

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Distinguir los experimentos aleatorios de los que no lo son.
- Hallar el espacio muestral y distintos sucesos de un experimento aleatorio.
- Realizar operaciones con sucesos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilidad de un suceso mediante la regla de Laplace.
- Calcular probabilidades mediante la experimentación.
- Conocer y aplicar las propiedades de la probabilidad.

Antes de empezar

1. Experimentos aleatorios pág. 4
Espacio muestral y sucesos
Técnicas de recuento
Operaciones con sucesos
Propiedades
2. Probabilidad pág. 7
Probabilidad de un suceso
Regla de Laplace
Propiedades de la probabilidad
Probabilidad experimental
Simulación

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

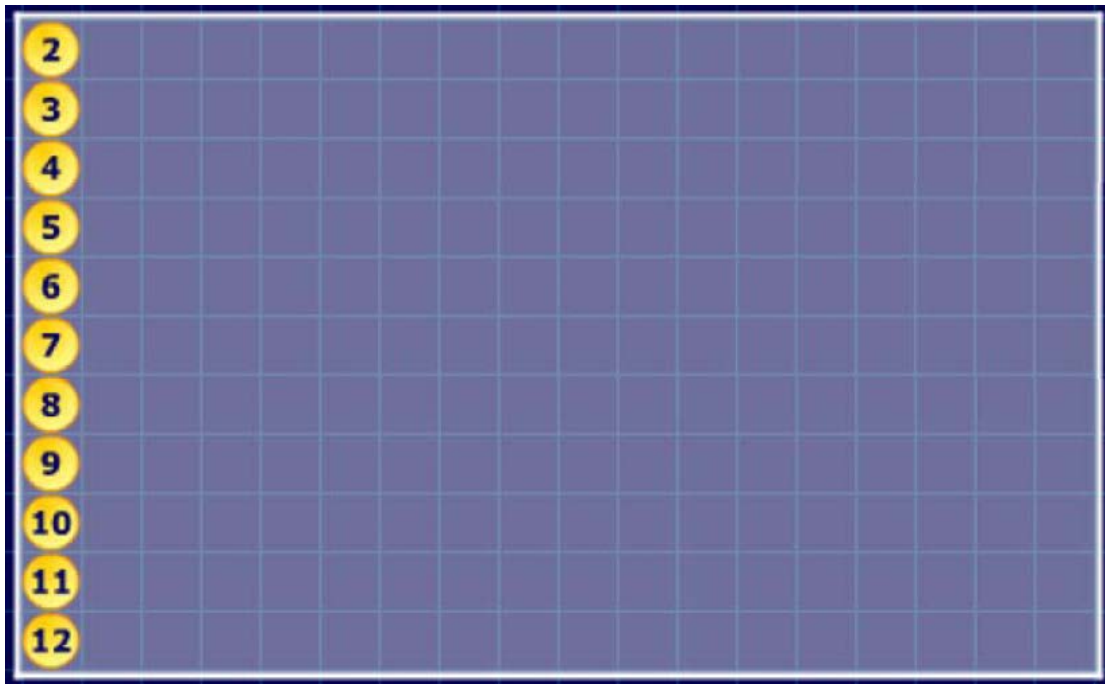
Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar

"En el fondo la teoría de la probabilidad es sólo sentido común expresado con números".

Pierre Simón de Laplace



Investiga jugando

Se tiran dos dados, la ficha cuyo número coincide con la suma de los resultados avanza una casilla. ¿Todas tienen la misma probabilidad de ganar? , ¿por cuál apostarías?, tira los dados y compruébalo.

¿Sabías que la palabra azar procede del árabe "al zhar", nombre con el que se designaban los dados por la flor de azahar que llevaban en sus caras.



1. Experimentos aleatorios

Espacio muestral y sucesos

Un **experimento aleatorio** es aquel que antes de realizarlo no se puede predecir el resultado que se va a obtener. En caso contrario se dice determinista.

Aunque en un experimento aleatorio no sepamos lo que ocurrirá al realizar una "prueba" si que conocemos de antemano todos sus posibles resultados.

- El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se suele designar con la letra **E**. Cada uno de estos posibles resultados se llama **suceso elemental**.
- Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral. El mismo espacio muestral es un suceso llamado **suceso seguro** y el conjunto vacío, \emptyset , es el **suceso imposible**.

\emptyset : símbolo con el que se designa el conjunto vacío o que no tiene ningún elemento.

Técnicas de recuento

En muchas ocasiones un experimento aleatorio está formado por la sucesión de otros más sencillos, se dice **compuesto**, es el caso de "tirar dos dados", "lanzar dos o más monedas", "extraer varias cartas de una baraja",...

En estos casos para obtener el espacio muestral se puede utilizar alguna de estas técnicas:

- Construir una **tabla de doble entrada**, si se combinan dos experimentos simples.
- Hacer un **diagrama de árbol**, más útil si se combinan dos o más experimentos simples.

Observa que si el primer experimento tiene **m** resultados distintos y el segundo **n**, el número de resultados para la combinación de ambos experimentos es **m·n**.

