

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar que es un poliedro.
- Determinar los elementos de un poliedro: Caras, aristas y vértices.
- Clasificar los poliedros.
- Especificar cuándo un poliedro es un prisma o una pirámide.
- Distinguir los poliedros regulares convexos también denominados sólidos platónicos.
- Construir los poliedros a partir de su desarrollo plano.
- Diferenciar y catalogar algunos sólidos de revolución: Cilindro, Cono y esfera.
- Resolver problemas geométricos aplicando el Teorema de Pitágoras.

Antes de empezar

1. Poliedros pág. 4
Definición
Elementos de un poliedro
2. Tipos de poliedros pág. 6
Prismas
Prismas regulares
Desarrollo de un prisma recto
Paralelepípedos
Pirámides
Pirámides regulares
Desarrollo de una pirámide recta
Poliedros regulares
Desarrollo de poliedros regulares
Relación de Euler
3. Cuerpos redondos pág. 12
Cilindro
Desarrollo de un cilindro recto
Cono
Desarrollo de un cono recto
Esfera

Ejercicios para practicar

Para saber más

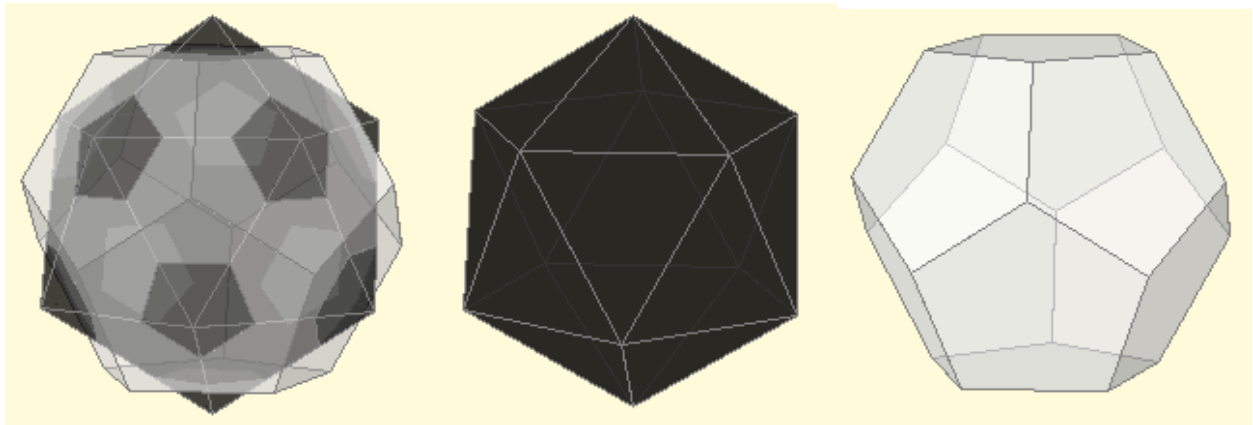
Resumen

Autoevaluación

Soluciones

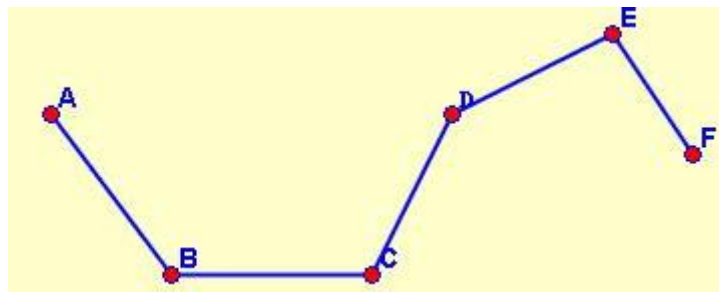
Antes de empezar

Un balón de fútbol se puede construir con polígonos regulares: 12 pentágonos y 20 hexágonos. Aquí puedes observar como se obtienen estos intersectando un icosaedro y un dodecaedro.



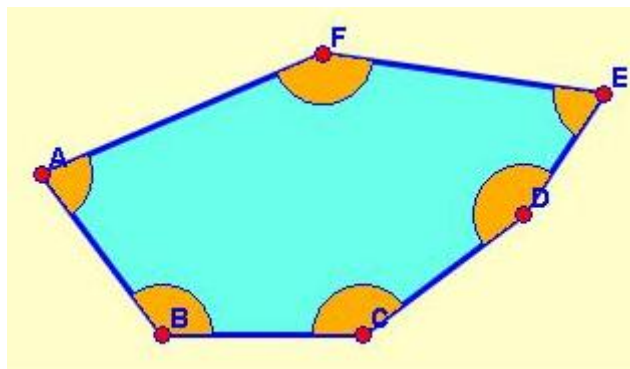
Recuerda

Una **línea poligonal** es un conjunto de **segmentos concatenados** y pueden ser: **abiertas** o **cerradas**



Línea poligonal

La **superficie** contenida por una **línea poligonal cerrada** se llama **polígono**. Los polígonos pueden ser **cóncavos** o **convexos**

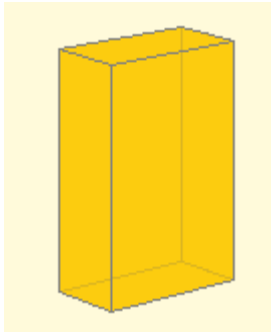


Este polígono es convexo ya que sus ángulos interiores son menores que 180°

Cuerpos geométricos.

1. Poliedros

Definición



Un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos. Cada uno de ellos es una **cara**.

El significado de **poli** es mucho y de **edro** es cara, por tanto poliedro significa muchas caras.

En la imagen de la izquierda tenemos un poliedro con seis caras que son rectángulos.

Por el contrario si al menos una de las superficie que delimitan a un sólido **no** es un polígono entonces **no es un poliedro**.

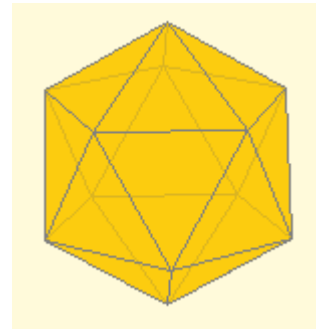


Eso es lo que ocurre en la imagen de la derecha donde la base es un círculo, lo que basta para afirmar ya que no es un poliedro, pero aquí adicionalmente la cara lateral no es plana. (Recuerda que un polígono es plano)

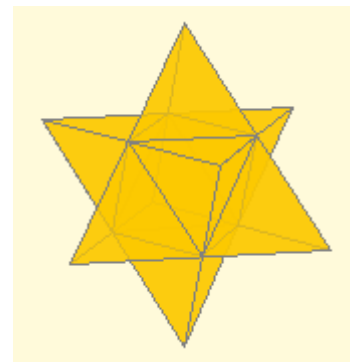
Un **ángulo diedro** es la región del espacio delimitada por dos semiplanos.

Un ángulo diedro es **convexo** si es menor que un llano y en caso contrario se dice que es **cóncavo**

Los poliedros pueden ser **convexos** o **cóncavos**. Es convexo si todos los ángulos diedros son convexos. Basta con que uno de ellos sea mayor que un llano para que el poliedro sea cóncavo.



Poliedro convexo

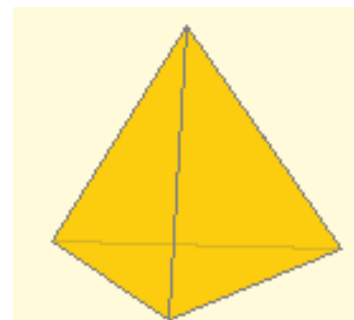


Poliedro cóncavo

Ejercicio resuelto: El poliedro de la figura de la derecha es el tetraedro y...

- a) todos los tetraedros son convexos
- b) tiene cuatro caras y es cóncavo
- c) es un cuerpo redondo

Solución: a) Por ser todos los ángulos diedros convexos.



