

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Representar punts en el plano
- Calcular las coordenades d'un punt
- Construir i interpretar gràfics cartesianes
- Construir i interpretar taules de dades
- Reconèixer magnituds directament proporcionals donades per taules o per representacions gràfiques

Abans de començar

1. Sistema d'eixos coordenades	pàg. 4
Eixos cartesianes	
Coordenades d'un punt	
2. Gràfics cartesianes	pàg. 6
Interpretar gràfics de punts	
Interpretar gràfics continus	
3. Taules i gràfics	pàg. 8
Taules de valors	
De la taula al gràfic	
Del gràfic a la taula	
4. Més exemples de gràfics	pàg. 12
De proporcionalitat directa	
Altres exemples	

Exercicis per a practicar

Per a saber-ne més

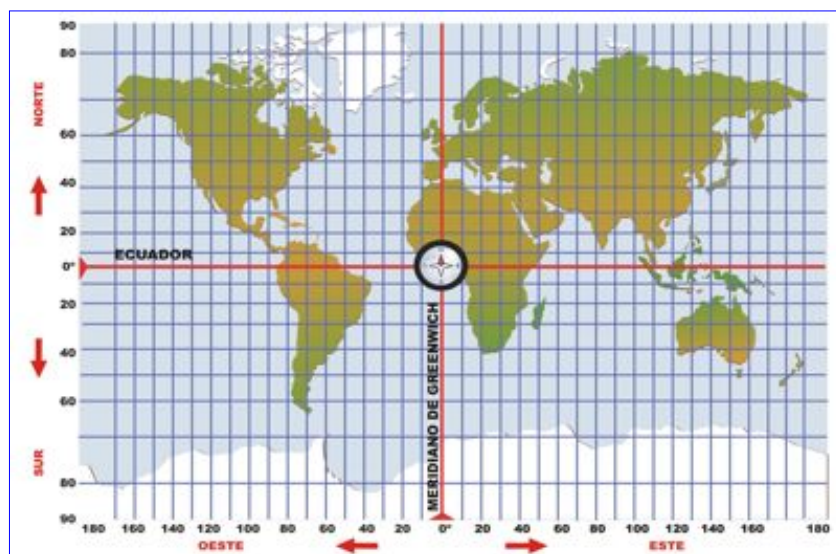
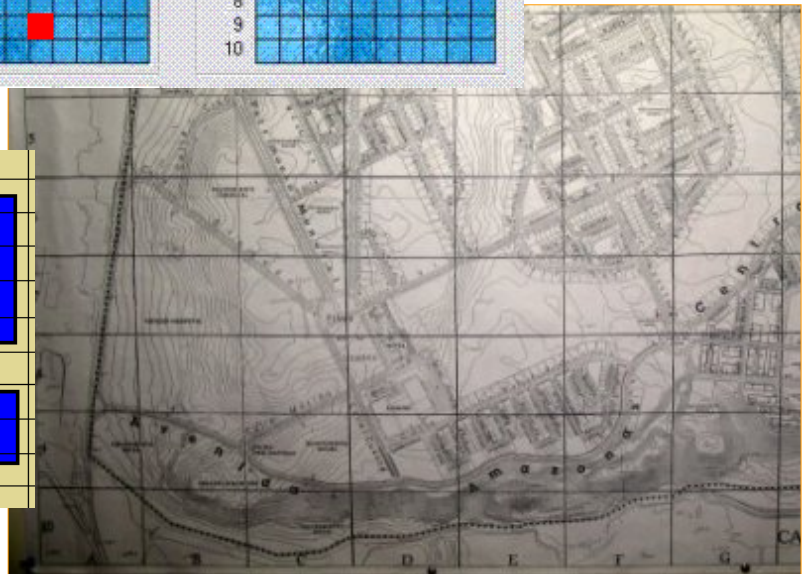
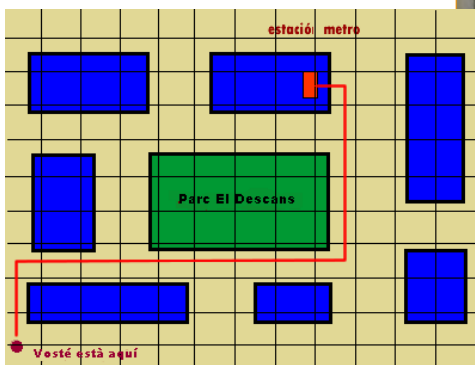
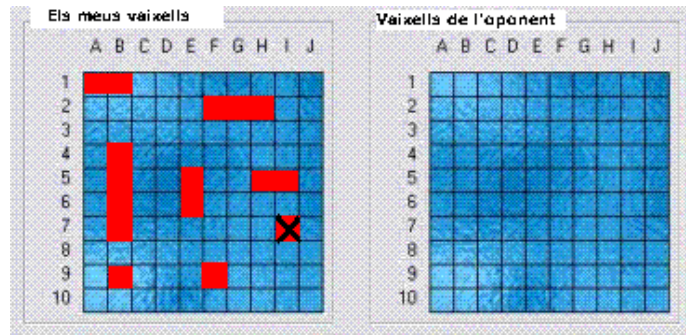
Resum

Autoavaluació

Abans de començar

Què tenen en comú?

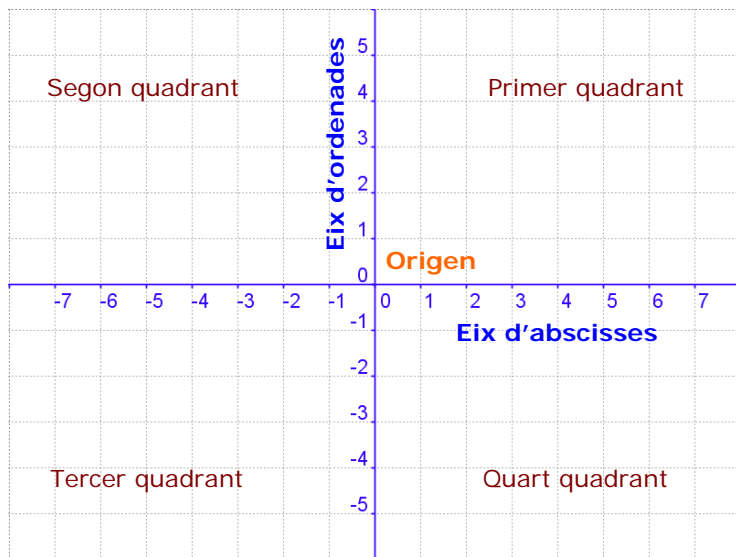
Observa las imatges que apareixen en aquesta pàgina. Intenta encontrar quines coses poden tenir en comú. Anims!



1. Sistema d'eixos de coordenades

Els eixos cartesianes

Observa la següent imatge, en ella es mostren els elements del sistema de **coordenades cartesianes** que ha permès avanços en diversos camps de les matemàtiques.



