Una aplicación de DescartesJS:

Embaldosados nxn con L-Triominós

Ángel Cabezudo Bueno

Leyendo el artículo titulado "Embaldosando con L-triominós (Un ejemplo de demostración por inducción)" del profesor *Raúl Ibáñez* publicado en la revista digital Cuaderno de Cultura Científica (Cátedra de Cultura Científica de la UPV/EHU), me surgió la idea de programar una escena con *DescartesJS* que permitiera a la vez que repasar algunos apartados interesantes sobre los mencionados embaldosados, manipular los L-Triomínos con tableros virtuales, entendiendo que esta herramienta permitiría al lector interesado abordar los retos que se proponen en el artículo.

Veamos antes que nada el entorno de trabajo y los elementos que van a intervenir.

Un triominó es una figura geométrica plana que se obtiene por unión de tres cuadrados iguales por alguno de sus lados. El triominó es un caso de poliminó, que se forma uniendo n cuadrados, dos piezas cuadradas comparten un lado completamente: dominó (2 piezas), triominó (3 piezas), tatraminó (4 piezas), …, n-minó (n piezas).

Existen dos casos de triominós:

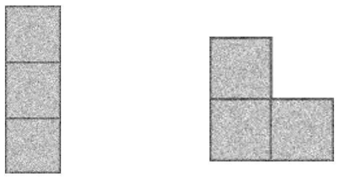


Figura 1

El I-triominó (3 piezas cuadradas en hilera formando una I)

El L-triominó (3 piezas cuadradas en forma de L) también llamado V-triominó pues la forma V se asemeja a la forma de la L.

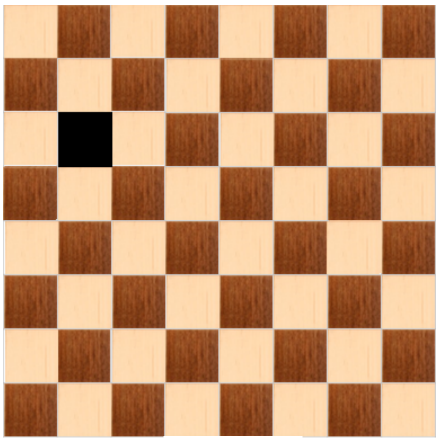


Figura 2

El tablero mxn es una superficie rectangular donde pueden acomodarse mxn piezas cuadradas iguales distribuidas en m filas y n columnas. En particular trabajaremos con tableros cuadrados nxn con la condición de que nxn-1 sea múltiplo de tres para que pueda ser embaldosado por L-triominós.

La *Figura 2* representa un tablero 8x8, que cuenta con 64 casillas, tal que puede ser embaldosado por 21 L-triominós, 64-1=63= 21x3 si eliminamos una casilla.

Tal tablero en el que eliminamos una casilla (coloreándola en negro o blanco, según las versiones) para que pueda ser embaldosado por L-triominós se dice que es *deficiente.*

Se plantean una serie de cuestiones que vamos a desarrollar y poder poner en práctica interaccionando con la escena de Descartes. La *Figura 3* muestra la escena para el tablero deficiente 8x8.

