

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar las soluciones de una ecuación.
- Reconocer y obtener ecuaciones equivalentes.
- Resolver ecuaciones de primer grado
- Resolver ecuaciones de segundo grado tanto completas como incompletas.
- Utilizar el lenguaje algebraico y las ecuaciones para resolver problemas.
- Resolver algunas ecuaciones sencillas de grado superior a dos.

Antes de empezar.

1. Expresiones Algebraicas ..... pág. 4  
 Identidad y ecuación  
 Solución de una ecuación
2. Ecuaciones de primer grado..... pág. 6  
 Definición  
 Método de resolución  
 Resolución de problemas
3. Ecuaciones de segundo grado ..... pág. 8  
 Definición. Tipos  
 Resolución de  $ax^2+bx=0$   
 Resolución de  $ax^2+c=0$   
 Resolución de  $ax^2+bx+c=0$   
 Suma y producto de las raíces  
 Discriminante de una ecuación  
 Ecuación  $(x-a) \cdot (x-b)=0$   
 Resolución de problemas
4. Ecuaciones de grado superior a dos pág. 11  
 Ecuaciones factorizadas  
 Ecuaciones bicuadradas

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor



### Antes de empezar

¿Cuánto te costó esa radio?

Un cuarto, más un quinto, más un sexto, menos 21 euros fue la mitad de todo.



Llamamos  $x$  a la cantidad buscada:

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} - 21 &= \frac{x}{2} \\ \frac{15x}{60} + \frac{12x}{60} + \frac{10x}{60} - \frac{1260}{60} &= \frac{30x}{60} \\ 7x = 1260 &\rightarrow x = 180\end{aligned}$$

# Ecuaciones de segundo grado

## 1. Expresiones algebraicas

### Identidad y Ecuación.

Una **igualdad algebraica** esta formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual (=).

- Cuando la igualdad es cierta para algún valor de las letras se llama **ecuación**.
- Si la igualdad es cierta para cualquier valor de las letras se llama **identidad**.

**Identidad:**  $2(x + 1) = 2x + 2$

Observa que se verifica para cualquier valor de x:

$$x = 0; 2(0 + 1) = 2 = 2(0) + 2$$

$$x = 1; 2(1 + 1) = 4 = 2(1) + 2$$

$$x = 2; 2(2 + 1) = 6 = 2(2) + 2$$

**Ecuación:**  $x + 1 = 2$

Observa que se verifica sólo para  $x=1$

$$x = 1; 1 + 1 = 2$$

$$x = 2; 2 + 1 = 3 \neq 2$$

$$x = 3; 3 + 1 = 4 \neq 2$$

### Solución de una ecuación

El valor de la letra que hace que la igualdad se verifique se llama **solución** de la ecuación.

**Resolver** una ecuación es encontrar la solución ó soluciones.

Una ecuación se llama **compatible** si tiene solución.

Si no tiene solución se llama **incompatible**.

Dos o más ecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **equivalentes**.

$x + 5 = 8$  es una **ecuación compatible** tiene por única solución  $x=3$

$x + 1 = 4$  es una **ecuación compatible** tiene por única solución  $x=3$

Las dos **ecuaciones** son **equivalentes**

$x^2 = -1$  es una **ecuación incompatible**, no tiene solución, ningún número elevado al cuadrado puede ser negativo

Para obtener una **ecuación equivalente** a una dada se utilizan las siguientes reglas.

- Si **sumamos o restamos** a los dos miembros de una ecuación la misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.
- Si **multiplicamos o dividimos** los dos miembros de una ecuación la misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