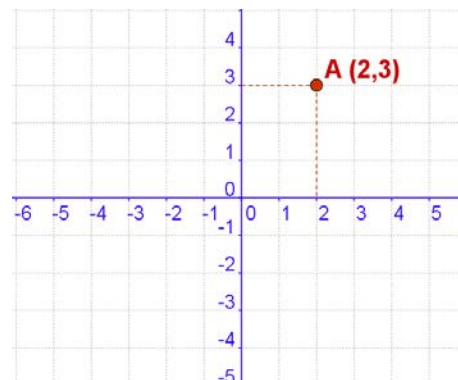
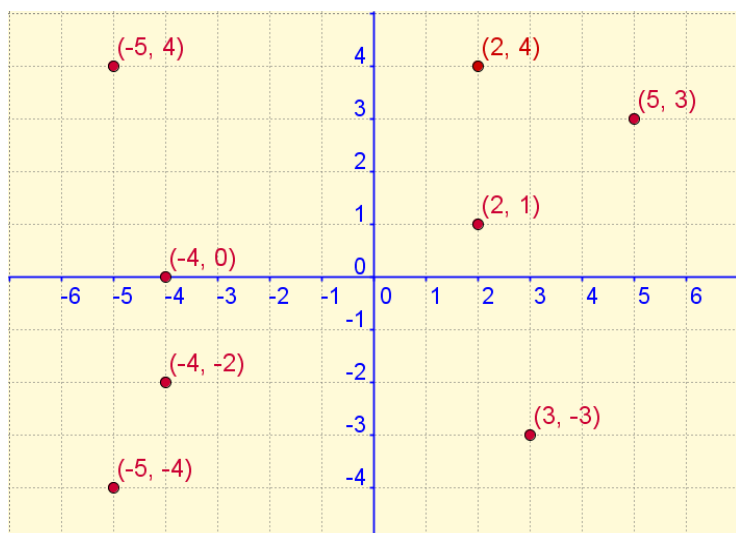
Un sistema d'eixos de coordenades (o cartesianes) està format per dos eixos numèrics perpendiculars, un horitzontal, anomenat d'**abscisses** i un altre vertical o d'**ordenades**.

Ambdós eixos es tallen en un punt anomenat **origen** o **centre de coordenades**.

Coordenades d'un punt

En la imatge d'aquest apartat apareixen diversos punts en el pla i uns eixos cartesianes on es visualitzen les coordenades cartesianes de cada punt.

Observa que les coordenades d'un punt són un **parell ordenat** de valors.

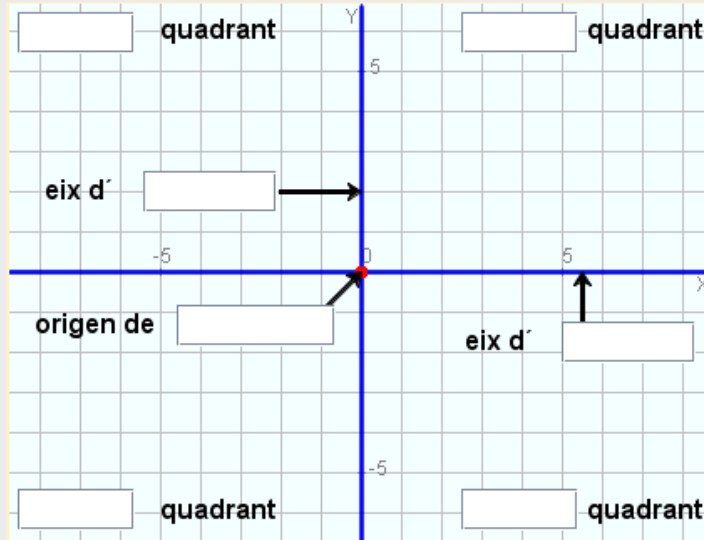


- La primera coordenada o **abscissa** d'un punt ens indica la distància a la qual aquest punt es troba de l'eix vertical.

- La segona coordenada o **ordenada** indica la distància a la qual es troba el punt de l'eix horitzontal.

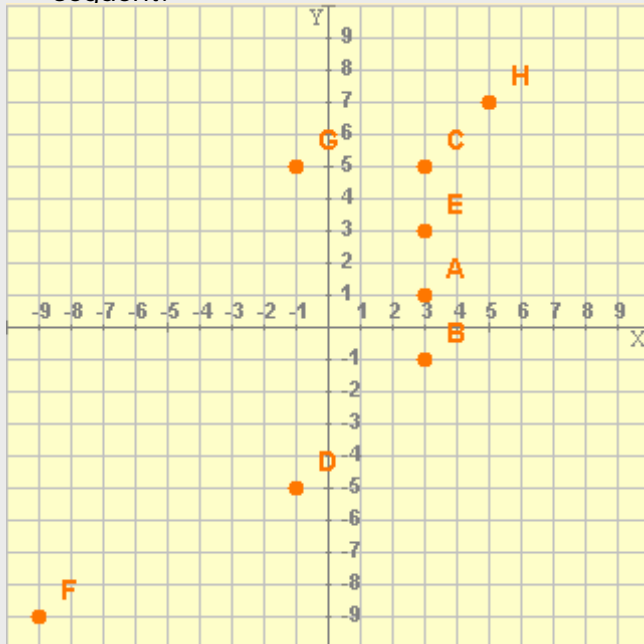
EXERCICIS resolts

1. Escriu els termes que corresponguin en els rectangles que es mostren en la següent imatge:



Els termes són (de dalt a baix i d'esquerra a dreta): segon, ordenades, coordenades, tercer, primer, absisses, quart.

2. Completa la taula amb les coordenades dels punts representats en la imatge següent:



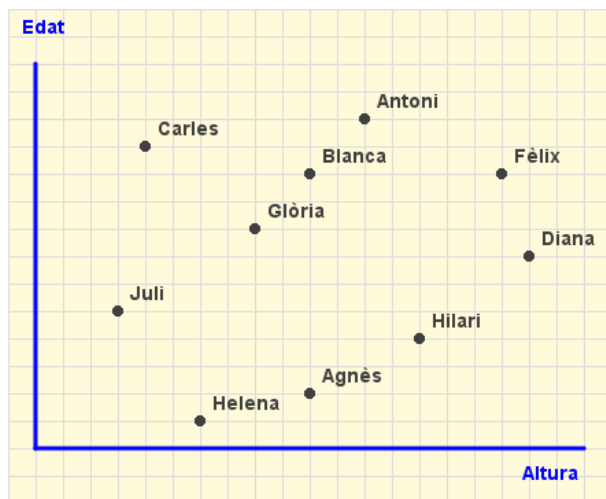
	x	y
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		

Els punts són: A(3,1) B(3,-1) C(3,5) D(-1,-5) E(3,3) F(-9,-9) G(-1,5) H(5,7)

2. Gràfics cartesianes

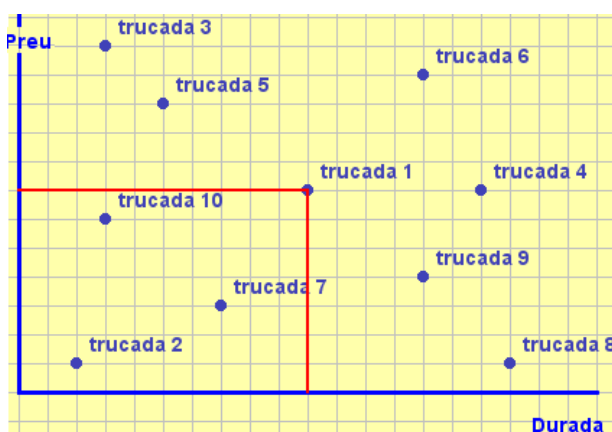
Interpretar gràfics de punts

En la imatge de sota es veu un exemple de **gràfic cartesià**. Cada punt de la gràfica està relacionat amb l'**edat** i l'**alçada** de les persones que fan cua per entrar en un cinema.