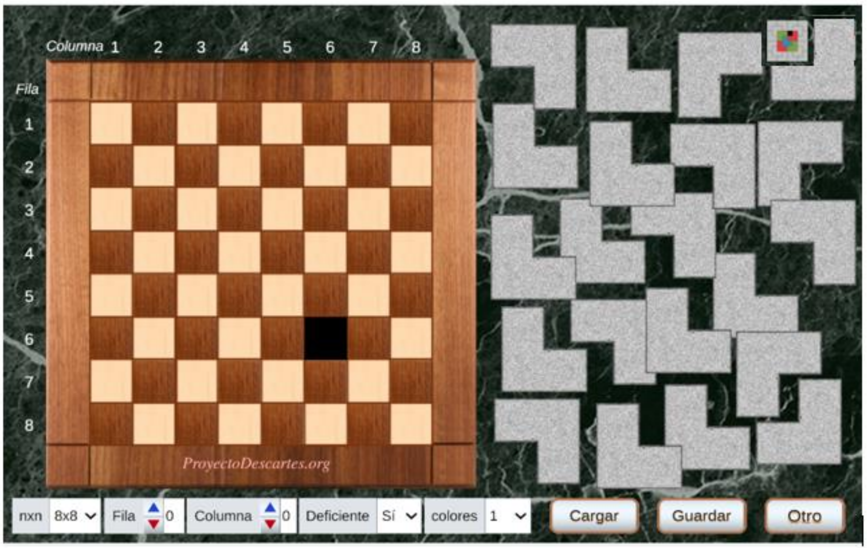
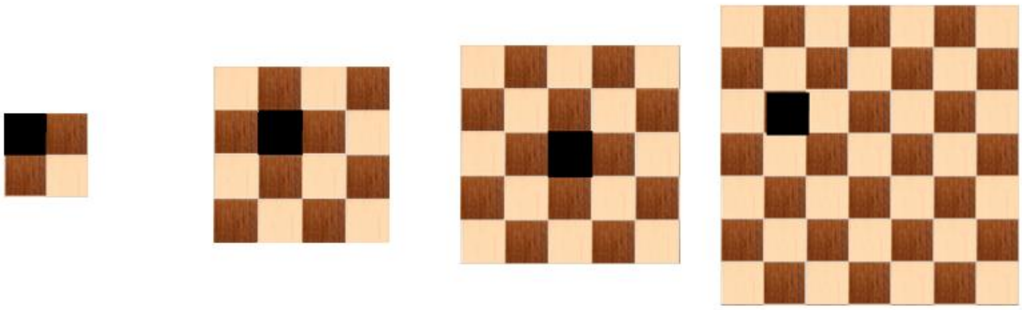


Figura 3

Tableros deficientes posibles

La escena permite seleccionar 4 tableros: 4x4, 5x5, 7x7 y 8x8 de los que son posibles, que verifican nxn -1 = 3k, k= 1, 5, 8, 16 y 21



Tablero 2x2 Tablero 4x4 Tablero 5x5 Tablero 7x7

Figura 4

Esto está justificado por razón de que los tableros nxn posibles que se pueden embaldosar con L-triominós son los correspondientes a n=2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14… lo cual es fácil de probar.

Seleccionado un tablero nxn y la opción *Sí* del control denominado *Deficiente* al inicio del programa y cada vez que se pulsa el botón denominado *Otro,* una casilla al azar se marca con color negro indicando que no debe ser ocupada por el L-triominó.

También es posible seleccionar una casilla determinada para hacer *deficiente* el tablero a través de los controles *Fila* y *Columna* lo que permite probar embaldosados con tableros *deficientes* elegidos a voluntad.

Colores de los L-triominós

Los L-triominós para el tablero 8x8 pueden ser todos de un mismo color (gris) como se muestra en la *Figura 3* o de un color diferente (azul, rojo o verde).

