

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Conocer los elementos del plano.
- Conocer las rectas y sus propiedades.
- Manipular rectas y otros elementos relacionados con ellas.
- Conocer los diferentes tipos de ángulos.
- Conocer los ángulos y sus propiedades.
- Medir ángulos y realizar operaciones con ellos.
- Utilizar recursos para resolver problemas sencillos de geometría plana.

Antes de empezar

1. Rectas. Paralelismo y perpendicularidad pág. 4
 - El plano
 - Puntos y rectas
 - Recta, semirrecta y segmento
 - Propiedades de la recta
 - Posiciones relativas
 - Paralelismo
 - Perpendicularidad
2. Mediatriz de un segmento pág. 11
 - Definición de mediatriz
 - Construcción de la mediatriz
 - Simetría
3. Ángulos. Clasificación y medida pág. 15
 - Definición
 - Tipos de ángulos
 - Relaciones entre ángulos
 - Medida de ángulos
 - Sistema sexagesimal
4. Bisectriz de un ángulo pág. 16
 - Definición de bisectriz
 - Construcción de la bisectriz
5. Operaciones con ángulos pág. 17
 - Suma de ángulos
 - Resta de ángulos
 - Multiplicación por un número
 - División por un número
 - Operaciones en forma compleja

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

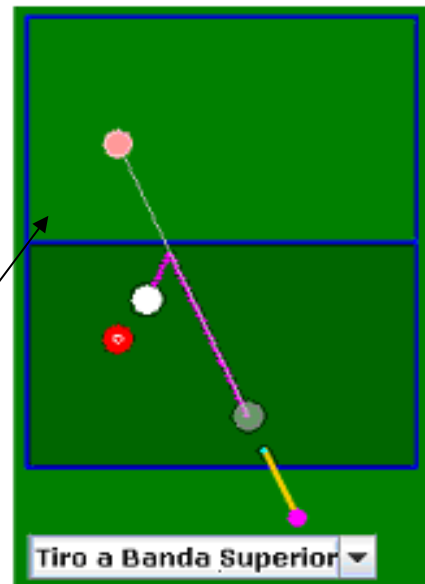
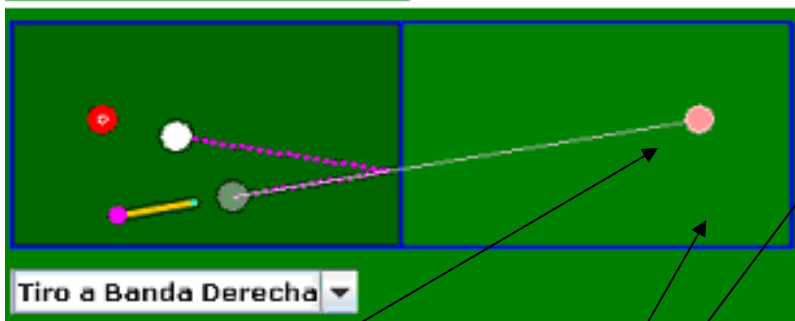
Antes de empezar

Investiga

En el juego del billar intervienen muchos elementos de la geometría plana, como puntos, rectas, ángulos, simetrías ... Observa en la escena de la derecha como se puede calcular la trayectoria correcta para dar a la bola roja rebotando antes en una o dos bandas.



En un tiro directo apuntamos a la bola roja. Si queremos tirar a banda, basta colocar otra mesa de billar imaginaria junto a la nuestra, que contenga una bola roja también imaginaria. Esta bola imaginaria es a la que apuntaremos.



BOLAS IMAGINARIAS

MESAS IMAGINARIAS



En un tiro a dos bandas cuadruplicamos nuestra mesa para obtener una mesa real y tres imaginarias. Apuntando a la bola de la mesa que está en la esquina superior derecha, logramos dar a la roja tocando antes en dos bandas.

Las rectas, puntos, simetrías, ángulos y otros elementos geométricos son la base del juego del billar.

¡Y de muchas otras cosas!

1. Rectas. Paralelismo y perpendicularidad.

El plano.

Desde los inicios de la historia, el ser humano ha intentado representar su entorno visual dibujando los objetos y figuras que lo rodean.

Para ello ha necesitado disponer de alguna superficie sobre la que trazar puntos, líneas, círculos u otras figuras. Desde los petroglifos esculpidos en piedra a las pinturas renacentistas o a los modernos planos utilizados en la arquitectura o la ingeniería, disponemos de innumerables ejemplos de representaciones elaboradas sobre superficies más o menos planas.

El **plano** es por lo tanto un objeto que cobra importancia para la geometría, ya que nos permite representar figuras sobre él.

Puntos y rectas.

Dentro del plano distinguimos dos elementos fundamentales, tal y como **Euclides**, considerado como el primer gran matemático de la historia, los definió: el **punto** y la **recta**.

Así, podemos identificar una estrella como un punto en el firmamento, la estela dejada por un avión como una recta, y el tablero de nuestra mesa de trabajo como un plano.

Es todo lo que necesitamos para empezar a "hacer geometría".

Punto es lo que no tiene longitud ni anchura. **Recta** es lo que tiene longitud, pero no anchura.

No es difícil disfrutar de la geometría de manera espontánea. Es suficiente con percibir la forma de los objetos con espíritu observador para descubrir todo tipo de elementos geométricos en nuestro entorno más cercano.

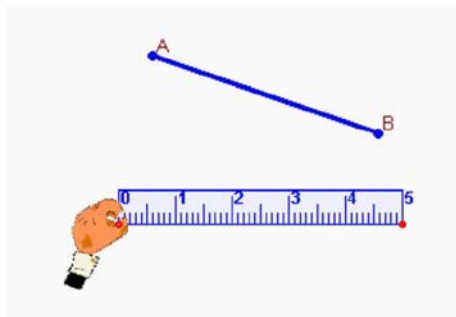
Y la geometría nos proporciona además una fuente inagotable de información útil.



Cuando observamos la vía del tren, con sus dos raíles paralelos ... ¡que terminan por unirse en el infinito!, obtenemos una valiosa información acerca de la distancia, de la que no dispondríamos si viésemos los raíles como realmente son, es decir, paralelos.

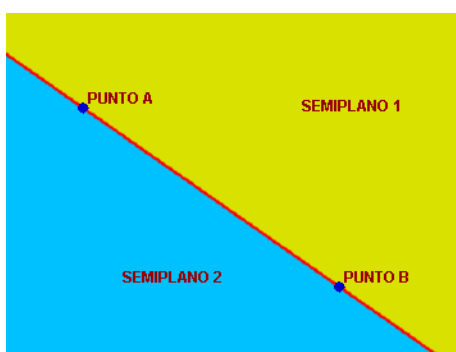


Prueba a buscar toda clase de objetos y propiedades geométricas a tu alrededor. Seguramente te sorprenderán en muchas ocasiones.



Entre todas las distintas posibilidades que hay para unir dos puntos, el segmento es especial, por ser el camino más corto.

Toda recta divide al plano en dos regiones. Cada una es un **semiplano**.



Si un punto no pertenece a la recta, entonces estará en alguno de los dos semiplanos determinados por ella.

