5

Expresiones algebraicas

Objetivos

- Crear expresiones algebraicas a partir de un enunciado.
- Hallar el valor numérico de una expresión algebraica.
- Clasificar una expresión algebraica como monomio, binomio,... polinomio.
- Operar con monomios (sumar, restar y multiplicar).
- Operar con polinomios (sumar, restar y multiplicar por un monomio).

Antes de empezar

1.Expresiones algebraicas ..... pág. 4
- ¿Qué son?
- ¿Cómo las obtenemos?
- Valor numérico

2.Monomios ..... pág. 6
- ¿Qué son?
- Sumar y restar
- Multiplicar

3.Polinomios ..... pág. 8
- ¿Qué son?
- Sumar y restar
- Multiplicar por un monomio

Ejercicios para practicar

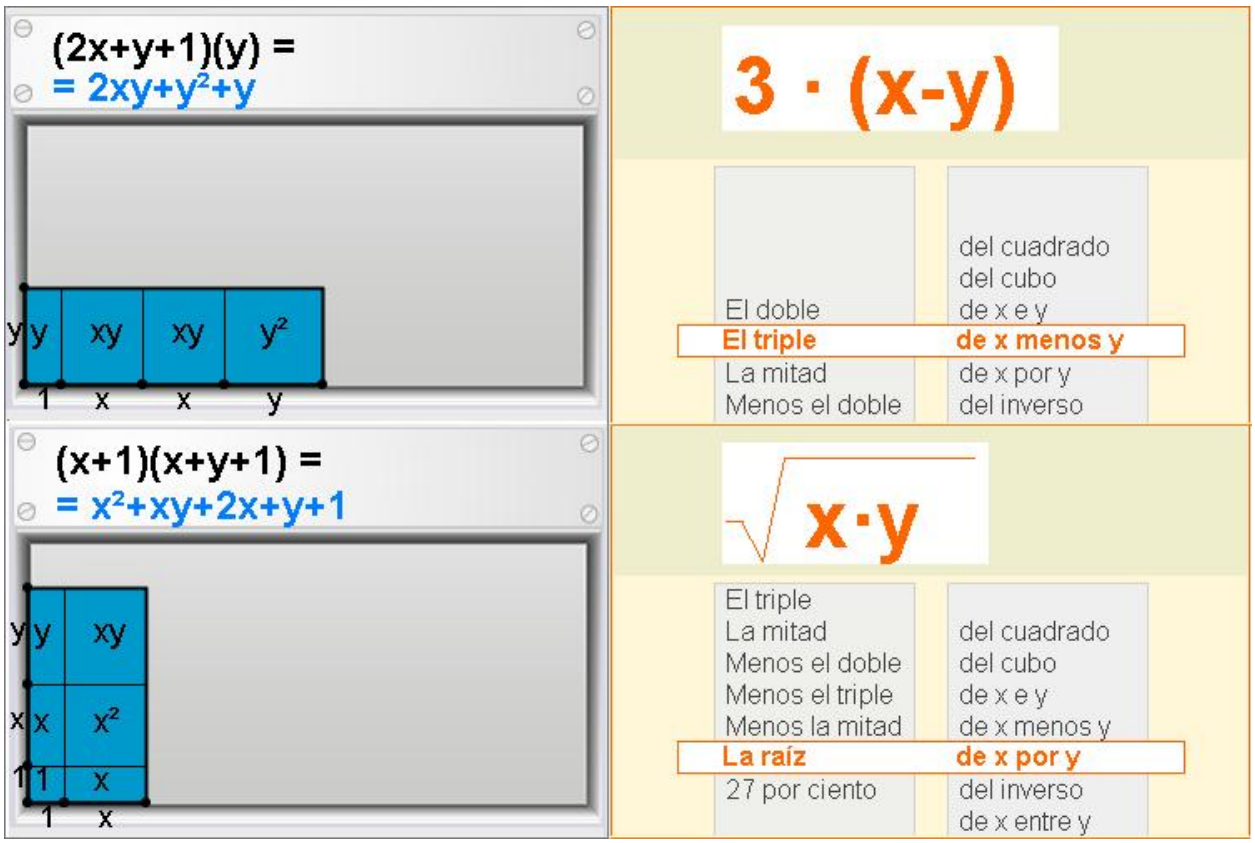
Para saber más

Resumen

Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar



Expresiones algebraicas

En la imagen, a la izquierda se pueden ver dos ejemplos en los que se aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, el gráfico explica esta propiedad que se utilizará en este tema. Observa atentamente las áreas de los rectángulos y construye figuras similares para aplicar esta propiedad.

A la derecha se muestran dos expresiones algebraicas, ¿sabrías construir las diferentes expresiones que se obtienen al mover las listas grises? Por ejemplo, el 27 por ciento del cuadrado será

$$0{,}27\ x^2$$

1. Expresiones algebraicas

¿Qué son?