En el experimento aleatorio de "tirar un dado cúbico" hay 6 posibles resultados:

Espacio muestral
 $E = \{ \text{1, 2, 3, 4, 5, 6} \}$

Algunos sucesos:
 $A = \{ \text{1, 3, 5} \}$ "salir impar"
 $B = \{ \text{3, 6} \}$ "salir múltiplo de 3"
 $C = \{ \text{6} \}$ "salir un 6"

En el experimento aleatorio de "lanzar dos monedas" hay 4 posibles resultados:

Espacio muestral
 $E = \{ \text{CC, CA, AC, CC} \}$

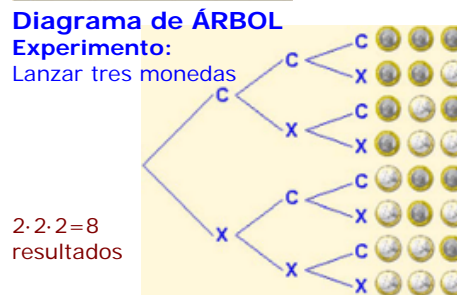
Algunos sucesos:
 $A = \{ \text{CA, AC, CC} \}$ "al menos una cara"
 $B = \{ \text{CC, CA} \}$ "la 1ª es cara"
 $C = \{ \text{CC} \}$ "ninguna es cara"

TABLA de doble entrada

Experimento: Tirar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

6 · 6 = 36 resultados



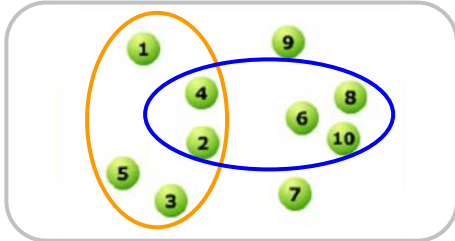
Llamamos **permutaciones** de **n** elementos (P_n) a las distintas formas de ordenar esos **n** elementos. Conocer su número es útil para realizar determinados problemas de recuento.

Veamos cómo se calcula con un ejemplo en el que queremos ordenar **n** bolas de distintos colores:

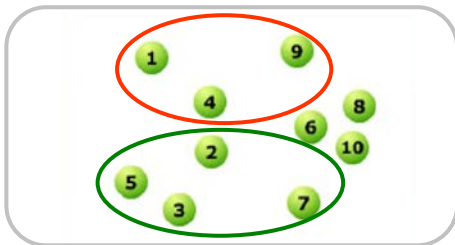
- 1 bola solo se puede ordenar de 1 manera. $P_1 = 1$
- 2 bolas se pueden ordenar de 2 maneras. $P_2 = 2 \cdot 1 = 2$
- 3 bolas, hay 6 formas de ordenarlas. La 1ª posición se puede ocupar de 3 maneras, en cada caso la 2ª de 2 y la 3ª de 1. $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- 4 bolas se podrán ordenar de $4 \cdot 6 = 24$ formas y siguiendo con este razonamiento **n** bolas se pueden ordenar de $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Este producto se designa de forma más simplificada **n!** y se dice **factorial de n**.

$P_n = n!$
 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 se lee "factorial de n"

Experimento aleatorio: *Extraer una bola y anotar el número.*



$A = \text{"salir menor que } 6\text{"}$ $B = \text{"salir par"}$
 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\bar{B} = \{1, 2, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
 $A \cap B = \{2, 4\}$



$C = \text{"salir cuadrado perfecto"}$
 $D = \text{"salir n}^\circ \text{ primo"}$
 A y B incompatibles

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral E, llamaremos:

- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos \bar{A} .
Lo forman los sucesos elementales que no están en A.
- Suceso **unión** de A y B, $A \cup B$, es el que ocurre cuando ocurre **A o B**, al menos uno de los dos.
Se forma juntando los sucesos elementales de A y B.
- Suceso **intersección** de A y B, $A \cap B$ al **suceso** que ocurre cuando ocurren **A y B** a la vez.
Se forma con los sucesos elementales comunes .

Cuando la intersección de dos sucesos es el suceso imposible, es decir que no pueden ocurrir simultáneamente nunca, se dice que ambos son **incompatibles**.

A y B incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

Atención: No hay que confundir los sucesos contrarios y los sucesos incompatibles; un suceso y su contrario siempre son incompatibles, no pueden ocurrir a la vez, pero dos sucesos incompatibles no tienen por qué ser contrarios.

Propiedades de las operaciones con sucesos

La unión e intersección de sucesos y el suceso contrario cumplen:

- La unión de un suceso y su contrario es el suceso seguro; la intersección es el suceso imposible.

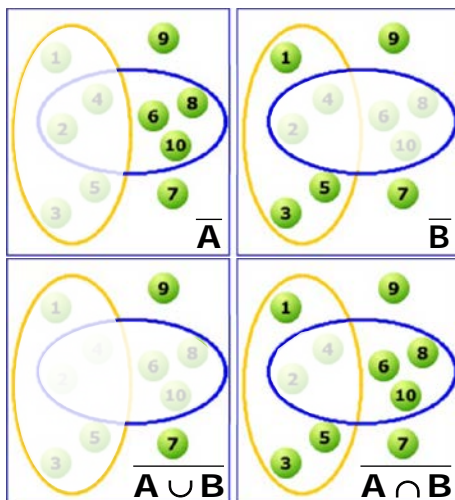
$$A \cup \bar{A} = E \quad A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- El contrario de \bar{A} es A
- El contrario de la unión es la intersección de los contrarios.

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- El contrario de la intersección es la unión de los contrarios.

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{7, 9\} = \overline{A \cup B}$
 $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \overline{A \cap B}$

EJERCICIOS resueltos

- Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y en caso afirmativo halla su espacio muestral:
 - Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo.
 - Pesar un litro de aceite.
 - Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.
 - Elegir sin mirar una ficha de dominó.
 - Averiguar el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.
 - Sacar una bola de una bolsa con 4 bolas rojas.
 - Sacar una bola de una bolsa con 1 bola roja, 1 verde, 1 azul y 1 blanca.
 - Lanzar al aire una moneda y observar el tiempo que tarda en llegar al suelo.