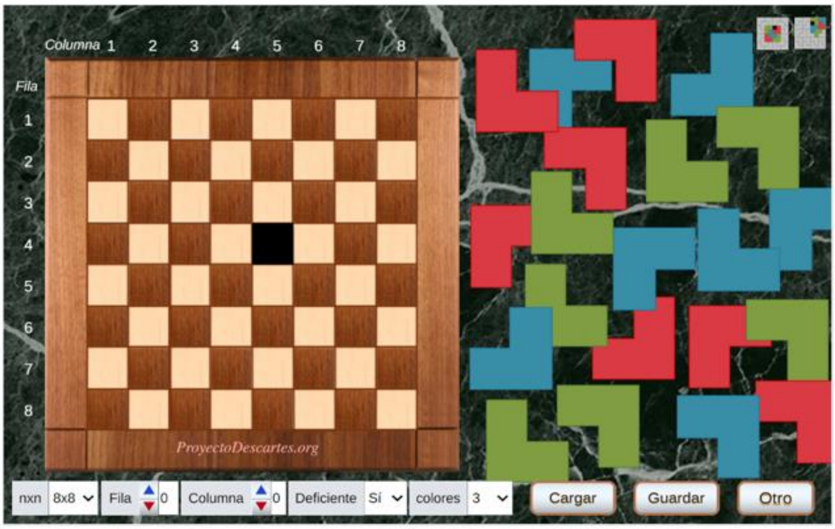


Figura 5

Se colorean siete en azul, siete en rojo y siete en verde para poder simular el curioso juego comercial llamado *Vee-21*, desarrollado por la empresa norteamericana de juegos de ingenio *Kandon Enterprises*.

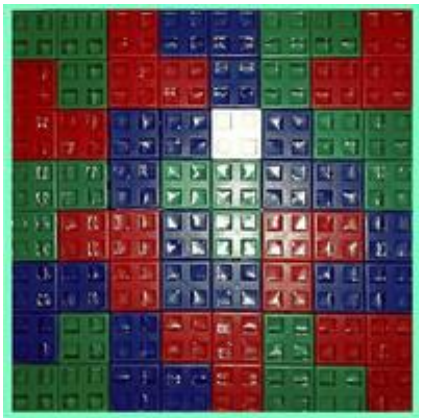


Figura 6

Las reglas del Vee-21, son una combinación del problema del embaldosado de un tablero deficiente con L-triominós y el teorema de los cuatro colores[1]. En primer lugar, se coloca la pieza cuadrada unidad de color negro o blanco, dependiendo de la versión, en uno de los cuadrados del tablero 8 x 8 del juego, y entonces el reto consiste en colocar las 21 fichas con forma de L-triominó de manera que cubran completamente el tablero *deficiente* que ha quedado (es decir, teselar el tablero deficiente con los L-triominós), pero con una condición extra, que las

[1] "*bastan cuatro colores para colorear un mapa geopolítico plano, sin que dos países con frontera común tengan el mismo color*" (para más información consultar el artículo de Marta Macho [¿Cuatro colores son suficientes?]).

fichas del mismo color no se puedan tocar entre sí, salvo quizás por los vértices, como en el teorema de los cuatro colores.

Primera práctica con la escena de Descartes: Acomodación manual de un L-triominó en el tablero

Los L-Triominós aparecen al azar en el lado derecho de la escena, estos pueden ser girados 0º, 90º, 180º y 270º de forma recurrente y arrastrarlos para posicionarlos en el tablero utilizando para ello el puntero del ordenador. Cada clic izquierdo sobre L-Triominó lo hace girar en sentido positivo un cuarto de vuelta y manteniendo el clic derecho se puede arrastrar.