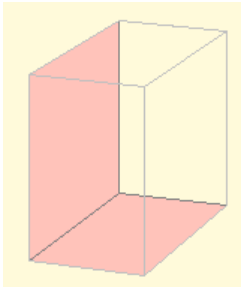
1. Poliedros

Elementos de un poliedro.

En un poliedro podemos distinguir los siguientes elementos:

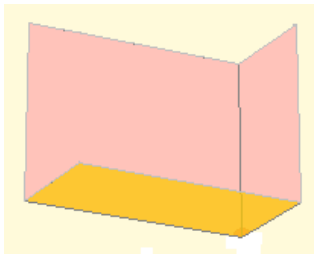
- **Caras:** son los polígonos que forman el poliedro.

Además podemos citar los **ángulos diedros** delimitados por dos caras que se cortan. Hay tantos como **número de aristas**.

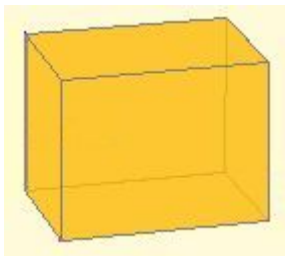


En la figura se muestra un ángulo diedro.

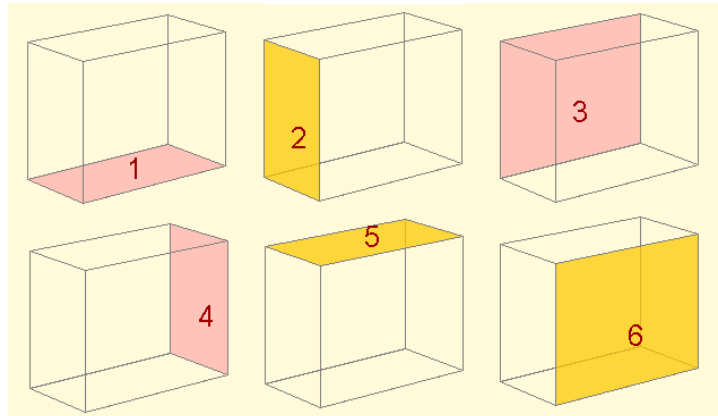
Y los **ángulos poliedros** determinados por las caras que inciden en un mismo vértice. Hay tantos como **número de vértices**.



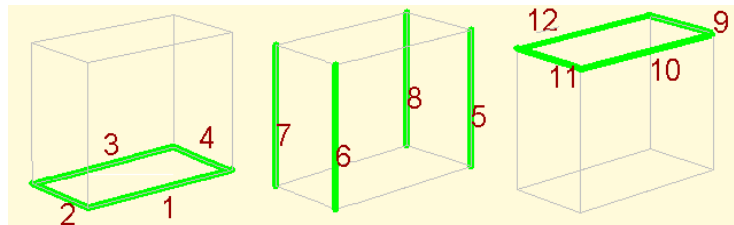
Arriba se muestra un ángulo poliedro.



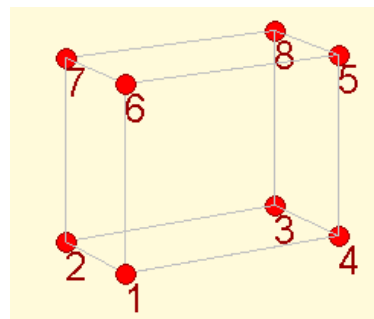
En esta figura (ortoedro) encontramos **12** ángulos diedros y **8** ángulos poliedros.



- **Aristas:** son los segmentos en los que se intersecan (cortan) las caras.



- **Vértices:** son los puntos donde se intersecan las aristas.



Vértices de un poliedro

Cuerpos geométricos.

2. Tipos de poliedros

Prismas

Un prisma es un poliedro determinado por:

- las **bases**: dos caras paralelas que son polígonos iguales.
- tantas **caras laterales**, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.

A los prismas se les **clasifica** según el número de lados de sus bases: triangular (3 lados), cuadrangular (4 lados), pentagonal (5 lados), exagonal (6 lados), etc.

La **altura** del prisma es la distancia entre las bases. Si la altura coincide con las aristas laterales el prisma es recto, en caso contrario es oblicuo.

Las caras laterales de los prismas rectos son rectángulos.

Un prisma es **convexo** o **cóncavo** si respectivamente sus bases son polígonos convexos o cóncavos.

Prismas regulares.

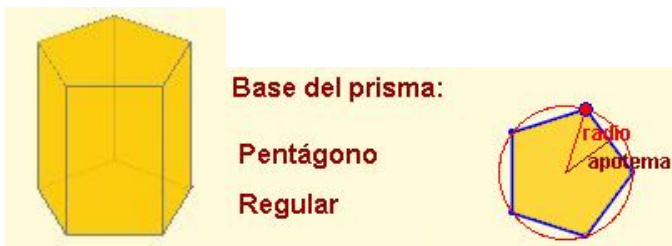
Un prisma recto es **regular** si sus bases son polígonos regulares.

Recuerda:

- un polígono es regular si tiene todos sus lados y ángulos iguales.
- todo polígono regular se puede **inscribir** en una circunferencia

Al ser regulares las bases podemos **referenciar** el **radio** de la circunferencia circunscrita y la **apotema** de la base.

Por ejemplo, en un prisma pentagonal regular

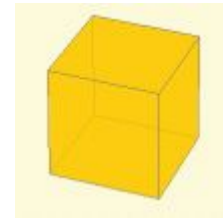


Base del prisma:

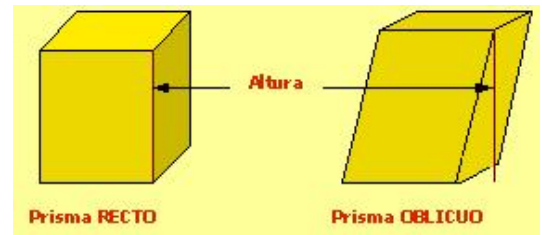
Pentágono

Regular

La base es un pentágono regular. Se muestra la apotema y el radio de la circunferencia circunscrita



Prisma cuya base tiene 4 lados

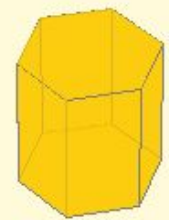


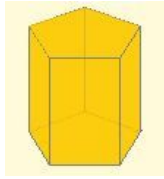
Prisma RECTO

Prisma OBLICUO

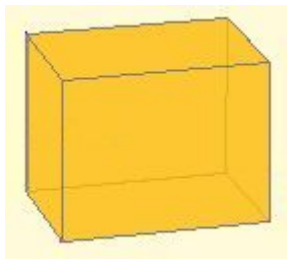
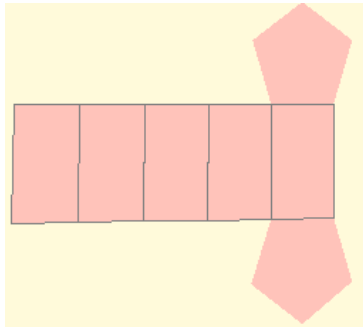


Prisma Exagonal Regular

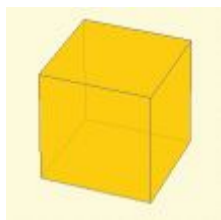




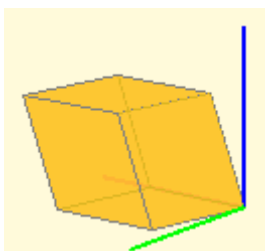
Prisma recto pentagonal y su desarrollo



Ortoedro: las caras son rectángulos.
(Orto=perpendicular; edro=cara)



Cubo: las caras son cuadrados.
(Es un caso particular del ortoedro)



Romboedro: las caras son rombos
(Sus 6 caras son iguales)

2. Tipos de Poliedros

Desarrollo de un prisma.

Todos los prismas son **desarrollables**, es decir, sus caras pueden ubicarse en un plano y mediante pliegues se puede construir el prisma.