Recta, semirrecta y segmento.

Tomemos dos puntos distintos sobre el plano y unámoslos mediante una línea. Existen desde luego muchas maneras de hacerlo, pero hay una de ellas que es la **más corta** entre todas las posibles. A esta línea más corta que une dos puntos la llamamos **segmento**.

Si designamos los dos puntos con las letras A y B, designaremos AB al segmento que los une. Así, A y B pasan a ser los **extremos** del segmento.

Si prolongamos el segmento indefinidamente por ambos extremos, obtenemos una **recta**.

Si prolongamos el segmento AB por uno solo de sus extremos (B por ejemplo) obtenemos una **semirrecta**. En este caso decimos que el punto A es el **origen** de esta semirrecta.

Propiedades de la recta.

Volviendo a Euclides, existen algunas propiedades de la recta que, a pesar de su sencillez, resultan absolutamente esenciales para la geometría.

Estas son algunas de ellas:

- 1ª propiedad: Dados dos puntos distintos en un plano, existe una **única** recta que los une.
- 2ª propiedad: Toda recta divide al plano en dos regiones, llamadas semiplanos.

Dados dos puntos distintos en un plano, existe una **única** recta que los contiene.

Geometría del plano

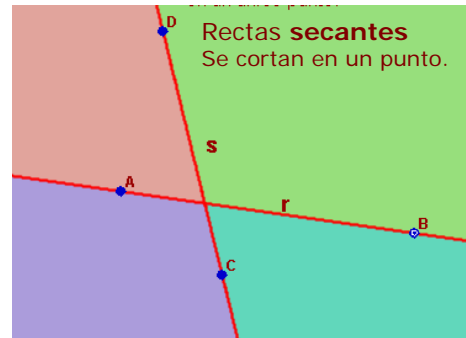
Posiciones relativas.

Tracemos dos rectas sobre un plano. Pueden ocurrir varios casos distintos.

Podría suceder que ambas rectas estén colocadas de manera superpuesta una a la otra. Sería imposible distinguirlas; serían, en definitiva, una misma recta. Decimos que las dos rectas son **coincidentes**.

Si las rectas son distintas, podría ser que no llegaran a tocarse nunca (decimos en este caso que son rectas **paralelas**) o bien que se toquen en algún punto. En este último caso decimos que son **secantes** y el punto en que se cortan es único.

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto y son **secantes** si se cortan en un único punto.



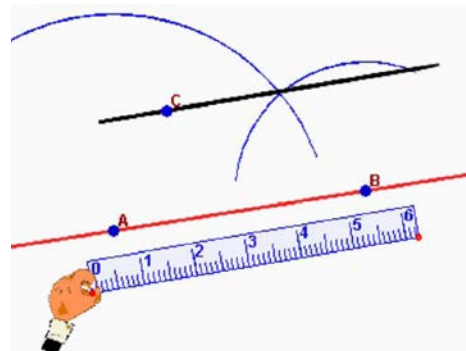
Paralelismo.

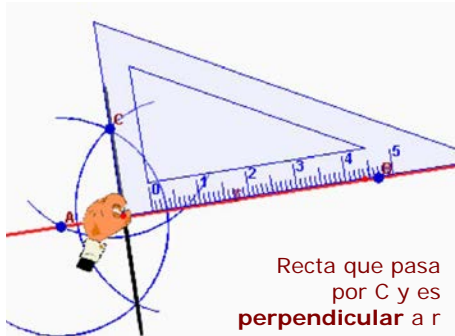
Sabemos ya que dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto común y, como consecuencia de su famoso **5º postulado**, Euclides afirmó que por cualquier punto exterior a una recta puede trazarse una única recta paralela a ella.

Podemos así trazar paralelas a una recta, utilizando una **regla** y un **compás**. El método es el que se describe en la escena contigua.

De acuerdo con nuestro Euclides, el paralelismo es uno de los conceptos básicos de la geometría. Por este motivo, la geometría que estamos descubriendo recibe el nombre de "**geometría euclídea**".

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una **única** recta paralela a ella.





Perpendicularidad.

Dos rectas que se cortan en un punto, dividen al plano en **cuatro** regiones. Si estas cuatro regiones tienen la misma amplitud, decimos que las dos rectas son **perpendiculares**.

Dada una recta y un punto cualquiera sobre ella, existe una única recta perpendicular a la primera y que contiene a ese punto.

Disponemos de un método para trazar rectas perpendiculares usando regla y compás.

Dos rectas son **perpendiculares** si dividen al plano en cuatro regiones de igual amplitud.

EJERCICIOS resueltos

1. Traza tres rectas diferentes que contengan a un punto A. ¿Cuántas rectas más puedes trazar que pasen por ese punto?

Sol Por un punto se puede trazar un número infinito de rectas distintas.

2. Traza dos rectas distintas que contengan a la vez a dos puntos A y B. ¿Es esto posible? Explícalo con tus propias palabras.

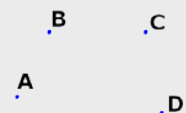
Sol Por dos puntos distintos sólo es posible trazar una recta.

3. ¿Es posible trazar una recta que contenga a los tres puntos A, B y C? ¿Cómo se deben situar los tres puntos para que se pueda trazar una recta que los contenga?



Sol No es posible en este caso, ya que por tres puntos distintos se puede trazar una recta siempre que estén alineados.

4. Representa el segmento AB, una semirrecta con origen en C, una semirrecta con origen en D y que contenga al punto B, una recta que pase por A y una recta que pase por A y por C.



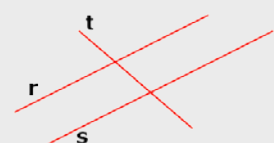
Sol Revisa la página [Recta, semirrecta y segmento](#).

5. Traza la recta r que une los puntos A y B. Representa los siguientes puntos: un punto, distinto de A y de B, que pertenezca a la recta; dos puntos que no pertenezcan a la recta y que estén situados en distintos semiplanos.

Sol Revisa la página [Propiedades de la recta](#).

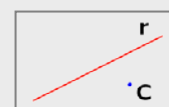
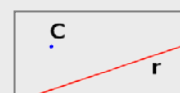
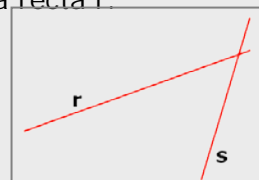
6. Indica si las rectas siguientes son coincidentes, paralelas o secantes.

Sol Las rectas r y s son paralelas. La recta t es secante con r y con s.