Ecuaciones equivalentes a

$$x + 5 = 8$$

$$x + 7 = 10 \text{ se obtiene sumando } 2$$

$$x + 5 + 2 = 8 + 2 \rightarrow x + 7 = 10$$

$$2x + 10 = 16 \text{ se obtiene}$$

multiplicando por 2

$$2(x + 5) = 2 \cdot 8 \rightarrow 2x + 10 = 16$$

## EJERCICIOS resueltos

1. Clasifica la siguiente expresión algebraica:  $6(7x - 1) + 3x = 4x + 76$ , en identidad o ecuación.

Sol: Es una ecuación,  $6(7x - 1) + 3x = 42x - 6 + 3x = 45x - 6 \neq 4x + 76$

2. Clasifica la siguiente expresión algebraica:  $7(5x - 1) + 5x = 40x - 7$ , en identidad o ecuación.

Sol: Es una identidad,  $7(5x - 1) + 5x = 35x - 7 + 5x = 40x - 7$

3. Escribe una ecuación de la forma  $ax + b = c$  cuya solución sea  $x = 4$

Sol:  $3x - 5 = 7$

4. Escribe una ecuación de la forma  $ax = b$  que sea equivalente a  $5x + 4 = -16$

Sol: Restando 4 a los dos miembros de la ecuación se obtiene  $5x = -20$

5. Escribe una ecuación de la forma  $x + b = c$  que sea equivalente a  $5x + 20 = 15$

Sol: Dividiendo por 5 a los dos miembros de la ecuación se obtiene  $5x + 4 = 3$

6. Razona si  $x = 2$  es solución de la ecuación:  $5x + 3(x - 1) = 13$

Sol: Si es solución  $5(2) + 3(2 - 1) = 10 + 3 = 13$

7. Razona si  $x = 3$  es solución de la ecuación:  $7x + 3(x - 2) = 16$

Sol: No es solución  $7(3) + 3(3 - 2) = 21 + 3 = 24 \neq 16$

8. Comprueba que  $x = -1$ , es solución de la ecuación  $5x + x^2 = -4$

Sol: Si es solución  $5(-1) + (-1)^2 = -5 + 1 = -4$

9. Escribe una ecuación que sea incompatible

Sol:  $(x - 1)^2 = -4$ , ningún número elevado al cuadrado es negativo

# Ecuaciones de segundo grado

## 2. Ecuaciones de primer grado

### Definición

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma:  $ax=b$ , siendo  $a$  y  $b$  números reales y  $a \neq 0$ .

El mayor exponente de las  $x$  debe ser **1**.

Si  $a \neq 0$  siempre tiene solución y además es única, la solución es:  $x = -b/a$

### Método de resolución

Para resolver una ecuación de primer grado se siguen estos pasos.

- Se eliminan los denominadores. Para ello se calcula el mcm de los denominadores y se multiplican los dos miembros de la ecuación por él.
- Se quitan los paréntesis.
- Agrupar los términos en  $x$  a la izquierda del igual y los números a la derecha.
- Reducir términos semejantes.

### Resolución de problemas

Para resolver un problema mediante una ecuación, hay que traducir al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado y después resolver la ecuación planteada.

Comienza por leer detenidamente el enunciado hasta asegurarte de que comprendes bien lo que se ha de calcular y los datos que te dan.

Una vez resuelta la ecuación da la solución al problema.

**EJEMPLO 1)** La edad de un padre es triple de la de su hijo, si entre los dos suman 72 años, ¿qué edad tiene cada uno?

- ✓ Edad del hijo:  $x$  años      Edad del padre:  $3x$  años  
Entre los dos 72 años  $\rightarrow 3x+x=72$

**EJEMPLO 2)** ¿Cuántos litros de vino de 4€ litro tenemos que mezclar con vino de 2 € litro, para obtener 40 litros de vino cuyo precio sea 3 € el litro.

- ✓ Vino de 4€/l:  $x$  litros      Precio:  $4x$   
Vino de 2€/l:  $40-x$  litros      Precio:  $2(40-x)$   
Precio de la mezcla  $40 \cdot 3 \rightarrow 4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

$2x + 9 = 15$  Ecuación de grado 1, se puede escribir como  $2x = 6$

La solución es:  $x = \frac{6}{2} = 3$

$$\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 5$$

Quitar denominadores:

$$2\left(\frac{3x}{2} + 2(x - 1)\right) = 2 \cdot 5$$

$$3x + 4(x - 1) = 10$$

Quitar paréntesis:

$$3x + 4x - 4 = 10$$

Agrupar:  $3x + 4x = 10 + 4$

Reducir:  $7x = 14$

Despejar:  $x = \frac{14}{7} = 2$



Ecuación:  $3x+x=72$

Se resuelve:  $4x=72 \quad x=72/4=18$

El hijo tiene 18 y el padre 54 años

Ecuación:  $4x+2(40-x)=3 \cdot 40$

Se resuelve:  $4x+80-2x=120$

$$2x=40 \quad x=40/2=20$$

Hay mezclar 20 litros de vino de cada precio.

