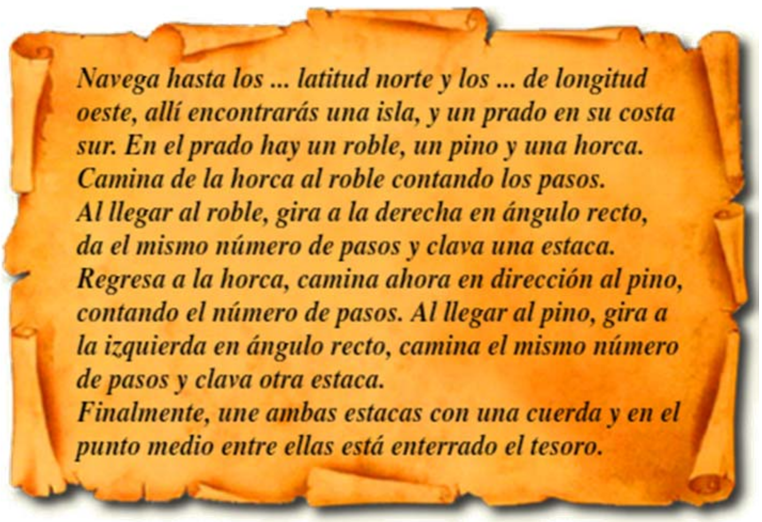
Estos tres puntos, ortocentro, baricentro y circuncentro, están alineados en la llamada **recta de Euler**.

Además la distancia entre el baricentro y el ortocentro es el doble de la distancia entre el baricentro y el circuncentro.

Investiga

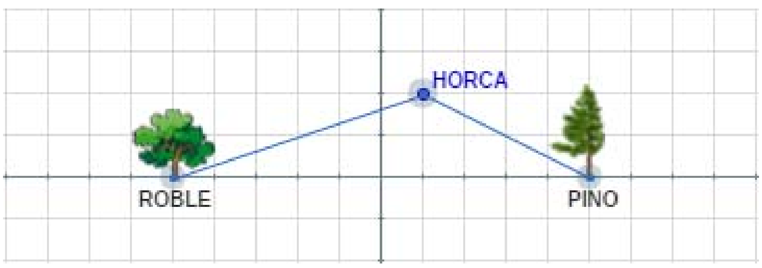
Un joven encontró, entre los papeles de su bisabuelo, un trozo de pergamino que contenía las instrucciones para encontrar un tesoro enterrado en una isla desierta.

Siguiendo las instrucciones el joven encontró la isla, el prado, el roble y el pino. Pero había transcurrido demasiado tiempo desde que se enterró el tesoro y de la horca no quedaba rastro alguno, había desaparecido. Aun así dio con él, y tú ¿lo encontrarías?



Un poco de ayuda

Dibujar es fundamental para resolver el problema, y en este caso elegir un sistema de coordenadas adecuado ayuda muchísimo. Así que sitúa los puntos conocidos, que son el pino y el roble, sobre el eje de abscisa y con el origen en el medio. La horca no se sabe dónde estaba, por lo que puedes ponerla en el punto que quieras. Ahora utiliza vectores.



1. Vectores

Vectores fijos y vectores libres

Un vector fijo es un segmento orientado determinado por dos puntos, el **origen** A(x_1,y_1) y el **extremo** B(x_2,y_2). Se caracteriza por:

- El **módulo**, $|\overrightarrow{AB}|$, es la longitud del segmento.
- La **dirección**, la de la recta en que se apoya.
- El **sentido**, el que va del origen al extremo.

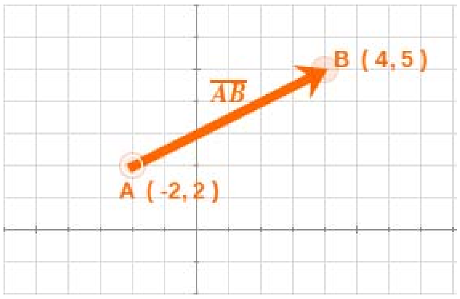
Podemos expresar el vector mediante sus **componentes**, que se obtienen restando las coordenadas del extremo menos las del origen:

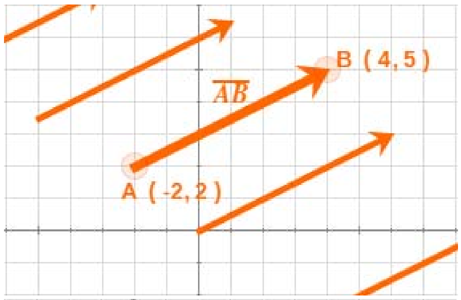
$$|\overrightarrow{AB}| = (x_2\text{-}x_1,\ y_2\text{-}y_1)$$

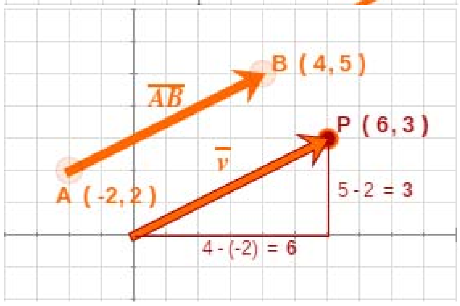
Dos vectores fijos se dicen **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. El conjunto de vectores equipolentes se denomina **vector libre**, y cualquiera de ellos sirve para representarlo. Lo indicaremos $\vec{v}$.

Hay un único representante del vector libre $\vec{v}$ con origen en (0, 0). Su extremo es el punto P de coordenadas las de B menos las de A, que son también las **componentes** del vector $\vec{v}$.

✓ $\overrightarrow{OP}$ es el vector del posición del punto P.

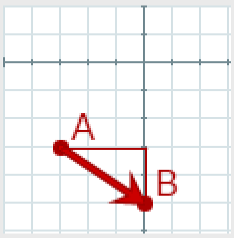






EJERCICIOS resueltos

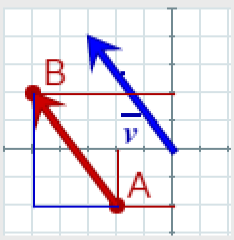
1. Dados los puntos A (-3, -3) y B (0, -5), calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.