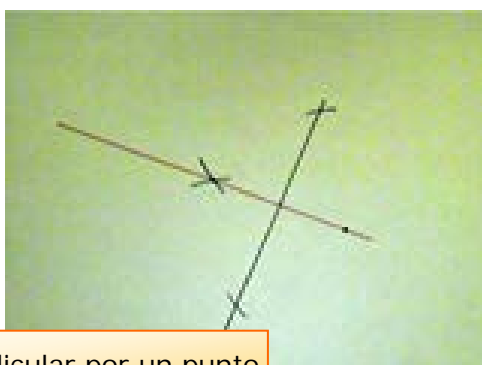


EJERCICIOS resueltos

7. Representa en tu libreta dos rectas paralelas y otra secante a la recta r .
Sol Revisa la página [Posiciones relativas](#).
8. Traza una recta paralela a r y otra paralela a s . ¿Qué figura forman los puntos de corte de las cuatro rectas?
Sol Forman un paralelogramo.
9. Utilizando una regla y un compás, traza una recta paralela a r que pase por el punto C .
Sol Revisar la página [Paralelismo](#).
10. En la figura del ejercicio anterior traza una nueva recta paralela a r . ¿Cómo son entre sí las dos rectas trazadas?
Sol Las tres rectas son paralelas.
11. Utilizando una regla y un compás, traza una recta s que sea perpendicular a r y que pase por el punto C .
Sol Revisar la página [Perpendicularidad](#).
12. Sobre la recta s construida en el ejercicio anterior, marca un punto D que no esté en r y traza otra recta perpendicular a s que pase por el punto D . ¿Qué relación existe entre la recta r y esta última que acabas de representar?
Sol Son paralelas.
13. Traza tres rectas perpendiculares a la recta r . ¿Cómo son entre sí estas tres rectas?
Sol Todas las rectas perpendiculares a r son paralelas entre sí.

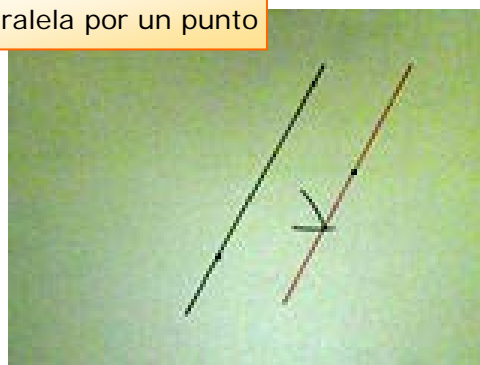


Aquí tienes ejemplos de trazado con regla y compás. En las páginas correspondientes dispones de un vídeo en el que se muestran ambas construcciones.

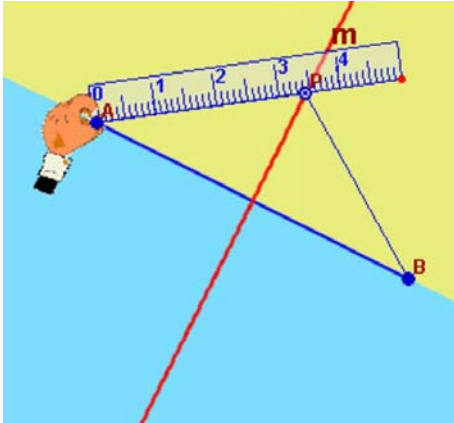


Perpendicular por un punto

Paralela por un punto



2. Mediatriz de un segmento.



Definición de mediatriz.

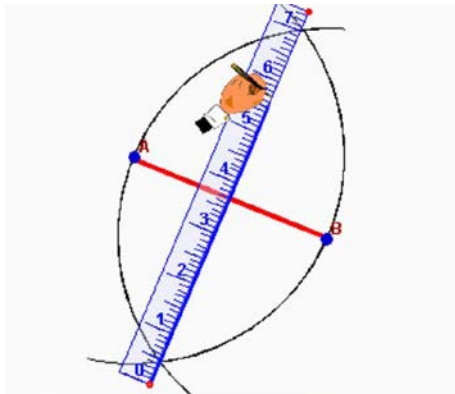
Dados dos puntos A y B, podemos construir el **segmento** AB que los une.

Se llama **mediatriz** del segmento AB a la recta que es perpendicular a este segmento y que pasa por su punto medio.

La mediatriz divide al segmento AB en otros dos segmentos de igual longitud.

La recta mediatriz tiene una importante propiedad: la distancia de cualquier punto de esa recta a cada uno de los dos extremos del segmento AB es la misma.

La **mediatriz** es perpendicular al segmento AB y lo divide en dos partes iguales.



Construcción de la mediatriz.

Vamos a construir la mediatriz de un segmento utilizando, como en casos anteriores, la regla y el compás.

Para ello representa dos puntos y traza el segmento que los une utilizando la regla.

Coloca el compás sobre uno de los extremos del segmento y ábrelo para que coincida con el otro extremo. Traza así una circunferencia. Haz la misma operación apoyando el compás sobre el otro extremo.

Una ahora los puntos donde se cortan las dos circunferencias que acabas de trazar. El nuevo segmento es perpendicular al inicial y si lo prolongas obtendrás la recta mediatriz que buscabas.



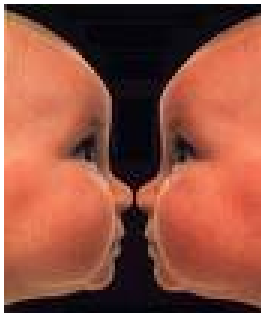
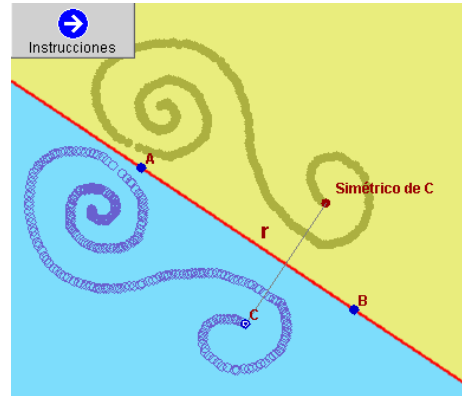
Mediatriz de un segmento

Simetría.

Dada una recta y un punto C que no pertenezca a ella, vamos a buscar otro punto C' con la condición de que la recta sea la **mediatriz** del segmento CC' .

El punto C' así buscado se llamará **simétrico de C** y la recta se llamará **eje de simetría**.

Este tipo de simetría se denomina **reflexión** y se puede aplicar a cualquier figura geométrica. Para ello representamos los simétricos de todos los vértices de la figura original y obtenemos así otra figura simétrica a la primera.



La reflexión produce figuras **simétricas** de forma similar a como actúa un espejo.



Simétrico de un punto

EJERCICIOS resueltos

14. Con regla y compás traza el segmento AB y su mediatriz.

Sol Revisa la página [Construcción de la mediatriz](#).

15. Sobre la mediatriz trazada en el ejercicio anterior, marca un punto cualquiera y mide la distancia entre este punto y los dos extremos del segmento inicial. ¿Qué observas en el resultado obtenido?

Sol La distancia de cualquier punto de la mediatriz a uno u otro extremo del segmento es la misma.

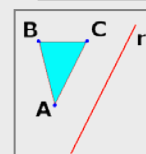
16. Trazas el segmento que une los puntos A y B . Localizas los puntos simétricos de A y B con respecto a la recta r y únelos mediante un segmento. ¿Qué relación existe entre los dos segmentos?

Sol Son segmentos simétricos con respecto a la recta r y su longitud es la misma.



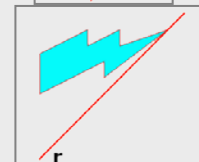
17. Realiza el mismo ejercicio anterior, partiendo del triángulo de vértices A , B y C . ¿Qué se obtiene?