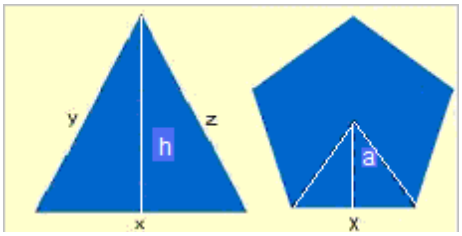
Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras unidos entre sí por las operaciones de sumar, restar, multiplicar, dividir y por paréntesis. Por ejemplo:

$$3+2\cdot x^2-x \quad \text{o} \quad x\cdot y-32\cdot(x\cdot y^2-y)$$

Las letras representan valores que no conocemos y podemos considerarlas como la generalización de un número. Las llamaremos **variables**.

Nota

El signo de multiplicar se sobreentiende delante de una letra o un paréntesis. Así, 3·a es equivalene a 3a, y 3·(2+x) es equivalente a 3(2+x).

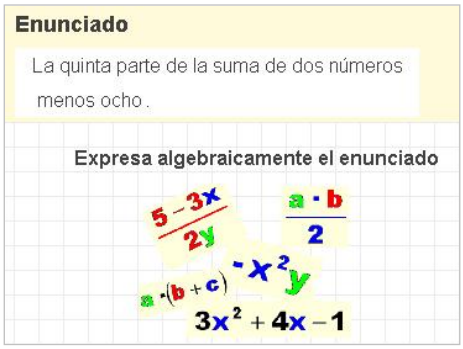


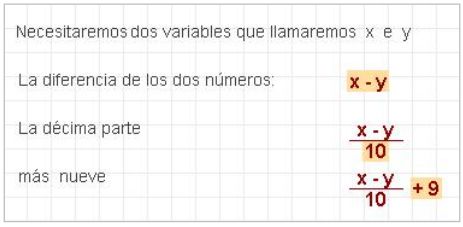
El perímetro del triángulo es x+y+z

El área del triángulo es $\frac{x\cdot h}{2}$

El perímetro del pentágono 5 x

El área del pentágono $\frac{5xa}{2}$





¿Cómo las obtenemos?

Pretendemos transformar un enunciado, donde hay uno o varios valores que no conocemos, en una **expresión algebraica.**

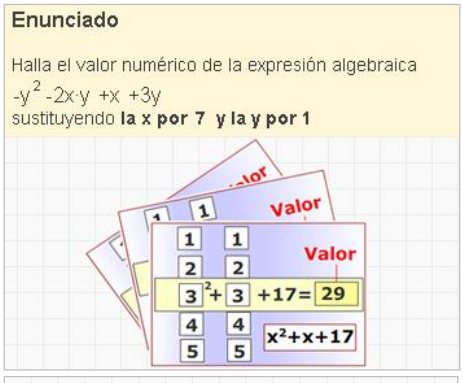
Cada uno de los valores (**variables**) que no conocemos lo representaremos por una letra diferente.

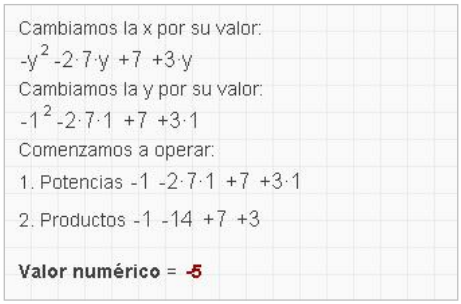
Valor numérico

Si en una expresión algebraica sustituimos las letras (variables) por números, lo que tendremos será una expresión numérica. El resultado de esta expresión es lo que llamamos **valor numérico** de la expresión algebraica para esos valores de las variables.

Es importante que tengas en cuenta la **prioridad de las operaciones**

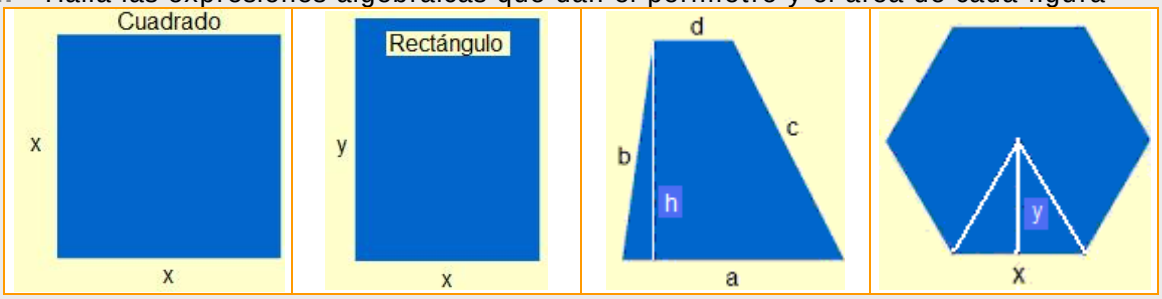
1. Potencias
2. Productos y cocientes
3. Sumas y restas





EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas que dan el perímetro y el área de cada figura



Soluciones

Perímetro = 4 x Área = x^2	Perímetro = 2 (x + y) Área = x y	Perímetro = a+b+c+d Área = $\frac{(a+d)h}{2}$	Perímetro = 6 x Área= 3 x y

2. Escoge la expresión algebraica en cada caso

1 El triple de un número más seis A $6x+3$ B $3x+6$ C $3(x+6)$ D $\frac{x}{3}+6$	2 La quinta parte de un nº más 10. A $\frac{x}{5}+10$ B $\frac{x+10}{5}$ C $10x+5$ D $5x+10$	3 Un cuarto de la suma un nº más 7. A $\frac{x+7}{4}$ B $\frac{x}{4}+7$ C $\frac{14+7}{4}$ D $\frac{7}{4}+x$	4 La semisuma de dos números. A $\frac{x\cdot y}{2}$ B $\frac{x+y}{2}$ C $\frac{x}{2}+y$ D $\frac{x-y}{2}$	5 La mitad del producto de 2 nºs. A $\frac{x}{2}\cdot y$ B $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ C $\frac{x-y}{2}$ D $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 La raíz cuadradade la suma de 2 cuadrados. A $x+y$ B x^2+y^2 C $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ D $\sqrt{x^2+y^2}$	7 El 40% de un número. A $0.4\ x$ B $\frac{40}{100\ x}$ C $\frac{40}{10}x$ D $\frac{100\ x}{40}$	8 El cuadrado de la suma de 2 números. A $(z+y)^2$ B x^2+y^2 C $x+y^2$ D $(12+y)^2$	9 El cuadrado de la semisuma de 2 números. A $\frac{x^2+y^2}{4}$ B $\frac{x+y^2}{2}$ C $\frac{(x+y)^2}{4}$ D $\frac{(x+y)^2}{2}$	5 La media aritmética de tres números A $0.5x+0.5y+0.5z$ B $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ C $\frac{x+y+z}{3}$ D $\frac{x+y+z}{2}$

Soluciones: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

3. Halla los valores numéricos indicados en cada caso.

$2-7\cdot x^2$ en (-2) $2-7\cdot(-2)^5$ $2-7\cdot -32$ $2+224$ 226	$3+5\cdot x^3$ en $\frac{2}{3}$ $3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$ $3+5\cdot\frac{8}{27}$ $3+\frac{40}{27}$ $\frac{121}{27}$	$3\sqrt{x}-3\cdot x^3$ en 9 $3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$ $3\cdot 3-3\cdot 729$ $9-2187$ -2178	$\frac{x^5}{y^3}+4$ en $x=-2$ $y=3$ $\frac{(-2)^5}{3^3}+4$ $\frac{-32}{27}+4$ $\frac{76}{27}$	$\frac{x^5}{y^4}+1$ en $x=4$ $y=4$ $\frac{4^5}{4^4}+1$ 4^1+1 $4+1$ 5

2. Monomios

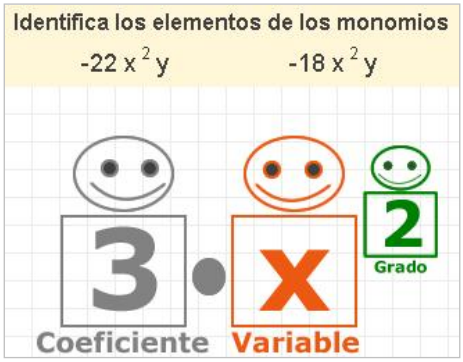
¿Qué son?

Un monomio es una expresión algebraica formada por el producto de un número y una o más variables. Al número lo llamaremos **coeficiente** y al conjunto de las variables, **literal**.

Llamaremos **grado** del monomio a la suma de los exponentes de su parte literal. Y **grado respecto de una variable**, al exponente de esa variable.

Dos monomios son **semejantes** si sus literales son iguales.

Dos monomios son **opuestos** si son semejantes y sus coeficientes son opuestos.



Monomio	Coeficiente	Literal	Grado
$-22x^2y$	-22	x^2y	3
$-18x^2y$	-18	x^2y	3

Son semejantes, pues tienen igual el literal

No son opuestos, pues los coeficientes no lo son

Sumar y restar monomios

Tres peras y dos peras son 5 peras. Pero 3 peras y 2 manzanas no son 5 peras ni 5 manzanas, son 3 peras + 2 manzanas.

