13 Probabilidade

Contidos

1. Introdución: Combinatoria
   Combinatoria
   Permutacións
   Variacións
   Combinacións
2. Experimentos aleatorios
   Espazo mostral e sucesos
   Operacións con sucesos
   Sucesos incompatibles
3. Probabilidade dun suceso
   A regra de Laplace
   Frecuencia e probabilidade
   Propiedades da probabilidade
   Calcular probabilidades
4. Experimentos compostos
   Sucesos compostos
   Regra da multiplicación
   Extraccións con e sen devolución
5. Probabilidade condicionada
   Sucesos dependentes e independentes
   Diagramas de árbore
   Probabilidade total
   Probabilidade "a posteriori"

Obxectivos

- Achar os sucesos dun experimento aleatorio e realizar operacións con eles.
- Determinar se dous sucesos son compatibles ou incompatibles.
- Calcular a probabilidade dun suceso mediante a regra de Laplace.
- Coñecer as propiedades da probabilidade.
- Achar a probabilidade dun suceso nun experimento composto.
- Achar probabilidades de sucesos dependentes e independentes.
- Aplicar a probabilidade a situacións da vida cotiá.

Autora: Mª Isabel Hermida Rodríguez
Adaptación a Descartes JS: Xosé Eixo Branco

Antes de empezar

Investiga

Imaxina que estás nun concurso de televisión no que che ofrecen tres portas, a elixir unha.
Detrás dunha das portas hai un coche e detrás de cada unha das outras dúas, un burro.
Elixes unha porta, pero antes de abrila, o presentador, que sabe o que hai detrás de cada unha, abre unha das dúas que non elixiches tras a que, por suposto hai un burro, e entón dáche a oportunidade de cambiar a túa elección.
Naturalmente queres levar o coche, que farías, cambiar de porta ou non cambiar?
Antes de decidir, imos experimentar xogando. Podes xogar ti ou ben facer que xogue en automático; despois de varios intentos anota os resultados:

Manual	***Cambiando***	***Mantendo***	***Total***
Intentos			
Coches			
% acertos			

Automático	***Cambiando***	***Mantendo***	***Total***
Intentos			
Coches			
% acertos			

CONTESTA	RESPOSTA
Cando elixes ti, cando consegues máis coches, cambiando ou mantendo?	
Cando se elixe automaticamente, cando se conseguen máis coches, cambiando ou mantendo?	
Despois do visto, se te queres levar o coche, que farías, cambiar de porta ou non cambiar?	

Se fas unha aposta na bonoloto, que probabilidade tes de acertar os 6 números?,

____

E tres?__________________________________

Preme  para ir á páxina seguinte.

1. Introdución: Combinatoria

1.a. Combinatoria

Le atentamente a explicación de pantalla e contesta a seguinte cuestión:

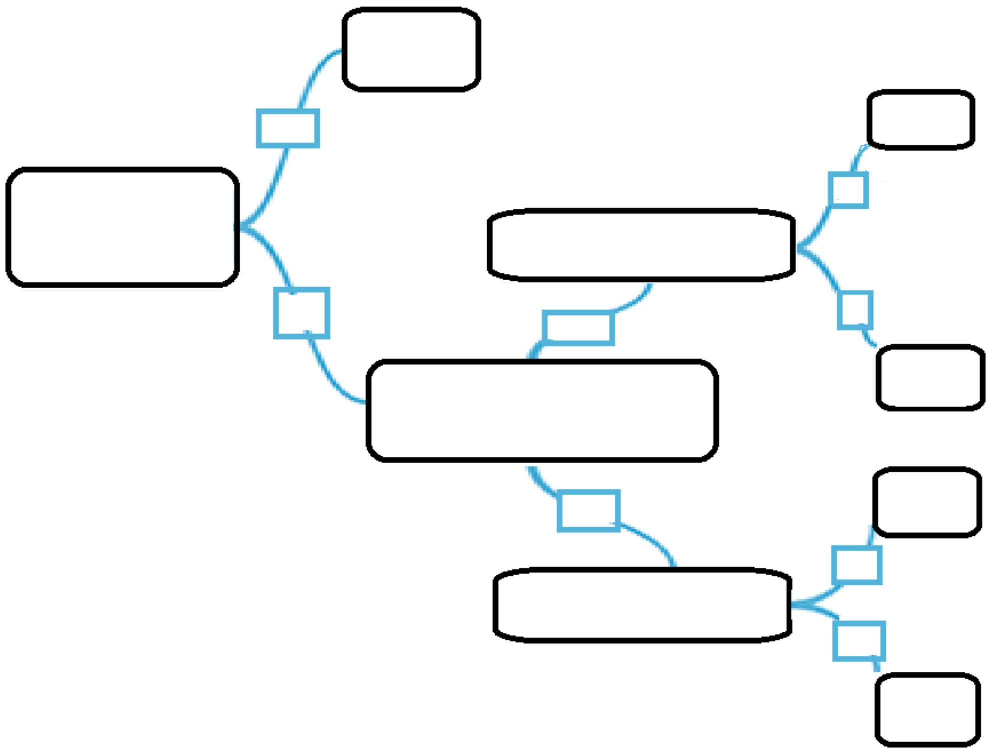
Que é a combinatoria?

____
____

Asocia, mediante unha frecha, cada frase co tipo de agrupación correspondente:

Determinar de cantas formas se poden ordenar todos os elementos dun conxunto	Combinacións
Cando, en lugar de querer ordenar todos os elementos dispoñibles, o que nos interesa é soamente ordenar algúns	Permutacións
Cando non nos importa a orde na que se elixen os elementos, simplemente queremos ver de cantas formas podemos seleccionar uns poucos de entre todos	Con Repetición
Cando en cada grupo se poden repetir elementos	Variacións

Copia o esquema que aparece na parte dereita da pantalla:



Pulsa para ir á páxina seguinte.

1.b. Permutacións

Le en pantalla e completa:

Permutacións de **n** elementos son ____
____.

Denotámolo: [ ]

Fórmula para calcular as Permutacións de n elementos:

P_n =

Na escena da dereita preme: Permutacións

Aparece un exemplo. Escribe o enunciado e a súa resolución no seguinte recadro:

Queremos contabilizar de cantas formas distintas se pode sentar o alumnado dun aula de ____ persoas.	
	Temos n = ____ persoas que se deben sentar nas ____ mesas de clase. É dicir, debemos ordenar a ese alumnado. Trátase ___________________________
	Vexamos como se calcula o número de formas distintas de sentarse na aula: **P_n =** ___________________________________ **=** __________________

Permutacións con repetición de **n** elementos nas que ______________________________
____
____
____.

Denotámolo: [ ]

Fórmula para calcular as Permutacións con Repetición de n elementos:

$PR_{a,b,\ldots k}$ =

Na escena da dereita preme: Permutacións con Repetición

Aparece un exemplo. Escribe o enunciado e a súa resolución no seguinte recadro:

Queremos descubrir de cantas formas distintas se pode facer un colar con contas de cores roxo, verde, azul e amarelo, se temos: ___ contas roxas, ___ verdes, ___ amarelas e ___ azuis.	
	Imos ordenar un total de __+ __+ __+ __ = ___ contas para formar un colar. Se todas as contas fosen diferentes, as distintas formas de facer o colar serían Permutacións de ___ elementos. Pero son moitas menos, ao estar repetidos, pois por exemplo, é o mesmo comezar pola primeira conta roxa que pola segunda. Trátase de Permutacións de __,__,__ e __ elementos.