Sol La figura obtenida es otro triángulo simétrico al original.

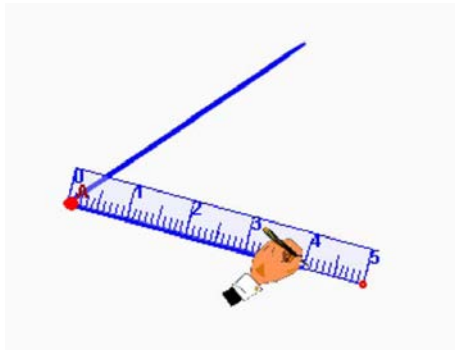


18. Representa la figura simétrica de la que aparece a continuación.

Sol Revisa la página [Simetría](#).



3. Ángulos. Clasificación y medida.



Definición de ángulo.

Piensa en un plano sin bordes, o lo que es lo mismo, ilimitado. Representa un punto A, al que llamaremos **vértice**, y traza dos semirrectas con origen en este punto, a las que llamaremos **lados**.

El plano queda así dividido en dos regiones que comparten el vértice y los lados. Cada una de estas regiones se llama **ángulo**.

Resulta evidente que las dos regiones pueden tener distinto tamaño. Llamaremos **amplitud del ángulo** al tamaño de cada una de ellas. Atendiendo a ella, identificaremos distintos tipos de ángulos, estableceremos relaciones entre ellos y mediremos las amplitudes.

Llamamos **ángulo** a cada una de las dos regiones en que queda dividido el plano al trazar dos semirrectas con el mismo origen.



Tipos de ángulos.

Por su amplitud clasificamos los ángulos en:

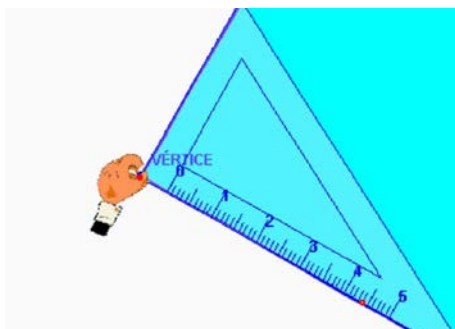
- **Ángulo recto:** es el comprendido entre dos semirrectas perpendiculares.
- **Ángulo llano:** es el que resulta al trazar dos semirrectas de igual origen y sentido opuesto.
- **Ángulo nulo:** es el que resulta al trazar dos semirrectas con igual origen e idéntico sentido.

Por comparación con el ángulo recto:

Un ángulo es **agudo** si es de menor amplitud que el ángulo recto. Es **obtusos** si tiene mayor amplitud que un recto y menor que un llano.

Por comparación con el ángulo llano:

Un ángulo es **convexo** si es de menor amplitud que el ángulo llano. Es **cóncavo** si su amplitud es mayor que la del ángulo llano.



Geometría del plano

Relaciones entre ángulos.

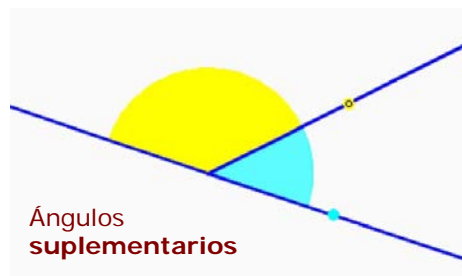
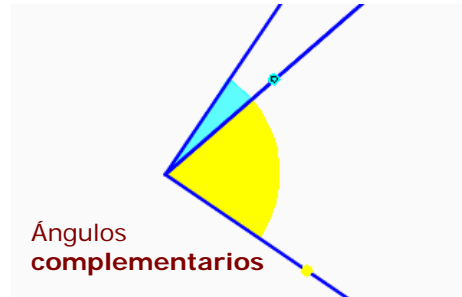
Decimos que dos ángulos son **consecutivos** si tienen el vértice y un lado en común y decimos que son **iguales** si tienen la misma amplitud.

Dos ángulos son **complementarios** si en posición de consecutivos equivalen a un recto.

Dos ángulos son **suplementarios** si en posición de consecutivos equivalen a un llano.

Dos rectas que se cortan en un punto determinan cuatro ángulos que son iguales dos a dos. Decimos en este caso que los pares de ángulos de la misma amplitud son **opuestos por el vértice**.

Dos ángulos **complementarios** equivalen a uno recto. Dos ángulos **suplementarios** equivalen a uno llano.



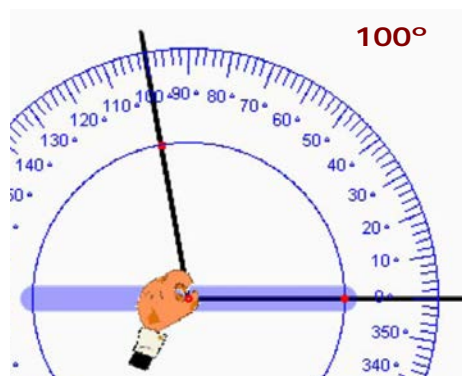
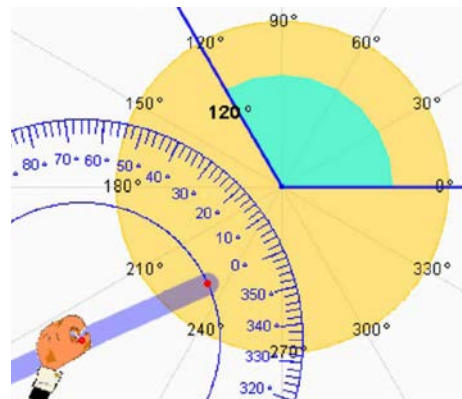
Medida de ángulos.

Para medir la amplitud de un ángulo utilizaremos como unidad el **grado**, representado por el símbolo " $^{\circ}$ ". Asignamos al **ángulo nulo** una amplitud de 0° y al **ángulo recto** una amplitud de 90° .

Dos ángulos rectos equivalen a uno **llano**, que tendrá por tanto una amplitud de 180° . Y cuatro ángulos rectos (o dos llanos) ocupan **todo el plano**, cuya amplitud será de 360° .

El resto de los ángulos se medirán por comparación con estos. Por ejemplo, si dividimos un recto en dos ángulos iguales, obtendremos dos **ángulos de 45°** . Si dividimos en cambio un recto en tres partes iguales, obtendremos tres **ángulos de 30°** . Como unidad el **grado**, representado por el símbolo " $^{\circ}$ ". Asignamos al **ángulo nulo** una amplitud de 0° y al **ángulo recto** una amplitud de 90° .

Al dividir una circunferencia en 360 partes iguales obtenemos **un grado**.



Sistema sexagesimal.