Esta expresión no es igual a 5 peras ni a 5 manzanas, no simplifica

Lo mismo ocurre con los monomios. Si dos monomios son semejantes, sumamos o restamos los coeficientes y dejamos el mismo literal. Si no son semejantes, esta operación no puede expresarse de manera más simplificada.

$3x+2x=5x$, pero las expresiones $3x^2+2x$ o $2x+7y$ no se pueden simplificar.

$2x^7y^3 + 6x^7y^3$

Monomios semejantes, por tanto se suman los coeficientes

$8x^7y^3$

$2x^7y^3 - 6x^7y^3$

Para restarlos se procede se forma similar,

$-4x^7y^3$

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$

Monomios no semejantes, por tanto la expresión no se puede simplificar, el resultado es

$2x^7y^3 + 6x^5y^3$

Análogamente

$2x^7y^3 - 6x^5y^3$

es

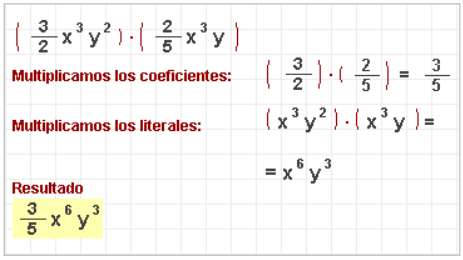
$2x^7y^3 - 6x^5y^3$

Multiplicar monomios

El producto de dos monomios es un monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y por parte literal el producto de las partes literales (recuerda la propiedad: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$).

Así,

$(3x^2y)\cdot(2x)=(3\cdot 2)x^2yx=6x^{2+1}y=6x^3y$



EJERCICIOS resueltos

4. Empareja los rectángulos de la izquierda, a la derecha está la solución.

$2x^3y^5$	Coefic. 0.5 Grado 3	xy^3	$-7x^5$
Coeficiente 6 Grado 3	Coefic. -7 Grado 5	Coeficiente 1 Grado 4	Coeficiente 2 Grado 8
$x^3/2$	$y+3$	No es un monomio	Coeficiente 1 Grado 3
$2x^2 3y$	y^3	Coefic. π Grado 1	πy

πy	Coefic. π Grado 1	Coeficiente 1 Grado 3	$2x^2 3y$
y^3	No es un monomio	$y+3$	$x^3/2$
Coeficiente 2 Grado 8	Coeficiente 1 Grado 4	Coefic. -7 Grado 5	Coeficiente 6 Grado 3
$-7x^5$	xy^3	Coefic. 0.5 Grado 3	$2x^3y^5$

5. Suma y resta las siguientes parejas de monomios

a) $3/2\ x^3y$, $2\ x^3y$ b) $2xy$, x^3y c) x^2y^3, $-7/4\ x^2y^3$ d) πx, $6x$

Soluciones suma:
a) $7/2\ x^3y$ b) $2xy + x^3y$ c) $-3/4\ x^2y^3$ d) $(\pi+6)x$

Soluciones resta:
a) $-1/2\ x^3y$ b) $2xy - x^3y$ c) $11/4\ x^2y^3$ d) $(\pi-6)x$

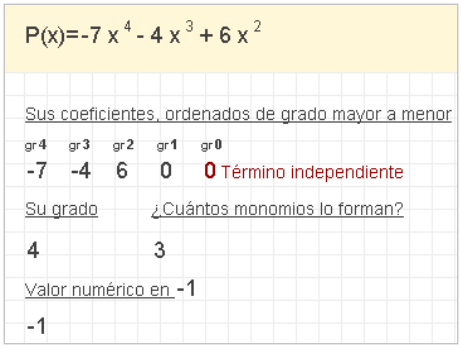
6. Escoge la etiqueta que da el resultado correcto del producto de los monomios indicados en cada caso.

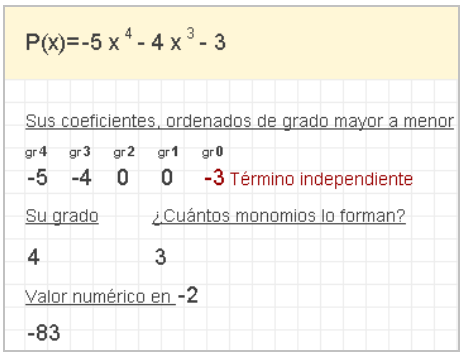
$4x^2y^3$ y $5y^3$		$-9y^2$ y $-6x$	
$9x^2y^6$	$20x^2y^6$	$-15xy^2$	$96xy^2$
$20x^2+y^6$	$-20x^2y^6$	$54x+y^2$	$54x^2y$
$20xy^9$	$45x^2y^6$	$54xy^2$	$-54xy^2$
Solución: fila 1 columna 2		Solución: fila 3 columna 1	

3. Polinomios

¿Qué son?