## EJERCICIOS resueltos

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{-7x+5}{7} + \frac{9x-7}{8} = -1 \quad \text{Sol: } 56 \frac{-7x+5}{7} + 56 \frac{9x-7}{8} = 56 \cdot (-1) \rightarrow 8(-7x+5) + 7(9x-7) = -56$$

$$-56x + 40 + 63x - 49 = -56 \rightarrow 7x = -47 \rightarrow x = \frac{-47}{7}$$

$$\text{b) } \frac{2x-(x+1)}{4} = \frac{5x+2}{6} \quad \text{Sol: } 12 \frac{x-1}{4} = 12 \frac{5x+2}{6} \rightarrow 3(x-1) = 2(5x+2)$$

$$3x-3 = 10x+4 \rightarrow -7x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{-7} = -1$$

$$\text{c) } \frac{3x-7(x+1)}{6} = \frac{2x-1}{3} - 2 \quad \text{Sol: } 6 \frac{3x-7(x+1)}{6} = 6 \frac{2x-1}{3} - 6 \cdot 2 \rightarrow 3x-7(x+1) = 2(2x-1) - 12$$

$$3x-7x-7 = 4x-2-12 \rightarrow -8x = -7 \rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\text{d) } \frac{2x-5}{3} - \frac{-2x+8}{7} = x \quad \text{Sol: } 21 \frac{2x-5}{3} - 21 \frac{-2x+8}{7} = 21x \rightarrow 7(2x-5) - 3(-2x+8) = 21x$$

$$14x-35+6x-24 = 21x \rightarrow -x = 59 \rightarrow x = -59$$

$$\text{e) } \frac{6x-(x-8)}{6} = \frac{-2x-17}{3} + x \quad \text{Sol: } 6 \frac{6x-(x-8)}{6} = 6 \frac{-2x-17}{3} + 6x \rightarrow 6x-(x-8) = 2(-2x-17) + 6x$$

$$5x+8 = -4x-34+6x \rightarrow 3x = -42 \rightarrow x = -14$$

11. La edad de un padre es el triple que la de su hijo, si entre los dos suman 56 años  
¿Cuál es la edad de cada uno?

Edad del hijo:  $x$   
Sol: Edad del padre:  $3x$   
La edad del hijo es 14 años y la del padre es 42 años

$$x + 3x = 56 \rightarrow 4x = 56 \rightarrow x = \frac{56}{4} = 14$$

12. ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

Sol:  
Litros de vino de 5€ :  $x$

	litros	precio	
vino de 3€ el litro	$x$	$5x$	$5x + 3(50 - x) = 200 \rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$
vino de 4€ el litro	$50 - x$	$3(50 - x)$	
vino de 6€ el litro	50	200	

Hay que mezclar 25 litros de 5€ con vino de 3€

# Ecuaciones de segundo grado

## 3. Ecuaciones de segundo grado

### Definición. Tipos

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica que se puede expresar en la forma:  $ax^2 + bx + c = 0$ , siendo **a**, **b** y **c** números reales y **a**  $\neq 0$ .

- Los **coeficientes** de la ecuación son a y b. El **término independiente** es c.
- Si  $b \neq 0$  y  $c \neq 0$ , se dice que la ecuación es **completa**.
- Si  $b = 0$  ó  $c = 0$  la ecuación es **incompleta**.

### Resolución de $ax^2+bx=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo  $ax^2+bx=0$  tiene dos soluciones:  $x_1=0$  y  $x_2=-b/a$

Se resuelve sacando factor común a la x e igualando los dos factores a cero.