El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por un rectángulo que tiene tantas divisiones como número de caras laterales.

En la figura de la izquierda se puede observar un prisma recto pentagonal y su desarrollo

¿Como sería el desarrollo de un prisma oblicuo?

Paralelepípedos.

Los paralelepípedos son prismas en los que **todas** sus caras son paralelogramos.

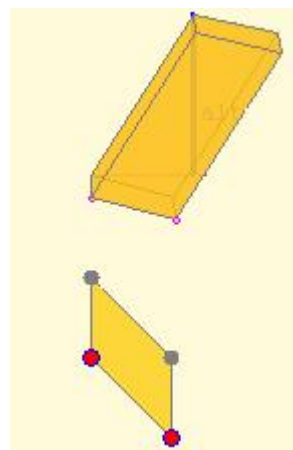
Son prismas **cuadrangulares**.

Es **recto** si la altura coincide con las aristas, en caso contrario son **oblicuos**.

Entre ellos destacamos cuatro en particular:

- Ortoedro: sus caras son rectángulos.
- Cubo: sus caras son cuadrados.
- Romboedro: Todas sus caras son rombos.
- Romboedro: Todas sus caras son romboides.

En la figura se muestra éste último y un detalle de la base.



Preguntas tipo test sobre PRISMAS resueltas

- En los prismas inclinados:
 - Todas las caras son rectangulares.
 - Alguna cara puede ser un rectángulo.
 - Ninguna cara puede ser rectangular.

b) Las caras de los prismas deben ser paralelogramos y en particular puede tener alguna cara rectangular.
- Un ortoedro tiene:
 - Todas sus caras pentagonales.
 - Todas sus caras iguales.
 - Todas sus caras perpendiculares entre sí.

c) Todas las caras del ortoedro son rectángulos, y por tanto son perpendiculares.
- Un cubo es:
 - Un pentaedro.
 - Un tetraedro.
 - Un exaedro.

c) Tiene 6 caras. (Recuerda: "edro" significa cara y "exa" seis)
- Todos los prismas tienen:
 - El doble de vértices que lados tiene una base
 - El mismo número de vértices que lados tiene una base
 - Tantos vértices como números de lados de una base más dos.

a) Los vértices del prisma están en las bases y hay 2 bases.
- Si las caras laterales de un prisma son rectángulos:
 - Es recto.
 - Es oblicuo.
 - Es un ortoedro

a) La única posibilidad para que todas las caras laterales sean rectángulos es que el prisma sea recto.
- Los paralelepípedos:
 - Pueden ser prismas triangulares.
 - Han de ser prismas cuadrangulares.
 - No tienen por qué ser prismas cuadrangulares.

b) Para que pueda haber paralelismo dos a dos caras ha de ser cuadrangular
- Si las bases un prisma son rectángulos:
 - Puede ser un romboedro.
 - Es recto.
 - Puede ser oblicuo.

c) La base puede ser rectangular y la altura NO coincidir con la arista.
- Un prisma pentagonal tiene:
 - Quince caras, diez aristas y siete vértices.
 - Diez caras, siete aristas y quince vértices
 - Siete caras, quince aristas y diez vértices.

c) El número de caras laterales coincide con los lados de las bases. Si le añadimos las 2 bases el total es 7 caras.

2. Tipos de Poliedros

Pirámides.

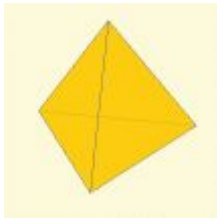
Una pirámide es un poliedro determinado por:

- Una cara poligonal denominada base.
- Tantas caras **triangulares** como lados tiene la base.

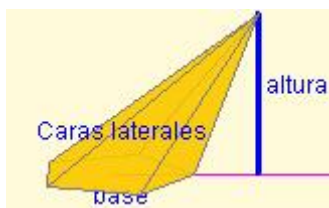
El punto donde convergen todos los triángulos se denomina vértice o cúspide.

La altura de una pirámide es la distancia del vértice a la base.

Una pirámide es **convexa** o **cóncava** si su base es un polígono convexo o cóncavo respectivamente.

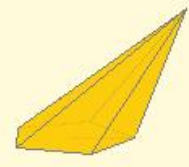


Pirámide de base triangular



Altura de una pirámide

Pirámide Pentagonal Convexa



La definición de pirámide recta u oblicua es algo más compleja que en el caso de los prismas y es relativa al centro de gravedad o centroide del polígono base.

Pirámides regulares.

Una pirámide es **regular** si todas las caras laterales son iguales.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles.

A la **altura** de estos triángulos se le denomina **apotema** de la pirámide.

La base es un polígono regular y por tanto podemos **referenciar** el radio de la circunferencia circunscrita y la apotema de la base.

Pirámide Exagonal Regular



La apotema es la altura de los triángulos isósceles de las caras de la pirámide. **NO** se debe confundir con la altura de la pirámide.

Base de la pirámide:

Cuadrilátero Regular



Apotema y radio de la circunferencia circunscrita en una pirámide de base cuadrada

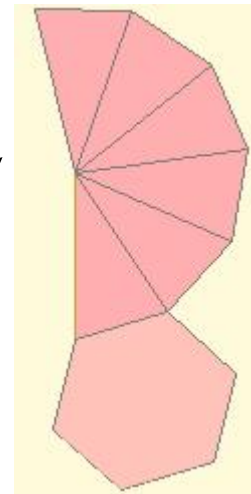
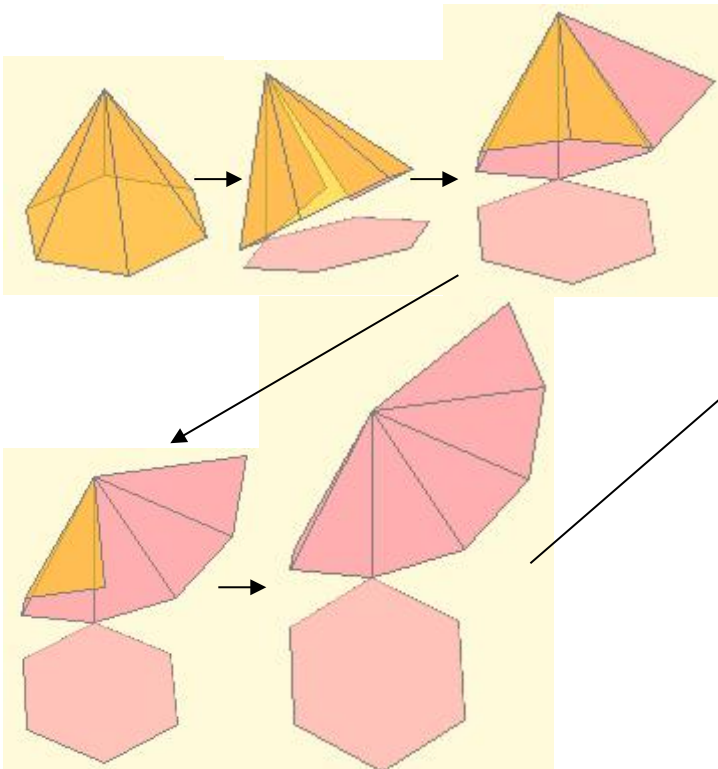
Cuerpos geométricos.

2. Tipos de poliedros

Desarrollo de una pirámide.

Todas las pirámides son desarrollables, es decir, pueden sus caras ubicarse en un plano y mediante pliegues se puede construir dicha pirámide.

En las figuras se puede observar como se puede obtener un desarrollo de una pirámide regular.



Desarrollo completo de una pirámide exagonal

Cuestión: ¿Como sería el desarrollo de una pirámide recta no regular? Y el de una ¿oblicua?

Poliedros regulares.