La suma de varios monomios no semejantes es un polinomio, el conjunto de los polinomios está formado por monomios o sumas de monomios no semejantes.
Si uno de los monomios no tiene parte literal, se le llama **término independiente.**
El mayor grado de todos sus monomios, es el **grado del polinomio**.
Nombramos los polinomios con una letra mayúscula y entre paréntesis las variables que lo integran, pero en esta página nos restringiremos a una sola variable.
Es importante que sepas identificar los **coeficientes** de un polinomio según su grado, si **$P(x)=x^3+2x-4$,** su **grado es 3** y su coeficiente de grado tres es 1, su coeficiente de grado uno es 2 y el término independiente o coeficiente de grado cero es -4.



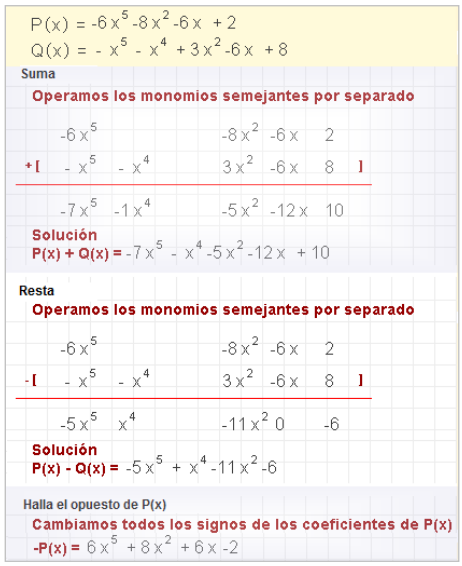


Sumar y restar polinomios

Para sumar o restar dos polinomios, operamos sus monomios semejantes. Si no los tienen, dejamos la operación indicada.
Así, si $P(x)=3x^2+4x$ y $Q(x)=4x-1$,
$P(x)+Q(x)=[3x^2+4x]+[4x-1]=3x^2+8x-1$
$P(x)-Q(x)=[3x^2+4x]-[4x-1]=3x^2+1$

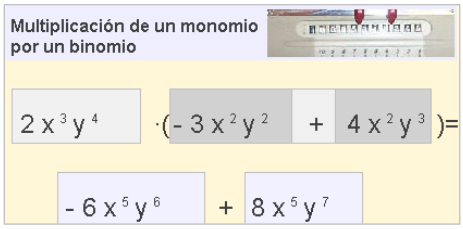
Polinomios opuestos

Dos polinomios son opuestos si al sumarlos todos sus términos se anulan.
Así, si $P(x)=3x^2+4$ y $Q(x)=-3x^2-4$,
entonces: $\mathbf{P(x)+Q(x)}=[3x^2+4]+[-3x^2-4]=$
$=3x^2+4-3x^2-4=\mathbf{0}$**, Q(x) es el opuesto de P(x).**
Para conseguir el polinomio opuesto de P(x), sólo tenemos que cambiar los signos de sus coeficientes. Lo representaremos por -P(x).



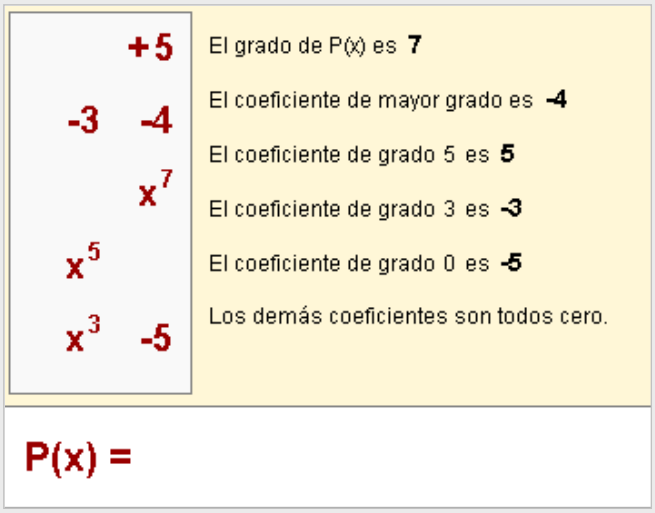
Multiplicar un polinomio por un monomio

El siguiente ejemplo te ayudará a dominar esta operación.
$P(x)=3x^2+4x$ $\quad Q(x)=3x$:
$P(x)\cdot Q(x) = [5x^2+4x]\cdot[3x] =$
$= [5x2]\cdot[3x] + [4x]\cdot[3x] = 15x^3+12x^2$