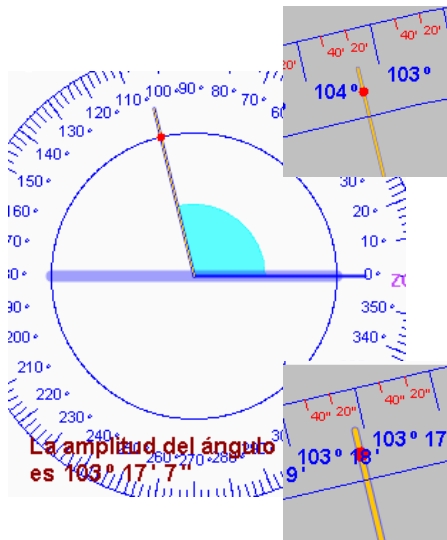
Para medir la amplitud de ángulos con mayor precisión se utiliza el sistema **sexagesimal**.

Este sistema consiste en dividir un grado en 60 partes iguales. A cada una de estas divisiones la llamamos **minuto**, de manera que cada grado contiene 60 minutos. De igual forma, cada minuto se divide en 60 partes iguales para obtener un **segundo** y obtenemos la siguiente equivalencia:

$$1 \text{ grado} = 60 \text{ minutos} = 3\,600 \text{ segundos}$$

Utilizando este sistema de medida diremos, por ejemplo, que la amplitud de un ángulo es 25 grados, 31 minutos y 7 segundos, y lo escribiremos así:

$$25^{\circ} 31' 7''$$



EJERCICIOS resueltos

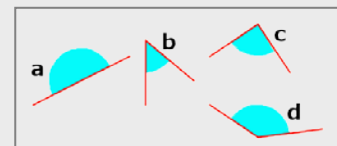
19. Indica sobre la figura el vértice, los lados y los ángulos que se observan.

Sol Revisa la página [Definición de ángulo](#).



20. Indica sobre la figura si estos ángulos son agudos, rectos, obtusos o llanos.

Sol El ángulo a es llano, b es agudo, c es recto y d es obtuso.



21. Representa utilizando los instrumentos de dibujo un ángulo recto, un ángulo llano, un ángulo nulo, un ángulo agudo, un ángulo obtuso, un ángulo cóncavo y un ángulo convexo.

Sol Revisa la página [Tipos de ángulos](#).

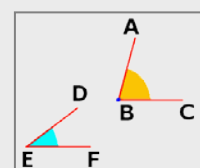
22. Representa sobre el vértice B un ángulo igual al que aparece en la figura.

Sol Construye sobre el punto B dos semirrectas paralelas a cada uno de los lados del ángulo original.



23. Representa sobre el vértice B un ángulo igual al ángulo DEF y que sea consecutivo al ángulo ABC.

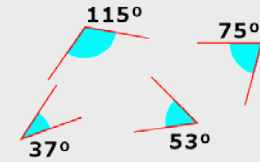
Sol Utiliza el transportador de ángulos.



EJERCICIOS resueltos

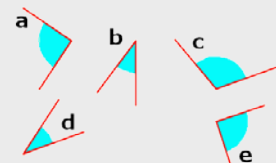
24. Indica cuáles de los ángulos que aparecen en la figura son complementarios y cuáles suplementarios.

Sol Son complementarios los ángulos de 37° y 53° porque suman un recto; son suplementarios los ángulos de 115° y 75° porque suman un llano.



25. Señala en la figura los ángulos que tienen la misma amplitud. ¿Qué nombre reciben estos ángulos?

Sol Decimos que son iguales los ángulos que tienen la misma amplitud. En la figura, los ángulos a y e son iguales (son rectos) y los ángulos b y d también son iguales.

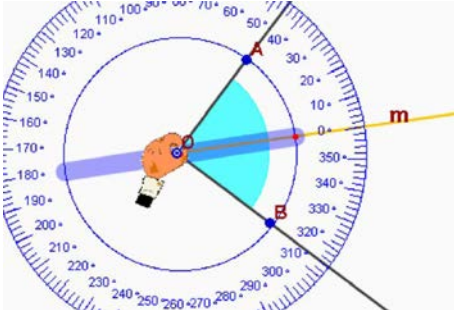


26. Representa utilizando los instrumentos de dibujo los ángulos de las siguientes amplitudes: 30° , 60° , 90° , 45° , 10° , 135° y 240° .

Sol Revisa la página [Medida de ángulos](#).



4. Definición de bisectriz.

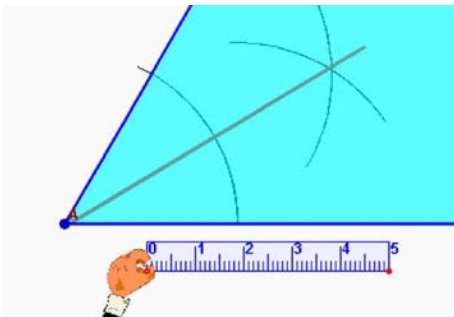


Definición de bisectriz.

Tomemos un ángulo de vértice A y lados m y n . Tracemos una nueva semirrecta con origen A y que divida al ángulo en otros dos que sean iguales. Esta semirrecta recibe el nombre de **bisectriz** del ángulo.

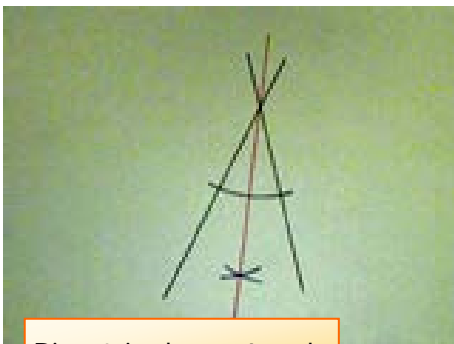
La bisectriz tiene la siguiente propiedad: cualquier punto de la bisectriz está a **igual distancia** de los dos lados del ángulo.

La **bisectriz** divide un ángulo en otros dos iguales.



Construcción de la bisectriz.

Los instrumentos básicos de la geometría plana permiten trazar la bisectriz de un ángulo.



Bisectriz de un ángulo

Traza dos semirrectas con un mismo origen, que será el **vértice** A del ángulo. Coloca el compás sobre A y traza un arco de circunferencia que corte a los dos lados, en los puntos B y C .

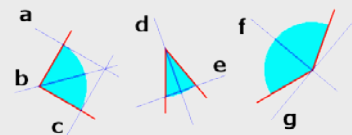
Traza otros dos arcos, uno de centro B y radio C y el segundo con centro C y radio B .

Une por fin el vértice A con el punto donde se cortan los dos arcos que acabas de trazar y obtendrás la bisectriz del ángulo.

EJERCICIOS resueltos

27. Indica sobre la figura cual es la bisectriz de los ángulos representados.

Sol Las bisectrices son las rectas b , d y f , respectivamente.



28. Traza sobre la figura la bisectriz del ángulo representado.

Sol Revisa la página [Construcción de la bisectriz](#).



29. Traza las bisectrices de los dos ángulos consecutivos que aparecen en la figura. ¿Qué relación guardan entre sí estas dos bisectrices?

Sol Si los ángulos son suplementarios, como en este caso, las dos bisectrices son perpendiculares entre sí.



5. Operaciones con ángulos.

Suma de ángulos.

Dos o más ángulos pueden sumarse para formar otro.

La operación **suma** de ángulos se realiza tanto gráficamente como analíticamente.