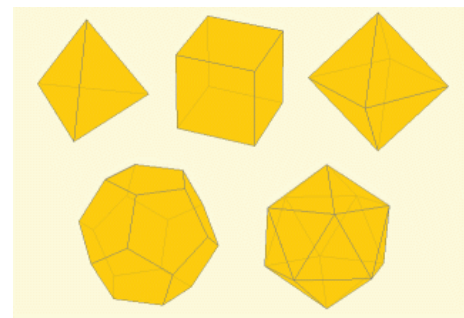
Un poliedro es **regular** si todas sus caras son iguales y sobre cada vértice inciden el mismo número de caras y aristas.

Hay sólo **cinco** poliedros regulares convexos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

A los poliedros convexos regulares se le denominan también como **sólidos platónicos** pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.

Poliedro regular	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Cubo	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

Tetraedro Cubo Octaedro



Dodecaedro Icosaedro

Sólidos platónicos

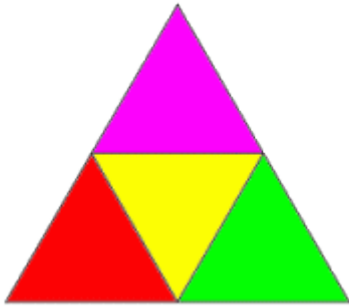
2. Tipos de Poliedros

Desarrollo Poliedros regulares.

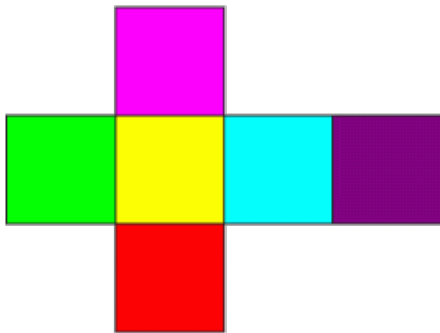
Todos los poliedros son **desarrollables**, es decir, pueden sus caras ubicarse en un plano y mediante pliegues se pueden construir.

En las figuras podemos observar algunos desarrollos posibles de cada uno de los poliedros convexos regulares.

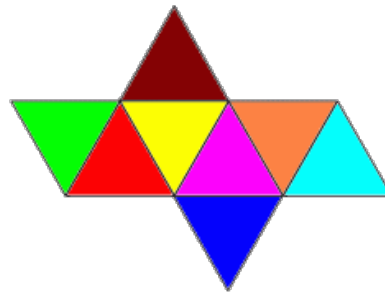
Recuerda que a los poliedros convexos regulares se le denominan también como **sólidos platónicos** pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.



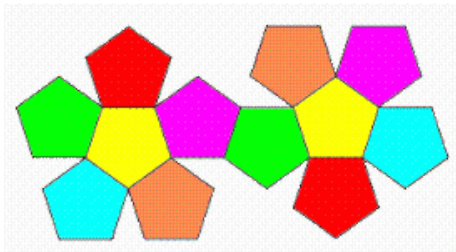
Desarrollo del tetraedro



Desarrollo del cubo



Desarrollo del octaedro



Desarrollo del dodecaedro



Desarrollo del icosaedro

Preguntas tipo test sobre prismas REGULARES resueltas

- En el octaedro inciden en cada vértice:
 - Tres caras.
 - Cuatro caras.
 - Cinco caras.
 - Poliedros regulares con caras triangulares hay:
 - Tres.
 - Uno.
 - Dos.
- a) Inciden 4 caras
a) El tetraedro, el octaedro y el icosaedro.

2. Tipos de poliedros

Relación de Euler.

Euler demostró que en un poliedro se mantiene la relación:

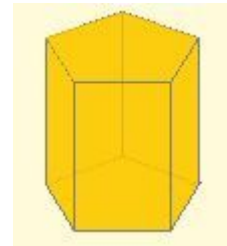
$$C + V = A + 2$$

donde C : número de caras, V : número de vértices y A: número de aristas del prisma.



Leonh. Euler

Vemos en el ejemplo cómo se cumple la relación de Euler:



Prisma de base pentagonal:
 $C = 7$; $V = 10$; $A = 15$
 $C + V = 17 = A + 2$

3. Cuerpos redondos

Cilindro.

Un **cilindro** recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y el lado paralelo a él es la **generatriz**.

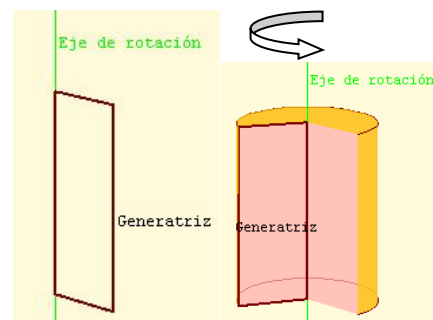
En un cilindro distinguimos la **superficie lateral** y **dos bases** que son dos círculos iguales.

La **altura** del cilindro es la distancia entre las dos bases. En un cilindro recto la altura y la generatriz miden lo mismo

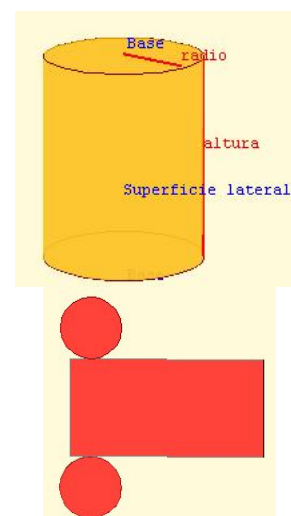
Desarrollo del cilindro.

La superficie del cilindro es desarrollable en el plano. Este desarrollo se compone de:

- dos círculos iguales cuyo radio es el radio del cilindro: r .
- un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro del círculo de las bases: $2\pi r$, y de altura la del cilindro.

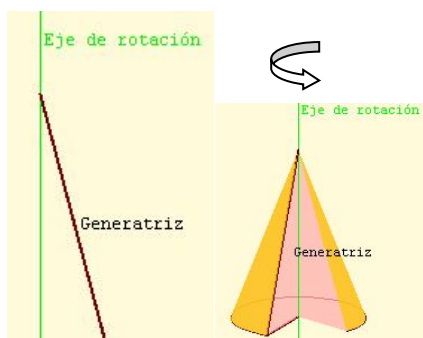


Generación del cilindro

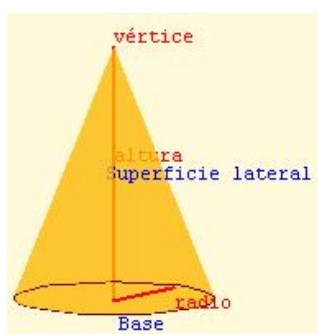


Desarrollo del cilindro

3. Cuerpos redondos



Generación del cono



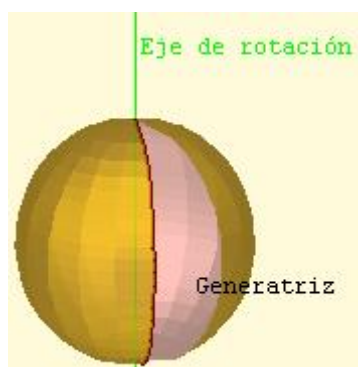
Elementos del cono

Investiga

¿Cómo sería el desarrollo de un cono inclinado?

Puedes consultar en los contenidos del "Proyecto: El metro" en concreto mira el objeto 48: "Conos generalizados".

http://descartes.cnice.mec.es/web_HEDA/Elmetro/



Generación de la esfera

Cono.

Un **cono recto** es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina **eje de rotación** y la hipotenusa es la **generatriz**.

En un cono distinguimos la **superficie lateral** y la **base** que es un círculo. El punto donde convergen las generatrices es el **vértice**.

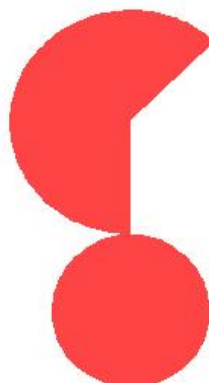
La altura del cono recto es la distancia del vértice a la base.

Desarrollo del cono.

Un cono es un sólido de revolución que se puede **desarrollar** en el plano.