Solución: $\overrightarrow{AB} = (0-(-3), -5-(-3)) = (3,-2)$

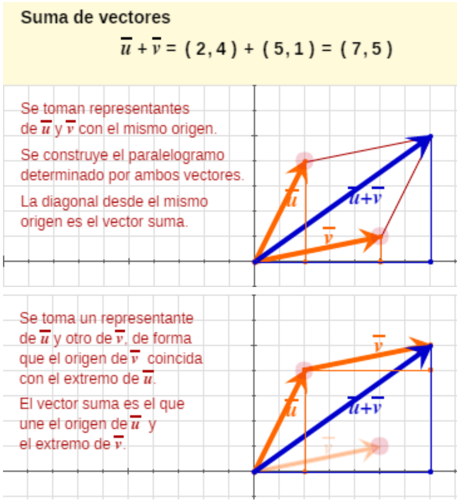
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

2. Calcula el punto extremo de un vector equipolente al $\vec{v} = (-3, 4)$ y con origen el punto A(-2, -2).



Solución: $B(-2+(-3), -2+4) = B(-5,\ 2)$

Operaciones con vectores

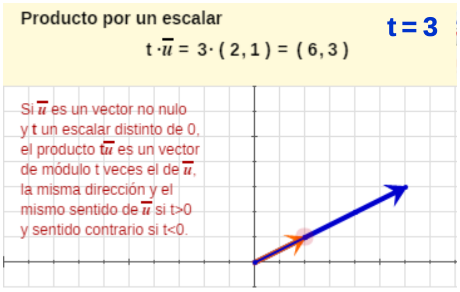


Suma de vectores. La suma de dos vectores libres $\vec{u}$ = (u_x,u_y) y $\vec{v}$ = (v_x,v_y), es el vector que se obtiene sumando sus componentes:

$$\vec{u}+\vec{v} = (u_x + v_x\ ,\ u_y + v_y)$$

Propiedades de la suma de vectores

- Propiedad conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- Propiedad asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
- Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
  Se considera vector **cero**, $\vec{0}$ = (0, 0), al caso particular de vector cuyo extremo y origen coinciden.
- Elemento opuesto: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$
  El vector **opuesto** de otro es el que tiene el mismo módulo, dirección y sentido contrario.



Producto de un vector por un escalar. Para multiplicar un vector libre $\vec{u}$ por un número, se multiplican sus dos componentes por dicho número:

$$t\cdot\vec{u} = (t\cdot u_x\ ,\ t\cdot u_y)$$

Propiedades del producto por un escalar

- $t(s\vec{u})=(ts)\vec{u}$
- $(t+s)\vec{u}=t\vec{u}+s\vec{u}$
- $1\vec{u}=\vec{u}$

y con las dos operaciones la propiedad distributiva

- $t(\vec{u}+\vec{v})=t\vec{u}+t\vec{v}$

EJERCICIOS resueltos

3. Dados los vectores $\vec{u}=(4,-3)$ y $\vec{v}=(-3,3)$, calcula $\vec{u}-2\vec{v}$.

Solución: $\vec{u}-3\vec{v}=(4-2\cdot(-3),-3-2\cdot3)=(10,-9)$

4. Dados los vectores $\vec{u}=(-2,3)$, $\vec{v}=(1,-2)$ y $\vec{w}=(0,2)$, calcula $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}$.

Solución: $3\vec{u}-\vec{v}+2\vec{w}=(3\cdot(-2)-1+2\cdot0,\ 3\cdot3-(-2)+2\cdot2)=(-7,15)$

5. Dados los vectores $\vec{u}=(-1,-1)$, $\vec{v}=(0,4)$ y $\vec{w}=(1,-4)$, calcula $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})$.

Solución: $2\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w})=(2\cdot(-1)-1,\ 2\cdot(-1)-0)=(-3,-2)$

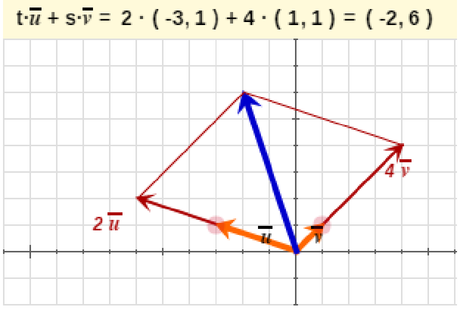
Combinación lineal de vectores

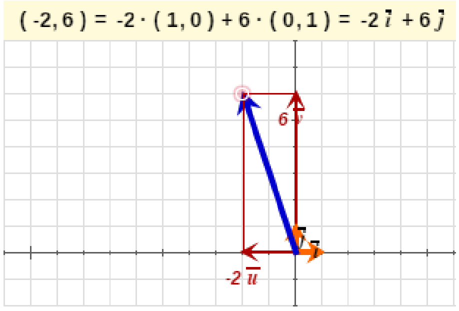
Cuando dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tienen la misma dirección se dice que son **linealmente dependientes**. Observa que se cumple $\vec{u} = k\vec{v}$. En caso contrario son **independientes**.

> Un vector $\vec{w}$ es **combinación lineal** de otros dos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si existen dos números reales, t y s, tales que:
>
> $$\vec{w} = \mathrm{t} \cdot \vec{u} + \mathrm{s} \cdot \vec{v}$$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son independientes, cualquier otro vector se puede poner como combinación lineal de ellos. Se dice que forman una **base.**

La base más utilizada es la formada por los vectores $\vec{\imath}$ = (1, 0) y $\vec{\jmath}$ = (0, 1). Se denomina base canónica y en este caso, t y s son las componentes del vector.





EJERCICIOS resueltos

6. Los vectores $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (0, 2)$, tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w} = (-2,\ 6)$ como combinación lineal de ellos.

Solución: Buscamos dos números t y s, que cumplan t(1, -1) + s(0,2) = (-2, 6)

Separamos las componentes y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} t = -2 \\ -t + 2s = 6 \end{cases} \Rightarrow t = -2 \quad s = 2$$

7. Los vectores $\vec{u} = (3,\ 3)$ y $\vec{v} = (1, 3)$, tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w} = (1, -3)$ como combinación lineal de ellos.