	Vexamos como se calcula o número de posibles colares **PR**__,__,__,__ **=** ——————— = ——————— = ——————— =

Preme o botón para facer uns exercicios.

Ábrese unha escena na que podes escoller

Permutacións ou **Permutacións con repetición**

Escribe no el seguinte recadro dous exemplos de cada tipo:

Permutacións	**Permutacións con repetición**
1. Queremos calcular **Permutacións** de ___ elementos.	1. Queremos calcular **Permutacións con repetición** de ___ elementos, tendo de cada un deles ________, respectivamente
2. Queremos calcular **Permutacións** de ___ elementos.	2. Queremos calcular **Permutacións con repetición** de ___ elementos, tendo de cada un deles ________, respectivamente

Preme para ir á páxina seguinte.

1.c. Variacións

Le na pantalla e completa:

Variacións con repetición de **m** elementos tomados de **n** en **n** son ___________________
____
____.

Denotámolo:

Fórmula para calcular as **Variacións con repetición** de **m** elementos tomados de **n** en **n**:

$\mathbf{VR_{m,n}} =$

Na escena da dereita preme: Variacións con repetición

Aparece un exemplo. Completa o enunciado e a súa resolución no seguinte recadro:

Queremos contabilizar de cantas palabras de ___ letras de largo, con ou sen sentido, poderíamos crear cun alfabeto de ____ letras distintas.	
	Temos un alfabeto formado por m = ___ letras distintas. Queremos formar palabras de tamaño n = __, podendo repetir cada letra todas as veces que queiramos. Trátase de Variacións con repetición de __ elementos tomados de __ en __.
	Vexamos como se calcula o número de palabras: $\mathbf{VR_{\_\_,\_\_}} =$

Variacións de **m** elementos tomados de **n** en **n** son ___________________________________
____.

Denotámolo:

Fórmula para calcular as **Variacións con repetición** de **m** elementos tomados de **n** en **n**:

$\mathbf{V_{m,n}} =$

Na escena da dereita preme: Variacións

Aparece un exemplo. Completa o enunciado e a súa resolución no seguinte recadro:

Queremos contabilizar de cantas formas diferentes se pode dar a clasificación dos ___ primeiros participantes nunha carreira cun total de ____ atletas.	
	Temos unha carreira na que participan m = ___ atletas. Queremos determinar de cantas formas posibles pode ser a clasificación dos __ atletas primeiros. Trátase de Variacións de __ elementos tomados de __ en __.
	Vexamos como se calcula o número de clasificacións: $\mathbf{V_{\_\_,\_\_}} =$

Preme o botón para facer uns exercicios.

Ábrese unha escena na que podes escoller

Variacións con repetición ou **Variacións**

Escribe no seguinte recadro dous exemplos de cada tipo:

Variacións con repetición	Variacións
1. Queremos calcular **Variacións con repetición** de ___ elementos distintos que seleccionamos de xeito ordenado __ veces	1. Queremos calcular **Variacións** de ___ elementos distintos seleccionando ___ deles de xeito ordenado e sen repetir
2. Queremos calcular **Variacións con repetición** de ___ elementos distintos que seleccionamos de xeito ordenado __ veces	2. Queremos calcular **Variacións** de ___ elementos distintos seleccionando ___ deles de xeito ordenado e sen repetir

Preme para ir á páxina seguinte.

1.d. Combinacións

Le na pantalla e completa:

Chamamos **Combinacións** de **m** elementos tomados de **n** en **n** ________________________
____
____.

Denotámolo: $\boxed{}$

Se importase a orde trataríase de ____________, pero como non importa, para calcular cantos casos hai, dividimos as variacións entre o número de formas de ordenar estes elementos, é dicir:

Fórmula para calcular as **Combinacións** de **m** elementos tomados de **n** en **n**:

$$C_{m,n} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Na escena da dereita preme: Combinacións

Aparece un exemplo. Completa o enunciado e a súa resolución no seguinte recadro:

Queremos contabilizar de cantas formas distintas se poden escoller ___ persoas para participar nunha actividade nun grupo que ten un total de ____ persoas.

	Temos un total de m = ___ persoas e de entre elas debemos escoller n = __. Nótese que non importa cales escollemos primeiro e cales despois. Todas as elixidas son participantes na actividade. É dicir, non importa a orde. Trátase de Combinacións de __ elementos tomados de __ en __.
	Vexamos como se calcula o número de formas distintas de seleccionar estas persoas: **C__,__ =**

Preme o botón para facer uns exercicios.

Ábrese unha escena co enunciado dun exercicio. Escríbeo no seguinte recadro, resólveo e despois comproba se o fixeches ben premendo en “Ver solución”.

Despois preme en “outro exercicio” e repite a mesma operación unha vez máis.

1. Queremos calcular **Combinacións** de __ elementos tomados de ___ en ___, é dicir, de cantas formas se pode escoller ___ elementos dun total de ___ sen que importe a orde de elección.	2. Queremos calcular **Combinacións** de __ elementos tomados de ___ en ___, é dicir, de cantas formas se pode escoller ___ elementos dun total de ___ sen que importe a orde de elección.

EXERCICIOS

4. Calcula:

a) P_5

b) P_{10}

c) $PR_{4,2,4,2}$

d) $PR_{2,4}$

5. Calcula

a) $VR_{10,5}$

b) $VR_{5,7}$

c) $V_{10,5}$

d) $V_{5,3}$

6. Calcula

a) $C_{17,5}$

b) $C_{13,3}$

Preme para ir á páxina seguinte.

2. Experimentos aleatorios

2.a. Espazo mostral e sucesos

Le as definicións da pantalla e completa:
Son experimentos **aleatorios,** aqueles nos que ____________________________________
Chámase espazo **mostral** ____
Un **suceso elemental** é ____
Un **suceso** é ____
Hai un suceso que se verifica sempre _______________________ e coincide co ___________
____

Fíxate na escena, nela podemos extraer de forma aleatoria unha carta da baralla. Aparecen varios sucesos, e se moves o rato por enriba deles, aparecen os sucesos elementais que os forman. Con axuda da escena, completa esta táboa:

SUCESO	***SUCESOS ELEMENTAIS***
Sacar o rei de ouros	
Sacar ouros ou rei	
Sacar unha figura	

Preme para ir á páxina seguinte.

2.b. Operacións con sucesos

Le as definicións da pantalla e completa
Cos sucesos dun experimento aleatorio pódense realizar distintas operacións. Dados dous sucesos A e B:

- A **unión** de A e B, **AUB**, é o suceso formado por ________________________________ ________________________ Acontece cando ____________________________________
- A **intersección**, **A∩B**, é o suceso formado por __________________________________ e ______________________ Acontece cando _____________________________________
- A **diferenza** de A e B, **A\B**, é o suceso formado por ____________________________ _______________________ Acontece cando ______________________________________
- O **suceso contrario** a un dado A, $\overline{A}$, é o suceso formado por ______________________ _______________________ Acontece cando _____________________________________
- O suceso contrario do **seguro** é o suceso ________________, que non se verifica nunca, indícase con Ø.