El desarrollo de su cara lateral es un sector circular y la base es un círculo.

El radio del sector circular es la generatriz del cono y la longitud de su arco es el perímetro de la base: $2\pi r$, donde r es el radio de ésta.



Desarrollo del cono

Esfera.

La esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo (o un círculo) alrededor del diámetro. La recta en la que se sitúa éste es el eje de revolución y la semicircunferencia la generatriz.

La superficie esférica **no es desarrollable** en el plano.

Cuerpos geométricos.

Preguntas tipo test sobre cuerpos redondos resueltas

1. Un cono:
 - a. No tiene base.
 - b. Tiene dos bases.
 - c. Tiene una base.

c) Un cono tiene una base que es un círculo.
2. Un cono:
 - a. No tiene ningún vértice.
 - b. Tiene varios vértices.
 - c. Tiene un vértice.

c) Es el punto donde convergen las generatrices.
3. Un cilindro se obtiene al girar:
 - a. Una circunferencia alrededor de un diámetro.
 - b. Un triángulo rectángulo alrededor de un cateto.
 - c. Un rectángulo alrededor de un lado.

c) Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados
4. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es:
 - a. Dos círculos
 - b. Un sector circular
 - c. Un rectángulo

c) un rectángulo cuya base tiene por longitud el perímetro del círculo de las bases: $2\pi r$, y de altura la del cilindro
5. La generatriz del cono:
 - a. Es mayor que su altura.
 - b. Es igual que su altura.
 - c. Es menor que su altura

a) La altura es un cateto de un triángulo rectángulo, mientras que la generatriz es la hipotenusa, por tanto, mayor.
6. Un cilindro:
 - a. No tiene base.
 - b. Tiene dos bases.
 - c. Tiene una base.

b) Un cilindro tiene dos bases que son círculos
7. Un cilindro:
 - a. No es un poliedro.
 - b. Según se mire puede ser un poliedro.
 - c. Si es un poliedro.

a) En un poliedro las caras son polígonos. Las bases del cilindro son círculos, que no son polígonos.
8. Al aumentar el radio de un cono:
 - a. No varía el sector circular de su desarrollo lateral.
 - b. Disminuye el sector circular de su desarrollo lateral
 - c. Aumenta el sector circular de su desarrollo lateral.

c) la longitud del arco es el perímetro de la base: $2\pi r$, donde r es el radio de ésta

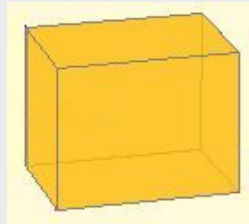
EJERCICIOS resueltos

Prismas, pirámides, poliedros regulares, relación de Euler

Sobre PRISMAS

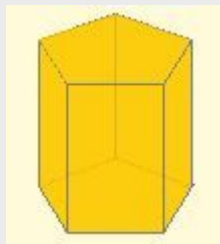
1.1 Dibuja un prisma recto de base rectangular

Al ser un prisma recto las caras laterales son rectángulos y, puesto que las bases son también rectángulos el prisma pedido es el de la figura: un ortoedro



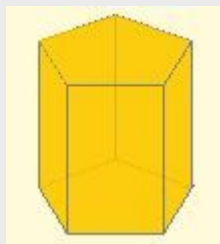
1.2 El número de aristas de un prisma es 15 ¿Qué polígono son las bases?

El número de aristas de un prisma es siempre el triple de las aristas de cada base. Si son 15 entonces cada base tiene 5. El prisma es pentagonal.



1.3 Un prisma tiene 10 vértices ¿Qué polígono tiene por bases?

El número de vértices de un prisma es siempre el doble de los vértices de cada base. Si son 10 entonces cada base tiene 5. El prisma es pentagonal.



Sobre PIRÁMIDES

2.1 Dibuja una pirámide exagonal regular

Una pirámide exagonal tiene por base un exágono cuyos lados son iguales. Las caras laterales serán triángulos isósceles. La pirámide pedida es la de la figura, si bien puede tener la altura que quieras, pues la regularidad es por la base.

**Pirámide
Exagonal
Regular**



EJERCICIOS resueltos (continuación)

2.2 Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 5 vértices.

Una pirámide tiene siempre un vértice más que los vértices de la base. Si en total tiene 5, la base tiene 4. Es una pirámide cuadrangular.

**Pirámide
Cuadrangular
Regular**



2.3. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 12 aristas.

Una pirámide tiene el doble de aristas que lados tiene la base. Si en total tiene 12 aristas la base es un exágono. Es una pirámide exagonal.

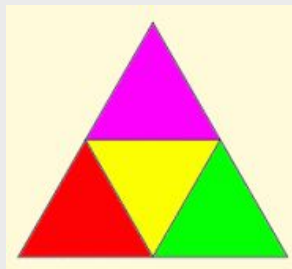
**Pirámide
Exagonal
Regular**



Sobre POLIEDROS REGULARES

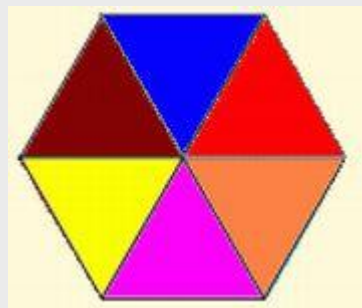
3.1 Dibuja el desarrollo de un tetraedro de lado 3 cm.

Un tetraedro tiene cuatro caras que son triángulos equiláteros. En la figura tienes su desarrollo plano.



3.2. ¿Puede existir un poliedro regular con 6 triángulos equiláteros en cada vértice?

Fíjate en la figura. Si en un vértice inciden 6 triángulos equiláteros no podríamos doblarlos para formar un poliedro. No tenemos margen para construir un ángulo poliedro.



EJERCICIOS resueltos (continuación)

Sobre la RELACIÓN DE EULER

4.1 Un poliedro euleriano, ¿puede tener el mismo número de caras y de aristas?

No es posible. Si es un poliedro euleriano debe cumplir la relación de Euler:

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2.$$

Si el número de caras es igual que el de aristas, entonces el número de vértices sería 2.

¿Un poliedro de 2 vértices?

4.2. Comprueba que se cumple la relación de Euler en un prisma cuya base es un heptágono.

En un prisma heptagonal la base tiene siete vértices, por tanto:

- a) Un prisma tiene el doble de vértices que su base, lo que hará 14 vértices.
- b) Un prisma tiene el triple de aristas que vértices tiene la base, tendrá por tanto 21 aristas.
- c) Un prisma tiene dos caras más que vértices tiene su base, luego tendrá 9 caras.

Así pues la relación de Euler

$$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2, \text{ tendríamos que:}$$

$$9 + 14 = 23 + 2 = 23.$$

Luego se cumple la relación de Euler.

Sólidos de revolución, cilindro, cono, esfera

Sobre SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

1.1 El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm. y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?

El desarrollo plano es un rectángulo. Sus dimensiones serán:

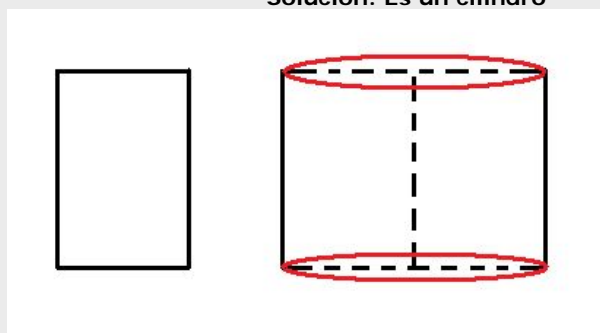
Alto: la altura del rollo (cilindro): 9,7 cm.

Largo: el perímetro de la circunferencia: diámetro $\cdot \pi = 4,6 \cdot \pi$.

Si aproximamos π por 3,14, tendríamos que el largo sería aproximadamente 14,44 cm.

1.2 ¿Qué figura del espacio se genera al girar el rectángulo inferior alrededor de su lado derecho?