Observa: el punt que apareix **més elevat**, el punt **més baix**, el punt situat **més a la dreta** i el punt situat **més a l'esquerra**. Relaciona'l amb les magnituds representades.

En el segon gràfic es mostren el **preu** i el **temps** que han durat les trucades realitzades per deu persones que es trobaven en un Locutori telefònic.



Observa: els punts que estan situats a la **mateixa alçada**, i els punts situats **sobre una mateixa vertical**. Relaciona-ho amb les magnituds representades.

Com s'interpreta?

- ✓ La Diana és la més alta ja que el punt que la representa està més a la dreta. L'Antoni és el de major edat perquè el punt que el representa és el que es troba més cap a dalt en el gràfic.
- ✓ De la mateixa manera pots veure que la Blanca i l'Agnès tenen la mateixa alçada ja que els seus punts estan a la mateixa distància de l'eix d'ordenades; i la Blanca i en Fèlix tenen la mateixa edat ja que els seus punts es troben a la mateixa distància de l'eix d'abscisses.
- ✓ El més baixet seria en Juli i l'Elena és la més jove de totes les persones de la fila.

- ✓ La trucada de major durada ha estat la trucada 8.
- ✓ La trucada més cara ha estat la 3 encara que ha estat de les de menor durada.
- ✓ La trucada 2 ha estat la de menor durada i, juntament amb la 8, són les més barates.
- ✓ Les trucades 1 i 4 han costat el mateix encara que la seva durada ha estat diferent.
- ✓ Les trucades 6 i 9 han durat el mateix però la 6 ha costat més.
- ✓ Quina trucada creus que s'ha fet a un telèfon més proper? La núm. 8 ja que es la més llarga i de menor cost.

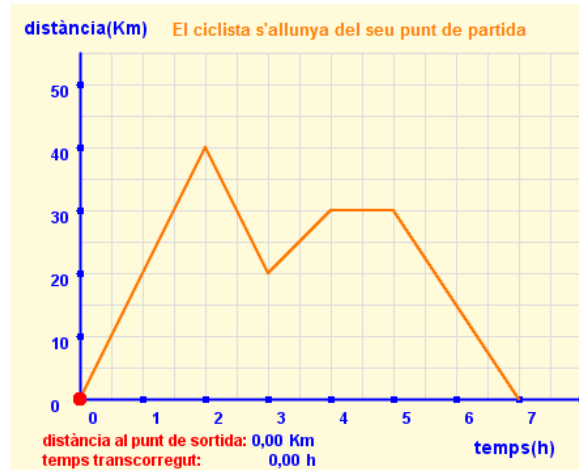
Interpretar gràfics continus

La interpretació de la gràfica:

- ✓ El ciclista comença el seu recorregut i a les dues hores s troba a 40 km.
- ✓ Recorre 20 km més. Però tornant enrere.
- ✓ Torna a allunyar-se 10 km i s'atura a descansar durant una hora.
- ✓ Finalment, torna a pujar a la bici i retorna al punt de partida, trigant en aquesta última part del recorregut, de 30 km, dues hores.



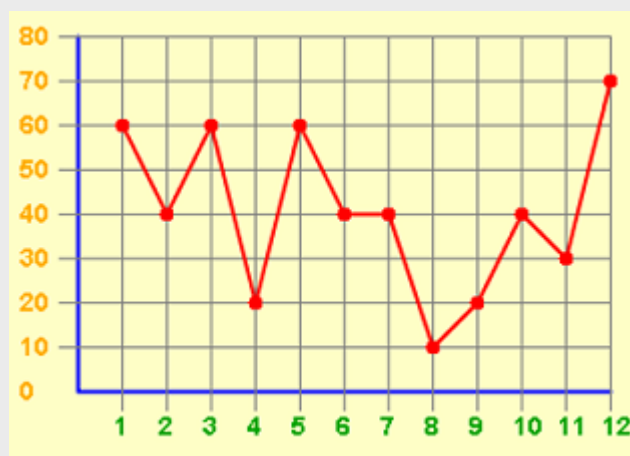
En el següent gràfic es descriu el recorregut realitzat per un ciclista i, a diferència de les dues anteriors, no se tracta de punts aïllats sinó que és una línia contínua:



Observa: els trams de la gràfica que indiquen que el ciclista s'allunya, torna o està parat.

EXERCICIS resoltos

3. L'empresa EDAD S.A. cotitza a la Borsa des de fa alguns anys. En el gràfic adjunt es mostren les cotitzacions (en €) de les seves accions durant l'any 2008. Quina ha estat la major cotització assolida per les seves accions? En quin mes es va aconseguir? Quin ha estat el menor valor assolit per les accions? Quin ha estat el mes en què es va assolir aquesta mínima cotització? Quina cotització es va assolir en el mes de juny?



La major cotització va ser de 70 € i es va assolir al desembre. La menor cotització va ser de 10 € i es va assolir a l'agost. En el mes de juny las accions es cotitzaven a 40 €

3. Taules i gràfics

Taules de valors

En moltes ocasions tindrem **conjunts de dades** que ens venen donats de diferents maneres: expressió verbal, una fórmula o equació,... En qualsevol cas disposar d'aquestes dades en una **taula** ens facilitarà la seva interpretació i la seva representació gràfica.

Vegem els passos a seguir per construir una **taula de doble entrada** quan les dades ens venen donades de forma verbal o mitjançant una equació.

► Primer exemple (dades en forma verbal):

En un club esportiu hi ha 200 socis. D'aquests 20 practiquen natació, 35 practiquen futbol, 15 practiquen voleibol, 40 practiquen bàsquet, 30 practiquen atletisme, 10 practiquen tennis, 24 practiquen handbol i 26 practiquen gimnàstica.

Para aquest primer exemple prepararem una taula en sentit vertical, tal com la que apareix al costat (part superior). Amb les dades que tenim la taula hauria de tenir **2 columnes** i **9 files** (una fila serà l'encapçalament de les dues columnes)

En les cel·les de la primera fila escrivim el nombre de les magnituds o dels tipus de dades que apareixeran en cada columna. En les demés cel·les de la primera columna anirem escrivint el nom dels esports que es practiquen. Encara que els escriurem en l'ordre en què apareixen en l'enunciat els podríem escriure en ordre alfabètic o en qualsevol altre ordre que considerem.

A continuació emplenaríem les cel·les de la segona columna con el número de practicants de cada esport. Aquest número haurà de correspondre amb l'esport que hagi escrit en la cel·la contigua de la primera columna. Al final haurem de tenir una taula similar a la que apareix al costat.