Na escena podes ver un exemplo de distintos sucesos e os seus contrarios:
Nunha urna hai 12 bólas numeradas do 1 ao 12. Sácase unha bóla e mírase o número, consideramos os sucesos A= "saír par" e B= "saír múltiplo de 3". Escribe a continuación os sucesos elementais que forman os sucesos indicados na táboa:

A		$\overline{A}$	
B		$\overline{B}$	
AUB		$\overline{A U B}$	
A∩B		$\overline{A I B}$	
A\B		$\overline{A \setminus B}$	
B\A		$\overline{B \setminus A}$	

Preme para ir á páxina seguinte.

2.c. Sucesos compatibles e incompatibles

Le as definicións da pantalla e completa
Nun experimento aleatorio hai sucesos que poden acontecer á vez e sucesos que non.

- Dous sucesos dinse **compatibles** se ____. Neste caso A∩B ≠ Ø, __________________ acontecer á vez.
- Dous sucesos dinse **incompatibles** se non __________________________________, neste caso A∩B = Ø, __________________ acontecer á vez

Un suceso e o seu contrario son sempre _____________________, pero dous sucesos incompatibles non sempre son ____________________.

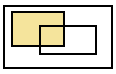
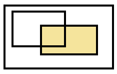
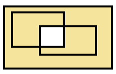
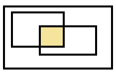
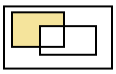
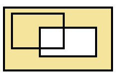
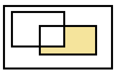
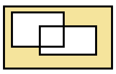
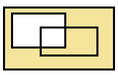
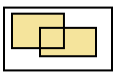
Dado o **Espazo muestral**={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, e os sucesos: **Vermello**={1, 4, 7, 10}, **Verde**={1, 2, 3}, **Azul**={3, 6, 9, 12}, **Gris**={7, 8, 9} e **Laranxa**={3, 5, 7}, con axuda da escena di se son compatibles ou non os sucesos:

SUCESOS	***COMPATIBLES / INCOMPATIBLES***	***SUCESOS***	***COMPATIBLES / INCOMPATIBLES***
Verde e Vermello		Vermello e azul	
Verde e azul		Verde e amarelo	
Azul e gris		Vermello e amarelo	
Verde e gris		Amarelo e gris	
Vermello e gris		Amarelo e azul	

Preme o botón para facer uns exercicios.

Observa os debuxos e razoa que conxunto é cada un deles. Cando os teñas todos preme "Comprobar"

Completa os resultados nesta táboa:

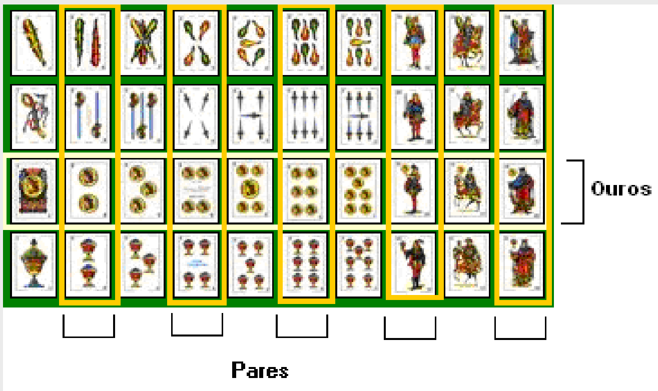
A = 		**B =** 	
1 		 **2**	
3 		 **4**	
5 		 **6**	
7 		 **8**	

Preme para ir á páxina seguinte.

EXERCICIOS

1. Nunha bolsa temos tres bólas numeradas como 1, 2 e 3. Consideramos o experimento de extraer unha bóla e anotar o seu número. Escribe todos os sucesos posibles. Indica cales deles son os elementais.

2. Nunha baralla, baixo o experimento de extraer unha carta, considera os sucesos a) par, b) ouros, c) par e ouros, d) par ou ouros, e) par menos ouros, f) ouros menos par e g) non par. Escribe os sucesos elementais que os forman.



3. Ao tirar un dado consideramos os sucesos: A={Par}, B={maior que 3}, e C={impar}. Dos tres pares de sucesos posibles AB, AC e BC, indica cales son compatibles e/ou incompatibles

Preme para ir á páxina seguinte.

3. Probabilidade dun suceso

3.a. A regra de Laplace

Le as definicións da pantalla.

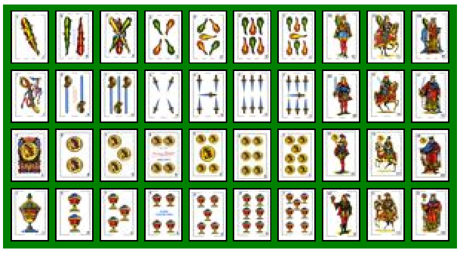
CONTESTA ESTAS CUESTIÓNS:	RESPOSTAS
Cando dicimos que un experimento aleatorio é **regular**?	
Que significa que os sucesos elementais son **equiprobables**?	
Dado un suceso A, a que chamamos **casos favorables**? e **casos posibles**?	
Podemos aplicar sempre a **regra de Laplace**? Se a resposta é negativa, indica cando se pode aplicar	

A continuación escribe a fórmula da **Regra de Laplace**

$$P(A) = \frac{n^{o}casos \qquad\qquad}{n^{o}casos \qquad\qquad}$$

Con axuda da escena da dereita, calcula as seguintes probabilidades

Extraemos unha carta dunha baralla de 40



SUCESOS	***PROBABILIDADE***
Que sexa dun pau determinado	
Que sexa dun nº determinado	
Que sexa un ás ou un basto	
Que sexa un ás e un basto	
Que non sexa nin ás nin basto	

Preme o botón para facer uns exercicios.

Considerando os experimentos "tirar un dado" e "extraer unha carta da baralla española" calcula as probabilidades pedidas

P(par)=	P(impar)=	P(ouros ou espadas)=	P(3 de bastos)=
P(>4)=	P(2 ou 6) =	P(ouros)=	P(bastos)=
P(3)=	P(>2 e <5) =	P(rei)=	P(bastos ou copas)=
P(<5 e par)=	P(>2 ou <5) =	P(rei de ouros)=	P(figura)=
P(3 ou par)=	P(>3 e <5) =	P(Un 3) =	P(figura de bastos)=

Preme para ir á páxina seguinte.

3.b. Frecuencia e probabilidade

Le as definicións da pantalla e completa:
A **frecuencia absoluta** dun suceso é ____
A **frecuencia relativa** é ____
____.
A **lei dos grandes números** di que cando repetimos un experimento _____________
____
____
Como consecuencia da lei dos grandes números, temos unha nova **definición de probabilidade** dun suceso como ____
____

Na escena da dereita simúlase o lanzamento de tres moedas; a partir dos resultados dos lanzamentos, compara as probabilidades e as frecuencias dos sucesos:

Nº de lanzamentos	>100	>200	>500	>1000		
fr(0 caras)=					P(0 caras)=	
fr(1 caras)=					P(1 caras)=	
fr(2 caras)=					P(2 caras)=	
fr(3 caras)=					P(3 caras)=	

CONTESTA ESTAS CUESTIÓNS:	RESPOSTAS
Como é a probabilidade de obter cero caras, maior ou menor que a súa frecuencia?	
Como é a probabilidade de obter dúas caras, maior ou menor que a súa frecuencia?	
Cando se parecen máis as frecuencias e as probabilidades, con 100 lanzamentos ou con máis de 1000? Por que?	