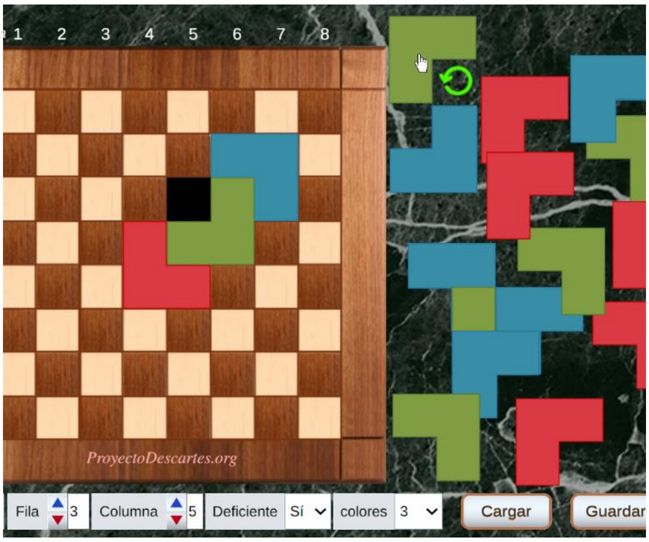


Figura 7

Seleccionar el L-Triominó en el lado derecho de la escena haciendo clic izquierdo dentro del control circular, no visible, con centro en el vértice común que se indica en la figura. Aparece una señal de giro sobre la que se puede pulsar tantas veces como sean necesarias para que se acomode a las tres casillas del tablero que se quieran ocupar. La señal de giro desaparece haciendo clic izquierdo o derecho fuera del control circular.

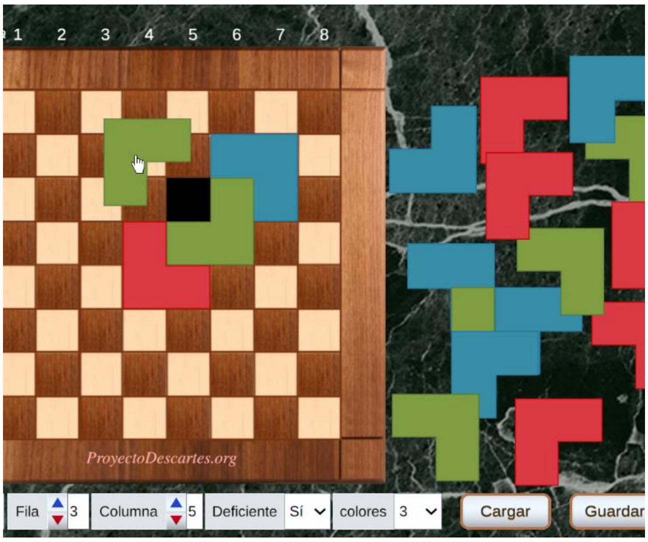


Figura 8

Una vez girado convenientemente el L-triominó puede ser llevado a al tablero manteniendo un clic izquierdo presionado sobre el control central y arrastrando. Al dejar de presionar el L-triominó queda posicionado. Por tanto, interesa dejar de presionar cuando se halla encajado el vértice común del L-triominó en el vértice común de las tres casillas del tablero. En esta aproximación se apreciará un efecto de atracción o de imán que facilita el ajuste.

Guardar y Recuperar (Cargar) los trabajos en la escena de Descartes

La escena permite guardar el trabajo hecho ya sea completo o incompleto, caso de que se desee terminar una sesión de trabajo para no perder lo hecho hasta ese momento.

Para esto se dispone de dos controles de botón rotulados *Guardar* y *Cargar*.

Guardar, permite guardar en modo local, en un fichero de texto de tipo *.txt,* los parámetros de la escena necesarios para recuperar el trabajo en otro momento. El nombre que se propone por defecto es *guardado.txt*. El usuario puede decidir la carpeta local y el nombre del archivo que le resulte más adecuado. Si se ha instalado la aplicación en local se podrá utilizar la carpeta denominada *memoria* para los ficheros de texto.

Al pulsar el botón *Cargar* se nos permite acceder a la carpeta local donde guardamos el trabajo en el archivo *.txt*. Al hacer clic sobre el nombre del archivo se recupera la escena tal como estaba cuando se guardó.

Segunda práctica con la escena de Descartes: Verificar que el tablero deficiente 8x8 puede ser recubierto siguiendo las reglas del juego Vee-21

Empezar por realizar con la escena de Descartes el embaldosado que se muestra en la *Figura 6* con la casilla negra en la fila 3 y columna 5.

Practicar con la escena de Descartes. Antes de dar alguna pautas y principios básicos para ayudar a recubrir un tablero deficiente:

A) Realizar el recubrimiento de la *Figura 6.* Observar que las piezas del mismo color no han podido se separadas completamente. A lo sumo se tocan en un vértice [2]

B) Realizar el recubrimiento de la *Figura 6* pero cambiando los colores de las piezas.