EJERCICIOS resueltos

7. Con los elementos de la izquierda, escribe el polinomio P(x) que cumpla las condiciones de la derecha.



Solución: $P(x) = -4x^7 + 5x^5 - 3x^3 - 5$

8. Halla P(x)-Q(x)

$P(x) = -x^3 + 3x^2 - \frac{4}{3}x$

$Q(x) = -x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x - 4$

$P(x) - Q(x) = \frac{8}{3}x^2 - \frac{23}{6}x + 4$

Halla P(x)+Q(x)

$P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x$

$Q(x) = \frac{2}{5}x^3 - x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$

$P(x) + Q(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{29}{20}x - \frac{5}{4}$

9. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Multiplica el polinomio
$P(x) = -9x^4 + 8x$
por -4 y por $11x^4$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4] \cdot [-4] = 36x^4$
$[8x] \cdot [-4] = -32x$

Solución

$P(x) \cdot (-4) = 36x^4 - 32x$

Multiplicamos, por separado, todos los términos de P(x)

$[-9x^4][11x^4] = -99x^8$
$[8x][11x^4] = 88x^5$

Solución

$P(x) \cdot (11x^4) = 88x^5 + 66x^8$

Para practicar

1. Halla la expresión algebraica que da las unidades de un número de tres cifras.

2. Mi paso es de 69 cm. ¿Cuántos pasos daré para dar tres vueltas a un circuito de a metros?

3. Si hace tres horas estaba en el kilómetro 26 de una carretera y voy a una velocidad media de x km/h ¿En qué punto kilométrico me encuentro de la misma carretera?

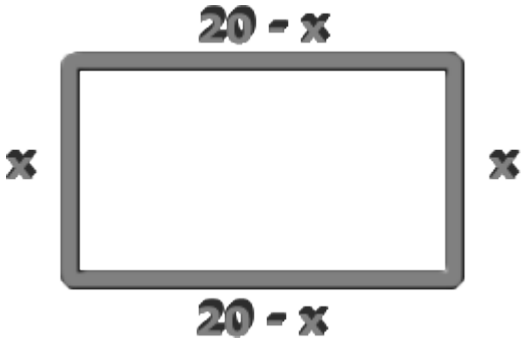
4. En tres cuartos de hora hay 45 minutos ¿Sabes cuantos minutos hay en 2·r/s horas?

5. La expresión algebraica que define el precio de un artículo de y€ si nos rebajan un x% es (100 – x) / 100 · y. Halla el precio de un artículo de 52€ si se rebaja un 25%.

6. Halla el valor numérico de $P(x)=6x^2+7x+3$ en $x=10$ y en $x=0{,}1$.

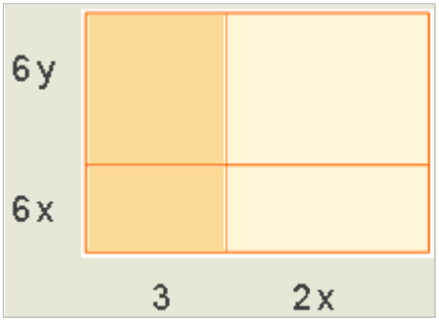
7. Halla el valor numérico de $(10x+y)/99$ en $x=6$ $y=8$.

8. Doblando un alambre de 40 cm formamos un rectángulo. Halla la expresión algebraica que define el área del rectángulo y calcula su valor para $x=4$. (Ver figura)



9. ¿Cuál es el grado del polinomio $-3x^4+9x^2$? ¿Cuál es su coeficiente de grado dos? ¿y el de grado uno? Calcula su valor numérico en $x=2$.