Observa: L'ordre de col·locació dels valors relacionats i les possibles disposicions de les taules.

esport	Nombre socis

esport	nombre socis
natació	
futbol	
voleibol	
bàsquet	
atletisme	
tennis	
handbol	
gimnàstica	

esport	nombre socis
natació	20
futbol	35
voleibol	15
bàsquet	40
atletisme	30
tennis	10
handbol	24
gimnàstica	26

Observa: El càlcul dels imports es realitza de la següent manera (farem el càlcul per conèixer l'import de 5 ampolles de suc):

$$\text{Import} = 0,75 \cdot \text{nombre ampolles} = 0,75 \cdot 5 = 3,75 \text{ €}.$$



► Segon exemple (dades en forma d'equació):

L'import que hem de pagar per una determinada quantitat d'ampolles de suc de taronja és:

$$\text{Import} = 0,75 \cdot \text{nombre d'ampolles}$$

Construïm una taula en què es mostraran els imports si es compren de 1 a 10 ampolles. En aquest caso, en lloc d'una taula en sentit vertical construïm una taula en sentit horitzontal i que, segons les dades que tenim haurà de tenir dues files i onze columnes ja que necessitarem una columna per indicar a què se refereixen les quantitats que apareguin en las cel·les de cada fila.

Aquesta taula pot ser como la següent:

Nombre ampolles											
Import											

En las cel·les de la primera fila escriurem el nombre d'ampolles en ordre creixent:

Nombre ampolles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Import										

En les cel·les de la segona fila escriurem els imports corresponents al nombre d'ampolles i que calcularem a partir de l'equació que ens donen en l'enunciat:

Nombre ampolles	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Import	0,75	1,5	2,25	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5

X	Y
0	6
1	1
2	9
3	2
4	3
5	5
6	4
7	7
8	6
9	3
10	8
11	9
12	2

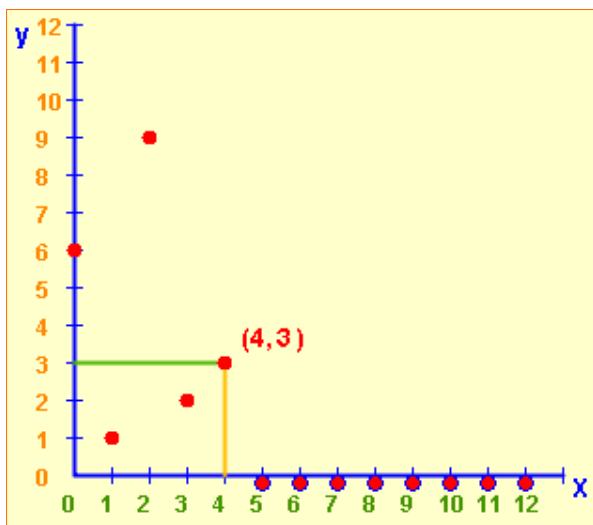
De la taula al gràfic

En moltes ocasions necessitarem que les dades recollides en una taula siguin representades gràficament sobre uns eixos de coordenades.

Vegem com representar gràficament les dades de la taula que veus al costat. Primer haurem de dibuixar un sistema d'eixos de coordenades sobre el qual, posteriorment, representarem les dades.

Un cop hem dibuixat els eixos i marcat els valors corresponents tant en l'eix d'abscisses com en l'eix de coordenades, començarem a situar els punts que representaran les dades donades.

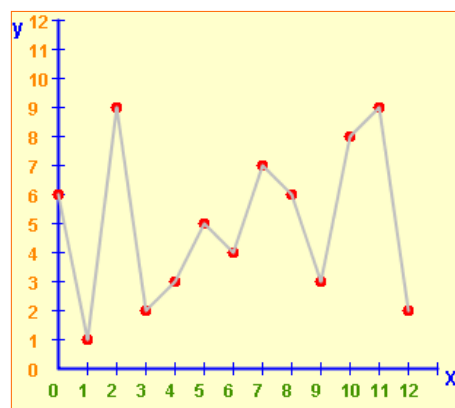
Taules i gràfics



Un cop acabat el procés haurem d'obtenir un gràfic similar al que es mostra, en el qual s'han unit, mitjançant segments, cada parell de punts consecutius, encara que no sempre s'hauran d'unir.

Observa: Ens situem al primer punt de **X**, donat a la taula i pugem una altura igual al seu corresponent valor de **Y**, així obtenim el primer punt de la gràfica **(0,6)**. Repetim el procés amb cada parell de valors de la taula.

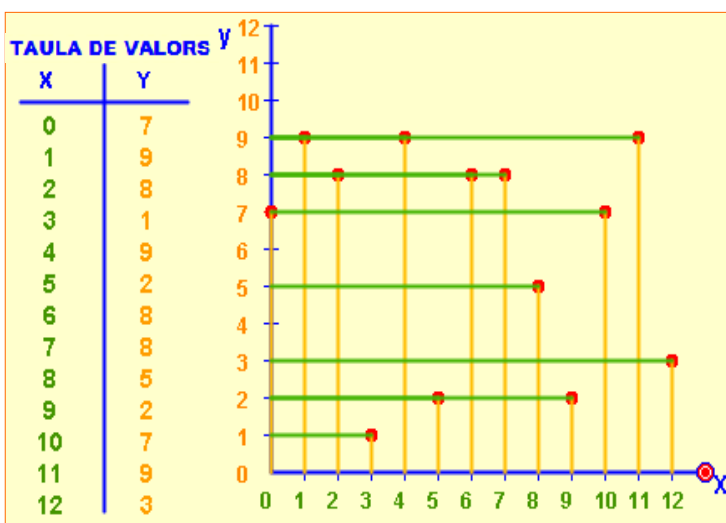
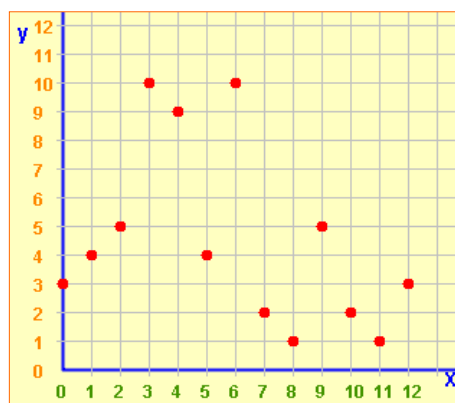
A la imatge del costat se veuen les traces utilitzades per representar el punt **(4,3)**.



Del gràfic a la taula

Vegem ara el procés invers: ens donen un gràfic cartesià i hem de construir la taula de dades representada en aquest gràfic.

Fixa't en el gràfic del marge. A partir de les coordenades dels punts representats podrem construir la taula de dades corresponent. El procés és idèntic al que s'ha utilitzat en el segon exercici del primer apartat d'aquesta quinzena.



Procés: pel primer punt del gràfic (el de més a l'esquerra), tracem una paral·lela a l'eix **Y** fins arribar a l'eix **X** i una paral·lela a l'eix **X** fins l'eix **Y**.

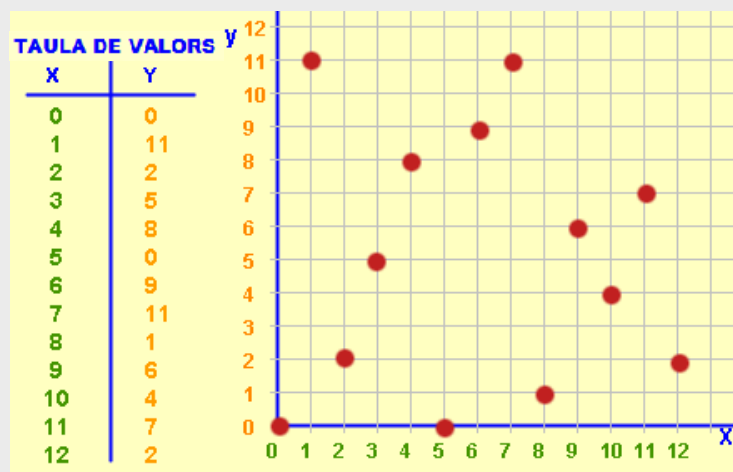
Aquestes paral·leles, en tallar amb cadascun dels eixos, ens donaran els corresponents **valors X i Y (coordenades)** d'aquest punt. Anotem els valors llegits en la **taula de valors** i continuem el procés amb els demés, fins a arribar l'últim punt (el que està situat més cap a la dreta).