Solución: Buscamos dos números t y s, que cumplan t(3, 3) + s(1,3) = (1, -3)

Separamos las componentes y resolvemos el sistema:

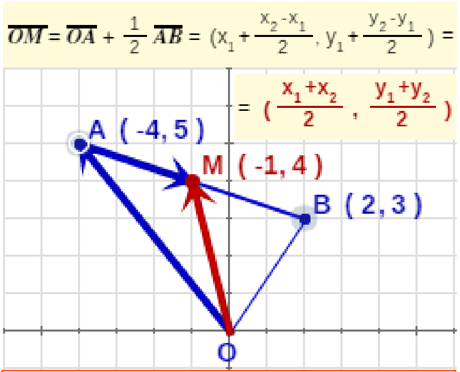
$$\begin{cases} 3t + s = 1 \\ 3t + 3s = -3 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \quad s = -2$$

Punto medio de un segmento

Aplicando las operaciones con vectores es fácil calcular el punto medio de un segmento de extremos A y B dados.

Las coordenadas del **punto medio** de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2):

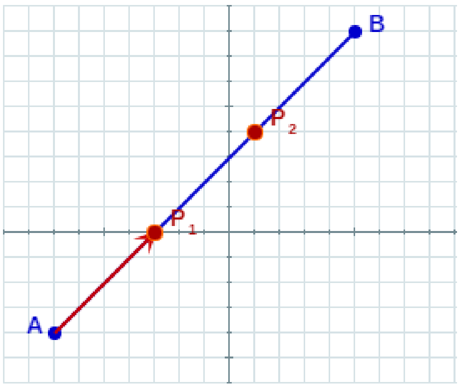
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



$$M\left(\frac{-4+2}{2},\frac{5+3}{2}\right)=M(-1,4)$$

El punto medio divide al segmento en dos partes iguales, de la misma manera se pueden calcular los puntos que dividen al segmento en tres, cuatro o más partes iguales. Lo puedes ver en el siguiente ejemplo:

Si A(-7, -4) y B(5, 8), calcula los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.



El vector AB es $\overline{AB} = (12, 12)$

El vector de posición de los sucesivos puntos es:

$\overline{OP_1} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AB} = (-7 + \frac{12}{3}, -4 + \frac{12}{3}) \rightarrow P_1(-3, 0)$

$\overline{OP_2} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AB} = (-7 + \frac{2\cdot 12}{3}, -4 + \frac{2\cdot 12}{3}) \rightarrow P_2(1, 4)$

Producto escalar

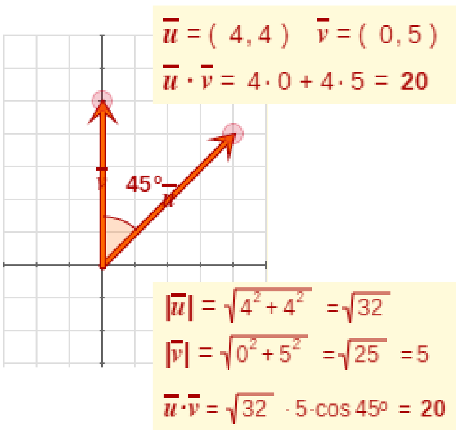
El **producto escalar** de dos vectores, que no debes confundir con el *producto por un escalar*, es una nueva operación entre dos vectores libres cuyo resultado es un número.

Dados $\vec{u}$ = (u_x,u_y) y $\vec{v}$ = (v_x,v_y), su producto escalar es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Si conocemos el módulo de los vectores y el ángulo que forman, el producto escalar también se puede calcular así:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos(\vec{u},\vec{v})$$



Propiedades

- $\overline{u}\cdot\overline{u} \geq 0$
- Conmutativa: $\overline{u}\cdot\overline{v} = \overline{v}\cdot\overline{u}$
- Homogénea: $t(\overline{u}\cdot\overline{v}) = \overline{tu}\cdot\overline{v} = \overline{u}\cdot\overline{tv}$
- Distributiva respecto de la suma: $\overline{u}\cdot(\overline{v}+\overline{w}) = \overline{u}\cdot\overline{v} + \overline{u}\cdot\overline{w}$

Los vectores $\vec{\imath} = (1,0)$ y $\vec{\jmath} = (0,1)$ tienen módulo 1 y son perpendiculares, por tanto se cumple:

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = |\vec{\imath}|\cdot|\vec{\imath}|\cdot\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = |\vec{\imath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 90° = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$
$$\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = |\vec{\jmath}|\cdot|\vec{\jmath}|\cdot\cos 0° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Expresamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{\imath}$ y de $\vec{\jmath}$ y aplicando las propiedades del producto escalar resulta:

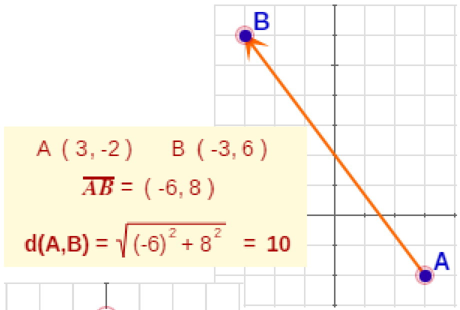
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x\vec{\imath} + u_y\vec{\jmath})\cdot(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}) = u_x\cdot v_v + u_y\cdot v_y$$

Aplicaciones del producto escalar

Distancia entre dos puntos

Dados los puntos A(x_1, x_2) y B(y_1, y_2), la distancia entre ellos es el módulo del vector que los une.

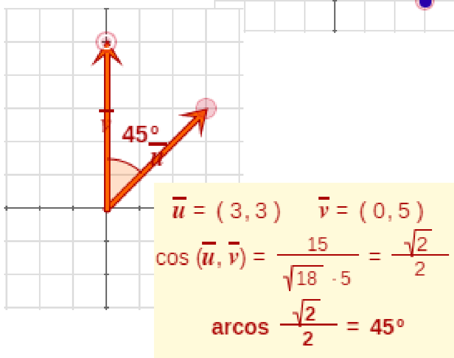
$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con el producto escalar podemos calcular el coseno del ángulo que forman y por tanto el ángulo:

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

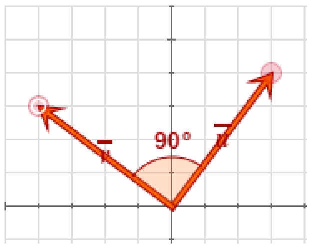


Un caso interesante es el de los vectores **ortogonales**, que forman un ángulo de 90º.