Preme o botón para facer uns exercicios.

Tiras tres dados e sumas os resultados.
Nunha aposta, Cal é o resultado máis vantaxoso? Seguindo as indicacións da escena fai máis de 3000 tiraxes, e observando os resultados, calcula as seguintes probabilidades:

P(3)=	P(4)=	P(5)=	P(6)=
P(7)=	P(8)=	P(9)=	P(10)=
P(11)=	P(12)=	P(13)=	P(14)=
P(15)=	P(16)=	P(17)=	P(18)=

Preme para ir á páxina seguinte.

3.c. Propiedades da probabilidade

Vista a relación entre frecuencia relativa e probabilidade, cúmprese que:

- A probabilidade dun suceso é un número ____________________.
- A probabilidade do **suceso seguro** é ______ e a do **suceso imposible** é _______.
- A probabilidade da **unión de dous sucesos incompatibles** é ______________

E destas dedúcese ademais que:

- A probabilidade do **suceso contrario** é **p(Ā)=** ________________
- A probabilidade da **unión de dous sucesos compatibles** é ____________________

Se pulsas en **Aplicacións** verás un exemplo no que se calcula a probabilidade da intersección de dous sucesos e outro no que se aplica a probabilidade do suceso contrario

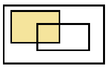
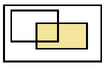
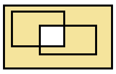
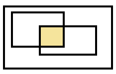
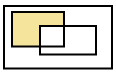
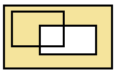
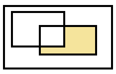
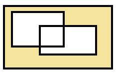
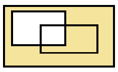
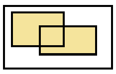
Na escena da dereita hai un exemplo resolto:
Nunha urna hai 10 bólas numeradas do 1 ao 10.
Sácase unha bóla e mírase o número.
Consideramos os sucesos: A= {1, 2, 3, 4} e B={4, 5, 6, 7, 8}.

Con axuda da escena escribe a probabilidade dos sucesos da táboa:

p(A)	p(A∩B)	$p(\overline{A})$	$p(\overline{A \text{ I } B})$
p(B)	p(A\B)	$p(\overline{B})$	$p(\overline{A \setminus B})$
p(AUB)	p(B\A)	$p(\overline{A \cup B})$	$p(\overline{B \setminus A})$

Preme o botón para facer un exercicio.

Se p(A)=0,5, p(B)= 0,4 e p(∩AB)= 0,2; calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

A = 		B = 	
1 		 2	
3 		 4	
5 		 6	
7 		 8	

Preme para ir á páxina seguinte.

3.d. Calcular probabilidades

Nesta páxina aparecen dúas escenas para que practiques calculando as probabilidades que se propoñen coa diana e a ruleta.

Preme o botón para facer uns exercicios.

Fai ata que o número de acertos sexa superior a 10.

EXERCICIOS

4. Temos un dado de 20 caras {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6} perfectamente equilibrado Cal é a probabilidade de obter cada un dos resultados posibles?

5. Se lanzamos o dado anterior 1000 veces, Cantas veces se espera que saia cada resultado aproximadamente?

6. Para o dado {1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5} de 20 caras calcula as probabilidades seguintes:
   a) P(par)= 8/20 =0,4
   b) P(mayor de 3) =11/20 =0,55
   c) P(par e maior de 3) =5/20 =0,25
   d) P(par ou maior de 3) =14/20 =0,7
   e) P(par menos maior de 3) =3/20 =0,15
   f) P(mayor de 3 menos par)=6/20=0,3
   g) P(no par)=12/20=0,6

7. En Nunha bolsa temos 7 bólas vermellas, 9 bólas azuis e 4 verdes. Extraemos unha bóla, calcula a probabilidade de que
   a) Non sexa vermella
   b) Sexa verde
   c) Sexa vermella ou azul

8. Nun grupo, o 40% xoga baloncesto e o 60% fútbol, sabendo que o 85% practica algún dos dous deportes, que porcentaxe xoga aos dous?

9. No grupo A hai 18 persoas das que 10 falan inglés e 8 non; no B hai 12 persoas das que 3 falan inguas e 9 non; no C hai 10 persoas 3 que falan inglés e 7 que non. Elíxese ao azar unha persoa de cada grupo, calcula a probabilidade de que das tres, polo menos unha fale inglés.

Preme para ir á páxina seguinte.

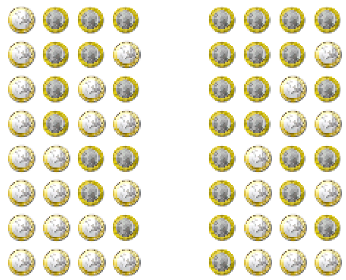
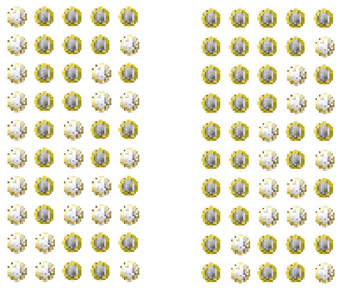
4. Experimentos compostos

4.a. Sucesos compostos

Un **experimento composto** é o que ____
____

Para calcular o espazo mostral dun experimento composto convén, en moitas ocasións, facer un diagrama de árbore que represente todas as opcións. Cada resultado vén dado por un camiño do diagrama. Observa na escena como constrúe o diagrama de árbore do exemplo e como se usa para calcular a probabilidade de cada suceso.

Preme o botón para facer un exercicio.

PROBABILIDADE CON N MOEDAS EXPERIMENTO: Lanzar N moedas equilibradas Calcula a probabilidade en cada caso	
CASO 1: 2 Moedas 	CASO 3: 4 Moedas 
CASO 2: 3 Moedas 	CASO 3: N Moedas 

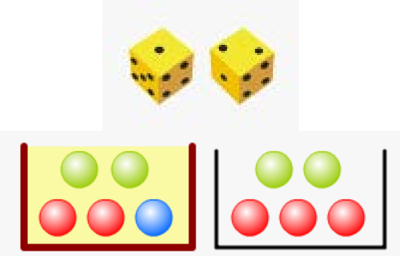
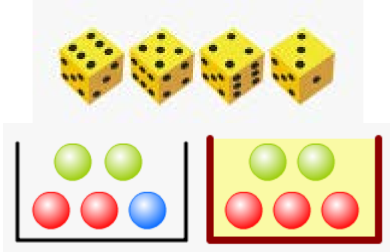
Preme para ir á páxina seguinte.

