

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Comprender, distinguir y valorar el concepto de función
- Interpretar y relacionar tabla, gráfica y fórmula de una relación funcional
- Distinguir los conceptos de variable dependiente e independiente, dominio y recorrido
- Apreciar e interpretar sobre una gráfica las primeras propiedades generales de una función
- Distinguir, formular y representar situaciones mediante una función de proporcionalidad directa e inversa.

Antes de empezar

1. Relaciones funcionales pág. 4
Tablas, gráficas y fórmulas.
Variables
Dominio y recorrido
2. Representación gráfica pág. 11
A partir de tabla o fórmula
Unos símbolos muy útiles
3. Propiedades generales pág. 14
Crecimiento decrecimiento
Corte con los ejes
Máximos y mínimos
4. Primeras funciones elementales pág. 19
De proporcionalidad directa
De proporcionalidad inversa
5. Funciones cuya gráfica es una recta...pág. 23

RESUMEN

Autoevaluación

Antes de empezar

La Piedra Roseta encierra un documento escrito de tres formas distintas. En la parte superior (jeroglíficos), en la central, (demótico) dos formas de escritura de una lengua muerta, el egipcio. En la parte inferior aparece la misma inscripción en griego. Esto último y la genialidad de Champollión permitió encontrar las claves de las correspondencia entre los signos jeroglíficos y sus imágenes fonéticas.

Piedra Roseta

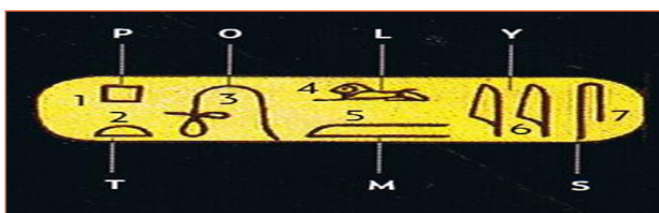


Detalle de la escritura jeroglífica



Alguno de los "cartuchos" que ayudaron a descifrarlos equivalentes fonéticos de la escritura egipcia.

	ALKSINDRS	Clave Alejandro
	QLIOPADRA	Clave Cleopatra
	PTOLMYS	Clave Ptolomeo
	RAMSSS	Clave Ramses
	THOTMSS	Clave Thumosis



1. Relaciones funcionales

Expresión de una relación funcional.

Se dice que una correspondencia entre dos conjuntos es una relación funcional, cuando a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder de forma única un elemento del segundo.

Observa los ejemplos de estas situaciones.

Ejemplo

Tabla de valores

La libra es una media de peso de origen anglosajón. En la siguiente tabla se da la equivalencia en kilogramos de distintas medidas en libras.

Peso en libras	Peso en kilogramos
2	0'90
3	1'35
4	1'80
x	f(x)

A cada valor en el peso de libras, el primer conjunto, le corresponde un **único** valor en el peso de kilogramos, el segundo conjunto.

De forma general diremos que a x peso de libras le corresponde f(x) peso de kilogramos.

En el ejemplo anterior hemos visto la tabla de valores como una forma de expresar una relación funcional. Veamos otras.

Entre las distintas formas de expresar una relación funcional, podemos señalar:

- Mediante una tabla.
- Mediante una gráfica.
- Mediante una fórmula.

La tabla de valores, la representación gráfica y la formulación mediante una expresión algebraica constituyen las formas habituales de expresar la dependencia entre dos magnitudes.

Ejemplo

La representación gráfica

La gráfica siguiente representa la distancia a la que se encuentra Juan de su casa a lo largo del día. Juan coge el coche, va durante un tiempo, desayuna y lee la prensa sigue un rato hasta la casa de unos amigos que le han invitado a comer. Después de un tiempo regresa rápido ya que se ha hecho un poco tarde.



Si salió a las 9 de la mañana, ha estado fuera 12 horas, así que volvió a las 21:00 horas.

Podemos también afirmar que en casa de sus amigos estuvo 4 horas, desde la hora 6 a la hora 10 del tiempo transcurrido, es decir, desde las 15:00 horas hasta las 19:00 horas.

También que la casa de Juan está a 9000 metros.

Nuevamente observa que para cada valor en el eje *Tiempo*, existe un único valor en el eje de *Distancia*.

Ejemplo

Expresión algebraica.

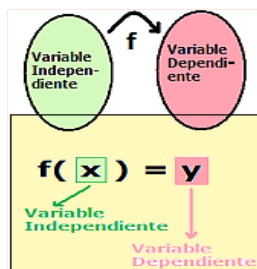
Una fórmula nos hace pensar siempre en un secreto, una serie de caracteres capaces de encerrar una gran cantidad de información disponible para el que la descifre.

En matemáticas una fórmula es una expresión algebraica que describe la relación funcional y que permite mediante una simple sustitución calcular el transformado de un determinado valor.

$f(x) = 3x - 1$	$f(-2) = -7$
	$f(-1) = -4$
	$f(2) = 5$
	$f(3) = 8$

Variable dependiente e independiente.

En una relación funcional, a la magnitud que depende de la otra se la denomina *variable dependiente*, a esta segunda magnitud se la denomina *variable independiente*.



Ejemplo

La gráfica representa la distancia en metros a la que se encuentra una persona de su casa a lo largo de 6 horas de tiempo.



Ejemplo

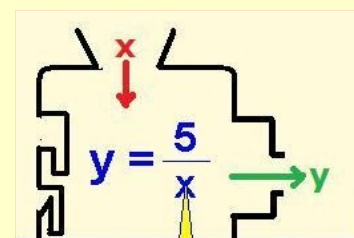
Las "tablas de precios" constituyen una de las aplicaciones más habituales de las funciones definidas mediante tabla.

En el ejemplo se puede observar la identificación de la variable independiente y la dependiente.

Tiempo (minutos)	Precio (euros)
≤ 30	0.50
entre 31 y 60	1
entre 61 y 90	1.20
entre 91 y 120	1.50

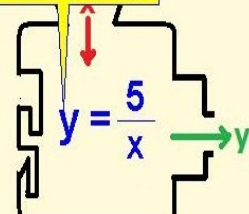
Por cada tiempo en minutos tendremos que pagar una cantidad. (VARIABLE INDEPENDIENTE: TIEMPO)

La fórmula es una expresión algebraica que relaciona dos variables.



Para cada valor que tome la variable "x" se obtendrá el correspondiente valor de "y" (VARIABLE INDEPENDIENTE (x))

Dependiendo del valor que tome la variable "x" se irán obteniendo los valores de la variable "y". (VARIABLE DEPENDIENTE (y))

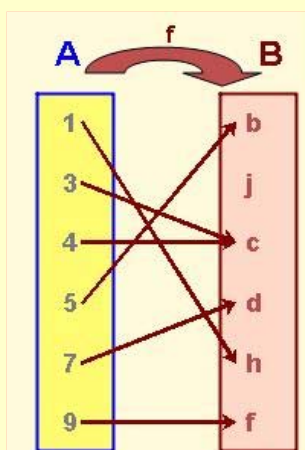


Dominio y recorrido.

El *dominio* o *campo de existencia* de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.

El *recorrido*, *imagen* o *rango* de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

Vemos el siguiente ejemplo entre dos conjuntos.



Dominio: Todos los elementos de A que están relacionados.

$\{1, 3, 4, 5, 7, 9, \}$

Recorrido: Todos los elementos de B que son imagen de algún elemento de A

$\{b, c, d, h, f, \}$

Observa como hay un elemento del conjunto B, elemento j, que no pertenece al recorrido, ya que no es imagen de ningún elemento del dominio.

Puede haber elementos de B que sean imagen de más de un elemento de A.