- ✓ Dos vectores se dicen **ortogonales** si su **producto escalar** es **0**.

  $$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y = 0$$

  Observa que forman un ángulo de 90º y sus direcciones son **perpendiculares**.



EJERCICIOS resueltos

8. Dados los vectores $\vec{u}=(-4,2)$ y $\vec{v}=(3,-3)$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solución: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = -4·3 + 2·(-3) = -18

9. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 150º y sus módulos son $|\vec{u}|=\sqrt{108}$ y $|\vec{v}|=12$. Calcula su producto escalar.

Solución: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{108}\cdot 12\cdot\cos 150^\circ=\sqrt{108}\cdot 12\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-108$

10. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-2)$ y $\vec{v}=(-3,4)$ y $\vec{w}=(4,-4)$, comprueba que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

Solución: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ = (2, -2) · ((-3, 4)+(4,-4)) = (2, -2) · (1, 0) =2·1 – 2·0 = 2

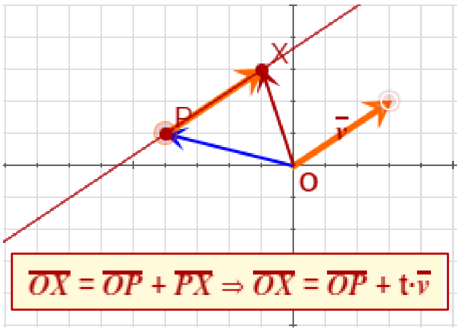
$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ = (2, -2) · (-3, 4) + (2, -2) · (4, -4) = -14 + 16 = 2

11. Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}=(m,5)$ y $\vec{v}=(10,-6)$, sean ortogonales.

Solución: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 10m – 30 = 0   luego m = 3

2. Rectas

Ecuaciones de una recta



P(-4, 1) $\vec{v}$ **= (3, 2)**

Para determinar una recta necesitamos un punto **P(**x_1, y_1**)** de la misma y un vector director o direccional $\vec{v}$ **= (**v_x, v_y**)** que marque su dirección.

Así el vector de posición de un punto cualquiera de la recta será:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v}$$ donde t es un número real.

A partir de aquí obtenemos distintas formas de la ecuación de la recta.

✓ **Ecuación vectorial**

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t \cdot (v_x, v_y)$$

$$(x, y) = (-4, 1) + t\,(3, 2)$$

Separando las coordenadas x e y obtenemos las:

✓ **Ecuaciones paramétricas**

$$\begin{cases} x = x_1 + t \cdot v_x \\ y = y_1 + t \cdot v_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Despejando t en cada ecuación e igualando:

✓ **Ecuación continua**

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y}$$

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y - 1}{2}$$

Operando y pasando todo al primer miembro:

✓ **Ecuación general**

$$Ax + By + C = 0$$

$$2x - 3y + 11 = 0$$

Despejando y:

✓ **Ecuación explícita**

$$y = mx + n$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

EJERCICIOS resueltos

12. Empareja cada ecuación con la gráfica correspondiente:

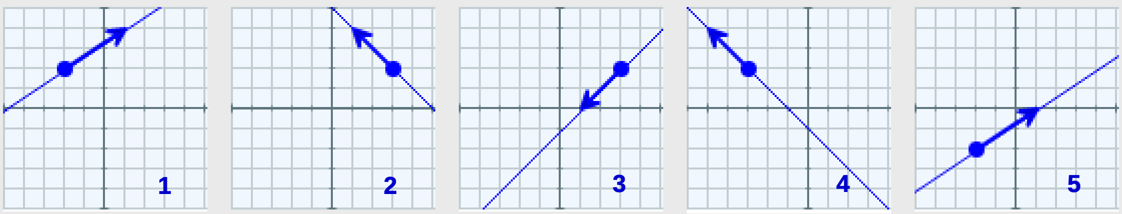
A: $(x, y) = (-2, -2) + t\,(3, 2)$

B: $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

C: $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y - 2}{-2}$

D: $2x + 2y - 10 = 0$

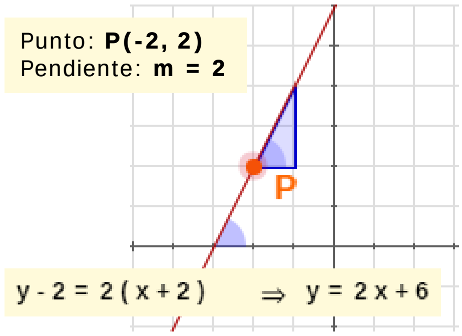
E: $y = -x - 1$



Solución: A – 5, B – 1, C – 3, D – 2, E – 4

Otras ecuaciones de la recta

Has visto que despejando y en la ecuación general, se llega a la forma explícita **y = mx + n**.

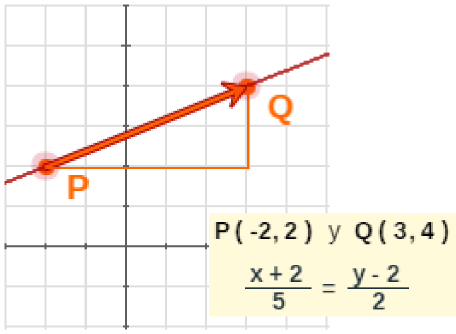


- **m** $= -\frac{B}{A} = \frac{v_y}{v_x}$ es la pendiente de la recta. Es la tangente del ángulo que la recta forma con el eje X.
- **n** es la ordenada en el origen. Es la ordenada del punto donde la recta corta al eje Y.

Conocidos un punto $\mathbf{P(x_1,\ y_1)}$ y la pendiente **m** de la recta es fácil llegar a la ecuación explícita.