### Resolución de $ax^2+c=0$

La ecuación de segundo grado **incompleta** del tipo  $ax^2+c=0$ , puede no tener solución ó tener dos soluciones distintas de la forma  $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

### Resolución de $ax^2+bx+c=0$

La ecuación de segundo grado **completa** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma  $ax^2+bx+c=0$ , siendo a, b y c números reales y **a**  $\neq 0$

Para obtener las soluciones utilizamos la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Suma y Producto de las raíces

Si  $x_1$  y  $x_2$  son las raíces de una ecuación de segundo grado  $ax^2+bx+c=0$ , estas cumplen las siguientes propiedades :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ecuación de segundo grado **completa**:  $3x^2 + 4x + 2 = 0$

$$a=3 \ ; \ b=4 \ ; \ c=2$$

Ecuación de segundo grado **incompleta**:  $3x^2 + 2 = 0$

$$a=3 \ ; \ b=0 \ ; \ c=2$$

$$3x^2 + 9x = 0$$

$$x(3x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 9 = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$3x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Las raíces son  $x=3$  y  $x=2$

$$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5 = \frac{-(-5)}{1}$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6 = \frac{6}{1}$$



# Ecuaciones de segundo grado

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$$

Tiene dos raíces reales distintas

$$3x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -37 < 0$$

No tiene raíces reales

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$$

Tiene dos raíces reales iguales

## Discriminante

Se llama discriminante de una ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ , a la expresión:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si  $\Delta > 0$  hay dos raíces reales distintas
- Si  $\Delta = 0$  hay dos raíces reales iguales
- Si  $\Delta < 0$  no hay raíces reales

$$(x + 7) \cdot (x - 9) = 0$$

Para que un producto sea igual a cero basta con que uno de los factores sea cero.

$$x + 7 = 0 \rightarrow x = -7$$

$$x - 9 = 0 \rightarrow x = 9$$

## Ecuación $(x-a) \cdot (x-b) = 0$

Para que un producto de varios factores sea cero, al menos uno de los factores ha de ser cero.

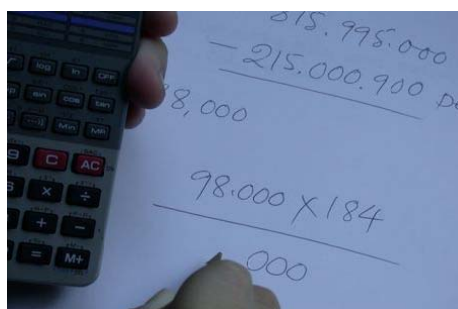
Para resolver las ecuaciones en las que un producto sea igual a cero,  $(x-a)(x-b) = 0$ , se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$x - a = 0 ; x = a$$

$$x - b = 0 ; x = b$$

## Resolución de Problemas

Las ecuaciones de primer y segundo grado aparecen en multitud de ocasiones en la resolución de distintos problemas de la vida real



### Recuerda los pasos:

- Comprender el enunciado
- Identificar la incógnita
- Traducir a lenguaje algebraico
- Plantear la ecuación
- Resolver
- Comprobar las soluciones

*La suma de los cuadrados de dos números naturales es 313. ¿Cuáles son los números?*

Llamamos  $x$  al menor de los números.

Llamamos  $x+1$  al consecutivo

$$\text{La ecuación es: } x^2 + (x + 1)^2 = 313$$

Resolvemos:

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 313$$

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2500}}{4} = \frac{-2 \pm 50}{4} = \begin{cases} 12 \\ -13 \end{cases}$$

La solución es el número 12, (-13 no vale por no ser natural).

# Ecuaciones de segundo grado

## EJERCICIOS resueltos

13. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 6x = 0 \quad \text{Sol: } x(x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \rightarrow x = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } x^2 + 27x = 0 \quad \text{Sol: } x(x + 27) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 27 = 0 \rightarrow x = -27 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x = 0 \quad \text{Sol: } x(3x + 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

$$\text{a) } x^2 - 36 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } 4x^2 - 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = \frac{9}{4} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{c) } x^2 + 9 = 0 \quad \text{Sol: } x^2 = -9 \rightarrow \text{No hay solución}$$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado completas:

$$\text{a) } x^2 - 7x + 10 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } 3x^2 + 17x + 20 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 240}}{6} = \frac{-17 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-17 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{5}{3} \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{c) } 3x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \text{Sol: } x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{6} = \text{No hay solución}$$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean  $x = -1$ ,  $x = 4$ :

$$\text{Sol: } \left. \begin{array}{l} S = -1 + 4 = 3 \\ P = -1 \cdot 4 = -4 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

17. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } (x - 2)(x + 3) = 0 \quad \text{Sol: } x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad ; \quad x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

$$\text{b) } (3x - 1)(x - 5) = 0 \quad \text{Sol: } 3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \quad ; \quad x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$(3x+3)(7x+8)(6x-15)=0$$

**Paso 1:** Se igualan a cero los factores

$$\begin{aligned} 3x+3 &= 0 \\ 7x+8 &= 0 \\ 6x-15 &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 2:** Se resuelve cada ecuación

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= -\frac{8}{7} \\ x &= \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$49x^4 - 25x^2 = 0$$

**Paso 1:** Sacando factor común y aplicando las identidades notables se factoriza el polinomio.

$$\begin{aligned} x^2(49x^2 - 25) &= 0 \\ x^2(7x+5)(7x-5) &= 0 \end{aligned}$$

**Paso 2:** Se iguala a cero cada factor y se resuelven las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x^2 = 0 &\rightarrow x = 0 \\ 7x+5 = 0 &\rightarrow x = -\frac{5}{7} \\ 7x-5 = 0 &\rightarrow x = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$-2x^4 - 10x^2 + 12 = 0$$

**Paso 1:** Realizamos el cambio  $t = x^2$

$$-2t^2 - 10t + 12 = 0$$

**Paso 2:** Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned} t &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(-2)(12)}}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{-4} = \frac{10 \pm 14}{-4} = \begin{cases} t = -6 \\ t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Paso 3:** Calcular las soluciones

$$\begin{aligned} x^2 = -6 &\rightarrow \text{No hay solución} \\ x^2 = 1 &\rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{aligned}$$

## 4. Ecuaciones de grado superior a dos

### Ecuaciones factorizadas

Has visto que para resolver las ecuaciones en las que un producto es cero se igualan a cero cada uno de los factores y se resuelven las ecuaciones resultantes. Lo mismo haremos cuando haya más de un producto:

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b)(x-c) &= 0 \\ (x-a) = 0 &\rightarrow x = a \\ (x-b) = 0 &\rightarrow x = b \\ (x-c) = 0 &\rightarrow x = c \end{aligned}$$

Factorizar el polinomio de la ecuación es un método útil para resolver ecuaciones de grado superior a dos, para ello aquí vas a sacar factor común y a utilizar las identidades notables.

El curso próximo aprenderás nuevos métodos para descomponer en factores un polinomio.

### Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una igualdad algebraica que se puede expresar de la forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , con a, b y c números reales y  $a \neq 0$ .

Para resolverlas se hace el cambio  $t = x^2$ .

La ecuación se transforma en una ecuación de segundo grado, con incógnita  $t$ :  $at^2 + bt + c = 0$

Al aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado obtenemos dos soluciones:  $t_1$  y  $t_2$ .

Con lo que  $x = \pm\sqrt{t_1}$  y  $x = \pm\sqrt{t_2}$

Observa que según sean  $t_1$  y  $t_2$  puede haber cuatro soluciones, dos o ninguna solución.

# Ecuaciones de segundo grado

## EJERCICIOS resueltos

18. Resuelve las siguientes ecuaciones factorizadas:

a)  $(x + 3)(2x - 5)(3x + 1) = 0$       Sol:  $x = -3, x = \frac{5}{2}, x = -\frac{1}{3}$

b)  $(2x - 6)(3x + 7)(5x + 10) = 0$       Sol:  $x = 3, x = -\frac{7}{3}, x = -2$

c)  $(7x + 3)(4x - 6)(x - 8) = 0$       Sol:  $x = -\frac{3}{7}, x = \frac{3}{2}, x = 8$

19. Utiliza el factor común y las identidades notables para resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $4x^5 - 12x^4 + 9x^3 = 0$        $x^3(4x^2 - 12x + 9) = 0 \rightarrow x^3(2x - 3)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = \frac{3}{2}$

b)  $16x^3 + 40x^2 + 25x = 0$        $x(16x^2 + 40x + 25) = 0 \rightarrow x(4x + 5)^2 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{5}{4}$

c)  $16x^3 - 4x = 0$        $4x(4x^2 - 1) = 0 \rightarrow 4x(2x + 1)(2x - 1) = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