4.b. Regra da multiplicación

Se te fixas no exemplo anterior, ao indicar a probabilidade de cada rama do camiño, obtense a probabilidade de cada suceso composto calculando o produto dos respectivos sucesos simples.
A probabilidade dun **suceso** nun experimento composto é ______________________
____
Nas escenas da dereita podes exercitar este principio, observa en primeiro lugar o exemplo e logo practica na outra escena. Anota a continuación polo menos dous exercicios que resolveras ben:

EXERCICIO 1	**EXERCICIO 2**
p(**A**)= p(**N**)= p(**V**)=	p(**A**)= p(**N**)= p(**V**)=

Preme o botón para facer un exercicio.

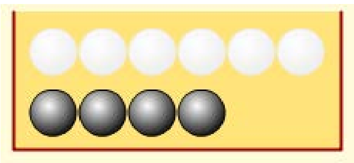
Temos dúas urnas, A e B, con bólas vermellas, verdes e azuis. Lanzamos un dado, se sae 1 ou 2 sacamos unha bóla de A, e se sae 3, 4, 5 ou 6 de B		
		
p(A e R) = ___ . ___ = ___	p(A e V) = ___ . ___ = ___	p(A e A) = ___ . ___ = ___
p(B e R) = ___ . ___ = ___	p(B e V) = ___ . ___ = ___	p(B e V) = ___ . ___ = ___

Preme para ir á páxina seguinte.

4.c. Extraccións con e sen devolución

Un exemplo de experimento composto atopámolo na extracción sucesiva de cartas ou de bólas dunha urna... Nestes casos hai que considerar se se devolve a carta, bóla, etc. antes de sacar a seguinte ou non.
Na páxina hai dúas escenas, que corresponden con dous exemplos diferentes, un de extracción de bólas e outro de extracción de cartas; practica con elas antes de facer o exercicio.

Preme o botón para facer un exercicio.

Nunha urna hai 6 bólas brancas e 4 negras. Sacamos dúas bólas, unha tras outra Fai o diagrama de árbore en cada caso		
	***Con devolución***	***Sen devolución***

Calcula as seguintes probabilidades:	***Con devolución***	***Sen devolución***
cal é a probabilidade de que as dúas sexan brancas?		
cal é a probabilidade de que a 1ª sexa branca e a 2ª negra?		
¿al é a probabilidade de que as dúas sexan negras?		

Preme para ir á páxina seguinte.

5. Probabilidade condicionada

5.a. Sucesos dependentes e independentes

Cando se realizan observacións de varios sucesos pode que un dependa do outro.

Chámase **probabilidade condicionada**, de B a A, e exprésase **p(B/A)** á probabilidade de que ____

P(B / A) = ――――――

Se premes no enlace **Por que?** verás a demostración desta fórmula

Dados dous sucesos, dise que son **independentes** se ______________________________
____
Dados dous sucesos, dise que son **dependentes** se ______________________________
____.

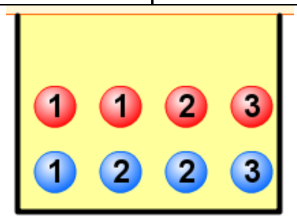
- A e B **independentes**: P(B/A)=_____________
- A e B **independentes**: P(A∩B)=_____________

Na escena da dereita tes un exemplo de sucesos dependentes; segue as súas instrucións para ver a explicación.

Preme o botón para facer o exercicio.

Primeiro fai ti os cálculos e comproba na escena despois

Fíxate ben nas bólas numeradas que contén a urna. Imos extraer unha bóla, queremos descubrir se terás premio.
Segue as instrucións da escena para ver a túa probabilidade de premio



Número	*Vermella*	*Azul*
p(1)=	p(1/vermella)=	p(1/azul)=
p(2)=	p(2/vermella)=	p(2/azul)=
p(3)=	p(3/vermella)=	p(3/ azul)=

Explica a continuación que sucesos son independentes e por que

Explica a continuación que sucesos son dependentes e por que

Preme para ir á páxina seguinte.

5.b. Diagramas de árbore

Como puideches ver, nos experimentos compostos pódese facer un diagrama en árbore, e cada resultado vén dado por un camiño na devandita árbore.
Para calcular unha probabilidade só hai que debuxar o camiño correspondente, e o produto das probabilidades de todas as ramas que o forman será o valor que buscamos.

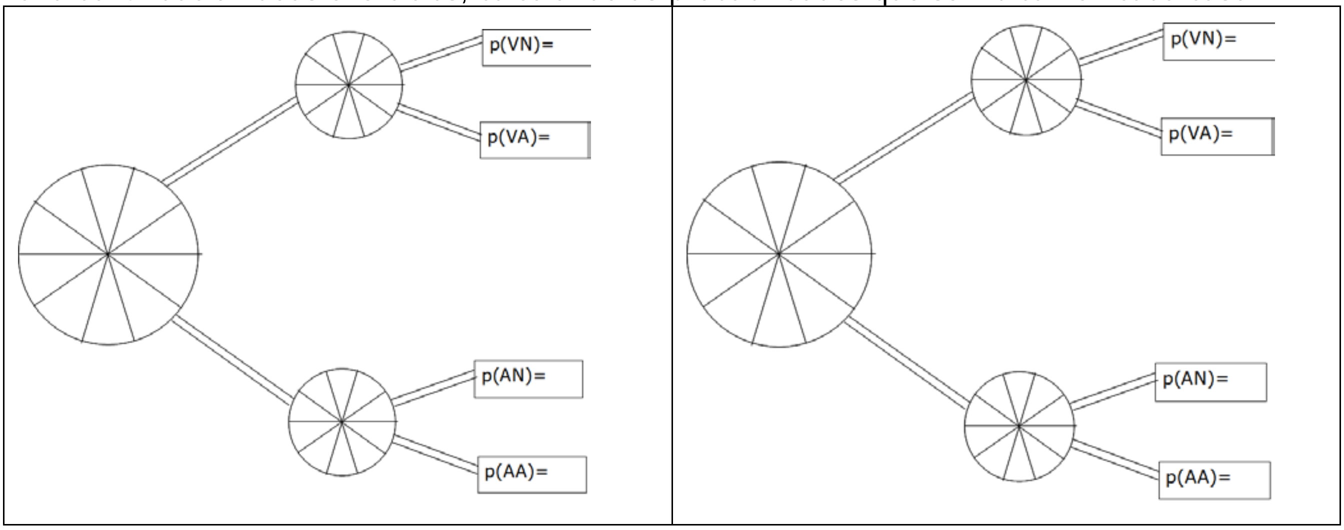
- Se acontece A e logo B: P(A e B)=________________
- A suma das probabilidades de todos os camiños é igual a ______

No exemplo da escena da dereita podes comprobar este último resultado, xoga e observa a suma total.

Preme o botón para facer un exercicio.

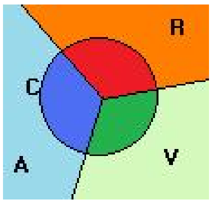
Á esquerda tes unha ruleta que determina que camiño eliximos entre dous, e unha ruleta en cada camiño para elixir a cor; cada vez que pulsas Novas ruletas, tes un exercicio diferente, e cada vez que pulsas Xirar ruletas, realízase o experimento e calcúlanse as frecuencias absoluta e relativa.

Fai a continuación dous exercicios, calculando as probabilidades que se indican en cada caso:



Preme para ir á páxina seguinte.