Ejercicio resuelto

1. La tabla representa valores de una función. Completa los huecos que faltan.

SOLUCIÓN:

Observa que las imágenes de cada valor se van obteniendo multiplicando por 2 y sumando después 5.

x	f(x)
4	13
5	15
6	17
8	21
9	23

Para calcular la imagen de 8:

$$2 \cdot 8 + 5 = 21$$

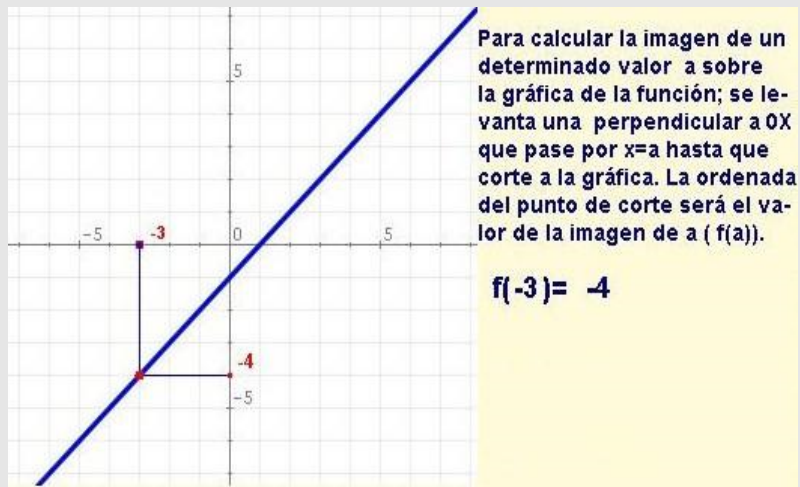
Para calcular la antiimagen de 23:

$$\frac{23 - 5}{2} = 9$$

Ejercicios resueltos

2. Calcula en la siguiente gráfica $f(-3)$.

SOLUCIÓN:



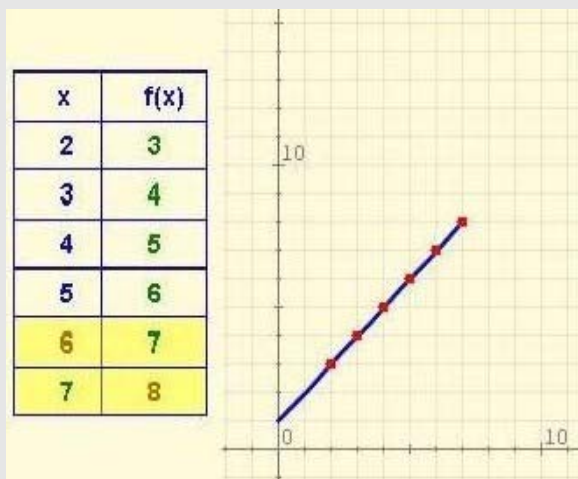
3. Haz una tabla de valores para la función $f(x) = 1x+1$, y luego dibuja su gráfica de puntos.

SOLUCIÓN:

Si una función tiene por fórmula $f(x) = 1x+1$ Las imágenes de los valores de la tabla se obtienen:

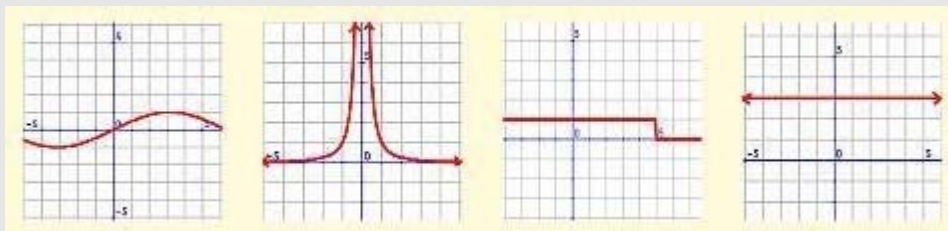
$f(2) = 1 \cdot 2 + 1 = 3$
 $f(3) = 1 \cdot 3 + 1 = 4$
 $f(4) = 1 \cdot 4 + 1 = 5$
 $f(5) = 1 \cdot 5 + 1 = 6$
 $f(6) = 1 \cdot 6 + 1 = 7$

Por último, para la preimagen si $1x+1 = 8$
 $1x = 8 - 1$
 $x = \frac{8-1}{1} = 7$



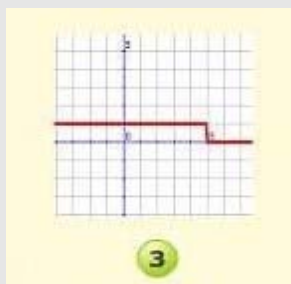
Ejercicios resueltos

4. Entre las siguientes representaciones gráficas hay una que no corresponde a una función.



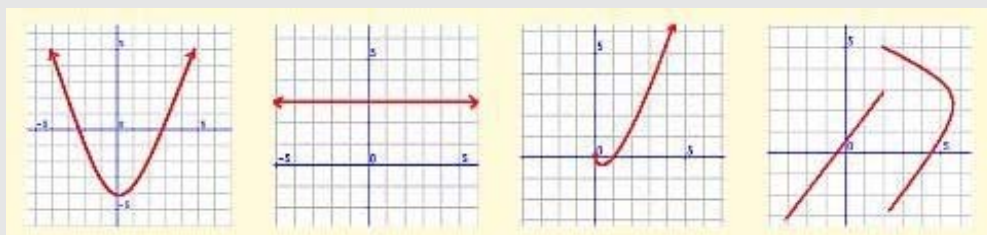
SOLUCIÓN:

Hay al menos un valor de x al que corresponde más de una imagen, y por tanto



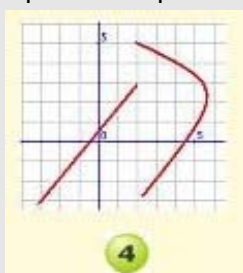
no es función.

5. Entre las siguientes representaciones gráficas hay una que no corresponde a una función.



SOLUCIÓN:

Hay al menos un valor de x al que corresponde más de una imagen, y por tanto no es función.



Ejercicios resueltos

6. Halla el dominio de $f(x) = \frac{3x+4}{2x^2+2}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{3x+4}{2x^2+2}$$

El único problema de la fórmula está en el denominador. Se puede dividir entre cualquier número excepto entre 0. Es decir $(2x^2+2)$ debe ser distinto de cero. Por tanto:

El dominio será el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES EXCEPTO LOS VALORES QUE ANULAN EL DENOMINADOR.

$$2x^2+2 \rightarrow 2x^2 = -2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{-2}{2}}$$

NO EXISTE LA RAÍZ DE UN NÚMERO NEGATIVO. Por tanto:

$$\text{Dom}f \equiv \mathbf{R}$$

7. Halla el dominio de $f(x) = \frac{4x+4}{x+5}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{4x+4}{x+(5)}$$

El único problema de la fórmula está en el denominador. Se puede dividir entre cualquier número excepto entre 0. Es decir $(x+(5))$ debe ser distinto de cero. Por tanto:

El dominio será el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES EXCEPTO LOS VALORES QUE ANULAN EL DENOMINADOR.

$$x+(5) = 0 \rightarrow x = -5 \rightarrow \text{Dom}f \equiv \mathbf{R - \{-5\}}$$

Ejercicios resueltos

8. Halla el recorrido de $f(x)=2x+1$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = 2x + 1$$

Veamos cuando tiene sentido $2x + 1 = r$ (siendo r un elemento genérico del recorrido)

$2x + 1 = r \rightarrow 2x = r - 1 \rightarrow x = \frac{r - 1}{2}$ Esta expresión tiene sentido siempre, por tanto:

El recorrido de la función es \mathbf{R}

9. Halla el recorrido de $f(x) = \frac{4}{x+4}$

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{4}{x + (-4)}$$

Veamos cuando tiene sentido $\frac{4}{x + (-4)} = r$ (siendo r un elemento genérico del recorrido)

$$\frac{4}{x + (-4)} = r \rightarrow 4 = r \cdot (x + (-4)) \rightarrow \frac{4}{r} = x + (-4)$$

$\frac{4}{r} - (-4) = x \rightarrow$ La expresión tiene sentido cuando r es distinto de cero, por tanto:

El recorrido de la función es $\mathbf{R - \{0\}}$

2. Representación gráfica

Gráfica de una función.

Para representar gráficamente una función, se forma la tabla de valores correspondiente. Cada pareja se identifica con un punto del plano cartesiano de forma que:

- La variable independiente x se representa en el eje de abscisas.
- La variable dependiente y se representa en el eje de ordenadas.

Según el tipo de función podrás unir los puntos obtenidos.



O no unirlos, según el planteamiento de la situación tratada.



La representación gráfica de una función es una ayuda fundamental para el estudio de propiedades de la misma que no son evidentes en una tabla o una fórmula. Hablamos de conceptos tan visuales como crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimos.

Dichos conceptos, que veremos más adelante, tienen una aplicación directa en la interpretación de la evolución de muchos procesos.

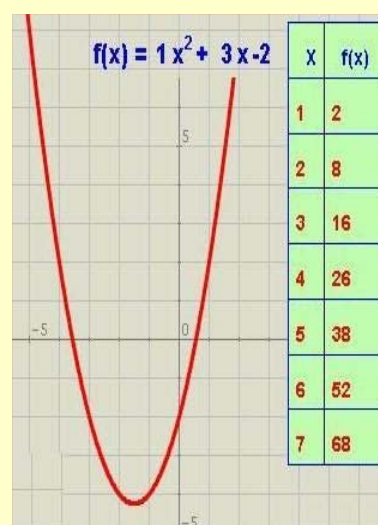
A partir de una tabla:

Situamos los puntos sobre la gráfica, posteriormente los unimos o no según sea el caso.



A partir de una fórmula:

Calculamos el valor de algunos puntos, así que realizamos una tabla de valores.