SOLUCIÓN: Son aleatorios, puesto que no podemos conocer de antemano el resultado los siguientes:

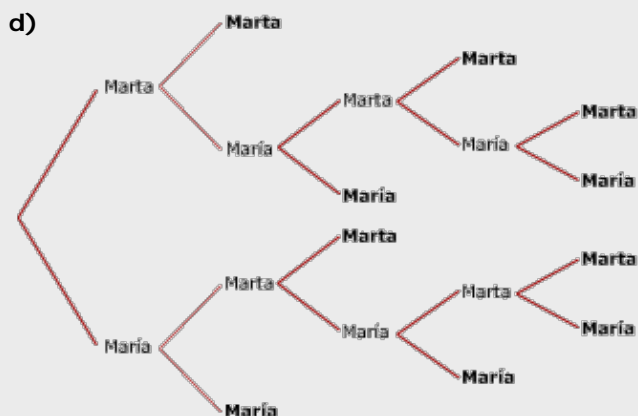
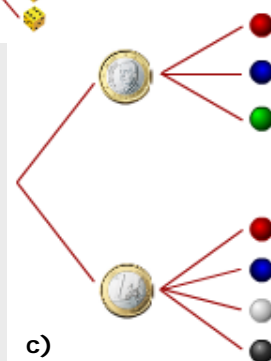
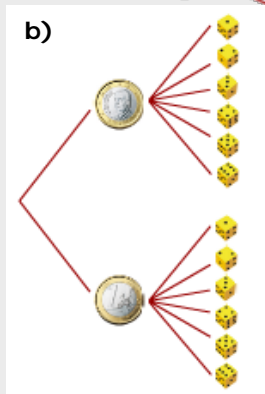
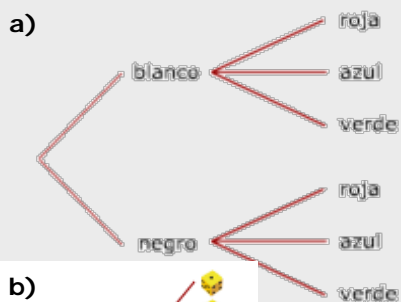
a) *Espacio muestral: $E = \{OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS\}$*

d) *El espacio muestral está formado por cada una de las 28 fichas que componen el dominó*

e) *Espacio muestral: $E = \{1, X, 2\}$*

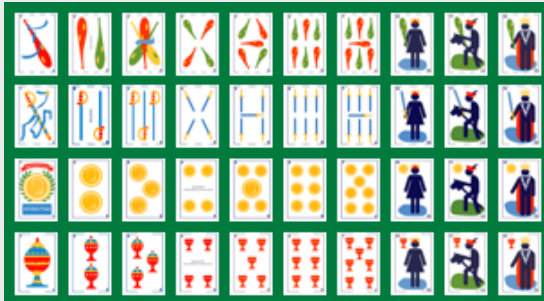
g) *Espacio muestral: $E = \{ROJA, VERDE, BLANCA, AZUL\}$*

- Calcula las posibilidades mediante un diagrama de árbol:
 - En un equipo de fútbol-sala disponen para jugar de pantalones blancos o negros, y de camisetas rojas, azules o verdes. ¿De cuántas maneras se pueden vestir para un partido?
 - Se tira una moneda y un dado, ¿cuáles son los resultados posibles?
 - Se tira una moneda, si sale cara se saca una bola de la urna A que contiene una bola roja, una azul y una verde; y si sale cruz se saca de la urna B en la que hay una bola roja, una azul, una blanca y una negra. Escribe los posibles resultados.
 - Marta y María juegan un campeonato de parchís, vence la primera que gane dos partidas seguidas o tres alternas. ¿De cuántas maneras se puede desarrollar el juego?



EJERCICIOS resueltos

3. Considera el experimento aleatorio de extraer una carta de la baraja. Expresa con uniones e intersecciones de A y de B, o con el contrario, los siguientes sucesos:



- a) A="salir figura" B="salir bastos"
"Que salga figura o sea de bastos" = $A \cup B$
- b) A= "salir un rey" B="salir copas"
"Salir copas pero que no sea rey" = $\bar{A} \cap B$
- c) A="salir un as" B="salir oros"
"Que no salga un as ni de oros" = $\bar{A} \cap \bar{B}$
- d) A="salir un rey" B="salir espadas"
"Salir el rey de espadas" = $A \cap B$

4. Se extraen dos cartas de la baraja y se mira el palo. Indica cuál, a, b ó c, es el suceso contrario a S?

S = "Las dos son de oros"

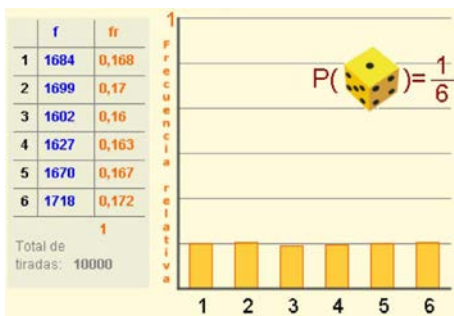
- a) "Ninguna es de oros"
- b) "Al menos una es de oros"
- c) "Al menos una no es de oros"

En el primer caso la solución es la opción c, lo contrario de que las dos sean de oros es que al menos una no lo sea.