Revisión de los embaldosados posibles en tableros nxn deficientes

Es importante para ser eficaz en el embaldosado de un tablero deficiente de orden superior, al menos de 8x8, reconocer la posibilidad de recubrir partes más sencillas en un tablero. Esto es una buena práctica para abordar recubrimientos parciales más sencillos como los 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 7x7

Tablero 2x2

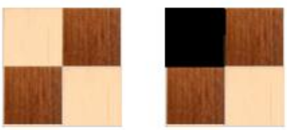
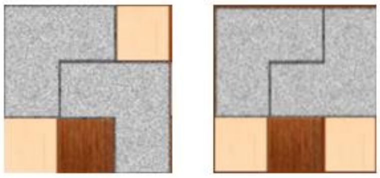


Figura 9

En un tablero 2x2 solo cabe un L-Triominó en cualquiera de los 4 giros posibles, por tanto, se puede acomodar a un tablero deficiente 2x2 dependiendo de la posición de la casilla negra.

[2] En 2004 el profesor Andris Cibulis y su estudiante, Marina Klinova, de la University of Latvia, probaron que la separación total de los tres colores en el tablero deficiente 8x8 es imposible.

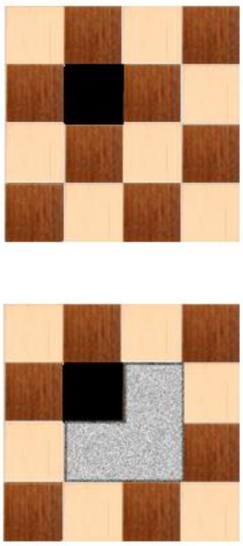
Tablero 3x3



No puede ser embaldosado por 3 L-Triominós, en cualquier caso, siempre van a poderse acomodar 2 L-triominós y van a quedar tres casillas donde no encaja un tercer L-Triominó. Observar que no puede hacerse *deficiente* pues 3x3-1 = 8 ≠ 3k.

Figura 10

Tablero 4x4



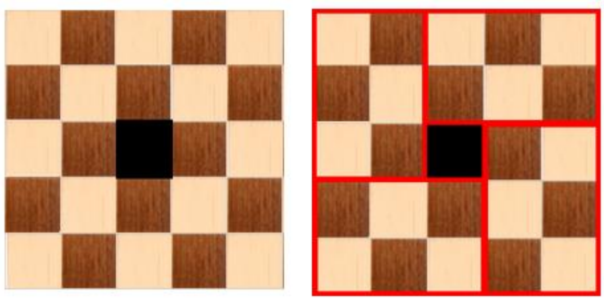
Un tablero deficiente 4x4 puede ser embaldosado siempre con 5 L-triominós. Podemos ver el tablero descompuesto en 4 subtableros 2x2. La casilla negra ocupará uno de estos subtableros y puede ser cubierto por un L-triominó. Siempre es posible incorporar un segundo L-triominó que cubra una casilla de los otros tres subtableros 2x2 restantes, como vemos en la figura, de tal suerte que en cada uno de éstos pueda acomodarse sendos L-triominós.

Hemos seguido la técnica, como dice el dicho popular, de “divide y vencerás” que volveremos a utilizar más adelante.

Practicar con la escena de Descartes para embaldosar el tablero 4x4 deficiente con la casilla negra en (F, C) = (1, 1). Probar otros casos para afianzar la técnica indicada.

Figura 11

Tablero 5x5



En un tablero deficiente 5x5, en ciertos casos, es posible acomodar 8 L-Triominós dado que se cumple que 5x5-1=24=3x8. Ahora bien, se puede probar que no siempre se puede embaldosar. El caso de la figura es un caso posible.

Figura 12

Observar que la posición de la casilla negra permite descomponer el tablero en 4 regiones rectangulares 2x3 y en cada una pueden acoplarse 2 L-triominós.