EXERCICIS resolts

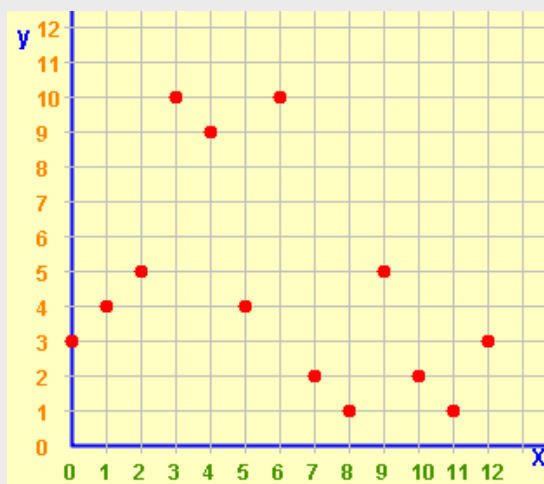
4. Sabent que el preu d'un trajecte en taxi es calcula mitjançant l'equació **preu (en €) = 0,55·distància (en km) + 1,5**, construeix una taula per recorreguts de: 1, 2, 3, 5, 8, 12 y 15 km

Distància (km)	1	2	3	5	8	10	12
Preu (€)	2,05	2,60	3,15	4,25	5,90	7,00	8,10

5. Construeix el gràfic cartesià que correspon a la següent taula de valors:



6. Construeix la taula de dades que correspon al gràfic cartesià de punts següent:



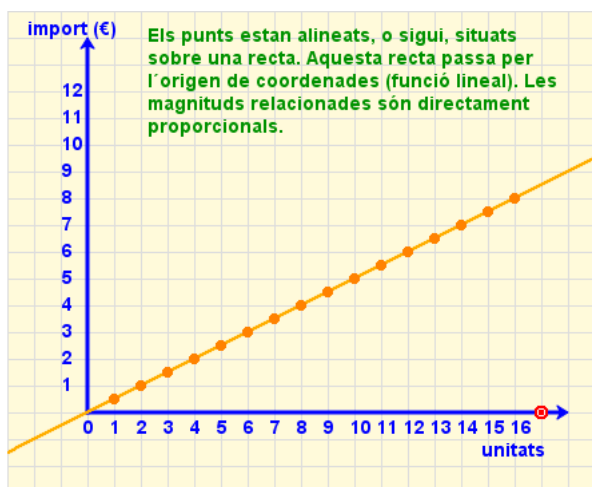
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	3	4	5	10	9	10	2	1	5	2	1	3

4. Més exemples de gràfics

De proporcionalitat directa

Un pastisset costa 0,5€, quant costaran 2 pastissets? I quatre pastissets?.

És fàcil veure que l'import a pagar serà $y=0,5x$, on y seria l'import en euros y x correspondria al nombre de pastissets comprats. Les magnituds **import** i **quantitat de pastissets** són **directament proporcionals** amb constant de proporcionalitat **0,5**.



x	y
0	0
1	0,5
2	1
3	1,5
5	2,5
10	5

Observa: els punts estan alineats sobre una recta que passa per l'origen de coordenades. És un exemple de **funció lineal**.

Ampliem una mica la informació donada fins ara. És fàcil comprovar que **a cada quantitat de pastissets li correspon un únic import**, és a dir entre ambdues magnituds (quantitat de pastissets i import) s'estableix una **correspondència** en la qual **a cada valor de la primera magnitud se li associa un i només un valor de la segona**.

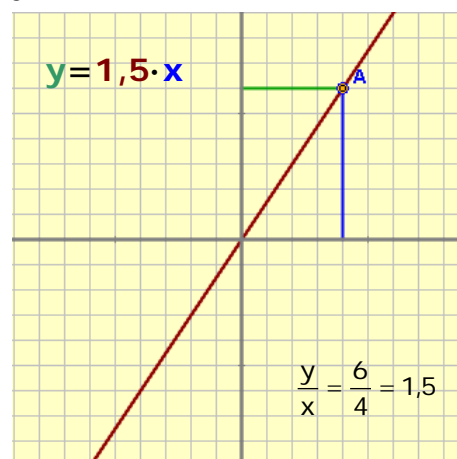
Quan tenim un tipus així de correspondència diem que les dues magnituds estan relacionades mitjançant una **funció**, o que tenim definida una funció. Una funció pot venir descrita per: una expressió verbal, una taula, un gràfic o una equació.

L'exemple dels pastissets ens determina un tipus especial de funció anomenada **funció lineal** (tal com ja hem dit al principi d'aquest apartat) i totes es corresponen amb equacions del tipus

$$y = m \cdot x$$

on **m** correspon a la **constant de proporcionalitat**

En el gràfic de sota es mostra la representació gràfica d'una funció lineal d'equació $y=1,5 \cdot x$ i s'observa que las coordenades del punto **A** representat verifiquen la relació $y/x=1,5$



Observa: el quocient entre la coordenada **Y** i la coordenada **X** d'un punt de la gràfica d'una **funció lineal** ens determina **m**, que correspon a la **constant de proporcionalitat**



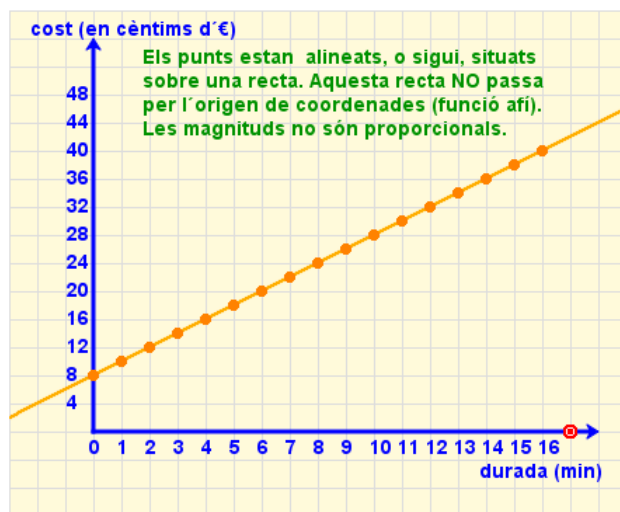
x min	y cent
0	8
1	11
2	14
3	17
5	23
10	38

Observa: els punts estan alineats sobre una recta que **NO** passa per l'origen de coordenades. És un exemple de **funció afí**.