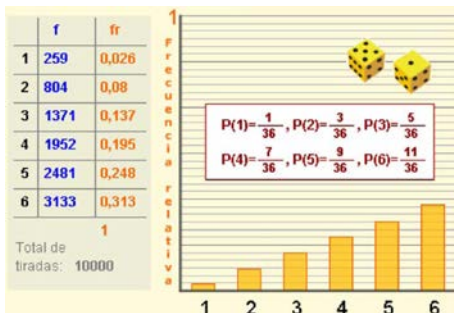
S = "Ninguna es de copas"

- a) "Las dos son de copas"
- b) "Al menos una es de copas"
- c) "Al menos una no es de copas"

En el segundo, b es la opción correcta.



Al tirar un dado muchas veces, las frecuencias relativas de cada cara se estabilizan en torno a 1/6.



El gráfico muestra las frecuencias relativas de cada resultado obtenido al tirar dos dados y elegir el nº mayor, al repetir el experimento muchas veces.

2. Probabilidad

Probabilidad de un suceso

La probabilidad de un suceso, S, indica el grado de posibilidad de que ocurra dicho suceso. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1, y lo escribimos **P(S)**.

Si P(S) está próximo a 0 el suceso es poco probable y será más probable cuanto más se aproxime a 1, que es la probabilidad del suceso seguro, P(E)=1.

Cuando se repite un experimento aleatorio muchas veces, la **frecuencia relativa** con que aparece un suceso tiende a estabilizarse hacia un valor fijo, a medida que aumenta el número de pruebas realizadas.

Este resultado, conocido como **ley de los grandes números**, nos lleva a definir la probabilidad de un suceso como el número hacia el que tiende la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.

Probabilidad

La regla de Laplace

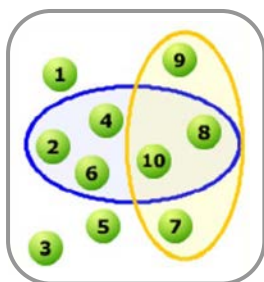
Cuando dos sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir al realizar un experimento aleatorio se dicen **equiprobables**.

Si en un espacio muestral todos los sucesos elementales son equiprobables, el experimento se dice regular y la probabilidad de un suceso cualquiera A, se puede calcular mediante la **Regla de Laplace**, según la cual basta contar, y hacer el cociente entre el nº de sucesos elementales que componen A y el nº de sucesos elementales del espacio muestral.

Se suele enunciar así:

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ casos posibles}}$$

EJEMPLO: En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10, se extrae una al azar.



✓ ¿Cuál es la probabilidad de que sea un nº par?

Casos favorables: 5

$$P(\text{n}^\circ \text{ par}) = \frac{5}{10} = 0,5$$

✓ ¿Cuál es la probabilidad de que sea un nº mayor que 6?

Casos favorables: 4

$$P(\text{n}^\circ \text{ mayor que } 6) = \frac{4}{10} = 0,4$$

Propiedades de la probabilidad

Al asignar probabilidades mediante la regla de Laplace o utilizando la frecuencia relativa puedes comprobar que se cumple:

- $0 \leq P(A) \leq 1$. La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y 1.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$. La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible 0.
- La probabilidad de la unión de dos sucesos **incompatibles** es $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Además, de estas propiedades se deducen estas otras que resultan muy útiles para calcular probabilidades:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el experimento de lanzar tres monedas, hay 8 casos posibles:



A = "salir tres caras"

Casos favorables: 1

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

B = "salir dos caras"

Casos favorables: 3

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

C = "al menos una cara"

Casos favorables: 7

$$P(C) = \frac{7}{8}$$

Se tiran dos dados y se elige el mayor de los números obtenidos.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Hay 36 casos posibles.

$$P(1) = \frac{1}{36}$$

$$P(2) = \frac{3}{36}$$

$$P(3) = \frac{5}{36}$$

$$P(4) = \frac{7}{36}$$

$$P(5) = \frac{9}{36}$$

$$P(6) = \frac{11}{36}$$

A = "Sacar un nº menor que 5"

B = "Sacar un nº múltiplo de 5"

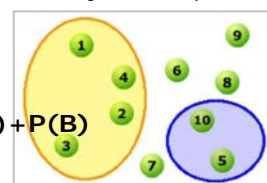
A y B incompatibles

$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,6$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A = "Sacar un nº menor que 5"

B = "Sacar un nº par"

A y B compatibles

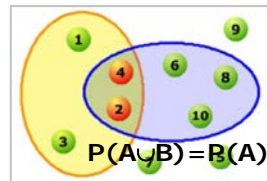
$$P(A) = 0,4$$

$$P(B) = 0,5$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

$$P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



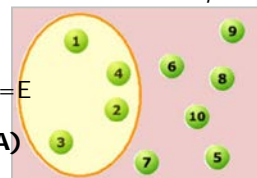
A = "Sacar un nº menor que 5"

$$P(A) = 0,4$$

$$P(\bar{A}) = 0,6$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad A \cup \bar{A} = E$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$