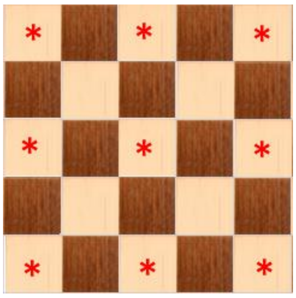


Figura 13

Los casos posibles son aquellos donde la casilla negra se sitúa en la celda señalada con un asterisco (*) en la *Figura 13.*

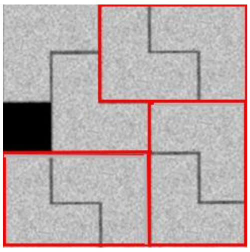


Figura 14

La *Figura 14* muestra uno de estos casos. En realidad, es suficiente probar con la casilla negra en (1, 1), (3, 1) y (3, 3) ya que por simetría quedan probados los demás casos.

Probar que es imposible embaldosar el tablero 5x5 deficiente para los casos en que la casilla negra es alguna de las que no están marcadas con el asterisco en la *Figura 13*. En realidad, solo es suficiente verificar con 4 casillas, p. ej. las (1, 4), (2, 3) y (2, 4) ya que por simetría quedan probadas las restantes.

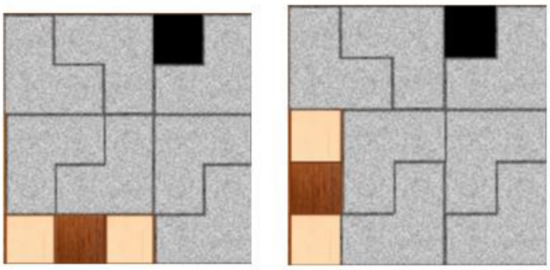


Figura 15

Veamos el caso (1, 4). Las opciones que se van teniendo sucesivamente para colocar un L-triominó conduce a situaciones como las de la figura o las correspondientes simétricas, imposible de embaldosar.

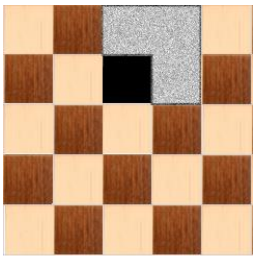


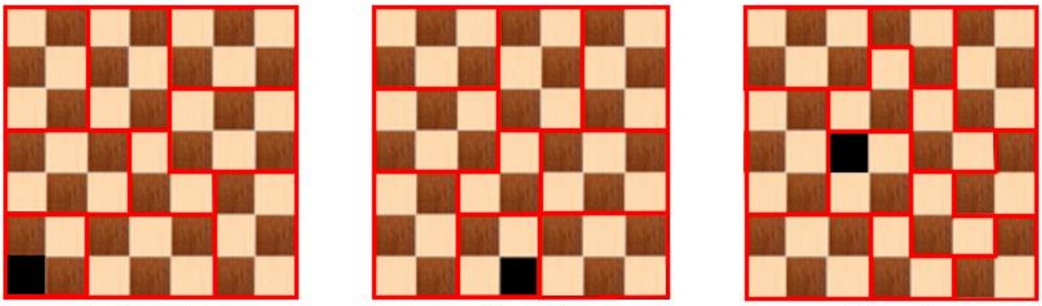
Figura 16

Probar la imposibilidad con el caso en que la casilla negra esté en (2,3) o en su simétrica (3,4) que se verifica de forma inmediata.

Observar que la posición del L-triominó colocado en la *Figura 16* es el único posible para cubrir la casilla en (1,3), salvo el caso simétrico ¿Se puede seguir embaldosando?