✓ **Ecuación punto-pendiente:** $y - y_1 = m(x - x_1)$

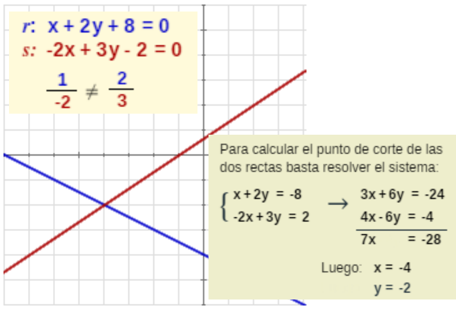
Si se conocen dos puntos de la recta **P** y **Q**, basta tomar uno de ellos y como vector director $\overrightarrow{PQ}$.



✓ **Ecuación por dos puntos:** $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

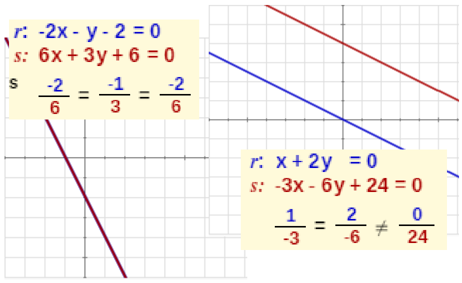
Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas ***r***: **Ax+By+C=0** y ***s***: **A'x+B'y+C'=0** pueden ser:



- **Secantes** si tienen un único punto en común. Tienen distinta dirección y distinta pendiente.
- **Paralelas** si no tienen ningún punto en común. Tienen la misma dirección y la misma pendiente pero diferente ordenada en el origen.
- **Coincidentes** si tienen todos sus puntos comunes. Tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen.

En casa caso se cumple:



Secantes	Paralelas	Coincidentes
$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

EJERCICIOS resueltos

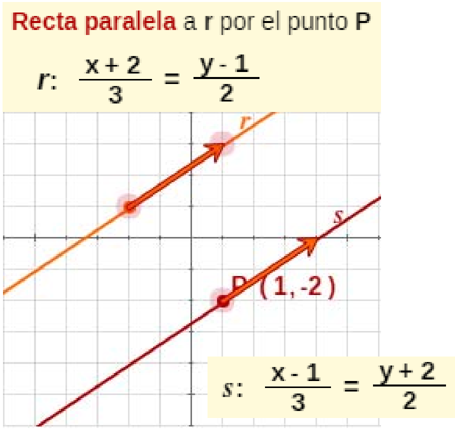
13. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(-5, -2) y Q(3, 2). Escribe también su ecuación en forma explícita.

Solución: $m = \frac{2+2}{3+5} = \frac{1}{2}$

La ecuación en forma punto-pendiente : $y + 2 = \frac{1}{2}(x + 5) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

14. Una recta *r* tiene como vector director $\vec{v} = (-1,2)$ y pasa por el punto P(-5, -2), otra *s* tiene pendiente m = -2 y pasa por N(0, 5). ¿Qué posición relativa tienen?

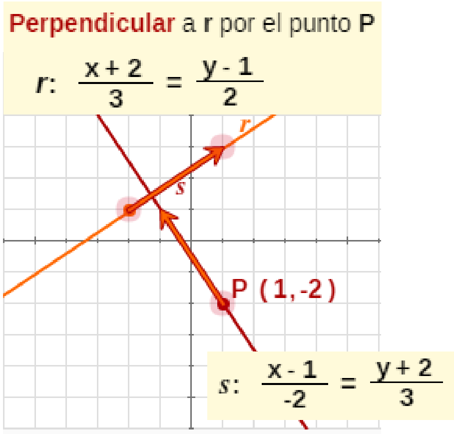
Solución: Tienen la misma pendiente -2, $r\!: \ y + 2 = -2(x + 5) \ \rightarrow \ 2x + y + 12 = 0$ $s\!: \ 2x + y - 5 = 0$, luego son paralelas



Recta paralela a otra por un punto

Dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección y por tanto la misma pendiente.

- Para escribir la ecuación de una recta paralela a otra por un punto P, bastará tomar este punto y el vector direccional, o la pendiente según convenga, de esta otra.



Recta perpendicular a otra por un punto

Dos rectas son perpendiculares si lo son sus vectores direccionales y por tanto su producto escalar es 0.

- Si $\vec{v}$ = (v_x,v_y) es el vector direccional de una recta, el de una perpendicular es $\vec{v'}$ = (v_y,-v_x).
- En cuanto a las pendientes, si **m** es la pendiente de una recta y **m'** la de una perpendicular:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m'} = \frac{-\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{v_y}} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$$

EJERCICIOS resueltos

15. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que las rectas *r* y *s* sean paralelas:

$$r\colon 2x + 3y + 23 = 0 \qquad s\colon \boldsymbol{a}x + 3y + 46 = 0$$

Solución: Para que sean paralelas los coeficientes de x y de y respectivos deben ser proporcionales luego $\boldsymbol{a}$ = 2

16. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que las rectas *r* y *s* sean paralelas:

$$r\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-2} \qquad s\colon \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{\boldsymbol{a}}$$

Solución: Para que sean paralelas las componentes de sus vectores direccionales deben ser proporcionales luego $\boldsymbol{a}$ = 2

17. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que las rectas *r* y *s* sean perpendiculares:

$$r\colon x + y = 0 \qquad s\colon \boldsymbol{a}x + y + 5 = 0$$

Solución: Para que sean perpendiculares se debe cumplir:
1 · $\boldsymbol{a}$ + 1 · 1 = 0 ⇒ $\boldsymbol{a}$ = -1

18. Calcula el valor de $\boldsymbol{a}$ para que las rectas *r* y *s* sean perpendiculares:

$$r\colon \frac{x+4}{3} = \frac{y-4}{4} \qquad s\colon \frac{x+5}{-4} = \frac{y-6}{\boldsymbol{a}}$$

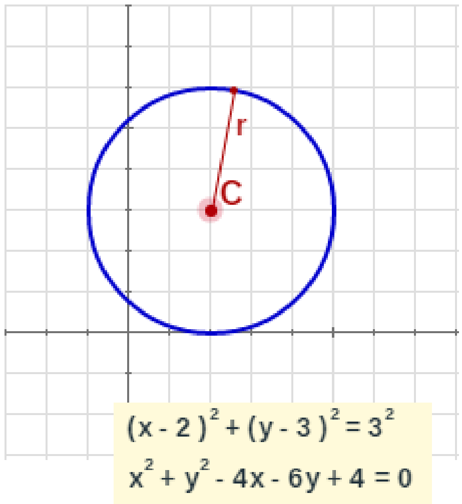
Solución: Para que sean perpendiculares se debe cumplir:
3 · (-4) + 4 · $\boldsymbol{a}$ = 0 ⇒ $\boldsymbol{a}$ = 3