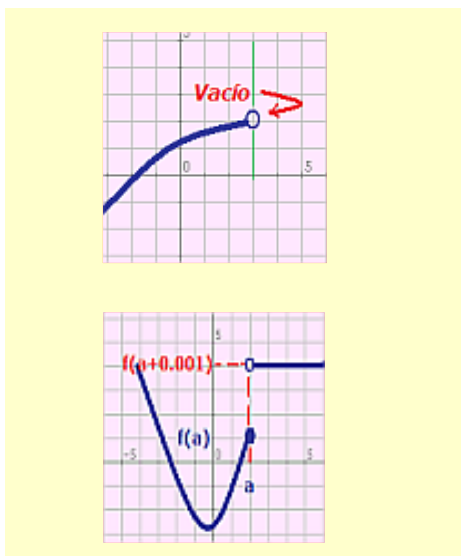


Funciones

Unos símbolos muy útiles.

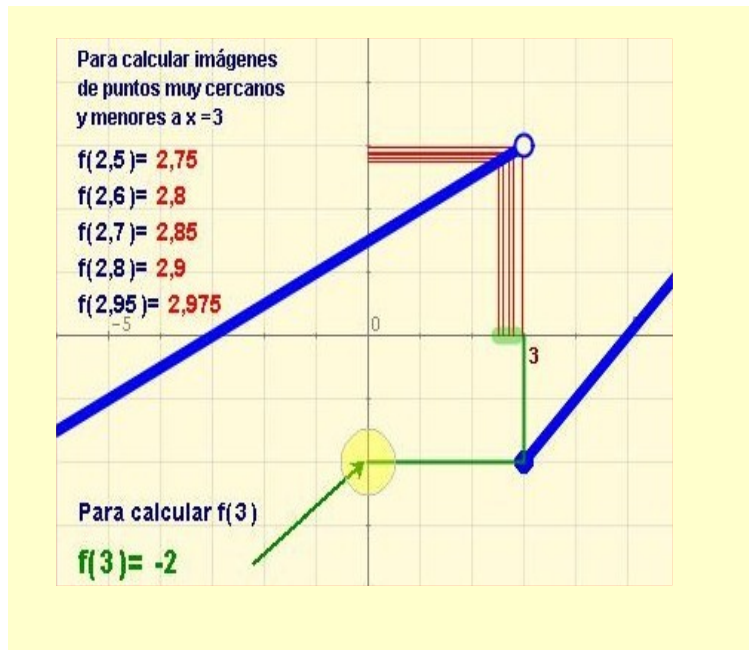
En la representación gráfica de algunas funciones se utilizan símbolos que ayudan a la comprensión de lo que pasa en un punto, o cerca de él (en su entorno).

Está generalizado el uso de *un punto en blanco* para indicar que ese punto no forma parte de la gráfica y un *punto relleno* cuando sí lo es.



En el siguiente ejemplo puedes comprobar la utilidad de los símbolos dados.

Tomamos valores muy cercanos al punto del que queremos saber su valor en $f(x)$. Obtendremos dos valores laterales, uno por la derecha y otro por la izquierda. Ahora es cuando se debe prestar atención al punto en blanco.



Observa que no se obtiene el mismo resultado si aproximamos acercándonos por la derecha.

Ejercicio resuelto

10. Representa la gráfica siguiente uniendo sus puntos.

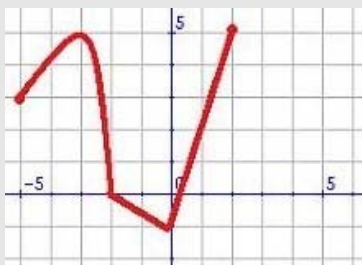
x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	2	2	1	2

SOLUCIÓN:

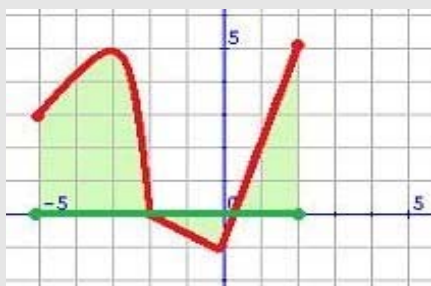


Ejercicios resueltos

11. Expresa en forma de intervalo y sobre la gráfica de la función cuál es su dominio.

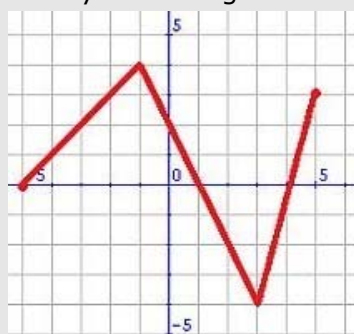


SOLUCIÓN:

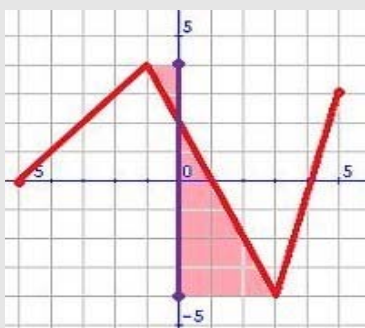


Todos los valores reales entre -5 y 2 , ambos incluidos, es decir, $-5 \leq x \leq 2$.

12. Expresa en forma de intervalo y sobre la gráfica de la función cuál es su recorrido.



SOLUCIÓN:



Todos los valores reales entre -5 y 4 , ambos incluidos, es decir, $-5 \leq y \leq 4$.

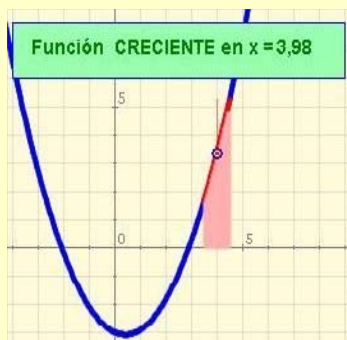
3. Propiedades generales

Crecimiento y decrecimiento.

El crecimiento y decrecimiento de una función son conceptos *locales*. Una función puede ser creciente en un punto y decreciente en otro. Por ello lo que tenemos es que fijarnos en lo que ocurre en la cercanía de cada punto, en su *entorno*.

Ejemplos

En un entorno de $x=3,98$, si vemos la gráfica, el dibujo va "subiendo".



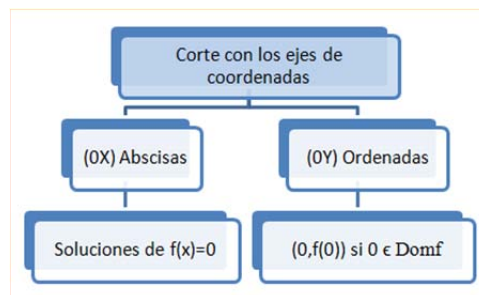
En un entorno de $x=0,75$, si vemos la gráfica, el dibujo va "bajando".



Corte con los ejes.

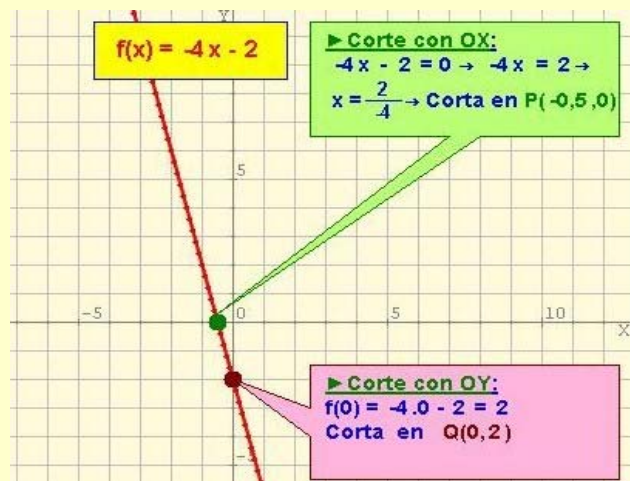
Es muy importante y ayuda especialmente en el conocimiento de la gráfica de una función, localizar los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Una función corta a lo sumo en un punto al eje de ordenadas $(0, f(0))$ (en caso de que $x=0$ pertenezca al dominio de f).

Una función puede cortar al eje de abscisas cualquier número de veces (incluso infinitas) tantas como soluciones tenga $f(x) = 0$.

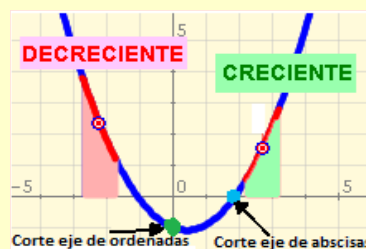


Ejemplo

Calcula los puntos de corte con los ejes de la función: $f(x) = -4x - 2$



RESUMEN



Decreciente en un punto cuando "baja" en todos los puntos de su entorno.

Creciente en un punto cuando "sube" en todos los puntos de su entorno

Máximos y mínimos relativos.

Una función presenta un *máximo* en un punto si es creciente a la izquierda de ese punto y decreciente a la derecha.



Un máximo es análogo a la cima de una montaña.