10. Multiplica $3\cdot(6x+6y)$ y $2x\cdot(6x+6y)$. Completa las áreas de los rectángulos.



11. Opera $[4x^3y^3]+[5x^4y^2]$ y $[-7x^3]+[5x^3]$

12. Opera $[-8x^2]-[-3x^2]$

13. Multiplica los monomios $[2x^5y^3]$ y $[-3xy^2]$

14. Halla el opuesto de $[-2x^2y^4]$

15. Suma los polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-5x-\frac{4}{5} \quad \text{y}$$

$$x^3+x+\frac{3}{5}$$

16. Resta los polinomios

$$-\frac{3}{4}x^3+\frac{3}{5}x-2 \quad \text{y}$$

$$\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{5}x^2+4$$

17. Multiplica el monomio

$-4x^7y^2$

por el binomio

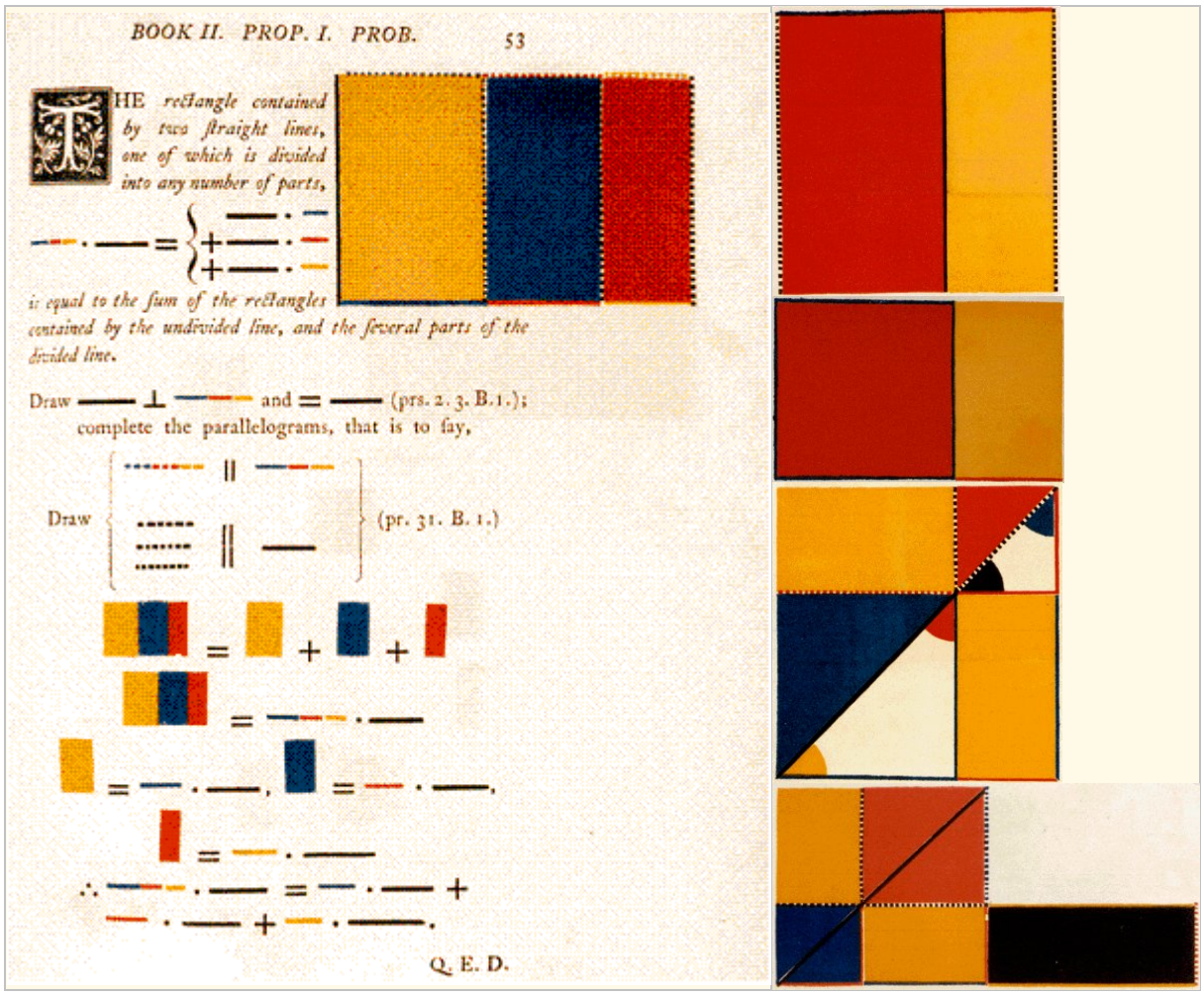
$-4x^8y^7-x^4y^4$

Para saber más

Euclides

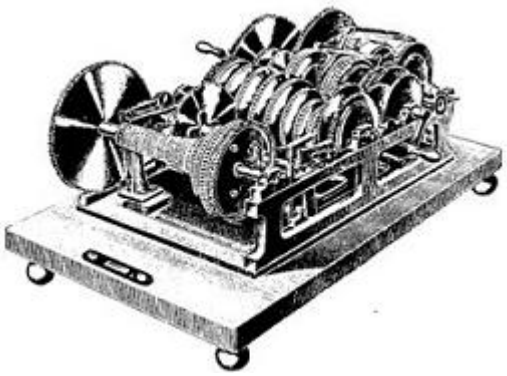
En el S. III Euclides escribió Los Elementos en 13 volúmenes. La obra es la segunda en número de ediciones publicadas después de la Biblia (más de 1000).

Las imágenes corresponden a la edición de Byrne publicada en 1847. Son gráficos de las cinco primeras proposiciones del libro II y representan algunas operaciones de polinomios.



La Máquina Algebraica de Torres Quevedo

Son muchas las máquinas precursoras de los ordenadores. En las imágenes vemos una aportación española a este desarrollo. Esta máquina calculaba valores numéricos de polinomios.