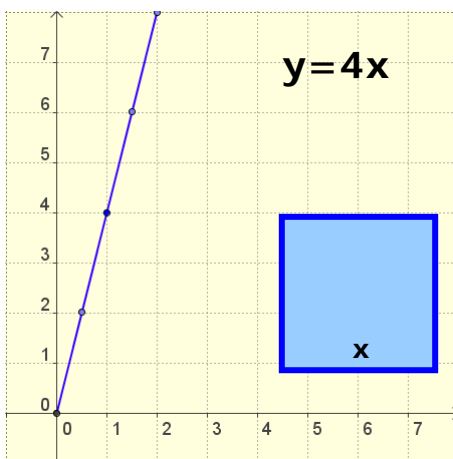
Altres exemples

1) Una companyia de telefonia fixa cobra 8 cèntims d'euro per l'establiment de trucada i 3 cèntims per minut que es parla. Podem veure que l'equació que ens determinarà el cost d'una trucada serà $y=3x+8$ on **y** serà el **cost** de la trucada en **cèntims** d'euro i **x** serà la **durada** de la trucada en **minuts**.

En la gràfica es mostra la representació gràfica de l'equació.

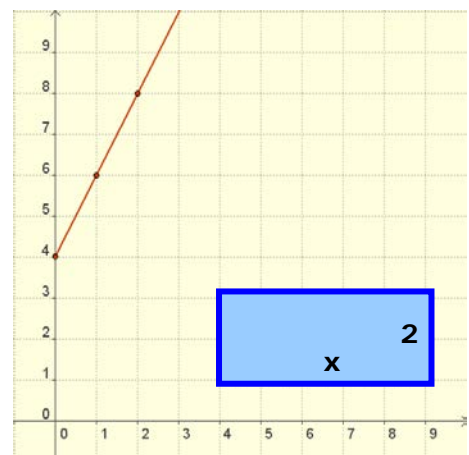


En aquest cas es pot comprovar fàcilment que les dues magnituds **no** són directament proporcionals.



2) El perímetre d'un quadrat és **funció** del seu costat, a un quadrat de costat 0,5 dm li correspon un perímetre de $4 \cdot 0,5 = 2$ dm, un quadrat de 2 dm de costat té un perímetre de $2 \cdot 4 = 8$ dm.

En general podem escriure que el perímetre d'un quadrat de costat x és $y=4x$. Si es representa aquesta funció s'obté el gràfic de l'esquerra. És una funció lineal.



3) El perímetre de un rectangle d'alçada 2 dm, també és funció de la base. Si s'anomena x a la mesura de la base, el perímetre és $y=2x+4$. Representant aquesta funció s'obté la gràfica de la dreta, una recta que no passa per l'origen de coordenades, és una funció afí.

EXERCICIS resolts

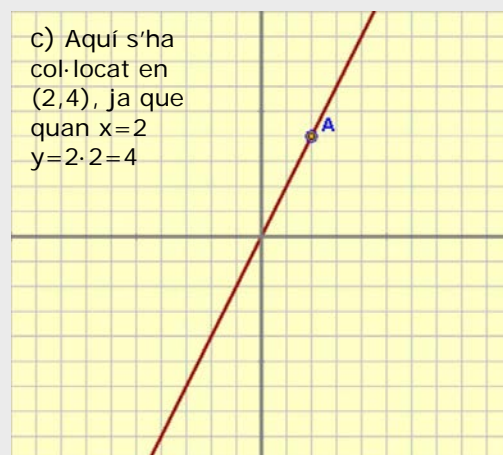
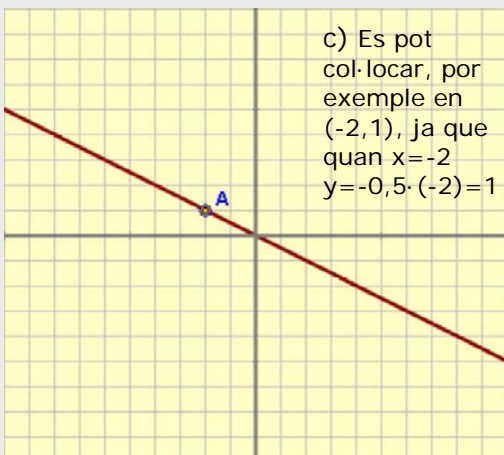
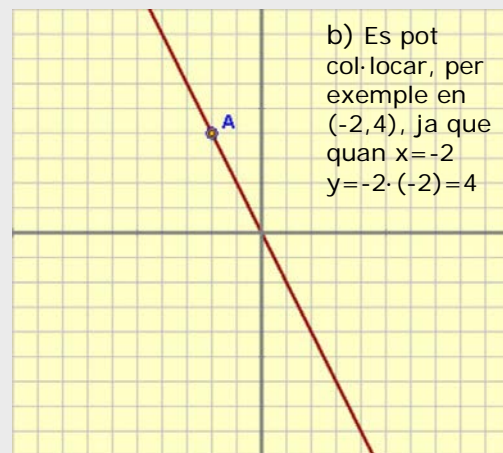
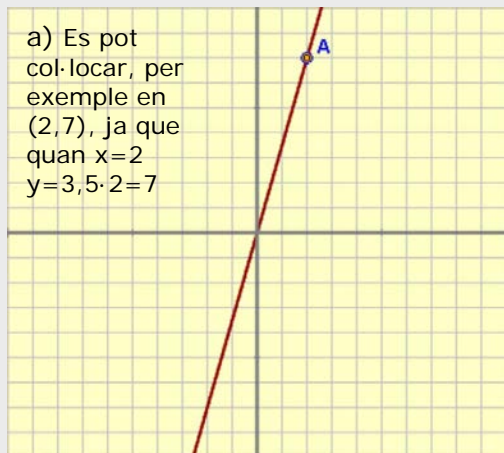
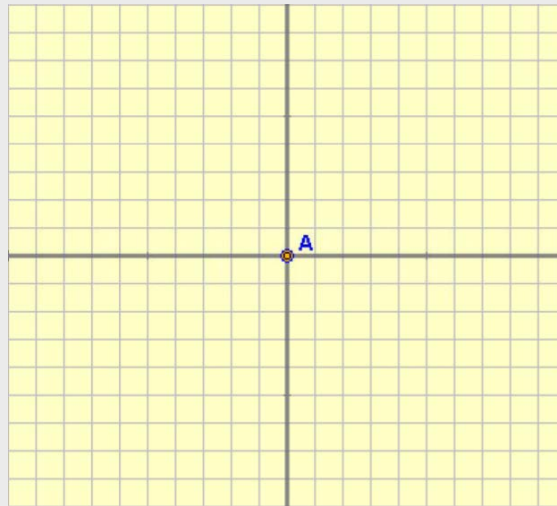
7. Situa el punt A de manera que la recta que passa per aquest punt i l'origen de coordenades representa la funció lineal donada per la fórmula

a) $y=3,5 \cdot x$

b) $y= -2 \cdot x$

c) $y = -0,5 \cdot x$

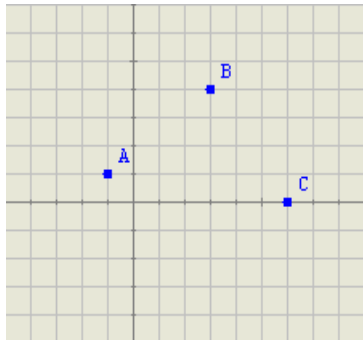
d) $y=2 \cdot x$



Per practicar



1. En un full de paper quadriculat s'havien marcat els quatre vèrtexs d'un quadrat, però un d'ells s'ha esborrat. Amb l'ajuda de les coordenades indica on s'ha de marcar el vèrtex que falta.