Tablero 7x7

En cualquier caso, siempre se va a poder embaldosar un tablero 7x7 deficiente con L-triominós. La demostración fue publicada por Martin Gardner en 2009 y reproduce la que Solomon W. Golomb le comunicó personalmente. Se basa en el estudio de tres casos posibles, con los correspondientes simétricos, donde puede ser situado un cuadrado 2x2 en el que iría la casilla negra, ver *Figura 17*



Caso 1 *Caso 2* *Caso 3*

Figura 17

Una posibilidad consiste en situar un L-triominó en el cuadro 2x2 (borde rojo) donde está la casilla negra.

a. En los Casos 1 y 2 se puede descomponer el tablero en 7 rectángulos 2x3, cada uno con 2 L-triominós. Las seis casillas restantes se distribuyen en el cuadrado 2x2 donde va la casilla negra y en un L-triominó solitario.
b. En el Caso 3 el tablero se puede descomponer en 4 rectángulos 2x3, donde se pueden acomodar 8 L-triominós, el L-triominó en cuadrado 2x2 donde va la casilla negra y otros 7 L-triominós solitarios.
c. Probar los tres casos de los dos apartados anteriores, los de la figura o sus simétricos, con la escena de Descartes y guardar estos trabajos.

M. Gardner propuso buscar un embaldosado de entre los derivados del Caso 3 que maximice el número de rectángulos 2x3.

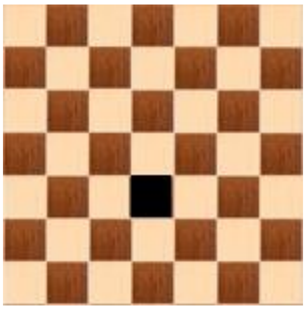


Figura 18

Problema: Tomando el reto propuesto por M. Gardner, encontrar un embaldosado en el tablero 7x7 deficiente de la *Figura 18* descomponiéndolo en 6 rectángulos 2x3 y 4 L-triominós.

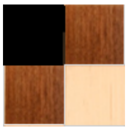
Observar que es un derivado del Caso 3 y los 4 L-triominós pueden ser solitarios.

Guardar el trabajo en la escena de Descartes.

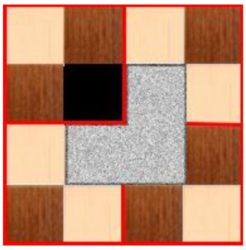
Solución: Solo en el caso que haya resuelto el problema o si se le resiste y se da por vencido puede consultar la solución en la imagen al final de este artículo (apartado Soluciones).

Tablero 8x8

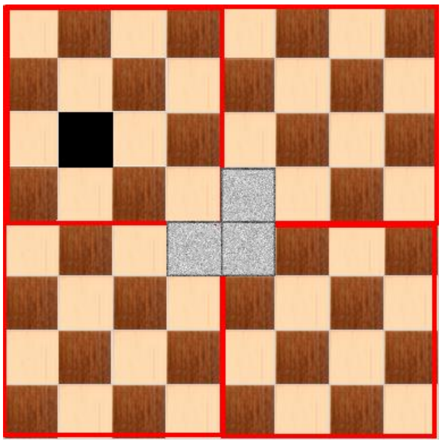
Veamos en primer lugar que el tablero 8x8 *deficiente* se puede siempre embaldosar con L-triominós.



Sabemos que los tableros 2x2 y 4x4 deficientes se pueden embaldosar con L-triominós. En el 2x2 cualquiera que sea la posición de la casilla negra siempre se va a poder acomodar un L-triominós en las 3 casillas restantes y



en al caso del 4x4 podemos descomponer el tablero en 4 de 2x2 de tal manera que la casilla negra pertenece a uno de estos 4 tableros y siempre es posible incorporar un segundo L-triominó que cubra una casilla de los otros tres subtableros 2x2 restantes, como vemos en la figura, de tal suerte que en cada uno de éstos pueda acomodarse sendos L-triominós.