20. Saca factor común y después resuelve la ecuación de segundo grado:

a)  $x^5 - 12x^4 + 32x^3 = 0$        $x^3(x^2 - 12x + 32) = 0$   
 $x^3 = 0 \quad x^2 - 12x + 32 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = 4, x = 8$

b)  $3x^3 + 21x^2 + 30x = 0$        $3x(x^2 + 7x + 30) = 0$   
 $3x = 0 \quad x^2 + 7x + 30 = 0$   
Sol:  $x = 0, x = -2, x = -5$

21. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a)  $3x^4 - 27x^2 + 42 = 0$        $x^2 = t \rightarrow 3t^2 - 27t + 42 = 0$   
 $t = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 42}}{6} = \frac{27 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{27 \pm 15}{6} = \begin{cases} 7 \\ 2 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7}$   
 $x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

a)  $x^4 - 10x^2 - 96 = 0$        $x^2 = t \rightarrow t^2 - 10t - 96 = 0$   
 $t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{484}}{2} = \frac{10 \pm 22}{2} = \begin{cases} 16 \\ -6 \end{cases}$   
Sol:  $x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$   
 $x^2 = -6$  No hay solución



## Para practicar

- Determina si las siguientes igualdades algebraicas son identidades o son ecuaciones:
  - $6(x - 1) - 3x = 4x + 6$
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
  - $x - (2x - 5) = 3x - 8$
- Indica el grado de las siguientes ecuaciones:
  - $x^2 - 1 = x + 2$
  - $x^2 - 1 = x^2 + x + 2$
  - $x^3 - 1 = x^3 + x^2 + 2$
  - $x - 1 = 3x + 2$
- Indica si  $x=4$  es solución de las siguientes ecuaciones:
  - $3(x - 1) - 5 = 3x - 8$
  - $(x - 1)^2 - 5 = x$
  - $2(x + 3) - 5x = x + 2$
  - $x^3 - 60 = x$
- Escribe una ecuación de primer grado cuya solución sea:
  - $x=2$
  - $x=3$
  - $x=1$
- Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:
  - $10 - x = 3$
  - $2x - 5 = 15$
  - $-9 + 4x = x$
  - $3x - 10 = 50 + x$
- Calcula el valor de  $x$ :
  - $3(x - 1) + 2x = x + 1$
  - $2 - 2(x - 3) = 3(x - 3) - 8$
  - $2(x + 3) + 3(x + 1) = 24$
  - $\frac{3x}{2} + 2(x - 1) = 12$
- Obtén la solución de las siguientes ecuaciones:
  - $\frac{x - 1}{2} - \frac{x + 3}{3} = 1$
  - $\frac{x - 3}{2} - 3(x + 2) = -20$
  - $\frac{2 - 2(x - 3)}{2} - \frac{x + 4}{4} = 3$
  - $\frac{4(x + 1)}{2} + x - \frac{x + 3}{3} = 5 + 3(x - 2)$
- Encuentra dos números consecutivos que sumen 71
- Encuentra un número tal que sumado con su triple sea igual a 100
- ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 8 años?
- Juan tiene 12 años menos que María, dentro de 4 años María tendrá el triple de la edad de Juan ¿cuántos años tienen ahora?
- A una fiesta asisten 43 personas. Si se marchasen 3 chicos, habría el triple de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay?

# Ecuaciones de segundo grado

13. Resuelve

- a)  $x^2 - 5x = 0$
- b)  $x^2 + 3x = 0$
- c)  $x^2 - 9 = 0$
- d)  $x^2 + 5 = 0$

14. Resuelve

- a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- b)  $x^2 - 3x - 4 = 0$
- c)  $x^2 + 3x - 10 = 0$
- d)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

15. Resuelve

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 0$
- b)  $(3x + 1)(x + 5) = 0$
- c)  $x(x + 9) = 0$
- d)  $(2x + 8)(3x - 9) = 0$

16. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean:

- a)  $x=3$  y  $x=-5$
- b)  $x=2$  y  $x=4$
- c)  $x=-1$  y  $x=-9$
- d)  $x=0$  y  $x=-5$

17. Resuelve

- a)  $(x + 2)(x - 3) = 6$
- b)  $(x + 1)(x - 5) = 16$

18. Calcula el valor de  $m$  sabiendo que  $x=3$  es solución de la ecuación de segundo grado  $x^2 - mx + 27 = 0$

19. La suma de un número natural y su cuadrado es 42. ¿De qué número se trata?

20. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones si un lado mide 2 cm menos que el otro.