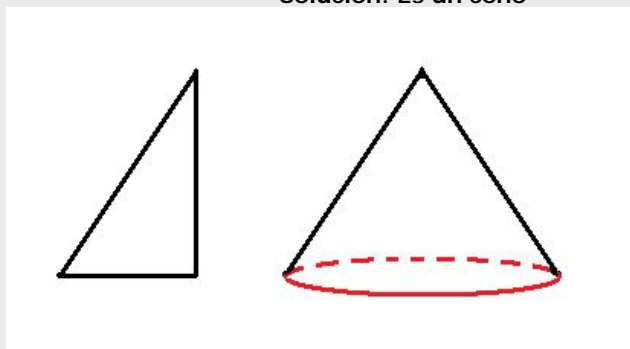
Solución: Es un cilindro



EJERCICIOS resueltos (continuación)

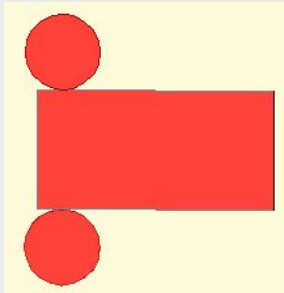
1.3. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el triángulo dibujado abajo alrededor de su altura?

Solución: Es un cono



Sobre CILINDROS

2.1. Dibuja el desarrollo de un cilindro de 2 cm. de radio y 7 cm. de altura

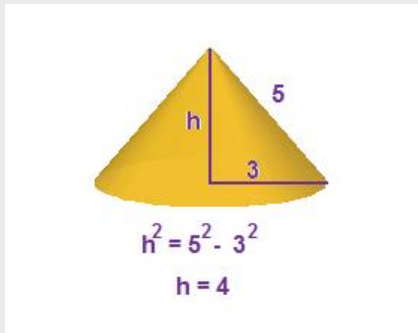


El rectángulo tiene 7 cm. de altura y de base $2 \cdot \pi$ radio cm.
El círculo 4 cm. de diámetro

Sobre CONOS

3.3. Calcula la altura de un cono si la generatriz mide 5 cm y el radio de la base es de 3 cm.

En la figura está calculada la altura. Nos basamos en el teorema de Pitágoras.



Sobre ESFERAS

4.1 Dibuja el desarrollo plano de la superficie esférica

No es posible. La superficie esférica no es desarrollable. Si tomas un trozo suficientemente grande de la piel de una naranja y lo apoyas en la mesa verás que al aplastarla se rompe.

Para practicar



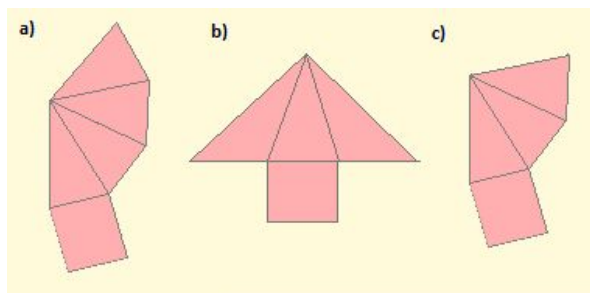
Prismas, pirámides, poliedros regulares, Euler

Ejercicios sobre prismas

- 1.1 Dibuja un prisma oblicuo de base triangular
- 1.2 El número de vértices de un prisma es 20 ¿Cuántas caras tiene?
- 1.3 Un prisma tiene 18 aristas. ¿Qué polígono tiene por bases?
- 1.4 Un prisma tiene 9 caras. Por tanto es un prisma...
- 1.5 Un prisma tiene 15 vértices, por lo tanto las bases son...

Ejercicios sobre pirámides

- 2.1 Dibuja una pirámide irregular de base triangular
- 2.2. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 5 caras laterales.
- 2.3. Averigua el polígono de la base de una pirámide si tiene 8 caras.
- 2.4. Dibuja el desarrollo de una pirámide que tiene todas sus caras iguales.
- 2.5. ¿Cuál de las siguientes figuras es el desarrollo plano de una pirámide?



Ejercicios sobre poliedros regulares

- 3.1 Dibuja el desarrollo de un octaedro de lado 2 cm.
- 3.2. Dibuja el desarrollo plano de un cubo de lado 4 cm.
- 3.3. ¿Puede existir un poliedro regular cuyas caras sean octógonos?
- 3.4. ¿Cuántos lados como máximo puede tener como máximo las caras de un poliedro regular?
- 3.5. ¿Cuántas caras triangulares pueden incidir en un vértice de un polígono regular?
- 3.6. ¿Cuántas caras cuadradas pueden incidir en un vértice de un polígono regular?

Ejercicios sobre la relación de Euler

- 4.1 Un poliedro euleriano, ¿puede tener el mismo número de vértices y de aristas?
- 4.2. Comprueba que se cumple la relación de Euler en una pirámide cuya base es un octógono.
- 4.3. Comprueba que se cumple la relación de Euler en el icosaedro.
- 4.4. Comprueba que se cumple la relación de Euler en el dodecaedro.
- 4.5. Un poliedro euleriano tiene 20 caras y 36 vértices. ¿Cuántas aristas tiene?
- 4.6. Un poliedro euleriano tiene 21 caras y 40 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

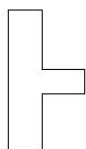
Para practicar



Sólidos de revolución, cilindros, conos, esferas.

Sobre sólidos de revolución

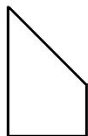
1.1 Dibuja el cuerpo de revolución que forma la figura de abajo al girar sobre el segmento lateral izquierdo.



1.2. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



1.3. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



1.4 ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado izquierdo?



1.5. ¿Qué figura del espacio se genera al girar el trapecio dibujado abajo alrededor de su lado derecho?



Sobre cilindros

2.1. ¿Puede ser posible el desarrollo de la figura inferior el correspondiente a un cilindro?



2.2. Si cogemos un rectángulo ¿se obtiene el mismo cilindro doblándolo por la base o por la altura?

2.3. Queremos construir un bote cilíndrico que tenga 9 cm de alto y el radio de la base mida 1,5 cm. Dibuja su desarrollo plano.

Sobre conos

3.1 Dibuja el desarrollo de un cono con radio de la base 5 cm. y de generatriz 10 cm.

3.2. Cogemos un triángulo de base 4 cm. y altura 8 cm. Al girarlo sobre la altura obtenemos un cono. ¿Cuánto mide su generatriz?

3.3. El desarrollo plano de la cara lateral de un cono ¿Puede ser un círculo completo?

Sobre esferas

4.1 Al girar un cuarto de círculo por uno de los radios que lo limitan ¿Qué figura obtenemos?

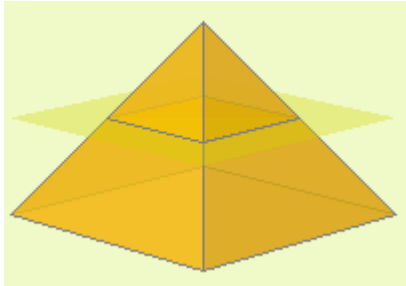
4.2 Al girar un círculo alrededor de un eje exterior a él ¿Qué figura obtenemos?

4.3 ¿Qué forma tienen las gotas de agua?