Probabilidad experimental

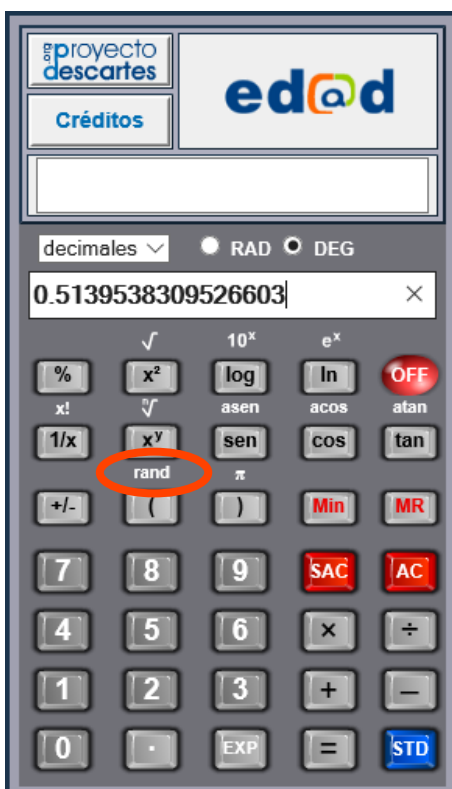
La ley de Laplace nos permite calcular la probabilidad de sucesos regulares, pero si la experiencia es irregular desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos, entonces es preciso recurrir a la experimentación.

La probabilidad **experimental** es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la frecuencia relativa del mismo al repetir el experimento muchas veces.

Cuanto mayor es el número de pruebas realizadas más se aproxima el valor obtenido al valor desconocido de la probabilidad teórica. El número de pruebas a realizar dependerá del experimento y del nº de sus posibles resultados.

Observa los ejemplos de la izquierda.

- ✓ Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cara no es la misma que la de salir cruz, para averiguar estas probabilidades se ha lanzado muchas veces obteniendo los resultados de la tabla. A la vista de éstos asignaremos a "salir cara" la probabilidad 0,6 y a "salir cruz" 0,4.
- ✓ Un dado está cargado de forma que la probabilidad de una de sus caras es cinco veces la de las demás. ¿De qué cara se trata?. ¿Cuál es su probabilidad?. Al repetir el lanzamiento muchas veces se observa que la cara cargada es la del nº 6, su probabilidad es 0,5 y la del resto de las caras 0,1.



Simulación de experimentos

En muchas ocasiones realizar un experimento aleatorio un número elevado de veces no resulta fácil, entonces recurrimos a la simulación.

Simular un experimento aleatorio consiste en sustituirlo por otro más sencillo y capaz de reproducir los mismos resultados.

Las calculadoras científicas disponen de la tecla **RAND**, RAN# ó RANDOM que al activarla, genera un número al azar comprendido entre 0 y 1, llamado **número aleatorio**. Estos números resultan de gran utilidad en la simulación de experimentos.

Para simular el lanzamiento de un dado con la calculadora y estos números.



$$\text{ent}(0,2932063716784 \cdot 6) + 1 = 2$$

En tu calculadora pulsa sobre la tecla rand, ran# o random, multiplica por 6 (nº de resultados) el número que aparece, toma la parte entera y súmala 1, ya que los resultados van de 1 a 6.

EJERCICIOS resueltos

5. La ruleta es un conocido juego de los casinos. Consiste en una rueda equilibrada, dividida en 37 casillas numeradas del 0 al 36. El 0 es de color verde y si sale gana la banca.

Hay diferentes tipos de apuestas, a un número sólo, a "par" o a "impar", a "rojo" o a "negro", a "passe" ($n^{\circ} > 18$) o a "falte" ($n^{\circ} < 18$), a una columna, ...

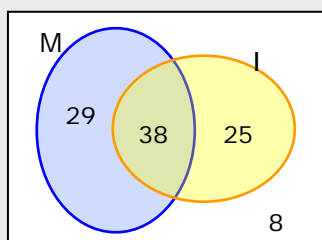
Calcula las siguientes probabilidades:

- a) $P(17) = \frac{1}{37}$ b) $P(\text{"impar"}) = \frac{18}{37}$
 c) $P(\text{"2ª columna"}) = \frac{12}{37}$ d) $P(\text{"par y rojo"}) = \frac{8}{37}$
 e) $P(\text{"impar y falte"}) = \frac{9}{37}$ e) $P(\text{"rojo"}) = \frac{18}{37}$



6. En la última evaluación, en mi clase aprobaron las Matemáticas el 67% y el Inglés el 63%, el 38% aprobaron las dos asignaturas. Elegido un estudiante de la clase al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) Haya aprobado alguna de las dos b) No haya aprobado ninguna de las dos
 c) Haya aprobado sólo las Matemáticas d) Haya aprobado sólo una de las dos



Hacer un diagrama facilita mucho la resolución del problema.

$P(M) = 0,67$ $P(I) = 0,63$ $P(A \cap B) = 0,38$

- a) "Alguna de las dos" es el suceso unión,
 $P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = 0,67 + 0,63 - 0,38 = 0,92$
 b) No aprobar ninguna es el suceso contrario a aprobar alguna de las dos (al menos una).
 $P(\text{alguna de los dos}) = 1 - 0,92 = 0,08$
 c) $P(\text{"solo M"}) = P(M \cap \bar{I}) = 0,67 - 0,38 = 0,29$
 d) $P(\text{"solo M ó solo I"}) = 0,29 + 0,25 = 0,54$ (ó $0,92 - 0,38$)

7. Al tirar una chincheta puede caer con la punta hacia arriba o hacia abajo. Para averiguar la probabilidad de cada uno de estos sucesos, se ha realizado el experimento muchas veces obteniendo los resultados dados en la tabla. A la vista de ellos, ¿qué probabilidad asignarías al suceso "caer con la punta hacia abajo"?