Una función presenta un *mínimo* en un punto si es decreciente a la izquierda de ese punto y creciente a la derecha.



Un mínimo es análogo al punto más bajo en un valle.

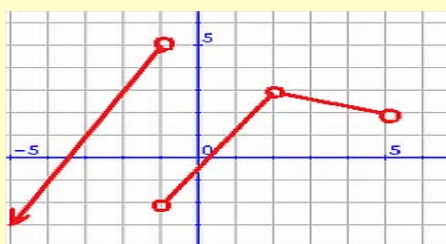
En la misma función puede tener varios máximos (análogo para mínimos), por eso se denominan *relativos*.

Al mayor de los máximos (al menor de los mínimos) se le llama *máximo absoluto* (*mínimo absoluto*). Este es único ya que es absoluto en la función.

Tenemos que un cambio de creciente a decreciente o viceversa es la característica para un **posible extremo**, máximo o mínimo.

Ejemplo

Esta gráfica no tiene extremos.



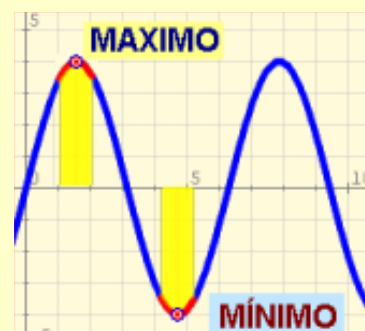
Ejemplo

En la siguiente gráfica de la función podemos observar los conceptos de máximos y mínimos.

En el punto $(1.5, 4)$ analizamos máximos.

Para $x = 1.5$, tenemos que $f(1.5) = 4$. Tal y como aparece en la gráfica, en un entorno de $x = 1.5$, los valores de la función son menores a $f(1.5) = 4$, queda claro que en un alrededor de $(1.5, 4)$ cualquier punto se encuentra gráficamente por debajo de este, tanto a la derecha como a la izquierda. Resulta ser un máximo.

Observa también que a la izquierda del máximo la función es creciente y a su derecha decreciente.



Análogo como un mínimo para el punto $(4.5, -4)$.

Cualquier valor que demos en un entorno cercano de dicho punto alcanza valores de $f(x)$ mayores que -4 , es decir, el valor que alcanza en $f(x)$, $x = 4.5$, es el menor en dicho entorno.

Observa también que a la izquierda del mínimo la función es decreciente y a su derecha creciente.

Ejercicios resueltos

13. Calcula los puntos de corte con los ejes de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 4x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 8x + 15$ c) $f(x) = \frac{5}{x}$

SOLUCIÓN:

a)

$$f(x) = 4x + 1$$

CORTE CON OX $\rightarrow 4x + 1 = 0 \rightarrow 4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$

La función corta a OX en el punto $(-\frac{1}{4}, 0)$

CORTE CON OY $\rightarrow f(0) = 4 \cdot 0 + 1 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow$ Por tanto
La función corta a OY en $(0, 1)$



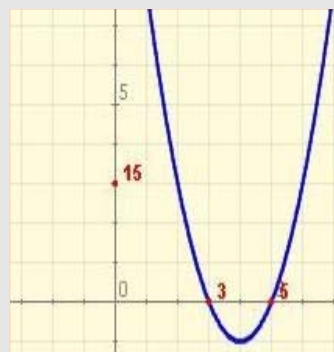
b)

$$f(x) = x^2 - 8x + 15$$

CORTE CON OX $\rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} \rightarrow$

$x = 5, x = 3$ La función corta a OX en $(5, 0)$ y en $(3, 0)$

CORTE CON OY $\rightarrow f(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 15 \rightarrow f(0) = 15 \rightarrow$ Por tanto
La función corta a OY en $(0, 15)$



c)

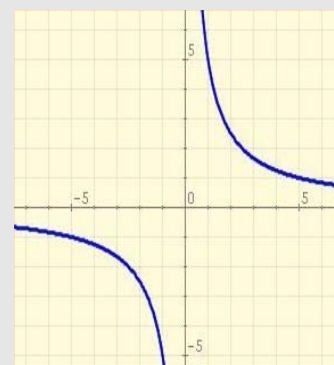
$$f(x) = \frac{5}{x}$$

CORTE CON OX $\rightarrow \frac{5}{x} = 0 \rightarrow 5 = 0 \rightarrow$ Imposible; por tanto

La función no corta a OX

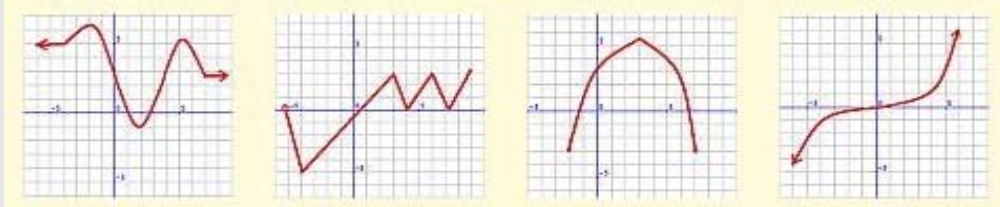
CORTE CON OY $\rightarrow f(0) = \frac{5}{0} \rightarrow f(0) =$ No se puede calcular \rightarrow Por tanto.

La función no corta a OY

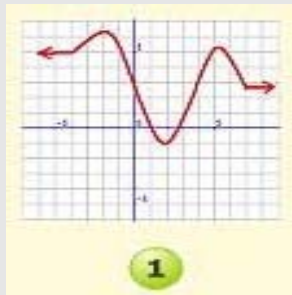


Ejercicios resueltos

14. Entre las siguientes funciones indica la que correspondería a una función decreciente en el punto de abscisa $x=0$.

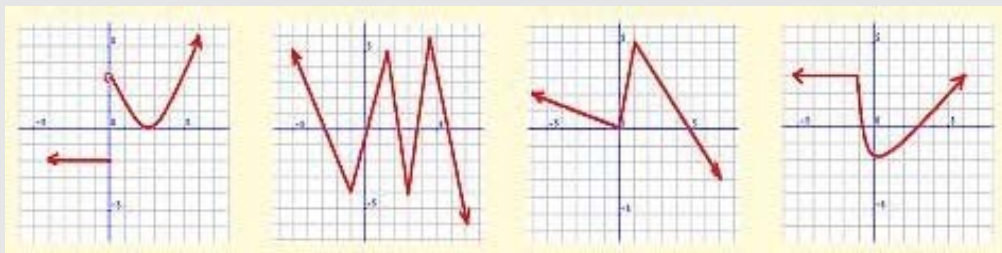


SOLUCIÓN:

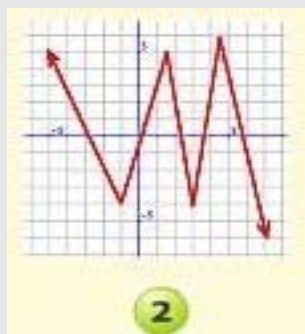


En un entorno del 0 la función baja

15. Entre las siguientes funciones indica la que correspondería a una función creciente en el punto de abscisa $x=0$.



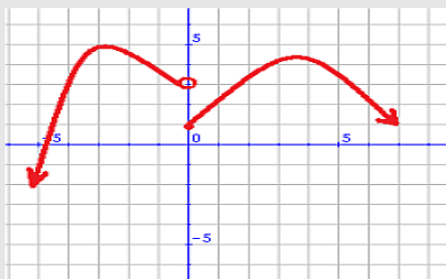
SOLUCIÓN:



En un entorno del 0, se cumple la función sube

Ejercicios resueltos

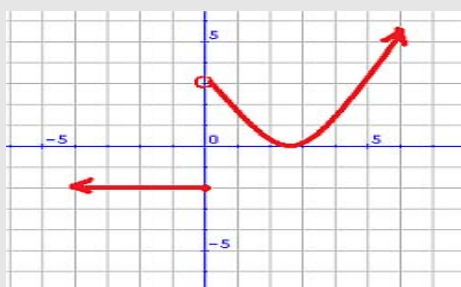
16. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un máximo.



SOLUCIÓN:

Hay dos máximos relativos, $M_1 = (-2,75, 5)$ y $M_2 = (3,5, 4,25)$

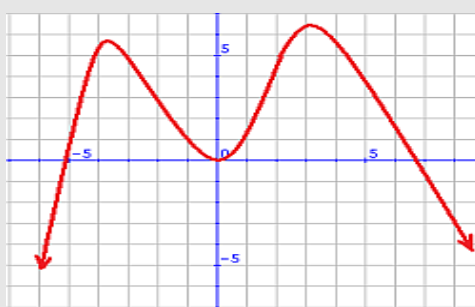
17. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un mínimo.



SOLUCIÓN:

Hay un mínimo, $m_1 = (2,5, 0)$.