Para saber más

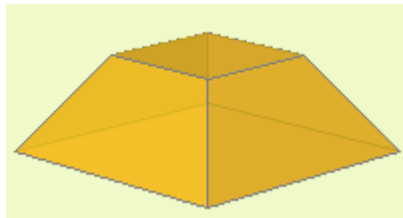


Tronco de pirámide y tronco de cono

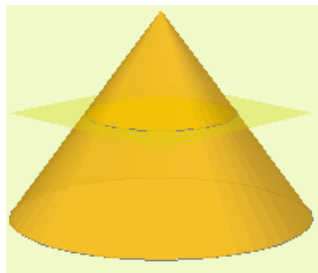


Si una pirámide la intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otra pirámide y otro poliedro denominado:

tronco de pirámide

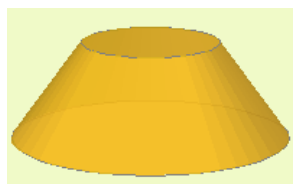


El tronco de pirámide tiene dos bases que son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios si la pirámide es recta o cuadriláteros si es oblicua



Si un cono lo intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otro cono y otro sólido de revolución denominado:

tronco de cono



El tronco de cono tiene dos bases que son círculos y una cara lateral cuyo desarrollo es un sector de una corona circular

Poliedros no Eulerianos

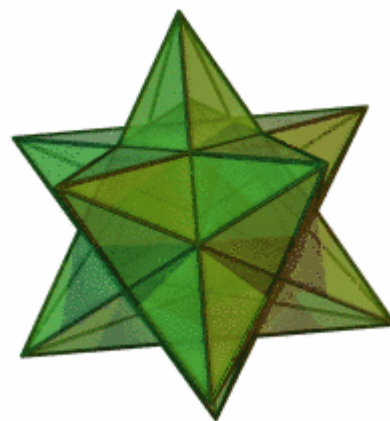
Hay poliedros que no cumplen la Relación de Euler: $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$

Se corresponden con poliedros que tienen "agujeros".

Heptaedro anular
Lajos Szilassi

Caras: 7
Vértices: 14
Caras+Vértices = 21
Aristas: 21
Aristas+2 = 23

Poliedros regulares cóncavos



Un poliedro cóncavo se dice que es regular si todas sus caras son polígonos regulares y en cada vértice incide el mismo número de caras. Se les denomina **sólidos de Kepler-Poinsot**.

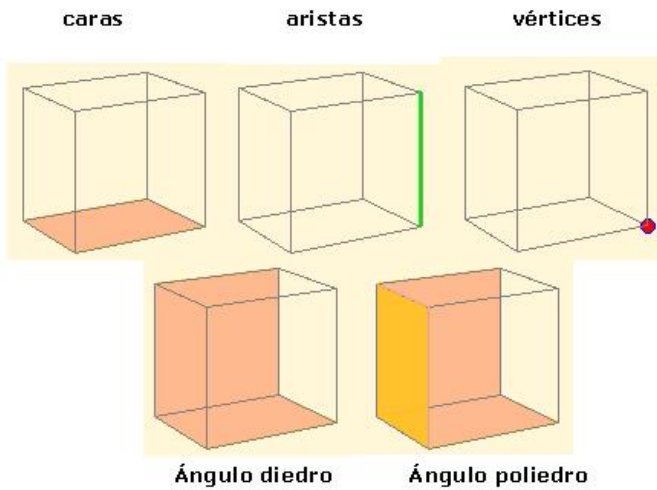
Cuerpos geométricos.



Recuerda lo más importante

Un poliedro es un cuerpo geométrico tridimensional cuyas caras son polígonos.

Elementos de un poliedro



Tipos de poliedros.



Prismas

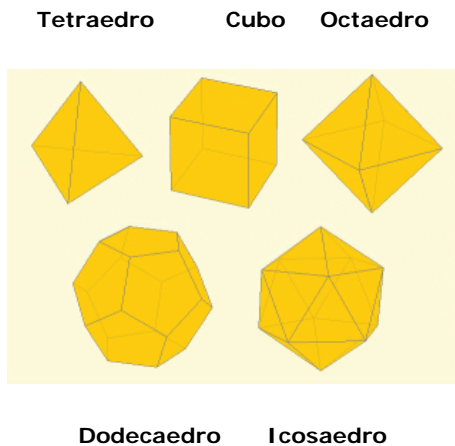


Pirámides

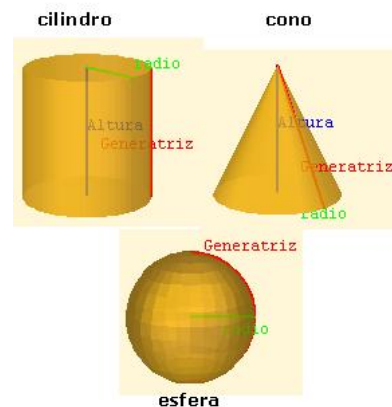
Poliedros regulares

Un poliedro es regular si todas sus caras son iguales y sobre cada vértice inciden el mismo número de caras y aristas.

Los poliedros regulares son cinco



Relación de Euler



Cuerpos redondos

Cilindro, cono y esfera son cuerpos de revolución

Autoevaluación



1. Un prisma exagonal ¿cuántos vértices tiene?
2. Una pirámide pentagonal ¿cuántos vértices tiene?
3. Un prisma triangular ¿cuántas aristas tiene?
4. Una pirámide heptagonal, ¿cuántas aristas tiene?
5. Un poliedro convexo tiene 4 caras y 5 vértices, ¿cuántas aristas tiene?
6. Un poliedro convexo tiene 9 caras y 18 aristas, ¿cuántos vértices tiene?
7. Un poliedro regular de 6 vértices, ¿cuál es?
8. El poliedro regular convexo de 12 caras, ¿cuál es?



9. ¿Cómo se denomina el poliedro representado en esta figura?



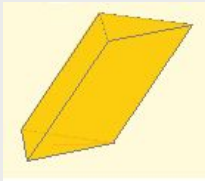
10. Indica si el sólido de la figura es desarrollable



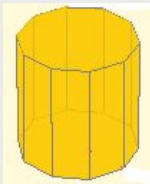
Soluciones de los ejercicios para practicar

PRISMAS

1.1 Al ser un prisma las caras laterales son paralelogramos. Las bases son triángulos y al ser oblicuo están desplazadas.

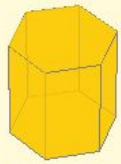


1.2. El número de vértices de un prisma es siempre el doble de los vértices de cada base. El prisma es decagonal, y por tanto tiene 12 caras.

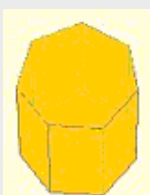


1.3 El número de aristas de un prisma es siempre el triple de las aristas de cada base. El prisma es hexagonal.

Prisma Exagonal Regular



1.4 El número de caras de un prisma es el número de lados de la base más dos. Es un prisma heptagonal.



1.5 No hay ningún prisma que pueda tener un número impar de vértices.

PIRÁMIDES

2.1

Pirámide Triangular Convexa



2.2 Una pirámide tiene tantas caras laterales como lados tiene la base. Es una pirámide pentagonal.

Pirámide Pentagonal Regular

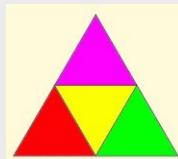


2.3 Una pirámide tiene siempre una cara más que lados tiene la base. Es una pirámide heptagonal.

Pirámide Heptagonal Regular



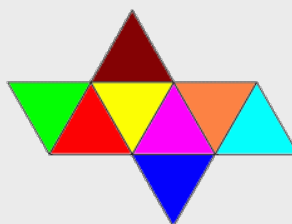
2.4 La única pirámide triangular con todas las caras iguales es el tetraedro.



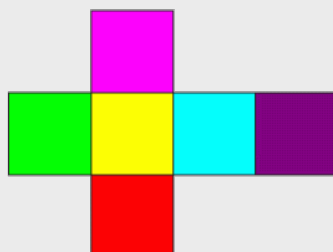
2.5 Si la base es rectangular, tiene que tener cuatro caras que sean triángulos. La única opción es la a).

POLIEDROS REGULARES

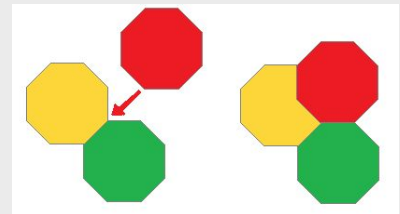
3.1 Un tetraedro tiene ocho caras que son triángulos equiláteros.