La suma **gráfica** se realiza colocando los ángulos en posición de consecutivos, es decir, compartiendo el vértice y un lado, para dar lugar a otro ángulo que comprende a ambos.

Analíticamente, la operación se realiza sumando las amplitudes de los ángulos para obtener la amplitud del ángulo resultante.

La **suma** analítica de ángulos se realiza sumando las **amplitudes** de cada uno de ellos.



EJEMPLO

$$138^\circ + 97^\circ = 235^\circ$$

Resta de ángulos.

La **resta** o diferencia de ángulos puede hacerse, igual que la suma, de dos formas: gráfica y analítica.

Gráficamente, basta colocar los dos ángulos de manera que compartan el vértice y un lado. Así, el ángulo mayor comprende al menor, y el exceso es la diferencia entre ambos.

La resta **analítica** se realiza restando la amplitud del ángulo menor de la del mayor.

Para **restar** analíticamente dos ángulos calculamos la **diferencia** entre el ángulo mayor y el menor.



EJEMPLO

$$253^\circ - 166^\circ = 87^\circ$$

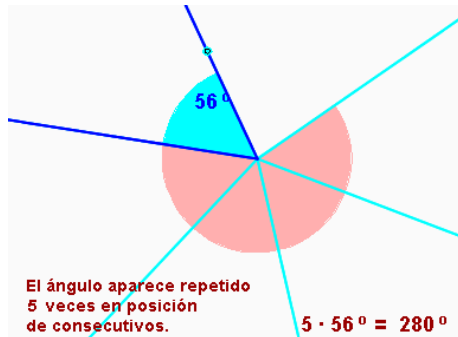
Multiplicación por un número.

Multiplicar un ángulo por un número natural equivale a sumar el ángulo consigo mismo tantas veces como indique el número.

Para multiplicar **gráficamente** un ángulo por un número natural basta colocar el ángulo en posición de consecutivo consigo mismo tantas veces como indique el número.

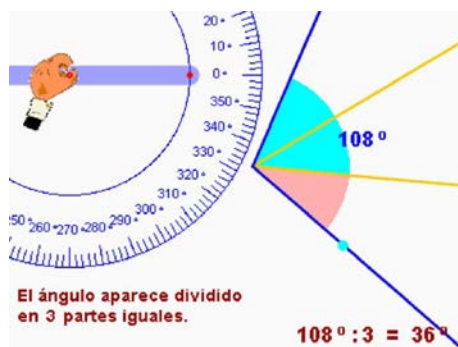
La operación **analítica** de multiplicar se realiza multiplicando el número por la amplitud del ángulo.

Para **multiplicar** analíticamente un ángulo por un número natural multiplicamos el número por la amplitud del ángulo correspondiente.



EJEMPLO

$$7 \cdot 46^\circ = 322^\circ$$



EJEMPLO

$$253^\circ : 11 = 23^\circ$$

En el caso de que no sea exacta, necesitamos más herramientas matemáticas para calcular el resultado de la división. Alguna de estas herramientas se explica en el siguiente apartado.

División por un número.

La **división** de un ángulo por un número natural consiste en repartir el ángulo en tantas partes iguales como nos indique el número.

La división se realiza de forma **analítica** dividiendo la amplitud del ángulo entre el número natural correspondiente.

La división **gráfica** resulta compleja ya que no siempre se puede hacer con regla y compás. Esto sucede, por ejemplo, con la división de un ángulo en tres partes iguales (el famoso problema de la **trisección del ángulo**), imposible para la mayor parte de los ángulos.

En cambio, siempre es posible calcular la división de un ángulo en dos partes iguales gráficamente, cosa que ya hemos hecho cuando aprendimos a trazar la bisectriz de un ángulo.

Geometría del plano

Operaciones en forma compleja.

Para operar con ángulos expresados en forma **compleja** (grados, minutos y segundos), daremos los pasos que se describen en la escena, recordando que 1 grado equivale a 60 minutos ($1^\circ=60'$) y que 1 minuto equivale a 60 segundos ($1'=60''$).

Así, y siempre que sea necesario y posible, podremos **agrupar** 60 segundos para obtener un minuto, o bien 60 minutos para obtener un grado. De igual forma, si es necesario, podremos transformar un grado en 60 minutos o un minuto en 60 segundos.

En **forma compleja** se operan por separado los grados, minutos y segundos.

Suma de los ángulos $222^\circ 27' 39''$ y $39^\circ 47' 33''$

$$\begin{array}{r} + \\ 222^\circ 27' 39'' \\ 39^\circ 47' 33'' \\ \hline \end{array}$$

$$261^\circ 74' 72''$$

$$1' \leftarrow$$

$$261^\circ 75' 12''$$

$$1^\circ \leftarrow$$

$$262^\circ 15' 12''$$

Los 72'' que hemos obtenido equivalen a 1' y 12''.

Los 75' que hemos obtenido equivalen a 1° y 15'.

El resultado final es $262^\circ 15' 12''$

Resta de los ángulos $115^\circ 38' 3''$ y $73^\circ 47' 59''$

$$\begin{array}{r} - \\ 115^\circ 38' 3'' \\ 73^\circ 47' 59'' \\ \hline \end{array}$$

$$115^\circ 37' 63''$$

$$114^\circ 97' 63''$$

$$41^\circ 50' 4''$$

Necesitamos transformar 1' en 60'' con lo que nos quedan 37' y 63''.

Necesitamos transformar 1° en 60' con lo que nos quedan 114° y 97'.

El resultado final es $41^\circ 50' 4''$



SUMA de ángulos en forma compleja

En primer lugar sumaremos los segundos. Si esta suma es igual o superior a 60'', llevaremos un minuto y anotaremos los segundos restantes.

Para los minutos realizaremos la misma operación, contando con el que hemos llevado en el paso anterior. En el caso de que tengamos 60 o más minutos, llevaremos un grado.

Finalmente sumaremos los grados, contando con el que nos hemos llevado, de ser el caso.

RESTA de ángulos en forma compleja

El método para la resta comienza también por los segundos. Si en el minuendo tenemos un número suficiente de segundos, restamos los que hay en el sustraendo.

En caso contrario, deberemos "traer" un minuto del minuendo y convertirlo en 60''. De esta forma reunimos una cantidad suficiente de segundos en el minuendo y restamos de manera natural.

El proceso se repite ahora con los minutos, teniendo en cuenta que si hemos necesitado convertir en segundos, tendremos ya un minuto menos en el minuendo. Si los minutos que nos quedan en el minuendo son suficientes procedemos a la resta. Si no es así, deberemos traer un grado, que equivale a 60'. Finalmente restamos los grados, descontando, en su caso, el que hayamos llevado anteriormente.

MULTIPLICACIÓN de ángulos por un número

Comenzamos multiplicando los segundos, minutos y grados por separado. Una vez obtenidos estos productos, agrupamos los segundos de 60 en 60. Cada grupo que obtengamos representa un minuto más a añadir a los minutos resultantes de la multiplicación.