3. Circunferencias

Ecuación de una circunferencia

Una circunferencia de centro **C(a, b)** y radio **r** es el lugar geométrico de los puntos **P(x, y)** del plano cuya distancia a **C** es **r**. Esto nos lleva a la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

Que podemos escribir:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$$

donde $\mathbf{A = -2a}$, $\mathbf{B = -2b}$ y $\mathbf{C = a^2 + b^2 - r^2}$

Así podemos calcular las coordenadas del centro o el valor del radio a partir de la ecuación.

EJERCICIOS resueltos

19. Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(-3, 3) y radio 5.

Solución: $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
Operando y pasando todo al primer miembro: $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 7 = 0$

20. ¿Cuál es el centro de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$?

Solución: Sean a y b respectivamente la abscisa y la ordenada del centro.
Si nos fijamos en los coeficientes de x y de y: $a = -\frac{-4}{2}$ $\quad b = -\frac{6}{2}$
luego el centro está en C(2, -3)

21. ¿Cuál es el radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 6 = 0$?

Solución: Si nos fijamos en la ecuación vemos que el centro está en el punto (-1, -3)
Y además $(-1)^2 + (-3)^2 - r^2 = -6$ luego $r^2 = 16$ y $r = 4$

22. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (-7, 1) y tiene el centro en C(-2, -1).

Solución: La distancia entre el centro y P es el radio: $r = \sqrt{(-7+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{29}$
luego $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 29 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 24 = 0$

Para practicar

1. Dados los puntos A(-4,3), B(3,1), C(4,6) y D(-3,8), calcula los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DC}$.
¿Cuáles son equipolentes?

2. Los puntos A(-5, 2), B(0, -2) y C(1, 2) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, haya el cuarto vértice, D, aplicando la suma de vectores.

3. Dados los vectores $\vec{u}=(-4,1), \vec{w}=(2,-4)$ y $\vec{w}=(-4,-2)$. Calcula:
a) $\vec{u}-3(\vec{v}+\vec{w})$ b) $2\vec{u}+\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{w}$

4. Calcula el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo de vértices A(-4, 2), B(1, -2), C(2, 2), D(-3, 6). Calcula también la medida de las diagonales.

5. Comprueba que el triángulo de vértices A(-5, 2), B(1, -2), C(-2, 6) y el de vértices los puntos medios de sus lados, son semejantes.

6. Calcula el simétrico del punto A(-3, 1) respecto del P(0,-1). Comprueba también que la distancia entre A y P es la mitad de la distancia entre A y su simétrico.

7. Los puntos A(-2, 1), B(6, -4), C(9, 1), D(4, 4) son los vértices de un trapezoide. Comprueba que los puntos medios de cada lado forman un paralelogramo.

8. Calcula las componentes del vector $\vec{w}=3\vec{u}-2\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}=2\vec{\imath}-3\vec{\jmath}$ y $\vec{v}=-\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$

9. Expresa el vector $\vec{w}=-4\vec{\imath}-6\vec{\jmath}$ como combinación lineal de $\vec{u}=4\vec{\imath}+\vec{\jmath}$ y de $\vec{v}=-2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}$

10. Dados los vectores $\vec{u}=(5,4)$ y $\vec{v}=(-3,2)$ calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

11. Comprueba mediante vectores y con el teorema de Pitágoras que el triángulo de vértices A(-4, 2), B(5, -1) y C(-2, 8) es rectángulo.

12. Dada la recta *r* indica, en cada caso, qué tipo de ecuación es, represéntala y calcula un punto, un vector direccional y la pendiente.
a) $r\colon \begin{cases} x=2-3t \\ y=5+3t \end{cases}$ c) $r\colon \dfrac{x+5}{5}=\dfrac{y+1}{4}$
b) $r\colon -x+2y-1=0$ d) $r\colon y=-x-7$

13. La recta r pasa por el punto P(2, 2) y tiene como vector director $\vec{v}=(-4,2)$. Halla su ecuación en forma:
a) vectorial; b) continua; c) general.

14. Halla la ecuación general de la recta que pasa por los puntos P(-3,-4) y Q(-1,-2)

15. La recta *r* pasa por el punto P(5, -1) y tiene pendiente 2. Halla su ecuación en forma: a) punto-pendiente; b) explícita; c) general.

16. Halla la posición relativa de las rectas:
a) $r\colon \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-3t \end{cases}$ $s\colon \dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y-2}{4}$
b) $r\colon -x+4y+1=0$ $s\colon x-4y+3=0$

17. Halla la ecuación de la recta paralela a $r\colon 4x+3y+8=0$ por el punto P(2, 3)

18. Halla la ecuación de la perpendicular a $r\colon 4x-3y+8=0$ por el punto P(-1, 7)

19. Comprueba que las rectas $x+6y+8=0$, $5x-6y+40=0$, $x+2=0$, forman un triángulo y calcula sus vértices.

20. Dado el triángulo de vértices A(-5,-3), B(2,-5) y C(-2,2), calcula las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro.

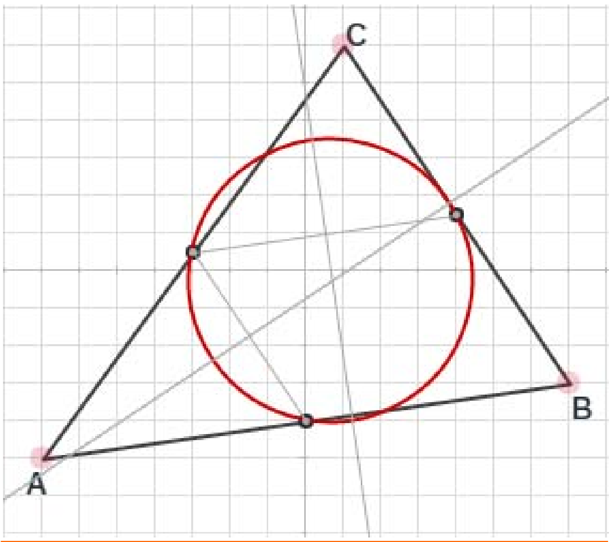
21. Dado el triángulo de vértices A(-7,0), B(0,-2) y C(-3,7), calcula las ecuaciones de las mediatrices de cada lado y las coordenadas del circuncentro.