5.c. Probabilidade total



Consideremos os sucesos representados pola imaxe. R=Rojo, V=Verde e A=Azul son tres sucesos incompatibles e tales que a unión forma todo o espazo mostral. Sexa C=Círculo un suceso calquera.

Escribe a fórmula da probabilidade total para este exemplo:

p(C)=

No exemplo da escena da dereita podes practicar este resultado.

Preme o botón para facer un exercicio.

A probabilidade de acertar en amarelo na diana da figura é p(A)= ______, en laranxa p(N)= _________ e en verde p(V)= _____. Estas probabilidades suman 1. As probabilidades de brillo ou claro son: • Se impacta en amarelo: ______ brillo e ____ claro. • Se impacta en laranxa: ______ brillo e ____ claro. • Se impacta en verde: ______ brillo e ____ claro. Cal é a probabilidade de acertar en brillo?	p(A).p(B/A)= p(N).p(B/N)= p(V).p(B/V)= p(B)=

Preme para ir á páxina seguinte.

5.d. Probabilidade "a posteriori"

En ocasións interesa coñecer a **p(A/S)**, é dicir cando xa sabemos que aconteceu S na segunda experiencia, preguntámonos a probabilidade de que se chegara a través de A.
Trátase dunha probabilidade condicionada coñecida como **Fórmula de Bayes**:

$$p(A/S) = \frac{\qquad}{\qquad}$$

Observa no exemplo da escena como se desenvolve esta fórmula e completa a seguinte táboa de probabilidades

	2ª verde	***2º negra***	***Total***
1ª verde	p(VV)=	p(VN)=	p(1ªV)=
1º negra	p(NV)=	p(NN)=	p(1ªN)=
Total	p(2ªV)=	p(2ªN)=	

A partir da táboa, calcula as seguintes probabilidades condicionadas

p(V/V)=---------------------------= p(V/N)= ---------------------------=

p(N/V)=---------------------------= p(N/V)= ---------------------------=

Preme o botón para facer un exercicio.

A probabilidade de acertar en amarelo na diana da figura é p(A)= ______, en laranxa p(N)= _________ e en verde p(V)= _____. Estas probabilidades suman 1. As probabilidades de brillo ou claro son: • Se impacta en amarelo: ______ brillo e ____ claro. • Se impacta en laranxa: ______ brillo e ____ claro. • Se impacta en verde: ______ brillo e ____ claro. Se se acertou en brillo, cal é a probabilidade de que fose sobre amarelo?	p(A).p(B/A)= p(N).p(B/N)= p(V).p(B/V)= p(B)= p(A/B)=

Preme para ir á páxina seguinte.

EXERCICIOS

10. Lanzamos un dado de 4 caras {1,2,3,4} e outro de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Cal é a probabilidade de obter dous tres. E dous catros?.

11. Nunha bolsa temos 5 bólas numeradas do 1 ao 5. Extraemos dúas bólas,

a) ¿Cal é a probabilidade de obter un 2 e un 3 se non devolvemos as bólas sacadas??

b) e cal se as devolvemos?

12. Ao tirar dous dados, Cal é a probabilidade de obter polo menos 10 puntos?

13. Tiramos unha moeda trucada na que P(C)=0,6 e P(X)=0,4. Se sae cara tiramos un dado {1,2,3,4} de 4 caras e se sae cruz un {1,2,3,4,5,6} de seis. Temos a mesma probabilidade de que saia 1 despois de que saia cara ou cruz?. Canto vale en cada caso?. Cal é a probabilidade de que saia 1?

14. Temos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Se sacamos un 1 tiramos unha moeda, e dous se sacamos un 2. Cal é a probabilidade de obter unha cara?

15. Temos un dado {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 caras. Tiramos o dado, se sae 1 sacamos unha bóla de {RRNNN} e se sacamos un 2 sacamos unha de {RRRRN}. Saíu N, Cal é a probabilidade de que fose cun 1 do dado?

16. A probabilidade de acertar en amarelo na diana da figura é 0,3, en verde 0,4 e en laranxa 0,3. Ademais se se acerta en amarelo a probabilidade de que sexa en brillo é 0,7; a probabilidade de brillo en verde é 0,6 e en laranxa 0,3.

a) Cal é a probabilidade de acertar na zona brillante?

b) Se se acertou na zona brillante, cal é a probabilidade de que fose en amarelo

Lembra o máis importante - RESUMO

Experimentos aleatorios

Un experimento aleatorio é aquel no que ____ o resultado por máis que se repita

Espazo **mostral** _____________________
____

Sucesos **elementais**: _________________
____

Un suceso A: __________________________
____

Dous sucesos son **compatibles** se _________
____

Suceso **seguro**: ________________________
____

Suceso **imposible**: _____________________
____

Suceso **contrario** a un suceso A: ________
____

Dous sucesos son **incompatibles** se ________
____

Operacións con sucesos

Unión A U B: verifícase cando

Intersección A∩ B: verifícase cando

Diferenza A-B: verifícase cando

Regra de Laplace

Pódese aplicar só cando os sucesos elementais son _______________________

$$p = \frac{\text{Nº casos}\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{\text{Nº casos}}$$

Propiedades da probabilidade

	A e B son **incompatibles**	A e B **compatibles**
p(S. seguro) = P(E) = _______ p(S. imposible) = P(Ø) = _______ _______≤ P(suceso)≤ ______ $p(\bar{A})$= 1- p(____)	p(A ou B) =_____________	p(A ou B) =______________

Experimentos compostos

Están formados por ____.
Para calcular a probabilidade ____

Probabilidade condicionada

En sucesos consecutivos poden producirse dúas situacións:

Independentes **Dependentes**

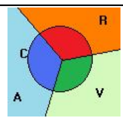
Fórmula de Bayes

$$p(B/A) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Probabilidade total

Se se cumpre que P(A)+P(V)+P(R)=1, entón se cumpre que

P(C)=____



Preme para ir á páxina seguinte.

Para practicar

Agora vas practicar resolvendo distintos EXERCICIOS. Nas seguintes páxinas atoparás EXERCICIOS de:

Combinatoria
Aplicación da regra de Laplace e propiedades da probabilidade
Probabilidade condicionada, probabilidade total e Bayes

Completa o enunciado cos datos cos que che aparece cada EXERCICIO na pantalla e despois resólveo.

É importante que primeiro resólvalo ti e despois comprobes no ordenador se o fixeches ben.

Combinatoria

Equipos

1. Una clase tiene ___ personas. Si queremos dividirla en dos equipos con el mismo número de personas, ¿de cuántas maneras se puede hacer?	

Comunidad de vecinos

2. Una comunidad de vecinos formada por __ personas debe elegir una persona para el puesto de presidenta, otra de secretaria y otra de tesorera. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?	

Quiniela

3. ¿De cuántas formas distintas se puede cubrir una quiniela? Ten en cuenta que una quiniela está formada por 14 partidos en los que se pueden poner 3 resultados (1 X 2) y un pleno al 15 en el que hay que adivinar el número de goles de local y visitante entre 4 valores (0 1 2 M) para cada uno. 4.	

Prueba ciclista

4. En una prueba ciclista con ___participantes se entregan 3 maillots. ¿De cuántas maneras se pueden repartir teniendo en cuenta que una misma persona puede ganar varios?	