18. Indica las coordenadas del punto en el que creas que la función alcanza un extremo.



SOLUCIÓN:

Hay un mínimo, $m_1 = (0, 0)$, y dos máximos $M_1 = (-3,75, 5,75)$, $M_2 = (3,25, 6,25)$.

4. Primeras funciones elementales

Función de proporcionalidad directa.

En muchas situaciones dos variables están relacionadas de manera que cuando una aumenta la otra lo hace también y análogamente cuando disminuye, guardando siempre la misma relación. Son magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplo

Imagina que este fin de semana decides hacer una excursión en bicicleta, con una velocidad constante de 10 km/h, y que conduces con tu bicicleta durante 2 horas, el espacio recorrido es de 20 km. ¿Qué pasaría si fueras a más velocidad durante el mismo tiempo?



Para un tiempo determinado:

A más velocidad más espacio recorrido.

A menos velocidad menos espacio recorrido.

Las funciones que relacionan este tipo de magnitudes se denominan funciones de proporcionalidad directa. Su gráfica sigue siempre un mismo patrón: una recta que pasa por el origen de coordenadas.



**A más, más
y
menos, menos"**

El valor de "m" se corresponde con la constante de proporcionalidad directa.

Ejemplo

Planteamos el problema y lo resolvemos de forma algebraica.

Por 4 Kg de manzanas hemos pagado 6,40 euros. Para calcular el precio de 1 Kg de ellas:

$$\begin{array}{l} 4 \text{ Kg} \text{ -----} \blacktriangleright 6,40 \text{ euros} \\ 1 \text{ Kg} \text{ -----} \blacktriangleright x \end{array}$$

$$x = \frac{1 \cdot 6,40}{4,00} = 1,6 \text{ euros/Kg}$$

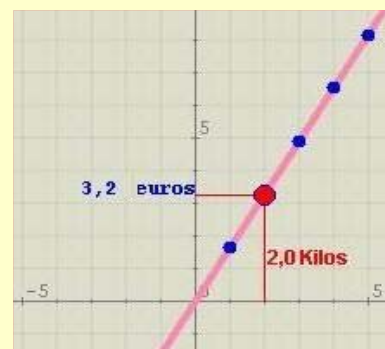
La función que permite calcular el precio de cualquier cantidad sería:

$$f(x) = 1,6 \cdot x$$

Podemos construir una tabla con la constante de proporción $m=1,6$. A más kilogramos más euros necesito.

X	f(x)
1,0	1,6
2,0	3,2
3,0	4,8
4,0	6,4
5,0	8,0

Si la representamos gráficamente, obtendremos una recta, de la que podemos interpolar datos.

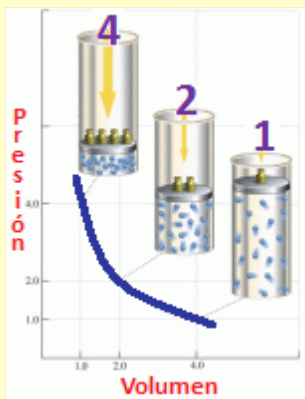


Función de proporcionalidad inversa.

En muchas situaciones se observa que dos variables están relacionadas de manera que cuando una aumenta la otra disminuye, pero en todo momento su producto es constante. Son magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo

Si quieres puedes hacer la prueba con una bolsa llena de papeles, a mayor presión hagas sobre los papeles, estos se irán aplastando y ocupando menos volumen.



A temperatura constante:

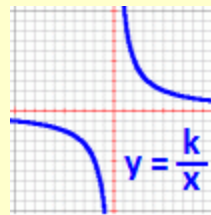
$$P V = k$$

A más presión menos volumen

A menos presión más volumen

Las funciones que relacionan este tipo de magnitudes se denominan funciones de proporcionalidad inversa.

Su gráfica sigue siempre un mismo patrón: la hipérbola.



"A más, menos y a menos, más"

El valor de "k" se corresponde con la constante de proporcionalidad inversa.

Ejemplo

Planteamos el problema y lo resolvemos.

6 naufragos disponen de agua para 10 días. si queremos ver para cuanto tiempo tendría uno.

6 naufragos -----> 10 días
1 naufragos -----> x

$$x = 60 \text{ días}$$

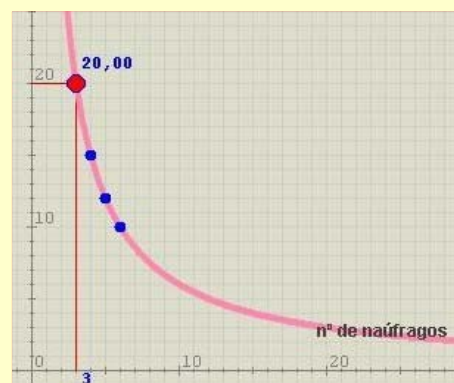
La función que permite relacionar las dos magnitudes sería:

$$f(x) = \frac{60}{x}$$

Podemos construir una tabla con la constante de proporción $k=60$. A menos naufragos más días.

$f(x)$	30	20	15	12	10
x	2	3	4	5	6

Si la representamos gráficamente, obtendremos la rama de una hipérbola.



Ejercicios resueltos

19. Clasifica la relación entre las magnitudes siguientes:

Velocidad y tiempo en hacer un recorrido, gasto de luz y kilovatios consumidos, radio y longitud de la circunferencia, altura y peso de una persona, presión y volumen que ocupa un gas, velocidad y espacio en un tiempo fijo.

SOLUCIÓN:

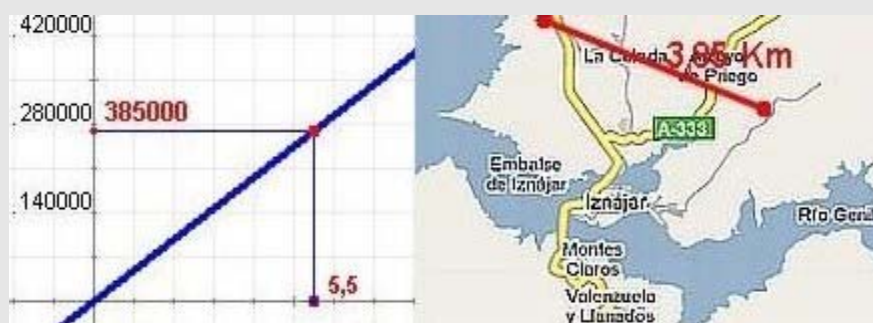
	INVERSA	DIRECTA	NINGUNA
Velocidad y tiempo en hacer recorrido	X		
Gasto de luz y kilovatios consumidos		X	
Radio y longitud de circunferencia		X	
Altura y peso de una persona			X
Presión y volumen que ocupa un gas	X		
Velocidad y espacio en un tiempo fijo		X	

20. Un mapa tiene por escala 1:70000. Cualquier distancia en el mapa se traduce en su correspondiente realidad y viceversa.

1. Escribe la función que relaciona dicha distancia y represéntala gráficamente.
2. Calcula la distancia correspondiente a 5'50 cm en el mapa.

SOLUCIÓN:

- a) La función sería $f(x) = 70000 \cdot x$ (cada unidad en el mapa se convierte en 70000), a más cm en el mapa más distancia en la realidad. Proporcionalidad directa.
- b) La distancia del mapa de 5'50 cm corresponde con $f(5'50)$, resulta:
 $f(5'50) = 70000 \cdot 5'50 = 385000 \text{ cm} = 3'85 \text{ km}$



Ejercicios resueltos

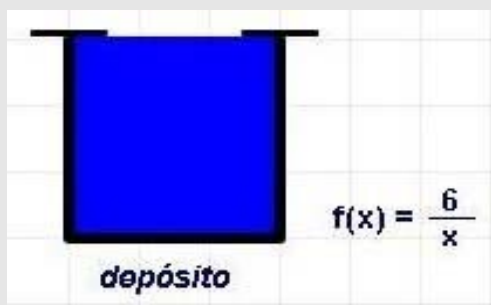
21. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 6 horas. Si en lugar de uno hubiera 4 grifos.

- Escribe y representa la función que corresponde a la relación entre el número de grifos y el tiempo que tarda en llenar el depósito.
- ¿Cuánto tiempo tardaría?

SOLUCIÓN:

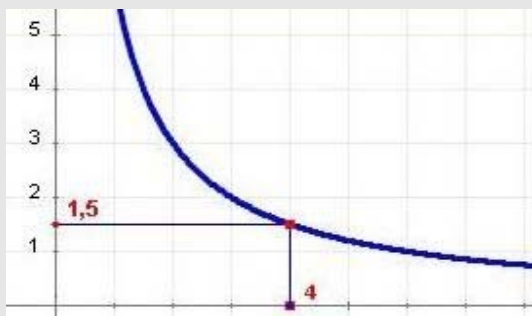
- Hay más grifos para llenar el depósito, tardará menos tiempo en llenarse, por lo tanto, es una proporcionalidad inversa.