22. Dado el triángulo de vértices A(-3,-4), B(7,-5) y C(0, 3), calcula las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro.

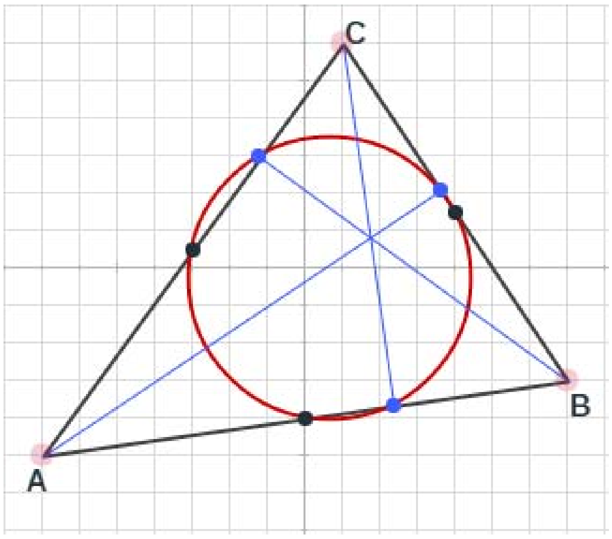
Para saber más

La circunferencia de los nueve puntos

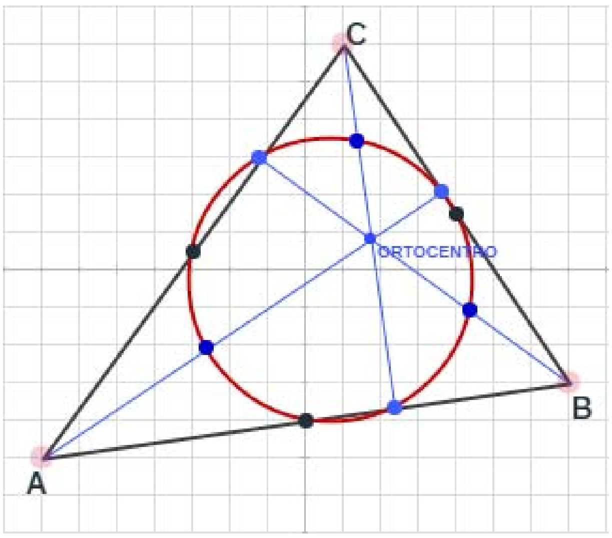
Un triángulo siempre nos depara sorpresas. Al principio del tema te planteamos una recta curiosa, la de Euler, ahora veamos una circunferencia que también resulta sorprendente, la de **Freuenbach** o de los **nueve puntos**.



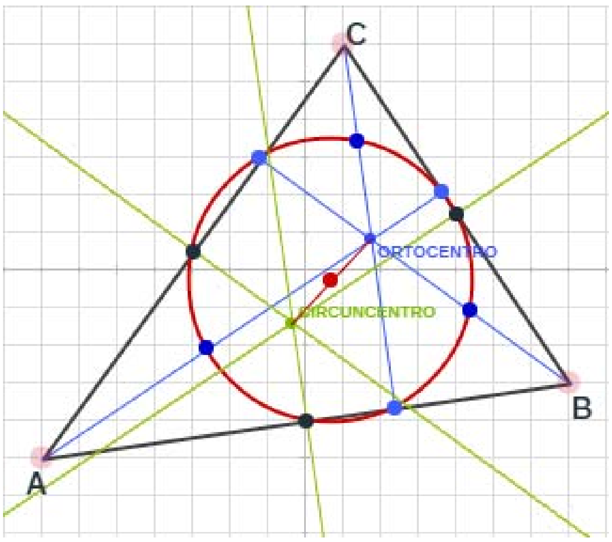
Dado un triángulo cualquiera ABC, tomamos los **puntos medios** de sus lados y dibujamos la circunferencia que pasa por ellos. Siempre hay una circunferencia que pasa por tres puntos no alineados.



Si ahora trazamos las **alturas** del triángulo, observamos que la circunferencia también pasa por los puntos en que cada altura corta al lado sobre el que ha sido trazada. Ya hay seis puntos por los que pasa.



Pero aún hay más, si marcamos los **puntos medios** entre el ortocentro y cada uno de los vértices, también están en la circunferencia, luego ya tenemos nueve puntos por los que pasa, de ahí su nombre.



¿Y cuál es el centro de la circunferencia? Dibujamos el **circuncentro**, en el **punto medio** del segmento que une el **ortocentro** y el **circuncentro** está el centro de nuestra circunferencia.

Recuerda lo más importante

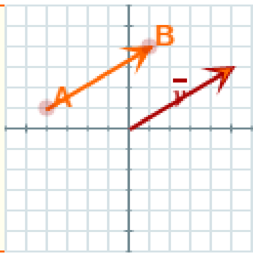
Vector fijo

Origen: A (x_1, y_1) Extremo: B (x_2, y_2)

Componentes: $\overline{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$

Vector libre

Conjunto de vectores equipolentes a un vector fijo



Caracterizan a un vector:

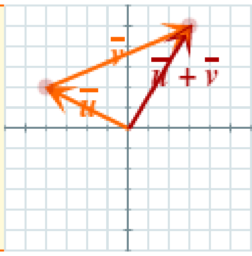
- el **módulo**
- la **dirección**
- el **sentido**

Operaciones con vectores

$\overline{u} = (u_x, u_y)$

$\overline{v} = (v_x, v_y)$

- **Suma:**
  $\overline{u} + \overline{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
- **Producto por un escalar:**
  $t \cdot \overline{u} = (t \cdot u_x, t \cdot u_y)$