Biblioteca

5. Queremos colocar ___ libros en una estantería. Descubre de cuántas maneras puede hacerse si: a) Todos los libros son distintos. b) Solo hay tres libros distintos: __ del primer tipo, __ del 2º y __ del 3º. c) Además, todos los iguales deben quedar juntos.	

Regalos

6. Tras haber conseguido ___ puntos en un concurso, puedes elegir __ regalos de un catálogo de premios con un total de ___ regalos. ¿De cuántas maneras distintas puedes realizar tu elección?	

Aplicación da regra de Laplace e propiedades da probabilidade

1 dados

7. Tiramos un dado de 10 caras, que probabilidade hai de sacar un número par?	

2 dados

8. Tiramos dous dados de 6 caras. que probabilidade hai de sacar máis de 9 puntos?	

3 dados

9. Ao tirar dous dados, que probabilidade hai de sacar igual?.	

4 cartas (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

10. Se extraemos unha carta dunha baralla española, a probabilidade de extraer un ____ é?	
11. Se extraemos unha carta dunha baralla española, a probabilidade de extraer un ____ é?	

5 cartas

12. Se extraemos unha carta dunha baralla española, a probabilidade de extraer un 2 ou un 5 é?	

6 cartas (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

13. Se extraemos unha carta dunha baralla española, a probabilidade de non sacar nin un ____ nin un basto é?	
14. Se extraemos unha carta dunha baralla española, a probabilidade de non sacar nin un ____ nin un basto é?	

7 Moedas

15. Se lanzamos 3 moedas, a probabilidade de obter unha cara é	

8 Moedas

16. Se lanzamos unha moeda tres veces, a probabilidade de obter unha cara é:	

9 Moedas

17. Lanzamos unha moeda trucada tres veces. A probabilidade de cara é ___ e a de cruz é ___. Cal é a probabilidade de obter unha cara?	

10 Urnas

18. Nunha urna temos ___ bólas brancas e ___ negras. Achar a probabilidade de extraer unha branca ao sacar unha bóla.

11 Urnas

19. Nunha urna temos ___ bólas brancas e ___ negras. Achar a probabilidade de extraer dúas brancas ao sacar dúas bólas con devolución.

12 Urnas

20. Nunha urna temos ___ bólas brancas e ___ negras. Achar a probabilidade de extraer unha branca e unha negra ao sacar dúas bólas con devolución.

Preme para ir á páxina seguinte.

Probabilidade condicionada, probabilidade total e Bayes

Dúas cruces de camiños (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

21. Temos dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___. O camiño I pode rematar en turquesa ou en rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño II leva directamente verde. Calcula as probabilidades dos tres destinos.

22. Temos dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___. O camiño I pode rematar en turquesa ou en rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño II leva directamente verde. Calcula as probabilidades dos tres destinos.

Tres cruces de camiños (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

23. Temos dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___. O camiño I pode rematar en turquesa ou en rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño II en rosa ou en verde con probabilidades ___ e ____ respectivamente. Calcula as probabilidades dos tres destinos.	
24. Temos dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___. O camiño I pode rematar en turquesa ou en rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño II en rosa ou en verde con probabilidades ___ e ____ respectivamente. Calcula as probabilidades dos tres destinos.	

Camiños e Bayes (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

25. Dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___ O 1º pode rematar en turquesa ou rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño 2º pode rematar en rosa ou verde con probabilidades ___ e ____ respectivamente. Concluída rosa, cal é a probabilidade de seguir o 1º?	
26. Dous camiños I e II con p(I)=___ e p(II)= ___ O 1º pode rematar en turquesa ou rosa con probabilidades ___ e ____ respectivamente. O camiño 2º pode rematar en rosa ou verde con probabilidades ___ e ____ respectivamente. Concluída rosa, cal é a probabilidade de seguir o 1º?	

Praia sur (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

27. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Cal é a probabilidade de ir a unha praia do sur?	

28. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Cal é a probabilidade de ir a unha praia do sur?	

Campo norte (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

29. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Cal é a probabilidade de ir ao campo do norte?	
30. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Cal é a probabilidade de ir ao campo do norte?	

Campo praia e Bayes (Fai polo menos dous exercicios sen cambiar de opción)

31. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Sabemos que Felipe foi á praia, Cal é a probabilidade de que ademais sexa do norte.	
32. Cunha probabilidade de _____ un habitante dun pobo A vai á praia, e con ______ vai ao campo. E cunha probabilidade ___ vai ao Norte e coa contraria ao Sur. Sabemos que Felipe foi á praia, Cal é a probabilidade de que ademais sexa do norte.	

Preme ▶ para ir á páxina seguinte.

Autoavaliación

Completa aquí cada un dos enunciados que van aparecendo no ordenador e resólveo, despois introduce o resultado para comprobar se a solución é correcta.

1	Tiramos un dado de 10 caras. P(obtener <4) =	
2	Nunha bolsa temos ______ bólas vermellas ___ bólas azuis e ____ bólas verdes. Extraemos unha bóla, cal é a probabilidade de obter unha bóla vermella?	
3	Dispoñemos dunha baralla de 100 de catro cores numeradas de 1 ao 25. Cal é a probabilidade de obter un _____?	
4	Sucesos elementais={1, 2, 3, 4, 5, 6, ...48, 49, 50} A={1, 2, 3, 4, 5}, B={4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e C={1, 2, 3, 4,...., 23, 24, 25} p(A unión C)=	
5	Lanzamos dous dados normais e sumamos. Que probabilidade hai de obter menos de 5?	
6	Que probabilidade hai de non sacar nin bastos nin figuras ao extraer unha carta dunha baralla española?	
7	Extraemos unha carta, devolvémola e extraemos outra, dunha baralla española. Que probabilidade hai de sacar un ouro?	
8	Tiramos dúas moedas. Se saen dúas caras extraemos unha bóla dunha urna con ____B e ____N, e en caso contrario dunha urna con ____B e ____N, cal é a probabilidade de sacar unha B?.	
9	Tiramos un dado de 10 caras. Se sae menor que _____ extraemos unha carta, e no caso contrario dúas devolvéndo a 1ª antes de sacar a 2ª Que probabilidade hai de obter algún ouro?	
10	Nun colexio o _____% dos alumnos practican fútbol, o ___% Baloncesto e o ____% un ou outro. Que probabilidade hai de que un estudante practique os dous deportes?	

Para practicar máis

1. Unha aula ten 20 persoas. Se queremos dividila en dous equipos co mesmo número de persoas, de cantas maneiras se pode facer?

2. Unha comunidade de veciños formada por 36 persoas debe elixir unha persoa para o posto de presidente, outra de secretaria e outra tesoureira. De cantas maneiras se pode facer?

3. De cantas formas distintas se pode cubrir unha quiniela?

Ten en conta que unha quiniela está formada por 14 partidos nos que se poden por 3 resultados (1 X 2) e un pleno ao 15 no que hai que adiviñar o número de goles de local e visitante entre 4 valores (0 1 2 M) para cada un.

4. Nunha proba ciclista con 53 participantes entréganse 3 maillots. De cantas maneiras se poden repartir tendo en conta que unha mesma persoa pode ganar varios?