La función sería $f(x) = \frac{6}{x}$



- El tiempo para 4 grifos, es el resultado que corresponde a $f(4)$.

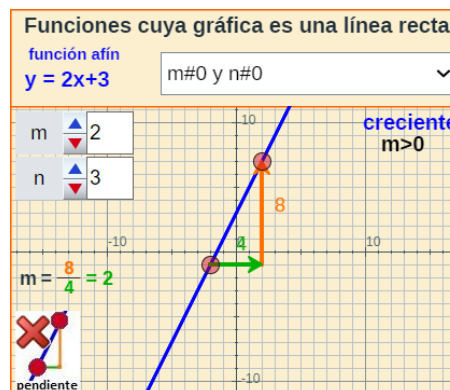
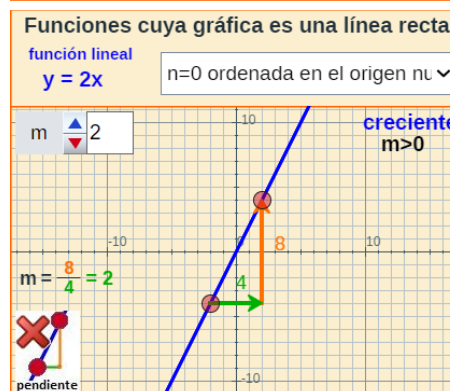
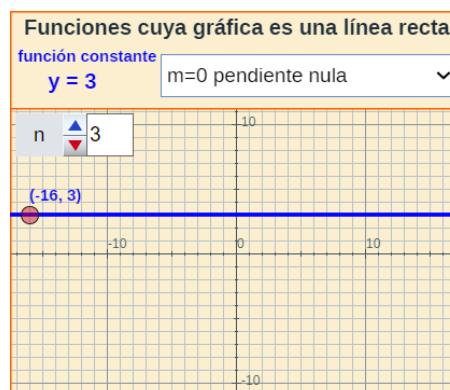
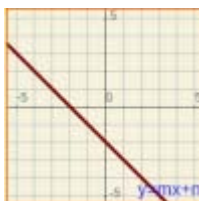
$$f(x) = \frac{6}{4} = 1,5 \text{ horas}$$



5. Funciones cuya gráfica es una recta

Las funciones cuya gráfica es una línea recta son todas de la forma $f(x)=mx+n$, es decir, son polinomios de grado uno, cuando m es distinto de cero, o de grado cero si $m=0$.

- $y=n$ función **constante**, la gráfica es una línea recta horizontal.
- $y=mx$ con $m \neq 0$
Es una función de proporcionalidad directa o **lineal** y pasa por el origen de coordenadas.
- $y=mx+n$ con $m \neq 0$ y $n \neq 0$
Es una función **afín** y no pasa por el origen de coordenadas



Ejercicios resueltos

22. Dibujar la gráfica de una función del tipo $y = n$ y averiguar la función cuya gráfica es una recta horizontal

Selecciona... \downarrow Dibujar la gráfica de la función $y = -2$

La gráfica de las funciones de la forma $y=n$ es siempre una línea recta horizontal (pendiente nula) donde n es la ordenada en el origen. En este caso $n = -2$ y es una función constante afín.

Para dibujarla basta situar el punto $(0, n)$ que aquí es $(0, -2)$ y trazar una línea recta horizontal.

¿Cuál es la función cuya gráfica es...? OTRO EJEMPLO

La gráfica es una línea recta horizontal, por lo tanto la función es de la forma $y=n$, donde n es la ordenada en el origen. En este caso $n=2$ ya que pasa por el punto $(0, 2)$

La función es: $y = 2$

Ejercicios resueltos

23. Dibujar la gráfica de una función del tipo $y = mx$

Selecciona... **Dibujar la gráfica de la función $y = x$**

La gráfica de las funciones de la forma $y=mx$ es siempre una línea recta. m es la pendiente y la ordenada en el origen es cero. En este caso $m = 1$ y es una función lineal.

Para dibujarla podemos optar por **dibujar dos puntos**

Un punto puede ser $(0, 0)$, pues al ser lineal pasa por el origen. Y otro la imagen del valor de x que queramos. Por ejemplo si $x=1$ entonces $y = 1 \cdot 1 = 1$. Dibujamos $(1, 1)$ y unimos los dos puntos en una línea recta.

x	y
0	0
1	1

Selecciona... **Dibujar la gráfica de la función $y = x$**

La gráfica de las funciones de la forma $y=mx$ es siempre una línea recta. m es la pendiente y la ordenada en el origen es cero. En este caso $m = 1$ y es una función lineal.

Para dibujarla podemos optar por **dibujar un punto y la pendiente**

El punto puede ser $(0, 0)$, pues al ser lineal pasa por el origen. A partir de él nos desplazamos una posición a la derecha y 1 hacia arriba pues la pendiente $m = 1$ es positiva. Unimos el punto al que hemos llegado con el anterior en una línea recta.

24. Dibujar la gráfica de una función del tipo $y = mx + n$

$y=mx+n$ **Dibujar la gráfica de la función $y = 4x - 3$**

La gráfica de las funciones de la forma $y=mx+n$ es siempre una línea recta. m es la pendiente y n es la ordenada en el origen. En este caso $m = 4$ y $n = -3$ y es una función afín.

Para dibujarla podemos optar por **dibujar dos puntos**

Uno puede ser $(0, n)$ correspondiente a $x=0$. Aquí sería $(0, -3)$. Y otro la imagen del valor de x que queramos. Por ejemplo si $x=1$ entonces $y = 4 \cdot 1 - 3 = 1$. Dibujamos $(1, 1)$ y unimos los dos puntos en una línea recta.

x	y
0	-3
1	1

Selecciona... **Dibujar la gráfica de la función $y = 4x - 3$**

La gráfica de las funciones de la forma $y=mx+n$ es siempre una línea recta. m es la pendiente y n es la ordenada en el origen. En este caso $m = 4$ y $n = -3$ y es una función afín.

Para dibujarla podemos optar por **dibujar un punto y la pendiente**

El punto puede ser $(0, n)$ correspondiente a $x=0$. Aquí sería $(0, -3)$. A partir de él nos desplazamos una posición a la derecha y 4 hacia arriba pues la pendiente $m = 4$ es positiva. Unimos el punto al que hemos llegado con el anterior en una línea recta.

25. Averiguar la función cuya gráfica es...

¿Cuál es la función cuya gráfica es...? **OTRO EJEMPLO**

La gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$, por lo tanto la función es de la forma $y=mx$. Es lineal. Para hallar la pendiente basta conocer otro punto. Por ejemplo, para $x=1$, en este caso, tenemos que $y=4$. Pasa por $(1, 4)$. Así pues la pendiente es $m = \frac{4}{1} = 4$.

La función es: $y = 4x$

¿Cuál es la función cuya gráfica es...? **OTRO EJEMPLO**

La gráfica es una línea recta inclinada que no pasa por el origen de coordenadas, por lo tanto la función es afín de la forma $y=mx+n$, donde n es la ordenada en el origen y m es la pendiente. En este caso $n=1$ ya que pasa por el punto $(0, 1)$ e $y=mx+1$. Para hallar la pendiente basta conocer otro punto. Por ejemplo, si $x=1$, aquí tenemos que $y=-3$. Pasa por $(1, -3)$. Por tanto ha de ser $-3 = m \cdot 1 + 1$ y consecuentemente $m = \frac{-3-1}{1} = -4$. La función es: $y = -4x + 1$

Para practicar



1. Completa los valores de la siguiente tabla:

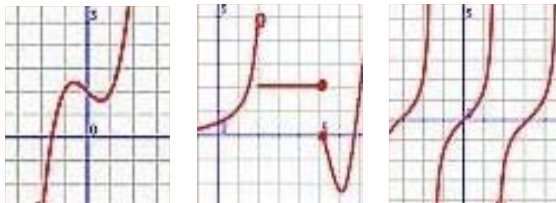
x	4	5	6	8	
f(x)	12	14	16		22

2. Con la función $f(x) = 2x + 1$ calcula la imagen de -5 . Dibuja la gráfica de esa función.

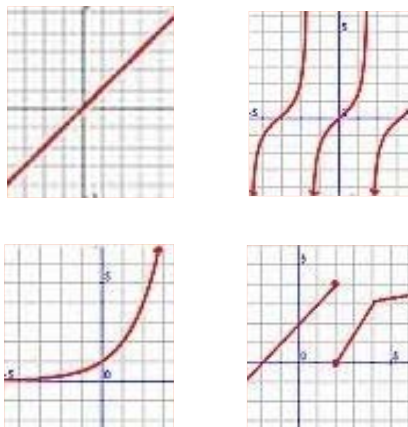
3. Completa la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = 4x + 3$. Dibuja la gráfica de esa función.