Una vez hecho esto, repetimos el proceso con los minutos que hemos obtenido, agrupándolos de 60 en 60. Cada uno de estos grupos será un grado que añadiremos a los grados que hayan resultado de la multiplicación.

Multiplicación del ángulo $29^{\circ} 47' 59''$ por 3.

$$\begin{array}{r}
 29^{\circ} \ 47' \ 59'' \\
 \times \quad \quad \quad 3 \\
 \hline
 87^{\circ} \ 141' \ 177'' \\
 \phantom{87^{\circ}} \leftarrow 2' \\
 \hline
 87^{\circ} \ 143' \ 57'' \\
 \phantom{87^{\circ}} \leftarrow 2^{\circ} \\
 \hline
 89^{\circ} \ 23' \ 57''
 \end{array}$$

Los 177" que hemos obtenido equivalen a 2' y 57".

Los 143' que hemos obtenido equivalen a 2° y 23'.

El resultado final es $89^{\circ} 23' 57''$

División del ángulo $335^{\circ} 38' 3''$ entre 8.

$$\begin{array}{r}
 335^{\circ} \ 38' \ 3'' \\
 - 328^{\circ} \\
 \hline
 7^{\circ} \ 458' \ 3'' \\
 - 456' \\
 \hline
 2' \ 123'' \\
 - 120'' \\
 \hline
 3''
 \end{array}$$

El resto de 7° equivale a $420'$, que junto a los $38'$ suman un total de $458'$.

El resto de $2'$ equivale a $120''$, que junto a los $3''$ suman un total de $123''$.

El cociente es $41^{\circ} 57' 15''$ y el resto $3''$

DIVISIÓN de ángulos por un número

Empezamos esta vez por los grados, dividiéndolos de forma natural. El resto de esta primera división, se convertirá en minutos que se añadirán a los que tengamos para dividir. Hecho esto, procedemos a la división de los minutos.

De igual forma que antes, el resto de la división de los minutos habrá de convertirse en segundos y añadirlo a los que haya inicialmente, antes de pasar a su división. El resto de esta última fase es el resto final de la operación de dividir.

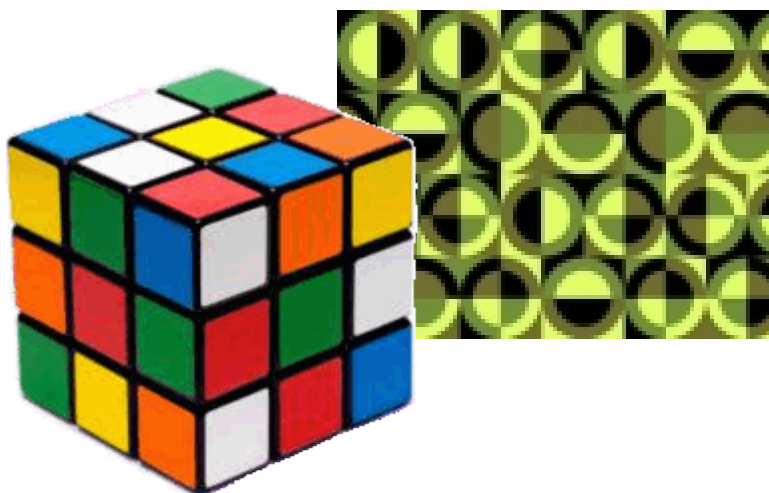
EJERCICIOS resueltos

30. Cálcula de forma gráfica y analítica la suma de los ángulos de 110° y 40° .
Sol Para la suma gráfica revisa la página [Suma de ángulos](#).
La suma analítica es $110^{\circ} + 40^{\circ} = 150^{\circ}$.
31. Calcula de forma gráfica y analítica la resta de los ángulos de 163° y 34° .
Sol Para la resta gráfica revisa la página [Resta de ángulos](#).
La resta analítica es $163^{\circ} - 34^{\circ} = 129^{\circ}$.
32. Calcula el resultado de las siguientes operaciones con ángulos: a. $73^{\circ} - 36^{\circ}$, b. $28^{\circ} - (123^{\circ} - 118^{\circ})$, c. $2 \cdot 72^{\circ} + 3 \cdot 15^{\circ}$, d. $90^{\circ} : 5$, e. $130^{\circ} - 2 \cdot 20^{\circ} + (180^{\circ} - 60^{\circ}) : 3$
Sol a. $73^{\circ} - 36^{\circ} = 37^{\circ}$, b. $28^{\circ} - (123^{\circ} - 118^{\circ}) = 23^{\circ}$, c. $2 \cdot 72^{\circ} + 3 \cdot 15^{\circ} = 189^{\circ}$,
d. $90^{\circ} : 5 = 18^{\circ}$, e. $130^{\circ} - 2 \cdot 20^{\circ} + (180^{\circ} - 60^{\circ}) : 3 = 150^{\circ}$
33. Calcula el ángulo que describe el minutero de un reloj cuando pasa de las 3:20 a las 4:00.
Sol El minutero da una vuelta completa, es decir 360° , en una hora, que equivale a 6° cada minuto, así que en 40 minutos describe un ángulo de 240° .
34. Calcula el ángulo que describe la aguja horaria de un reloj en los siguientes casos: las 2:00 y las 2:47 y entre las 2:34 y las 7:11.
Sol La aguja horaria avanza 30° por hora, que equivale a medio grado cada minuto. Con esta relación y teniendo en cuenta el ejercicio anterior, los ángulos descritos son 90° , 30° , 15° , $23^{\circ} 30'$ y $138^{\circ} 30'$, respectivamente.



Para practicar

1. Si dos rectas tienen un punto en común ¿cuál es su posición relativa? ¿Y si son dos puntos comunes? ¿Y si no tienen ninguno?
2. Si m es la mediatriz del segmento AB y D es un punto de la recta m cuál es la distancia de D a A , sabiendo que la distancia de D a B es $5,52$?
3. Clasifica los ángulos de 0° , 45° , 90° , 135° , 180° y 225° según su amplitud y según su comparación con los ángulos agudo y llano.
4. Dado un ángulo de amplitud 37° ¿cuál es la amplitud de su complementario? ¿Y la de su suplementario?
5. De qué amplitud son los cuatro ángulos que se obtienen al trazar la recta bisectriz de un ángulo de 170° ?
6. Realiza la siguiente operación con ángulos: $95^\circ + 124^\circ - 24^\circ$
7. Realiza la siguiente operación con ángulos: $3 \cdot 27^\circ + 5 \cdot 19^\circ$
8. Realiza la siguiente división: $52^\circ : 4$
9. Realiza la siguiente operación: $128^\circ 28' 23'' + 91^\circ 32' 49''$
10. Realiza la siguiente operación: $330^\circ 32' 43'' - 83^\circ 56' 47''$
11. Realiza la siguiente operación: $31^\circ 38' 9'' \cdot 7$
12. Realiza la siguiente operación: $117^\circ 15' 34'' : 8$
13. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de una recta perpendicular a otra.
14. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de una recta paralela a otra.
15. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de la mediatriz de un segmento.
16. Realiza con regla y compás la construcción geométrica de la bisectriz de un ángulo.
17. Realiza con regla y compás la construcción geométrica del punto simétrico con respecto a una recta.