3.2

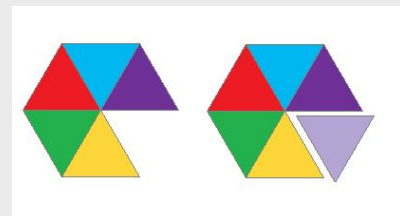


3.3 Para formar un ángulo poliedro hacen falta al menos tres caras. Si queremos que haya tres caras que sean octógonos se solapan. No es posible.

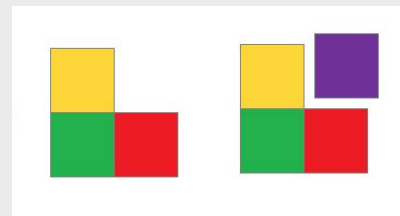


3.4 El máximo de lados es cinco ya que a partir del exágono no podemos construir un ángulo poliedro. Por eso poliedros regulares sólo hay con caras triangulares, cuadradas y pentagonales.

3.5 El máximo de caras triangulares es cinco, el sexto triángulo ya no permite construir un ángulo poliedro. Con tres triángulos tenemos el tetraedro, con cuatro el octaedro y con cinco el icosaedro.



3.6 El máximo de caras cuadradas es tres, el cuarto cuadrado no permite construir un ángulo poliedro. Con tres cuadrados tenemos el cubo.



RELACIÓN DE EULER

4.1 No es posible. Si es un poliedro euleriano debe cumplir la relación de Euler:

$\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$. Si el número de vértices es igual que el de aristas, entonces el número de caras sería 2. ¿Un poliedro de 2 caras?

4.2 Según la relación de Euler $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$, tendríamos que:

$$9 + 9 = 18 \text{ y } 16 + 2 = 18.$$

4.3 El icosaedro tiene 20 caras, 12 vértices y 30 aristas.

Así pues la relación de Euler $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$, tendríamos que:

$$20 + 12 = 32 \text{ y } 30 + 2 = 32.$$

4.4 El dodecaedro tiene 12 caras, 20 vértices y 30 aristas.

Así pues la relación de Euler $\text{Caras} + \text{Vértices} = \text{Aristas} + 2$, tendríamos que:

$$12 + 20 = 32 \text{ y } 30 + 2 = 32.$$

4.5 $C + V = A + 2$, tendríamos que:

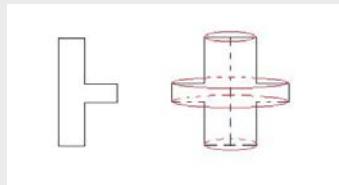
$20 + 36 = \text{Aristas} + 2$. Luego $\text{Aristas} = 20 + 36 - 2 = 54$. Tiene 54 aristas.

4.6 $C + V = A + 2$, tendríamos que:

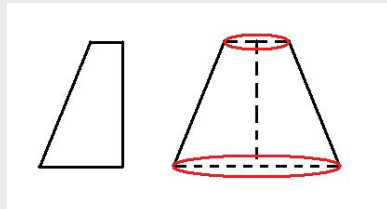
$21 + \text{Vértices} = 40 + 2$. Luego $\text{Vértices} = 40 + 2 - 21 = 21$. Tiene 21 vértices.

SOBRE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

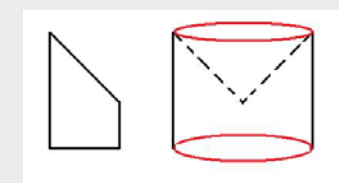
1.1



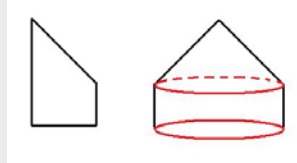
1.2 Es un tronco de cono



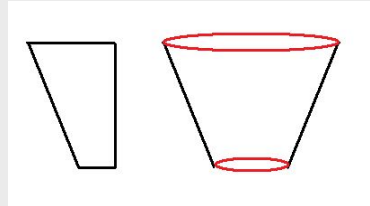
1.3 Un cilindro que tiene quitado un cono de la parte superior



1.4 Un cilindro con un cono en la parte superior



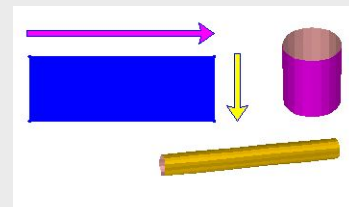
1.5 Un tronco de cono que por la orientación tiene la forma de un vaso



SOBRE CILINDROS

2.1 No es posible. La longitud de la base del rectángulo ha de coincidir con la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y claramente en la figura es muy inferior

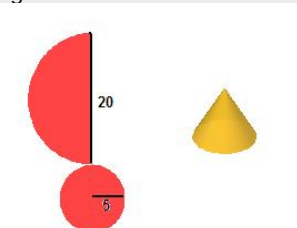
2.2 No, el cilindro es diferente salvo que la altura y la base del rectángulo sea la misma, es decir, salvo que sea un cuadrado.



2.3 La altura del rectángulo es 9 cm. y su base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro: $2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$, donde aquí el radio es 1,5. Tendrás que aproximar el valor de π .

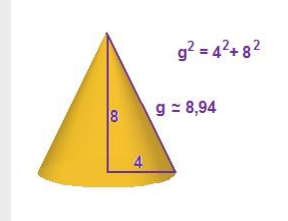
SOBRE CONOS

3.1 Puesto que el radio de la base es 5, la longitud de la circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot 5$. La cara lateral del cono es un sector circular cuyo arco ha de medir la longitud anterior.

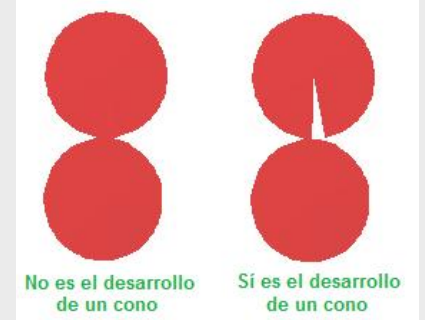


La generatriz es el radio del sector a dibujar. Dado que el radio es 10, $2 \cdot \pi \cdot 5$ es justo la mitad, por tanto hay que dibujar medio círculo de radio 10.

3.2 En la figura está calculada la altura. Nos basamos en el teorema de Pitágoras.

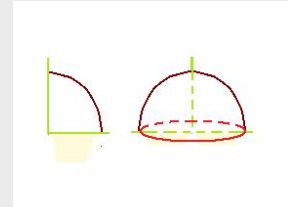


3.3 No, no es posible. Necesitamos que falte al menos un trozo para poder construir la cara lateral plegándolo.

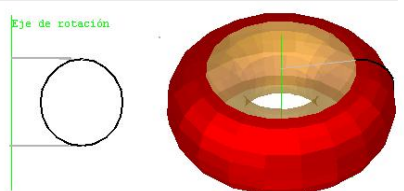


SOBRE ESFERAS

4.1 Una semiesfera



4.2 Se obtiene lo que coloquialmente identificamos como un donut. Matemáticamente esa figura es un "toro"



4.3 Son esféricas.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. Un prisma exagonal ¿cuántos vértices tiene? **12 vértices.**
2. Una pirámide pentagonal ¿cuántos vértices tiene? **6 vértices**
3. Un prisma triangular ¿cuántas aristas tiene? **9 aristas**
4. Una pirámide heptagonal, ¿cuántas aristas tiene? **14 aristas.**
5. Un poliedro convexo tiene 4 caras y 5 vértices, ¿cuántas aristas tiene? **7 aristas**
6. Un poliedro convexo tiene 9 caras y 18 aristas, ¿cuántos vértices tiene? **11 vértices**
7. Un poliedro regular de 6 vértices, ¿cuál es? **Octaedro**
8. El poliedro regular convexo de 12 caras, ¿cuál es? **Dodecaedro**
9. ¿Cómo se denomina el poliedro representado en esta figura? **Icosaedro**
10. Indica si el sólido de la figura es desarrollable **Sí**