x	2	3	4	5	
f(x)					31

4. Entre las siguientes gráficas hay una que no corresponde a la de una función. Justifica cuál es la gráfica.



5. Entre las siguientes gráficas hay una que no corresponde a la de una función. Justifica cuál es la gráfica.



6. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 5$$

7. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{4x + 2}{x - 3}$$

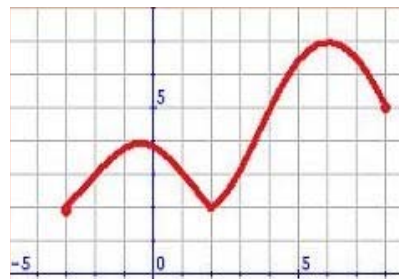
8. Calcula el recorrido de la función:

$$f(x) = \frac{-5}{x}$$

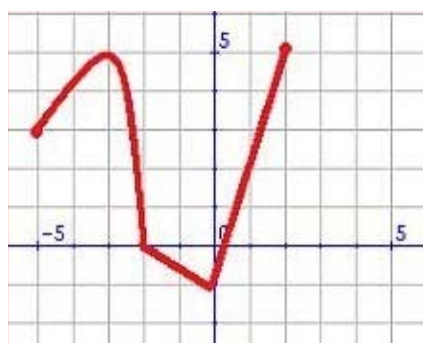
9. Calcula el recorrido de la función:

$$f(x) = \frac{4}{x + 5}$$

10. Determina de forma gráfica y con intervalos el dominio de la siguiente gráfica:

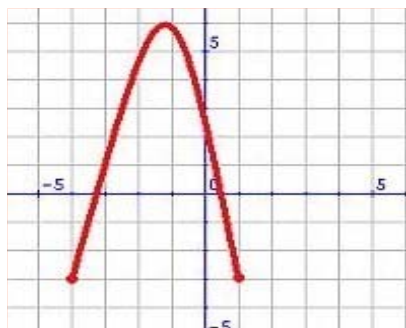


11. Determina de forma gráfica y con intervalos el dominio de la siguiente gráfica:

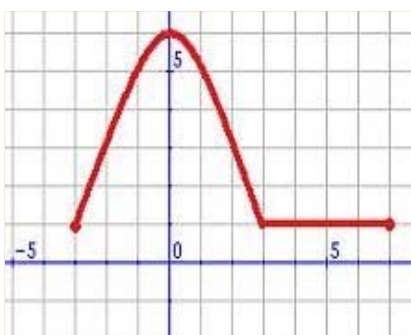


Funciones

12. Determina de forma gráfica y con intervalos el recorrido de la siguiente gráfica:



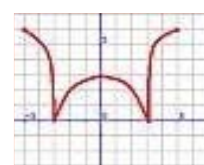
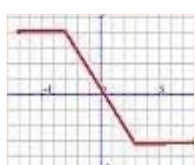
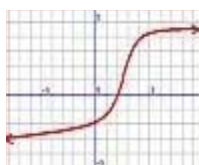
13. Determina de forma gráfica y con intervalos el recorrido de la siguiente gráfica:



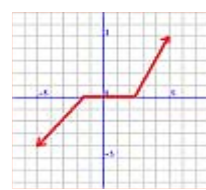
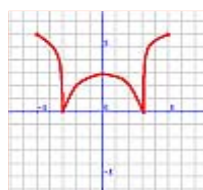
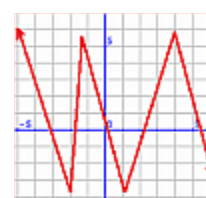
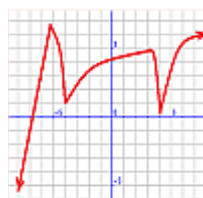
14. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $f(x)=x+5$

15. Halla los puntos de corte con los ejes de la función $f(x)=5-3x$

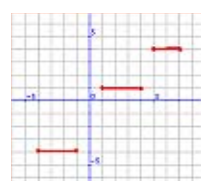
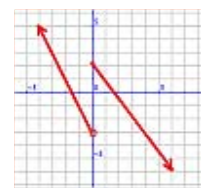
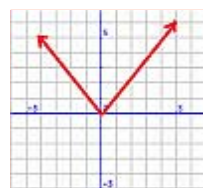
16. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función decreciente en el punto de abscisa $x=0$.



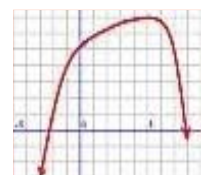
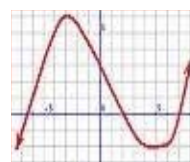
17. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función creciente en el punto de abscisa $x=0$



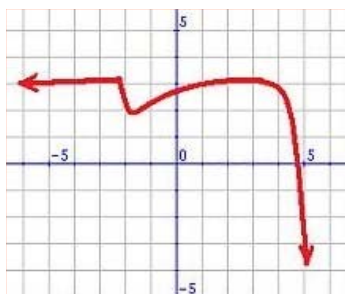
18. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función creciente en el punto de abscisa $x=0$



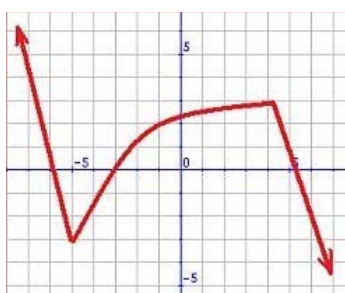
19. Entre las siguientes funciones indica la que se corresponde con una función decreciente en el punto de abscisa $x=0$.



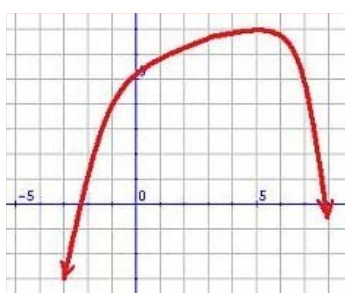
20. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un mínimo.



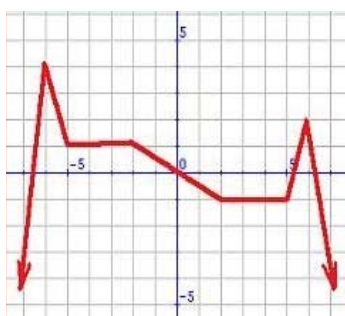
21. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un mínimo.



22. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un máximo.



23. En la gráfica siguiente indica las coordenadas donde se alcanza un máximo.



24. Clasifica la relación entre las magnitudes siguientes:

Calorías y cantidad de pastel, velocidad y espacio en un tiempo fijo, lado de un cuadrado y perímetro, número de entradas y recaudación, aficionados al cine y precio de entrada, gasto en combustible y número de litros, números de personas y parte de tarta, tiempo que está la luz encendida y coste, número de días festivos y horas de sol.

25. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 8 horas. Escribe la función que relaciona el número de grifos y el tiempo. Si en lugar de uno hubiese 5, ¿cuánto tardaría?

26. Un grifo de caudal fijo llena un depósito en 5 horas. Escribe la función que relaciona el número de grifos y el tiempo. Si en lugar de uno hubiese uno más, ¿cuánto tardaría?

27. Un mapa tiene por escala 1:90000. escribe la función que corresponde con la escala. Calcula la distancia que correspondería con 2 cm en un mapa.

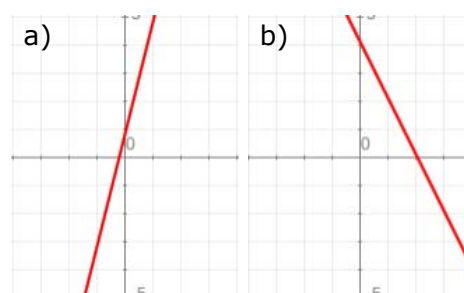
28. Un mapa tiene por escala 1:60000. escribe la función que corresponde con la escala. Calcula la distancia que correspondería con 4'5 cm en un mapa.

29. Dibuja la gráfica de las funciones:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -2x - 4$

30. Determina la expresión de la función cuya gráfica es:





Idea sobre continuidad



La primera idea que imaginamos sobre continuidad es la de un trazo que dibujamos sin levantar el lápiz del papel.

El transcurrir del tiempo, el desplazamiento de un coche que se dirige hacia un lugar determinado, el crecimiento de las plantas, de los niños, de todos los seres vivos, las distintas posiciones del sol en el cielo durante el día... multitud de situaciones que se asocian intuitivamente hacia relaciones funcionales donde la continuidad es característica común.

Desde el punto de vista matemático; la continuidad es un concepto "local", es decir que para estudiar la continuidad en un determinado valor hay que observar como se comporta la función en los alrededores de ese mismo valor (entorno de ese punto).