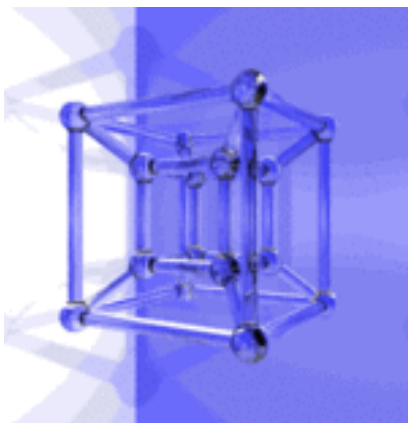
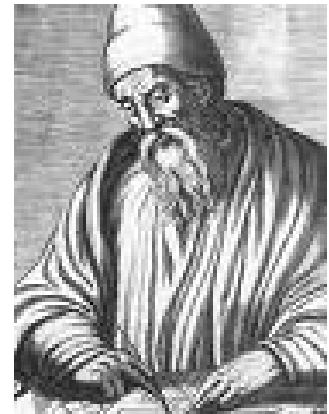


Para saber más



El maestro Euclides

Euclides está considerado como el primer gran matemático de la historia. ¿El motivo? Ser el primero en organizar un discurso matemático, partiendo de casi nada, y utilizando de forma estricta el razonamiento matemático, método científico que caracteriza de manera esencial a la matemática frente a otras disciplinas científicas.



Su gran aportación son los "**Elementos de Geometría**", libro organizado en trece tomos en el que, sobre las ideas fundamentales de **punto, recta, superficie y ángulo**, establece sus famosos **cinco postulados**. Con pocas herramientas fue capaz de recoger gran parte de los conocimientos geométricos existentes hasta nuestros días.

Todo lo que sabemos acerca de ángulos y rectas, figuras planas como triángulos y circunferencias, paralelismo y perpendicularidad, áreas y muchísimo más fue completamente terminado por él.

Hasta que en el siglo XIX algunos grandes nombres de la matemática moderna pudieron ampliar el horizonte que había marcado Euclides. Para ello eliminaron el famoso 5º postulado de Euclides, conocido también como "Postulado de las paralelas", y se sumergieron en mundos geométricos completamente nuevos, en los que las rectas paralelas se encuentran, o en los que la suma de los ángulos de un triángulo no es 180° .

Muchas personas sintieron vértigo ante estos extraños mundos, hasta que pasado algún tiempo nos fuimos dando cuenta de que, en algunos casos, se parecen más al nuestro de lo que parece. Si deseas más información, puedes buscar los nombres de Riemann, Lobatchevski, Bolyai o Gauss, responsables en gran medida de la evolución de la geometría hacia nuevas metas que guardan una relación directa con las más modernas teorías sobre el origen del Universo. ¡Abróchense los cinturones!





Recuerda lo más importante

Rectas

Los elementos fundamentales de la geometría plana son los **puntos** y las **rectas**.

La línea **recta** es la más corta entre dos puntos.

Dos rectas son **paralelas** si no se cortan en ningún punto y son **secantes** si se cortan en un punto.

Dos rectas son **perpendiculares** si dividen al plano en cuatro regiones de la misma amplitud.

Mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a este segmento y que lo corta en dos partes iguales.

Se dice que dos puntos A y B son **simétricos** con respecto a una recta, si esta recta es la mediatriz del segmento AB.

Ángulos

Ángulo es cada una de las dos regiones en que dos semirrectas con el mismo origen dividen al plano. Los ángulos pueden clasificarse con arreglo a distintos criterios:

- con relación a su amplitud: **recto**, **llano**, **nulo**;
- en comparación con el ángulo recto: **agudo**, **obtuso**;
- en comparación con el ángulo llano: **cóncavo**, **convexo**.

Al dividir una circunferencia en 360 partes iguales se obtiene un **grado**. Así, la circunferencia completa mide 360° , el ángulo recto mide 90° y el llano mide 180° .

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que lo divide en dos partes iguales.

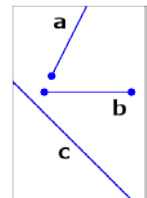
La suma y resta de ángulos se realiza sumando o restando las amplitudes de cada uno de ellos.



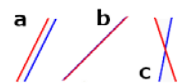
Autoevaluación



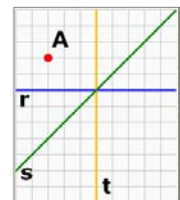
1. Relaciona cada elemento con su nombre correspondiente.



2. Indica la posición relativa de los pares de rectas.



3. Si una recta es perpendicular a otras dos rectas, ¿cómo son estas dos rectas entre sí?
4. ¿Cómo se llama la recta perpendicular a un segmento y que lo divide en dos partes iguales?
5. Señala el punto simétrico de A con respecto a cada uno de los ejes r, s y t.



6. En cuántos ángulos queda dividido el plano al trazar dos rectas secantes?
7. Calcula la amplitud del complementario y del suplementario del ángulo de 64° .
8. ¿Cómo son entre sí las bisectrices de dos ángulos suplementarios?
9. Calcula el resultado de sumar los ángulos de 17° , 36° y 42° .
10. Calcula el resultado de la operación con ángulos que se indica: $2 \cdot 138^\circ - (53^\circ + 16^\circ)$

Soluciones de los ejercicios para practicar

- Las rectas son secantes si tienen un punto en común, coincidentes si tienen dos puntos en común o paralelas si no tienen ninguno.
- La distancia del punto D a A es la misma que de D a B. En este caso esa distancia es $d(D,A)=5,52$.
- La clasificación es:
 0° Nulo..... Agudo Convexo
 45° Agudo Convexo
 90° Recto Convexo
 135° .. Obtuso ... Convexo
 180° .. Llano
 225° .. Cóncavo
- El complementario de 37° es 53° y el suplementario 143° .
- Se obtienen dos ángulos de 85° y otros dos de 95° .
- $95^\circ+124^\circ-24^\circ=195^\circ$
- $3 \cdot 27^\circ+5 \cdot 19^\circ=176^\circ$
- $52^\circ:4=13^\circ$
- El resultado es $220^\circ 1' 12''$.
- El resultado es $246^\circ 35' 56''$.
- El resultado es $221^\circ 27' 3''$.
- El resultado es $14^\circ 39' 26''$ y resto $6''$.
- Revisa el video de la construcción de la perpendicular.
- Revisa el video de la construcción de la paralela.
- Revisa el video de la construcción de la mediatriz.
- Revisa el video de la construcción de la bisectriz.
- Revisa el video de la construcción del punto simétrico.

Soluciones AUTOEVALUACIÓN

- a. semirrecta; b. segmento; c. recta.
- a. paralelas; b. coincidentes; c. secantes.
- Son paralelas.
- Mediatriz.
- Los puntos simétricos son los representados en los colores que se corresponden con cada recta.
- En cuatro.
- El complementario es 26° y el suplementario es 116° .
- Son perpendiculares.
- El resultado de la suma es 95° .
- $2 \cdot 138^\circ - (53^\circ + 16^\circ) = 207^\circ$.