Nº de tiradas	10	50	100	500	1000
Punta hacia arriba	7	29	65	337	668

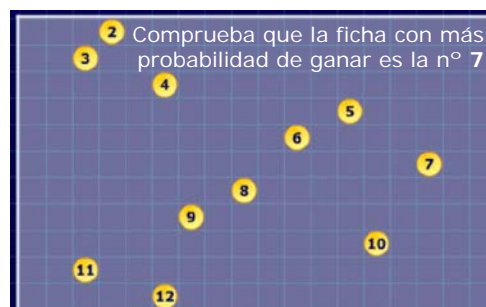
En la tabla se observa que la frecuencia relativa del suceso "caer con la punta hacia arriba" tiende a 0,67.

Caer con la "punta hacia abajo" es el suceso contrario, se puede considerar $P(\text{"punta hacia abajo"}) = 1 - 0,67 = 0,33$

Carrera con dados



- $P(2) = 1/36$
 $P(3) = 2/36$
 $P(4) = 3/36$
 $P(5) = 4/36$
 $P(6) = 5/36$
 $P(7) = 6/36$
 $P(8) = 5/36$
 $P(9) = 4/36$
 $P(10) = 3/36$
 $P(11) = 2/36$
 $P(12) = 1/36$





Para practicar

- Elegimos una ficha de dominó al azar,
 - Describe los sucesos:
 - A="sacar una ficha doble"
 - B="sacar una ficha cuyos números sumen 5 ó múltiplo de 5"
 - Escribe $A \cup B$ y $A \cap B$

- Escribe el espacio muestral del experimento resultante de tirar 3 monedas. Considera los sucesos:
 - A="Salir una cara"
 - B="Salir al menos una cara"
 Escribe $A \cup B$, $A \cap B$ y el suceso contrario de B.

- En una urna hay 15 bolas numeradas del 1 al 15, se extrae una de ellas; considera los sucesos:
 - A="Sacar un n° par"
 - B="Sacar un múltiplo de 4"
 Escribe $A \cup B$ y $A \cap B$.

- Lanzamos un dado dodecaédrico y anotamos el n° de la cara superior. Describe los sucesos:
 - A="Sacar un n° par"
 - B="Sacar un n° mayor que 5"
 Escribe $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap \bar{B}$

- En una caja hay 5 bolas rojas, 4 verdes y 3 azules. Se extrae una bola y se anota el color, calcula la probabilidad de que sea verde.

- Se elige al azar un n° entre los primeros 50 naturales (a partir del 1). Calcula la probabilidad de los sucesos:
 - A="salir un n° mayor que 4 y menor que 17".
 - B="Salir un cuadrado perfecto"

- De una baraja española se extrae una carta, calcula la probabilidad de los sucesos:
 - A="Salir bastos"
 - B="No salir ni bastos ni as"

- Lanzamos dos dados y nos fijamos en la menor de las puntuaciones. Calcula la probabilidad de que sea un 3.

- Encima de la mesa tenemos las cartas de una baraja que aparecen abajo, sacamos otra carta y nos fijamos en su número, calcula la probabilidad de que la suma de los números de las tres cartas sea 15.



- Extraemos una ficha de dominó, calcula la probabilidad de que la suma de los puntos sea menor que 7.

- Con un 1, un 2 y un 3, formamos todos los números posibles de 3 cifras. Elegimos uno al azar, ¿qué probabilidad hay de que acabe en 3?.

- Al girar la ruleta de la figura, calcula la probabilidad de que salga rojo y mayor que 3.



- La probabilidad de un suceso es 0,21, calcula la del suceso contrario.

- La probabilidad de un suceso A es $P(A)=0,55$, la de otro suceso B es $P(B)=0,45$ y la de la intersección de ambos es $P(A \cap B)=0,20$. Calcula la probabilidad de $A \cup B$.

15. Considera dos sucesos A y B de un experimento aleatorio. Si $P(A)=0,37$; $P(A \cup B)=0,79$ y $P(A \cap B)=0,06$; calcula la $P(\bar{B})$.

16. Un dado está trucado de manera que la probabilidad de sacar un n° par es $0,67$; además $P(1)=P(3)=P(5)$. Calcula la probabilidad de sacar un 5.

17. En una urna hay bolas blancas y negras.

María dice: "La probabilidad de sacar una bola blanca es $5/26$ "

Sergio dice: "La probabilidad de sacar una bola negra es $11/13$ "

- Pueden ser correctas ambas afirmaciones?
- Si María tiene razón, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola negra?

18. En un restaurante ofrecen un menú que consta de primer plato a elegir entre ensalada, pasta o legumbres; un segundo plato a elegir entre carne o pescado; y postre a elegir entre fruta o helado. Ana elige su menú al azar, calcula la probabilidad de que coma:

- Ensalada, carne y fruta.
- Pasta y pescado.

Sugerencia: haz un diagrama de árbol

19. Llevo en el bolsillo 2 monedas de 50 céntimos, dos de 20 céntimos y dos de 10 céntimos. También llevo un agujero por el que se me caen dos y las pierdo. Calcula la probabilidad de haber perdido:

- 1 euro
- Menos de 40 céntimos.
- Más de 50 céntimos.

Sugerencia: haz una tabla de doble entrada

20. En un instituto el 66% de los estudiantes son aficionados al fútbol y el 42% lo son al baloncesto. Hay un 27% que son aficionados a ambos deportes. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no sea aficionado al fútbol ni al baloncesto.

21. A una reunión asisten 32 hombre y 48 mujeres. La mitad de los hombres y la cuarta parte de las mujeres tienen 40 años o más. Elegida una persona al azar calcula la probabilidad de que:

- sea mujer y menor de 40 años
- sea menor de 40 años.