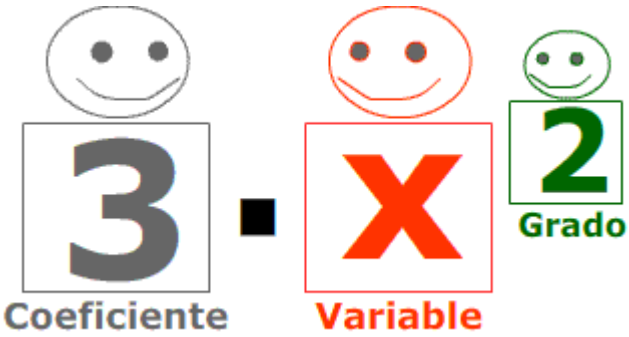
Recuerda lo más importante

Expresiones algebraicas y sus valores numéricos

El número de ruedas si hay 80 coches y 20 motos, es el **valor numérico** de **4x + 2y** en x=80, y=20:
4·**80** + 2·**20** = 360

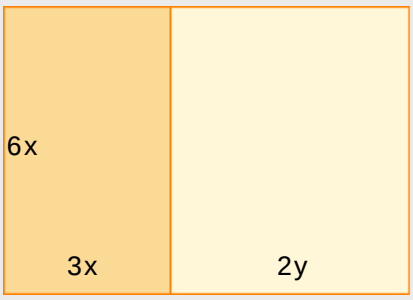
La **expresión** que da el precio de las ruedas si la de un coche es z€ y la de una moto t€, es
4xz + 2yt

El coste de las ruedas de 2 cohes y una moto si la del coche es de 80€ y la de la motocicleta de 50€ es el **valor numérico** de **4xz + 2yt** en x=2, y=1; z=80, t=50, que da
4·**2**·**80** + 2·**1**·**50** = 740



Monomios	Polinomios
Suma y resta monomios	Suma y resta polinomios
$7x^3 + 2x = 7x^3 + 2x$ $7x^3 + 2x^3 = 9x^3$ $7x^3 - 2x^3 = 5x^3$	$P(x) = 4x^3 + x - 5$ $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 4$ $P(x) + Q(x) = 6x^3 + x^2 + 3x - 1$ $P(x) - Q(x) = 2x^3 - x^2 - x - 9$
Multiplica monomios	Multiplica un monomio por un polinomio
$7x^3 \cdot 2x = 14x^4$ $7x^3 \cdot 2x^3 = 14x^6$ $3x^3y^2 \cdot 2x^3y = 6x^6y^3$	$7x^3 \cdot (2x^2 + 3) =$ $= 7x^3 \cdot 2x^2 + 7x^3 \cdot 3 =$ $= 14x^5 + 21x^3$

Autoevaluación



1. Halla la expresión algebraica que da las unidades del triple de un número de tres cifras x y z.

2. Halla el área del rectángulo de la izquierda.

3. Valor numérico de $5x^3-4/5x^2+5x+5$ en $x=-2$

4. ¿Cuál es el grado del polinomio $P(x,y)=3x^3y^3-5x^2y^3$?

5. ¿Cuál es el coeficiente de grado 2 de $P(x)=-5x^3+4x^2-3$?

6. P(x) es un polinomio de grado 1 tal que $P(10)=234$, $P(0,1)=6,3$ ¿Sabes si $P(x)=23x+4$ o $P(x)=2x^2+3x+4$ o ninguno de los dos casos?

7. Suma los monomios $2x^6y^5+3x^6y^5$

8. Halla el valor numérico en $x=10$ de la resta de los polinomios $P(x)= 6x^2+4x+1$ y $Q(x)=2x^2+5x+4$

9. ¿Cuál es la suma de $\sqrt{3}x^8 + 4x$ y $5x^8 + 3x$?

10. ¿Cuál es el grado del producto de $-6x^4y^3$ por $2x^6y^3+3x^8y^6$?

Soluciones de los ejercicios para practicar

1. 100x +10y +z
2. 100a/23
3. 26+3x
4. 120·r/s minutos
5. 39€
6. en 10, 673; en 0,1, 3,76
7. 0.686868....
8. $20x-x^2$; 64
9. 4; 9; 0; -12
10. $18x+18y$; $12x^2+12xy$

18y	12xy
18x	$12x^2$

11. $4x^3y^3+5x^4y^2$; $-2x^3$
12. $-5x^2$
13. $-6x^6y^5$
14. $2x^2y^4$
15. $\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x-\frac{1}{5}$
16. $-x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{5}x-6$
17. $16x^{15}y^9+4x^{11}y^6$

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. 300x+30y+3z
2. $18x^2+12xy$
3. –241/5
4. 6
5. 4
6. P(x)=23x+4
7. $5x^6y^5$
8. 387
9. $(\sqrt{3}+5)x^8+7x$
10. 21