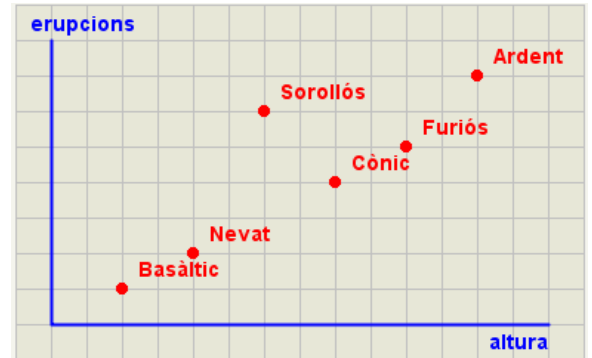
2. Un grup d'amics se n'ha anat d'excursió. Un d'ells ha realitzat un petit croquis amb l'ajuda d'un sistema d'eixos de coordenades. Quines són les coordenades de l'ermita?



3. Dos pobles propers comparteixen la mateixa estació de ferrocarril. Quina és la situació geogràfica d'aquesta estació respecte a ambdós pobles si un costat de cada quadrícula representa 500 m en la realitat.



4. Escriu, a partir de les dades del gràfic, el nom del volcà més alt i el nom del volcà que ha patit més erupcions.



5. Una empresa presenta el gràfic que es veu a continuació, amb els ingressos obtinguts durant els dotze mesos de l'últim any. Quin és el primer mes en què més va guanyar? I l'últim mes en què va guanyar menys? Quins ingressos va obtenir al maig?

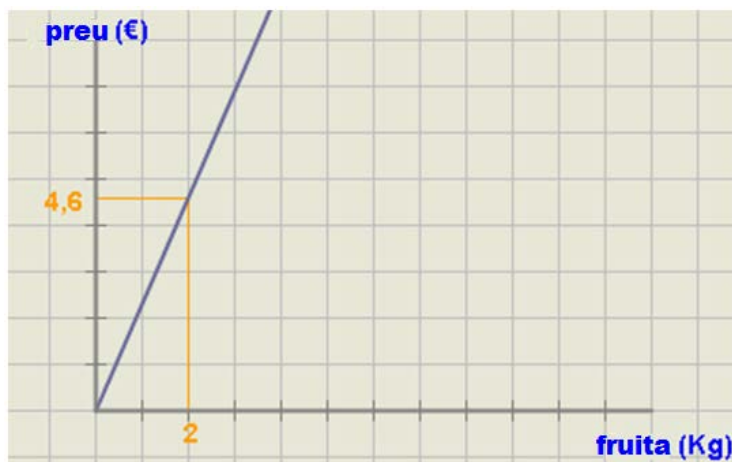


6. La Marta ha sortit a de casa seva per anar a passejar. Quant de temps ha durat aquest passeig? A quina distància es troba el punt més allunyat de la seva casa?



Taules i gràfics

7. Amb les dades del gràfic calcula a quant s'ha venut el quilo de fruita.



8. Un tren de llarg recorregut uneix las ciutats de Màlaga i Barcelona i ha iniciat el viatge a les 8 del matí. La següent gràfica mostra el recorregut realitzat en funció del temps i la distància recorreguda. A quina hora arriba a Barcelona? Quina va ser la velocitat mitjana del tren?



9. Un dipòsit s'emplena mitjançant una bomba que aboca 74 litres d'aigua per minut. Quina de les tres rectes representa l'aigua del dipòsit en funció del temps?



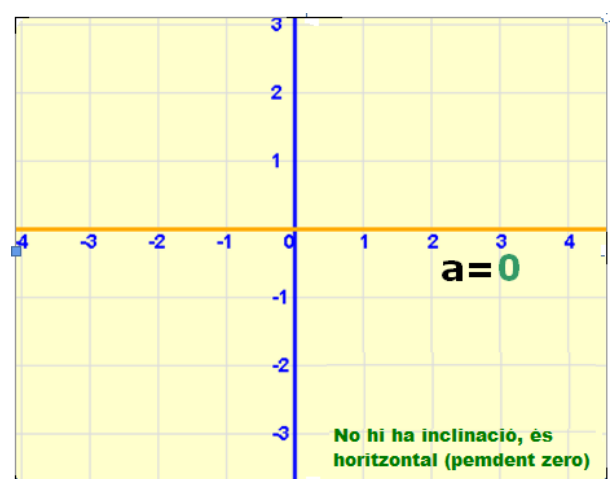
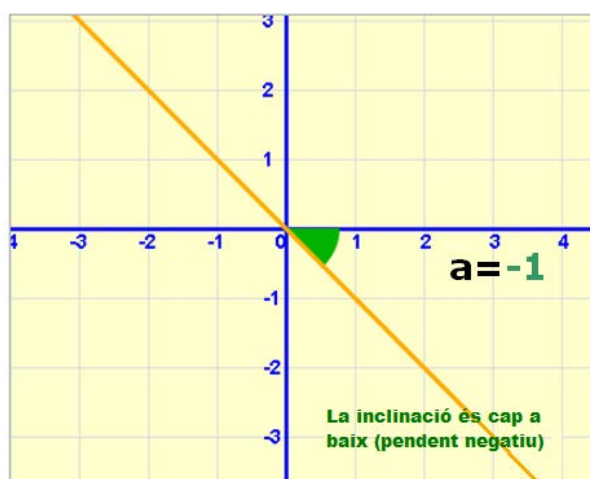
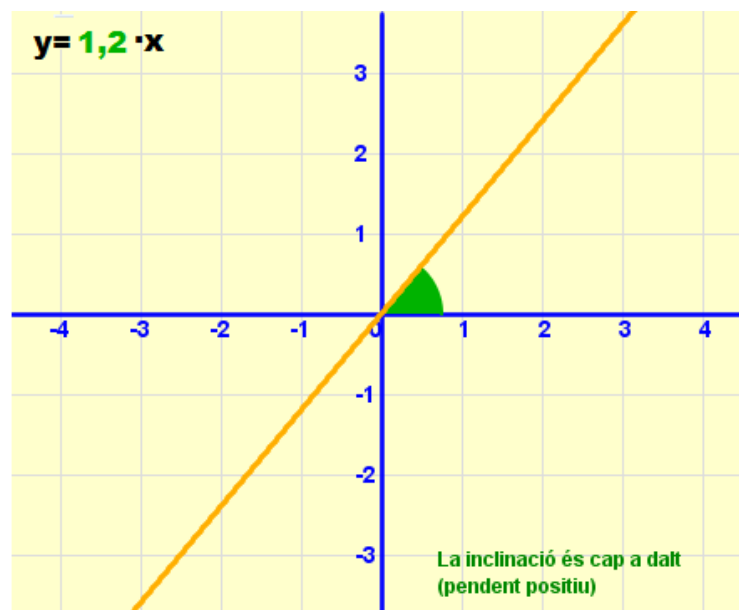
Per saber-ne més



El pendent de una recta

Ja has vist que l'equació d'una **funció lineal** és de la forma $y = a \cdot x$. El valor de **a**, que és la **constant de proporcionalitat**, també rep el nom de **pendent** ja que ens indica l'angle de la recta respecte a la part positiva de l'eix de les **X**.