Para que una función sea continua en un punto de su dominio debe comportarse de forma regular en las

proximidades del mismo. No deben observarse saltos, en el sentido de que cuando la variable independiente varía muy poco, en la variable dependiente no se observen diferencias significativas. La traducción al lenguaje matemático de esta propiedad no es fácil; para la perfecta definición de continuidad en un punto debe recurrirse a todo un invento matemático; el concepto de límite y a los trabajos, entre otros, de matemáticos como:



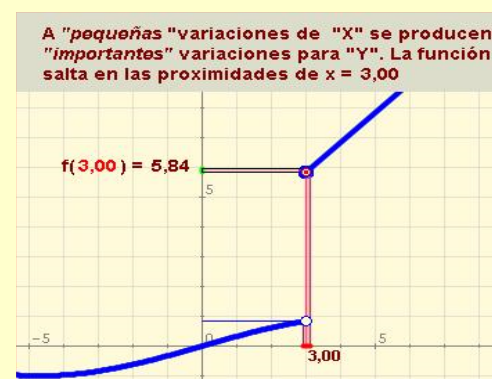
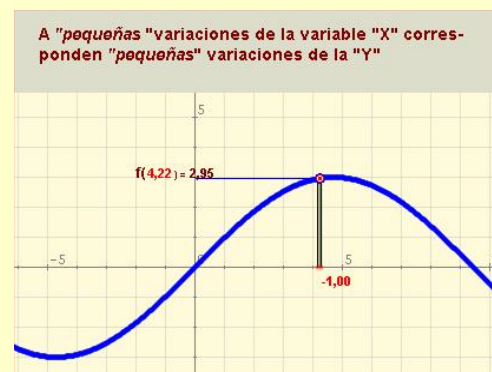
Cauchy
Weierstrass



Bolzano

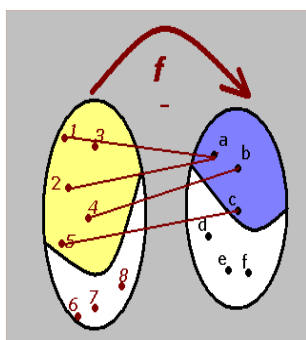


La imagen traduce las consecuencias de lo que ocurre con pequeñas variaciones de la variable independiente en funciones continuas en un punto y funciones discontinuas en un punto.



Recuerda lo más importante

Se dice que una correspondencia entre dos conjuntos es una **función**, cuando a cada elemento del primer conjunto se le hace corresponder de forma única un elemento del segundo que llamamos *imagen*.



Dominio o campo de existencia es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente.

Recorrido, imagen o rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente.

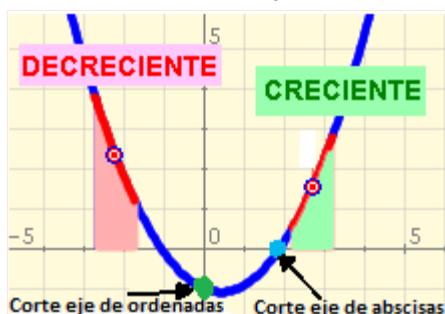
Para representar gráficamente una función, se forma la tabla de valores correspondiente. Cada pareja se identifica con un punto del plano cartesiano.



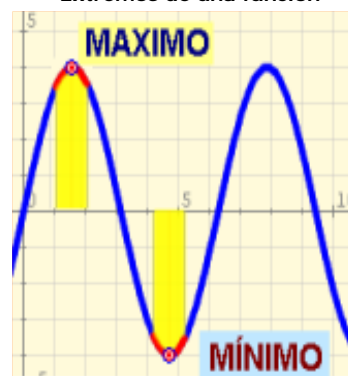
Representamos en el eje de abscisas la variable independiente.

Usualmente se denota como x , y al eje como OX . La variable dependiente se representa en el eje de ordenadas. Se le suele denotar como y . Y el eje como OY .

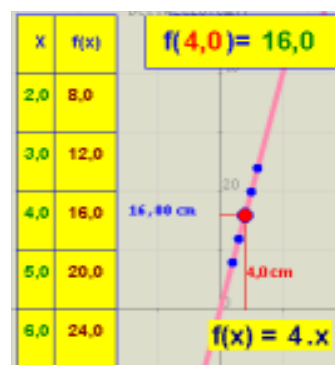
Puntos de corte con los ejes, crecimiento



Extremos de una función

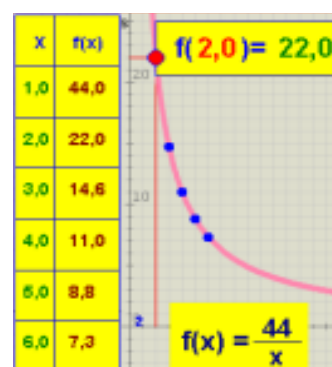


Función de proporcionalidad directa



"A más... más y a menos... menos"
La gráfica es una **línea recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Función de proporcionalidad inversa



"A más... menos y a menos... más"
La gráfica es una **hipérbola equilátera**.

Autoevaluación

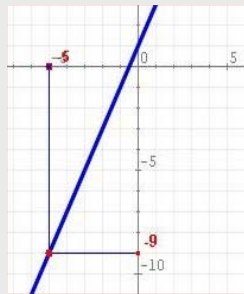


1. Una función asocia a cada valor el resultado de multiplicar por 1 y restar 2. ¿Cuál es la imagen de 0?
2. Una función asocia a cada número su doble menos 8. ¿Cuál es el número cuya imagen es -8 ?
3. Una función tiene por fórmula $f(x)=7x+2$. Indica cuál es el valor $f(5)$?
4. Una función tiene por fórmula $f(x)=\frac{4}{x}$. Indica cuál es el valor de x en $f(x)=\frac{4}{8}$.
5. Un conductor va a una velocidad uniforme de 70 km/h. Indica la distancia que habrá recorrido al cabo de 5 horas.
6. Por término medio una persona inspira una vez cada 2 segundos. Si por cada inspiración consume 3 litros de aire, calcula el volumen de aire que ha consumido en 14 horas.
7. Si una función tiene por fórmula $f(x)=\frac{x-12}{x-4}$. ¿Qué valor no pertenece a su dominio?
8. Indica el valor en el que la función $f(x)=-3x+9$ corta al eje de abscisas (OX).
9. Indica el valor en el que la función $f(x)=-6x-4$ corta al eje de ordenadas (OY).
10. Indica si la función que relaciona: Lado de un pentágono y perímetro, es de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos.

Soluciones de los ejercicios para practicar

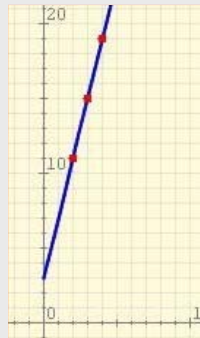
1. $f(8)=20, f(9)=22$

2. $f(-5)=-9$



3.

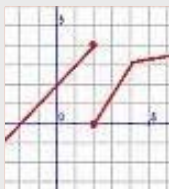
x	f(x)
2	11
3	15
4	19
5	23
7	31



4.



5.



6. \mathbb{R} = reales

7. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

8. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

9. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

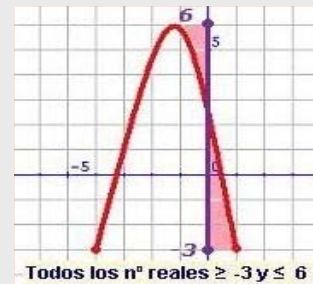
10.



11.



12.



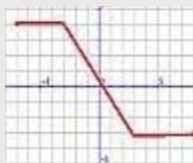
13.



14. $(-5, 0), (0, 5)$

15. $(\frac{5}{3}, 0), (0, 5)$

16.



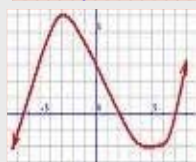
17.



18.



19.



20. $(-1,75, 2)$

21. $(-5, -3)$

22. $(5, 7)$

23. $(-6, 4)$ y $(6, 2)$

24.

	Directa	Inversa	Ninguna
Calorías y cantidad de pastel	X		
Velocidad y espacio en un tiempo fijo	X		
Lado de un cuadrado y perímetro	X		
Nº de entradas y recaudación	X		
Aficionados al cine y precio			X
Gasto combustible y nº de litros	X		
Nº de personas y parte de tarta		X	
Tiempo de luz encendida y coste	X		
Nº de días festivos y horas de sol			X

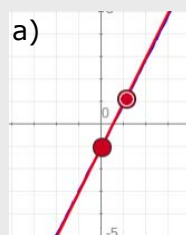
25. $f(x) = \frac{8}{x}$, 1'6 horas

26. $f(x) = \frac{5}{x}$, 2'5 horas

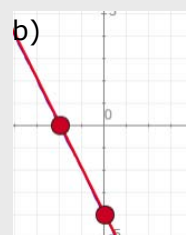
27. $f(x) = 90000x$, 4'95 km

28. $f(x) = 60000x$, 2'7 km

29. a)



b)



30. a) $y = 4x + 1$

b) $y = -2x + 4$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. - 2
2. 0
3. 37
4. 8
5. 350
6. 75600
7. 4
8. $x=3$
9. $y= - 4$
10. Directa