Sugerencia: Completa la tabla

	40 o más	<40	
HOMBRE			32
MUJER			48

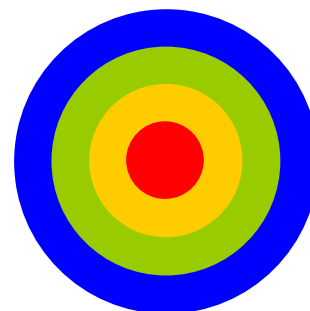
22. He perdido algunas cartas de una baraja. Si de entre las que me quedan saco una al azar, la probabilidad de que sea de copas es $0,20$, de que sea un rey es $0,13$ y de que sea un rey o de copas es $0,30$. ¿Está el rey de copas entre las cartas que me quedan?.

Sugerencia: Calcula la probabilidad de la intersección

23. A un humedal llegan todos los años bandadas de grullas en su camino a zonas cálidas. Para observar cuántas hay, se ha capturado y anillado una muestra de 40 grullas. Posteriormente se observan 50 de las que 3 llevan anilla, ¿cuántas grullas estimaremos que hay?.

Sugerencia: La probabilidad de que una grulla esté anillada será la misma en todas las muestras, y la calculamos a partir de la frecuencia relativa.

24. Se supone que la probabilidad de acertar al tirar un dardo en cualquier punto de la diana es la misma. Calcula la probabilidad de acertar en la zona de color verde.



Para saber más



Probabilidad y genética
Las leyes de Mendel

Gregor Mendel (1822-1884), fue un monje y naturalista nacido en Heizendorf (actual Hyncice, República Checa).

A través de sus trabajos, que llevo a cabo con distintas variedades de la planta del guisante, fue el primero en describir las leyes que rigen la herencia genética. Para ello aplica la probabilidad como describe en su obra "La Matemática de la herencia".

Mendel combinó guisantes de distinto color (amarillo y verde) y distinta textura (lisos y rugosos).

COLOR
A: amarillo
a: verde

TEXTURA
R: liso
r: rugoso

dominantes
recesivos

1ª generación
RRAA + rraa

2ª generación

	RA	RA
ra		
ra		

3ª generación

	RA	Ra	rA	ra
RA				
Ra				
rA				
ra				

Al cruzar dos líneas puras, distintas para algún carácter, el 100% de los descendientes son iguales entre si e iguales al parental dominante.

(1ª Ley de Mendel)

En la 3ª generación:

$$P(\text{amarillo liso}) = \frac{9}{16}$$

$$P(\text{amarillo rugoso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde liso}) = \frac{3}{16}$$

$$P(\text{verde rugoso}) = \frac{1}{16}$$



Probabilidad condicionada

¿Dependientes o independientes?

En ocasiones la probabilidad de un suceso varía si se calcula con la condición de que ha ocurrido otro anteriormente. Imagina que jugando a la ruleta sabemos que no ha salido el 0, podemos considerar entonces que $P(\text{par}) = 1/2$.

- Si además sabemos que ha salido "rojo"

$$P(\text{par sabiendo que es rojo}) = \frac{\text{nº resultados pares y rojos}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{8}{18}$$

Con esta condición la probabilidad de "par" ya no es $1/2$, los sucesos "par" y "rojo" son DEPENDIENTES.

- Pero si sabemos que ha salido "passe"

$$P(\text{par sabiendo que es passe}) = \frac{\text{nº resultados pares y passe}}{\text{nº resultados pares}} = \frac{9}{18}$$

La probabilidad de "par" sigue siendo $1/2$, no ha cambiado, los sucesos "par" y "passe" son INDEPENDIENTES.



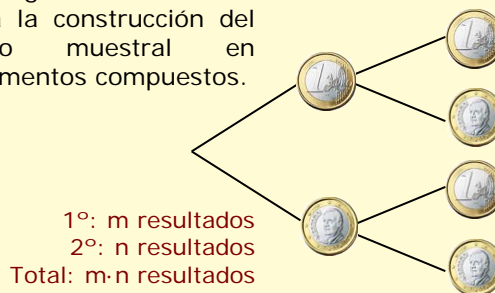


Recuerda lo más importante

Espacio muestral y sucesos

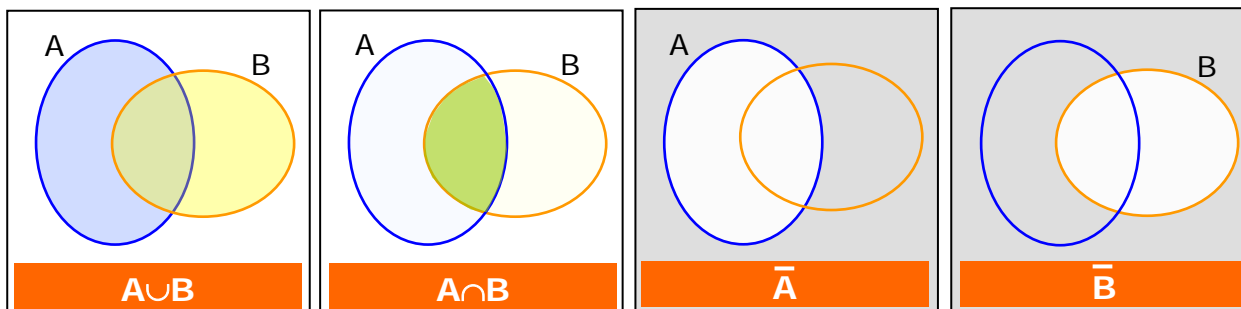
- **Experimento aleatorio**, el que no se puede predecir el resultado.
- **Espacio muestral** conjunto de todos los resultados posibles.
- Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.
- Sucesos **incompatibles** si no se pueden realizar a la vez.