21. Encuentra dos números positivos que se diferencien en 7 unidades sabiendo que su producto es 44.

22. Encuentra dos números cuya suma sea 10 y su producto 24

23. Un campo de fútbol mide 30 m más de largo que de ancho y su área es de  $7000 \text{ m}^2$ , halla sus dimensiones.

24. Tenemos un alambre de 17 cm. ¿Cómo hemos de doblarlo para que forme un ángulo recto de modo que sus extremos queden a 13 cm?.

25. Halla el valor de los coeficientes  $a, b$  y  $c$  en la ecuación de segundo grado  $7x^2 + bx + c = 0$  para que sus soluciones sean 3 y -2

26. La diagonal de un rectángulo tiene 10 cm. Calcula sus dimensiones si el lado pequeño mide  $\frac{3}{4}$  del lado grande.

27. Reparte el número 20 en dos partes de forma que la suma de sus cuadrados sea 202.

28. Encuentra dos números positivos sabiendo que se diferencian en 7 unidades y su producto es 60.

29. Un triángulo rectángulo tiene de perímetro 24 metros, y la longitud de un cateto es igual a  $\frac{3}{4}$  del otro. Halla sus lados.

30. Encuentra dos números sabiendo que suma 18 unidades y su producto es 77.

Para saber más



## Congruencias lineales

Se dice que **a** es **congruente** con **b** módulo **m** si **a** y **b** **dan el mismo resto al dividir por m**.

Se escribe:  $a \equiv b \pmod{m}$

$$17 \equiv 12 \pmod{5}$$

$$17 \equiv 12 \pmod{5}$$

Observa que al dividir 17 entre 5 da resto 2 y al dividir 12 entre 5 da resto 2.

$$17 \equiv 11 \pmod{2}$$

$$12 \equiv 6 \pmod{3}$$

Una ecuación lineal de congruencias es una ecuación de la forma:

$$ax + b \equiv 0 \pmod{m}$$

Si **p** es una solución de la ecuación también lo son **p+m**, **p+2m**, **p+3m**, ...

- ✓ Si  $M = \text{m.c.d.}(a, m) = 1$  hay una solución
- ✓ Si  $M = \text{m.c.d.}(a, m) \neq 1$  y  $M$  es divisor de  $b$  hay  $M$  soluciones
- ✓ Si  $M = \text{m.c.d.}(a, m) \neq 1$  y  $M$  no es divisor de  $b$  no hay solución

**Resolver:**  $2x - 4 \equiv 0 \pmod{3}$

$\text{mcd}(2, 3) = 1$  hay una solución que es  $x = 2$ , también lo son  $2 + 3k$

**Resolver:**  $2x - 12 \equiv 0 \pmod{4}$

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  y 2 divisor de 4 hay dos soluciones que son

$x = 0$ , también lo son  $0 + 4k$   
 $x = 2$ , también lo son  $2 + 4k$

**Resolver:**  $2x - 1 \equiv 0 \pmod{4}$

$\text{mcd}(2, 4) = 2$  y 2 no es divisor de 4 no hay solución.

Observa que  $2x - 1$  es impar, y ningún impar es múltiplo de 4

# Ecuaciones de segundo grado



## Recuerda lo más importante

### Identidad

Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor de las letras

### Ecuación

Igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para algún valor de las letras

### Ecuación de primer grado

Son ecuaciones que se pueden expresar en la forma  $ax=b$  con  $a \neq 0$ . Tienen una sola solución que es  $x=a/b$

### Solución de una ecuación

Es el valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

### Ecuación Incompatible

Es la ecuación que no tiene solución.

### Ecuación Compatible

Es la ecuación que tiene solución.

### Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

### Ecuación de segundo grado

Completas:  $ax^2+bx+c=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si  $b^2-4ac > 0$  tiene 2 soluciones
- Si  $b^2-4ac = 0$  tiene 1 solución doble
- Si  $b^2-4ac < 0$  no tiene solución

Incompletas: Si  $b=0$  ó  $c=0$

- $ax^2+c=0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ 
  - $-c/a > 0$ , dos soluciones
  - $-c/a < 0$ , no hay solución
  - $c=0$ , una solución doble,  $x=0$

- $ax^2+bx=0$   
Soluciones:  $x=0$ ,  $x=-b/a$

### Propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado

La **suma** de las soluciones de la ecuación de segundo grado es

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

El **producto** de las soluciones de la ecuación de segundo grado es

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

### Ecuación Canónica

Si S es la suma de las raíces y P el producto la ecuación de segundo grado se puede escribir en la forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

### Ecuaciones de grado superior a dos

- Factorizadas:  $(x-a)(x-b)(x-c)=0$   
 $x-a=0 \rightarrow x=a$ ;  $x-b=0 \rightarrow x=b$ ; ...
- Bicuadradas:  $ax^4+bx^2+c=0$   
Se hace  $x^2=t$  y se resuelve la ecuación de segundo grado resultante.



## Autoevaluación



1. Escribe una ecuación de la forma  $ax+b=c$  cuya solución sea  $x=8$
2. Resuelve la ecuación:  $x - \frac{x-16}{6} = 2(x+6)$
3. Encuentra un número sabiendo que si ha dicho número le sumo seis veces el consecutivo el resultado es igual a 755
4. Resuelve la ecuación:  $\frac{x+4}{2} + \frac{x+7}{3} = 1$
5. Resuelve la ecuación:  $-4x^2 - 7x = 0$
6. Resuelve la ecuación:  $-2x^2 + 8 = 0$
7. Resuelve la ecuación:  $x^2 - 24x + 108 = 0$
8. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 20 y 1
9. El cuadrado de un número positivo más el doble de su opuesto es 960. ¿Cuál es el número?
10. Resuelve:  $(x+9) \cdot (4x-8) \cdot (3x+15) = 0$

# Ecuaciones de segundo grado

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. a) ecuación      b) identidad  
c) identidad      d) ecuación
2. a) 2      b) 1      c) 2      d) 1
3. a) si      b) si      c) no      d) si
4. a)  $x + 3 = 5$       b)  $2x + 1 = 7$   
c)  $3x - 1 = 2$
5. a)  $x = 7$       b)  $x = 10$   
c)  $x = 3$       d)  $x = 30$
6. a)  $x = 1$       b)  $x = 5$   
c)  $x = 3$       d)  $x = 4$
7. a)  $x = 15$       b)  $x = 5$   
c)  $x = 1$       d)  $x = 6$
8. 35
9. 25
10. 18
11. Juan 2 y María 14 años
12. 13 chicos y 30 chicas
13. a)  $x = 0$        $x = 5$       b)  $x = 3$        $x = -3$   
c)  $x = 0$        $x = -3$       d) No hay solución
14. a)  $x = 2$        $x = 3$       b)  $x = -1$        $x = 4$   
c)  $x = 2$        $x = -5$       d)  $x = 3$        $x = 3$
15. a)  $x = -2$        $x = 3$       b)  $x = -1/3$        $x = -5$   
c)  $x = 0$        $x = -9$       d)  $x = -4$        $x = 3$
16. a)  $x^2 + 2x - 15 = 0$   
b)  $x^2 - 6x + 8 = 0$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$   
d)  $x^2 - 5x = 0$
17. a)  $x = 4$ ,  $x = -3$       b)  $x = 7$ ,  $x = -3$   
c)  $x^2 + 10x + 9 = 0$       d)  $x^2 - 5x = 0$
18. 12
19. 6
20. 8 y 6
21. 11 y 4
22. 6 y 4
23. 100 y 70
24. Los puntos de doblado están a 12 y 5 cm de los extremos
25.  $b = -7$        $c = -42$
26. 6 y 8
27. 11 y 9
28. 12 y 5
29. 6,8 y 10
30. 11 y 7

## Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1.  $-2x + 7 = -9$
2. -8
3. 107
4. -4
5. 0 y  $-7/4$
6. 2 y -2
7. 18 y 6
8.  $x^2 - 21x + 20 = 0$
9. 32
10. -9, 2 y -5