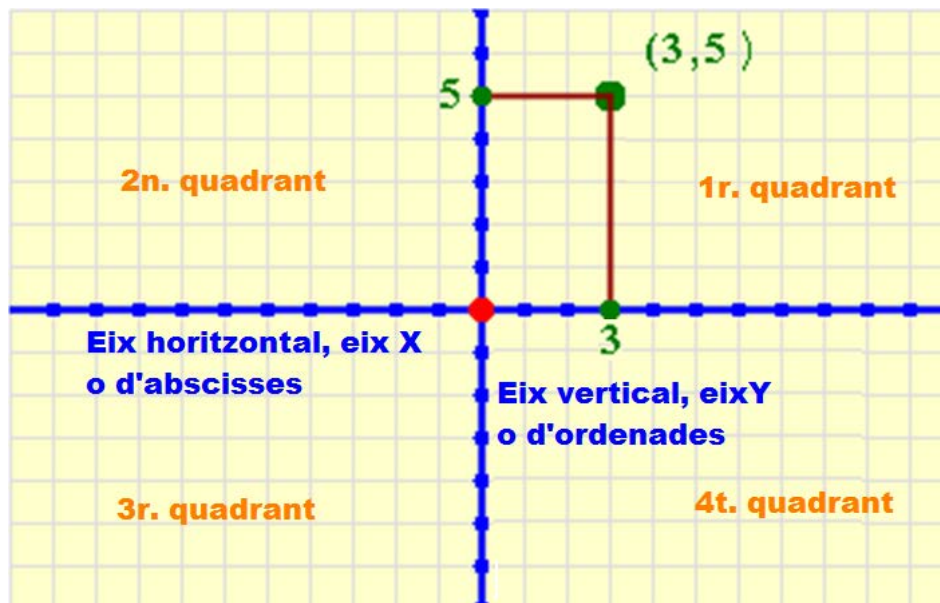
En les imatges pots veure rectes amb el valor de **a** igual a 1,2; 0 y -1. Observa les diferents inclinacions de les rectes que es veuen.



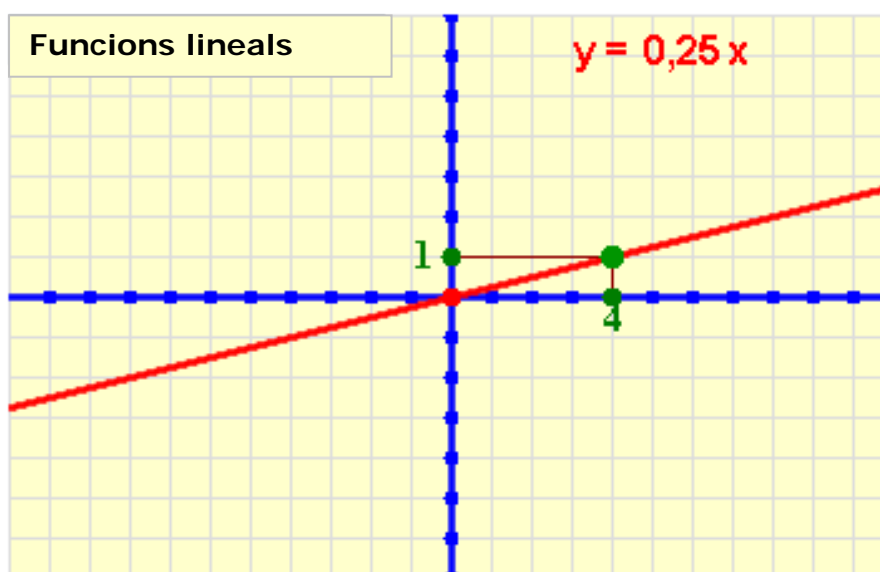


Recorda el més important

- Un sistema de representació **cartesià** està format per dues rectes o eixos perpendiculars, el d'**abscisses** (eix **x**) i el d'**ordenades** (eix **y**). El punt en què es tallen els eixos és l'**origen** de coordenades.
- Cada **punt** en el pla es representa mitjançant un parell ordenat de **coordenades cartesianes** (**x,y**).



- La representació gràfica de la relació existent entre dues magnituds directament proporcionals és o bé una recta o bé un conjunt de punts alineats.
- Totes les gràfiques anteriors **sempre passen per l'origen** de coordenades, és a dir, pel punt (0,0). Corresponen a las anomenades **funcions lineals**.



Autoavaluació



4) **extensió**

6) **altitud**

x	y
-4	-16
-2	-8
1	4
2	8
4	16
¿?	20
-3	¿?

7) **altitud**

x	y
-3	-15,75
-2	-10,5
-1	-5,25
0	0
1	5,25
2	10,5
3	15,75

8) **altitud**

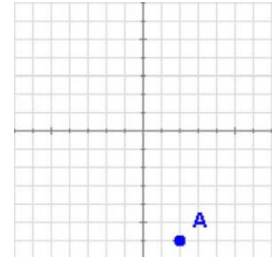
x	y
-9	3
-6	-1
-3	2
0	-7
3	0
6	-6
9	4

9) **altitud**

10)

1. Com s'anomena l'eix vertical d'un sistema d'eixos de coordenades?

2. Quines coordenades corresponen al punt A representat en la gràfica?



3. Representa el punt de coordenades B(3,-5) en el sistema de eixos de coordenades de l'exercici anterior.

4. Indica el llac de major extensió i el llac que es troba a una altura més gran.

5. Completa la taula sabent que la quantitat de dissolvent que hem de fer servir per quilo de pintura ve determinada per l'equació: **dissolvent = 0,55 · kg de pintura + 0,2**.

Kg. pintura	1	2	4	
dissolvent	0,75			5,7

6. Completa les dades de la taula que correspon a la gràfica que es mostra.

7. Indica el color de la gràfica que correspon a la taula donada.

8. Un dels punts representats és incorrecte. Indica les seves coordenades.

9. Calcula la constant de proporcionalitat determinada per la funció lineal representada.

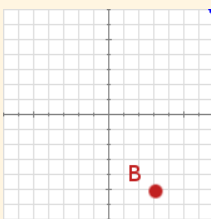
10. Quin tipus de funció és la representada en el gràfic?

Solucions dels exercicis per practicar

1. $D(2, -3)$
2. $(1, -6)$
3. 2.500 metres al nord de A i a 3.500 metres a l'est de B.
4. El volcà més alt és el Nevado i el volcà amb més erupcions és el Furioso.
5. abril (70 milions),
novembre (10 milions),
30 milions.
6. El passeig ha durat 50 minuts i la distància al punt més allunyat és de 700 metres
7. 2,3 € el quilo
8. El tren arriba a la una de la tarda a Barcelona i la velocitat mitjana del tren és de 240 km/h
9. La recta taronja.

Solucions AUTOAVALUACIÓ

1. Eix d'ordenades
2. $A(2, -6)$
- 3.



4. el llac més extens: Sulfurós, el llac més elevat: Mort
5. $x=2$ $y=1,3$; $x=4$ $y=2,4$; $x=5,7$ $y=10$
6. $x=5$, $y=-12$
7. la recta taronja
8. $D(0, -5)$ que hauria de ser $(0, -7)$
9. $m=3$
10. funció afí