5. Queremos colocar 12 libros nun estante. Descubre de cantas maneiras pode facerse se:

a) Todos os libros son distintos.

b) So hai tres libros distintos: 4 do primeiro tipo, 3 do 2º e 5 do 3º.

c) Ademais, todos os iguais deben quedar xuntos.

6. Existen no mercado varios tipos de dados, aínda que o máis normal sexa o cúbico de seis caras. Hainos de 4, 6, 10, 12, e 20 caras. En xeral, van numerados do 1 ao nº de caras que teñen. Escribe o suceso "Par" para cada un deles.

7. Temos un dado de 4 caras numeradas do 1 ao 4. Tirámolo unha vez. Escribe o suceso seguro, o imposible, e todos os posibles clasificados polo seu tamaño.

8. Temos un dado de 6 caras branco, no que se escribiron nas súas caras os seguintes números {1,1,1,2,2,3}. Escribe todos os sucesos posibles.

9. Na escola municipal dun pobo hai clases para deportes de equipo de baloncesto, fútbol e voleibol. Hai 100 inscritos en deportes de equipo, 70 van a clases de fútbol, 60 de baloncesto e 40 a fútbol e baloncesto. Cantos van só a voleibol?

10. Determina o número de cartas, nunha baralla española de 40, que:

a) Con numeración menor que 4.

b) De bastos e maiores que 4.

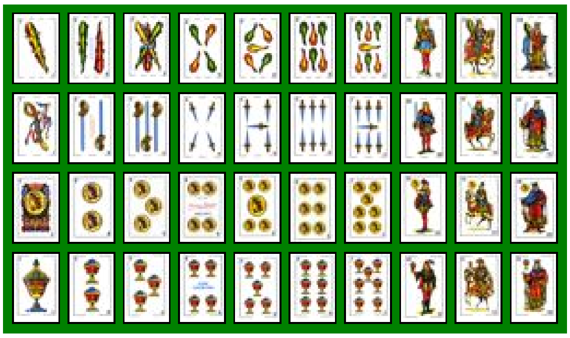
c) Figuras de ouros ou bastos.

11. Nunha baralla española, conta as cartas dos sucesos:

a) Ouros e setes b) Ouros ou setes

c) Sete de ouros d) Figuras

e) Ouros ou figuras f) Ouros e figuras



12. Para un dado de seis caras {1,2,3,4,5,6}, escribe os sucesos:

a) Par

b) Non par

c) Par e maior que 3

d) Par ou maior que 3

e) Par menos maior que 3

f) O contrario de (par e maior que 3)

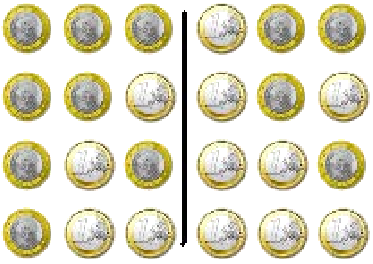
13. Temos un dado cos números {1,1,1,2}. Se o lanzamos 100 veces, arredor de que cantidade de veces sairá cada un dos posibles resultados?.

14. Temos un dado de dez caras numeradas como {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Cal é a probabilidade de cada un dos sucesos elementais?.

15. Temos unha ruleta de 10 posicións, 3 vermellas, 4 verdes, 2 negras e unha azul. Cal é a probabilidade de que ao xirala se obteña cada un das cores?

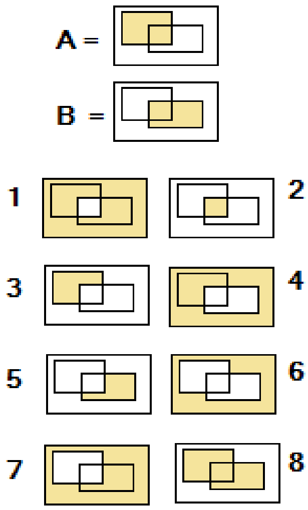
16. Se lanzamos dúas moedas poderemos obter un destes 4 resultados {OO, XO, OX, XX}.

Podes escribir desta forma os posibles para tres moedas.

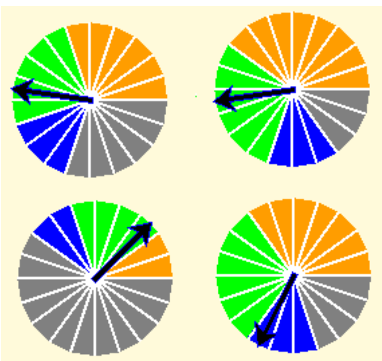


E para 4. Cal é a probabilidade de obter dúas caras en cada un dos experimentos?

17. Sabendo que P(A)=0.5, p(B)=0.7 e P(2)=0.3, calcula P(1), P(3), P(4), P(5), P(6), P(7) e P(8),



18. Cál é a probabilidade de obter laranxa, verde, azul ou gris en cada unha das seguintes ruletas?



19. Temos un dado de 10 caras desta forma {1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2}. E dúas urnas, unha A={R, R, R, V, V} e B={R, V, V, V, V}. Lanzamos o dado, se sae 1 extraemos unha bóla de A, e se sae 2 de B. Cal é a probabilidade de extraer unha vermella de A? E unha vermella de B? E unha verde de A?.

20. Nunha bolsa hai as seguintes bólas {1,2,2,3,3}. Extraemos primeiro unha bóla e devolvémola para extraer outra. Calcula a probabilidades seguintes: P(1,1), P(1,2), P(1,3).

21. Se para a segunda extracción do exercicio anterior non devolvemos a 1º bóla, Cal é o valor das probabilidades agora?

22. Calcula as probabilidades de obter 2 ouros ao extraer dúas cartas dunha baralla española nos casos de devolver e de non devolver a 1º carta á baralla antes de extraer a 2ª.

23. Temos un dado de 10 caras da forma {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2}, e dúas urnas, unha A={R,R,R,V,V} e outra B={R,V,V,V,V}. Lanzamos o dado, se sae 1 extraemos unha bóla de A, e se sae 2 de B. Cal é a probabilidade de extraer unha R? E unha V?.

24. Temos unha urna con bólas numeradas como se indica {1,1,2,2,2} e dúas urnas I={R,V} e II={N,N,R,V}. Extraemos unha bóla para decidir de que urna escollemos outra. Cal é a probabilidade de obter R ou N?

25. Realizado o experimento do exercicio anterior, resultou ser V. Cal é a probabilidade de que fose extraída da urna A? E da B?

26. Lánzase dúas moedas. Se saen dúas caras tírase o dado {1,1,1,2,2,2} e se non o dado {1,1,2,2,3,3}. Cal é a probabilidade de obter un 1? Cando sae un con que probabilidade saíu tamén dúas caras?

27. Dez amigos organizan unha viaxe e elixe o destino un deles por sorteo. Seis queren ir á costa e catro ao interior. Dos primeiros, dous queren ir ao norte e catro ao sur. Dos de interior, a metade prefiren o norte e a outra metade o sur.

a) Acha a probabilidade de ir á costa do norte.

b) Cal é a probabilidade de ir ao norte?

c) Se van ao norte, cal é a probabilidade de que sexa na costa?