Producto escalar

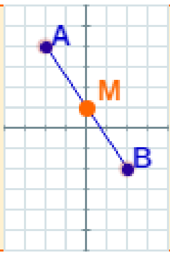
Dos formas de calcularlo:

- $\overline{u} \cdot \overline{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$
- $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v})$

Punto medio de un segmento

A (x_1, y_1) B (x_2, y_2)

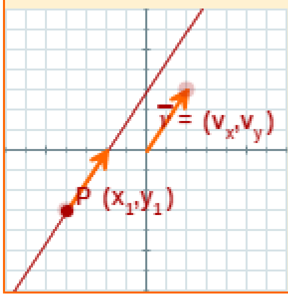
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



- **Módulo de un vector** $|\overline{v}| = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- **Distancia entre dos puntos** $d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- **Ángulo entre dos vectores** $\cos(\overline{u}, \overline{v}) = \dfrac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|}$

$(x,y) = (x_1,y_1) + t\,(v_x,v_y)$

Ecuaciones de la recta



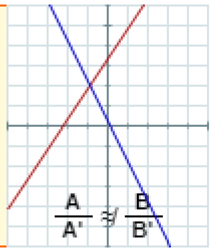
vectorial
paramétricas
continua
general
explícita
punto-pendiente

Posiciones relativas de dos rectas

$Ax + By + C = 0$

$A'x + B'y + C' = 0$

secantes
paralelas
coincidentes



Ecuación de la circunferencia

Centro: **C(a, b)**
Radio: **r**

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Autoevaluación

1. Dados los puntos A(-1, -2) y B(-7,-6), calcula el módulo del vector $|\overrightarrow{AB}|$

2. Un vector equipolente al $\vec{\boldsymbol{v}} = (5, -4)$ tiene su origen en el punto A(3, 3). Calcula su extremo.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (-4, -3)$, calcula $3\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$

4. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3)$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (-4, -3)$, calcula su producto escalar.

5. Dados los puntos A(-4, 8) y B(0, 4), calcula la distancia del origen de coordenadas al punto medio del segmento $\overline{AB}$.

6. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(-4, 8) y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, -1)$

7. ¿Cuál es la posición relativa de las rectas siguientes?
   r: x – 2y – 10 = 0   *s*: 2x – 4y – 50 = 0

8. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(-4, -4) y es paralela a la recta x – 2y – 10 = 0

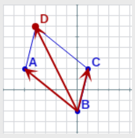
9. Halla la ecuación general de la recta que pasa por el punto P(-4, -4) y es perpendicular a x – 2y – 10 = 0

10. Halla la ecuación de la circunferencia de centro C(-5, 4) y que pasa por el punto P(-5, 0).

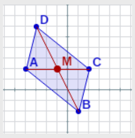
Soluciones de los ejercicios para practicar

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ = (7,-2) equipolentes
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ = (1, 5) equipolentes

2. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ = (-5.4)
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}$ = (-4,6)

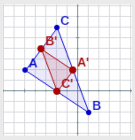


3. a) (2, -17)
b) (-8, -3)



4. M(-1, 2)
d(A,C)=6 d(B,D)=8,94

5. C'(-2,0) B'(-3,5, 4) A'(-0,5,-2)
$\overrightarrow{AB}$=(6,-4) $\overrightarrow{A'B'}$=(-3,2)
$\overrightarrow{AC}$=(3, 4) $\overrightarrow{A'C'}$ = (-1,5,-2)
$\overrightarrow{BC}$=(-3, 8) $\overrightarrow{B'C'}$=(1,5,-4)



6. A'(3,-3)
d(A,P) =$\sqrt{52}/2$ d(A,A') =$\sqrt{52}$

7. AB: M(2, -1,5) BC: N(7,5, 3)
CD: P(6,5, 2,5) AD: Q(1, 2,5)
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ = (5,5, 0)
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ = (-1,4)

8. $\vec{w}$ = (3, 0)

9. $\vec{w} = -2\vec{u} - 2\vec{v}$

10. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = -7 $|\vec{u}| = \sqrt{41}$ $|\vec{v}| = \sqrt{13}$
cos $(\vec{u},\vec{v})$ =-0,3032 ángulo=107,65º

11. $\overrightarrow{AB}$ =(9,-3) $\overrightarrow{AC}$ = (2,6) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = 0
$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2$ = 90+40 = 130 = $|\overrightarrow{BC}|^2$

12. a) Paramétricas; P(2, 5); $\vec{v}$= (-3, 3); m=1
b) General; P(-1, 0); $\vec{v}$= (2, 1); m=1/2
c) Continua; P(-5, -1); $\vec{v}$= (5, 4); m=4/5
d) Explícita; P(0, -7); $\vec{v}$= (1, -1); m=-1

13. a) (x, y) = (2, 2) + t(-4, 2)
b) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{2}$
c) x + 2y – 6 = 0

14. x – y – 1 = 0

15. a) y + 1 = 2(x – 5)
b) y = 2x – 11
c) 2x – y – 11 = 0

16. a) secantes
b) paralelas

17. 4x + 3y – 17 = 0

18. 3x + 4y – 25 = 0

19. Son secantes dos a dos.
Vértices: A(-8, 0), B(-2, -1), C(-2, 5)

20. Altura lado AB: 7x- 2y +18 = 0
Altura lado BC: -4x + 7y + 1 = 0
Altura lado AC: 3x + 5y + 19 = 0
Ortocentro: H(-3,12, -1,93)

21. Mediatriz lado AB: 14x - 4y +45 = 0
Mediatriz lado BC: -x + 3y – 9 = 0
Mediatriz lado AC: 8x + 14y – 9 = 0
Circuncentro: P(-2,61, 2,13)

22. Mediana lado AB: 7x- 2y +18 = 0
Mediana lado BC: -4x + 7y + 1 = 0
Mediana lado AC: 3x + 5y + 19 = 0
Baricentro: G(1,33, -2)

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 7,21

2. B(8, -1)

3. (2, -12)

4. 1

5. 6,32

6. – x – y + 4 = 0

7. Paralelas

8. x – 2y – 4 = 0

9. 2x + y + 12 = 0

10. $x^2 + y^2$ + 10x – 8y + 25 = 0