Un diagrama de árbol facilita la construcción del espacio muestral en experimentos compuestos.



Operaciones con sucesos

- Suceso **unión** de A y B, $A \cup B$, es el que ocurre cuando ocurre A o B, alguno de los dos.
- Suceso **intersección** de A y B, $A \cap B$, suceso que ocurre cuando ocurren A y B a la vez.
- Suceso **contrario** de A al que ocurre cuando no ocurre A, lo indicaremos \bar{A} .



Calcular probabilidades

- En experimentos regulares, cuando los sucesos elementales son equiprobables, con la **Regla de Laplace**

$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ casos posibles}}$$

- Si el experimento no es regular se recurre a la experimentación, tomando la probabilidad de A como su frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces.



Propiedades de la probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Probabilidad de la unión

- A y B incompatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A y B compatibles:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Autoevaluación



	aprueban	suspenden
Grupo A	15	6
Grupo B	16	13

1. Escribimos cada una de las letras de la palabra ALEATORIO en un papel y sacamos una al azar. Escribe el suceso "salir vocal"
2. Escribe el suceso contrario del calculado en ejercicio anterior.
3. En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 0 al 99. Se extrae una al azar, calcula la probabilidad de que en sus cifras esté el 7.
4. En una bolsa hay 2 bolas rojas, 4 bolas verdes y 4 azules. Se saca una bola al azar, calcula la probabilidad de que NO sea verde.
5. Calcula la probabilidad de rojo en la ruleta de la figura
6. Se saca una carta de una baraja de 40, calcula la probabilidad de que sea de OROS o un AS.
7. Si A y B son dos sucesos tales que $P(A)=0,64$, $P(B)=0,36$ y $P(A \cap B)=0,12$. Calcula $P(A \cup B)$.
8. Los resultados de un examen realizado por dos grupos de 3º ESO se muestran en la tabla adjunta. Seleccionado un estudiante al azar calcula la probabilidad de que sea del grupo B y apruebe.
9. Un dado cúbico está trucado de manera que la probabilidad de sacar un cuatro es cuatro veces la probabilidad de cualquiera de las otras caras. Calcula la probabilidad de obtener un cuatro.
10. Se lanzan una moneda y un dado, calcula la probabilidad de que salga CARA y nº PAR.

Soluciones de los ejercicios para practicar

- $A = \{00, 11, 22, 33, 44, 55, 66\}$
 $B = \{05, 14, 23, 55\}$
 $A \cup B = \{00, 05, 11, 14, 22, 23, 44, 55, 66\}$
 $A \cap B = \{55\}$
- $A = \{cxx, xc x, xxc\}$
 $B = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xc x, xxc\}$
 $A \cup B = A$ $A \cap B = B$ $\bar{B} = \{xxx\}$
- $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
 $A \cap B = \{4, 8, 12\}$
- $A \cap B = \{8, 12\}$ $A \cap \bar{B} = \{4\}$ $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 2, 3, 5\}$
- $P(\text{verde}) = 4/12 = 1/3$
- $P(A) = 12/50 = 0,24$ $P(B) = 7/50$
- $P(A) = 1/4$ $P(B) = 27/40$
- $P(3) = 7/36$
- Debe salir un 6, como ya hay uno:
 $P = 3/38$
- En 16 de las 28 fichas,
 $P = 16/28 = 0,57$
- Hay 6 casos posibles, $P = 2/6 = 1/3$
- $P = 0,3$
- $P(\bar{A}) = 1 - 0,21 = 0,79$
- $P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,20 = 0,80$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,39 = 0,61$
- $P(\text{impar}) = 0,33$ $P(1) = P(3) = p(5) = 0,11$
- a) No pueden ser ciertas ambas ya que son sucesos contrarios y $5/26 + 11/13 \neq 1$
b) $P(\text{"negra"}) = 21/26$
- Hay 12 posibles menús
a) $P(A) = 1/12$ b) $P(B) = 1/6$
- a) $P(1) = 4/36 = 1/9$
b) $P(\text{menos de } 0,40) = 12/36 = 1/3$
c) $P(\text{"más de } 0,50") = 20/36 = 5/9$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,81 = 0,19$
- Asisten 80 personas
a) $P(\text{mujer y menor de } 40) = 12/80 = 0,15$
b) $P(\text{menor de } 40) = 28/80 = 0,35$
- $P(R \cap C) = P(R) + P(C) - P(R \cup C) = 0,03$
La probabilidad de sacar el "Rey de Copas" no es 0, luego si que está.
- $P(\text{grulla con anilla}) = 4/50 = 0,08$
 $n^\circ \text{ estimado} = 40/0,08 \cong 500$
- Superficie de la diana = $\pi \cdot (4r)^2 = 16\pi r^2$
Superficie verde = $\pi \cdot (3r)^2 - \pi \cdot (2r)^2 = 5\pi r^2$
 $P = 5/16$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- $\{A, E, I, O\}$
- $\{L, T, R\}$
- $19/99$
- $6/10 = 0,6$
- $4/12 = 1/3$
- $13/40$
- $0,88$
- $15/50 = 0,3$
- $4/9$
- $3/12 = 0,25$