Siguiendo con esta técnica del "divide y vencerás" vamos a descomponer el tablero 8x8 deficiente en cuatro subtableros 4x4. En uno de estos subtableros se encontrará la casilla negra, pues bien, situemos un L-triominó en el centro del tablero 8x8 de tal manera que cada cuadrado de este ocupe una casilla de los restantes 3 subtableros 4x4. Cada subtablero 4x4 se puede embaldosar y en consecuencia el tablero 8x8.

Figura 19

Práctica: Embaldosar un tablero 8x8 deficiente con la escena de Descartes para los siguientes ejercicios.

Tener en cuenta que se usan L-triominós de 1 solo color.

Ejercicio 1.- Situar la casilla negra en (F, C) = (3, 2), como en la *Figura 19*

Ejercicio 2.- Situar la casilla negra en (F, C) = (4, 5)

Ejercicio 3.- Generar tableros deficientes al azar. Basta con que el valor de fila o columna sea 0 y pulsar el control de botón *Otro*.

Generalización para tableros $2^n x 2^n$: Inducción completa.

Vamos a generalizar este método de subdivisión para embaldosar tableros $2^n x 2^n$ *deficientes*. El método se apoya en la demostración por inducción debida a Golomb.

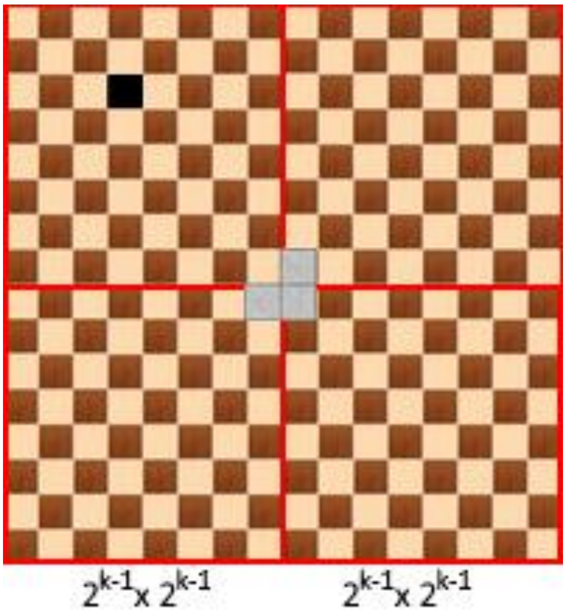


Figura 20

Hemos visto que los tableros deficientes para n = 1, 2, 3 se pueden embaldosar. Ahora supongamos que se puede embaldosar el tablero $2^{k-1}x2^{k-1}$ y demostremos que también se puede embaldosar el tablero para n = k.

Es fácil comprender que el tablero $2^kx2^k = 2{\cdot}2^{k-1}x2{\cdot}2^{k-1}$ tiene su lado de tamaño doble que el tablero $2^{k-1}x2^{k-1}$ y en consecuencia se puede descomponer en 4 subtableros $2^{k-1}x2^{k-1}$. En uno de ellos estará la casilla negra y será deficiente y por tanto de forma similar a lo que hicimos en la *Figura 19* del apartado anterior basta situar un L-triominó en el centro del tablero 2^kx2^k para "hacer como si fueran deficientes" los restantes 3 subtableros $2^{k-1}x2^{k-1}$: los cuatro subtableros se pueden embaldosar y en consecuencia también el tablero $2^kx2^{k.}$

Teorema de I.P. Chu, R. Johnsonbaugh, para tableros deficiente mxm

La buena noticia ahora es la que recoge el *teorema de I.P. Chu, R. Johnsonbaugh* que afirma que todo tablero *deficiente* mxm, m^2-1=3k, se puede recubrir con L-triominós, salvo para m=5.

No vamos a extendernos más en estos resultados que sobrepasan las posibilidades de la escena de Descartes que fue creada en un principio para simular el juego Vee-21, con L-triominós de tres colores. Se puede consultar el artículo del profesor *Raúl Ibáñez* con el que comenzamos este nuestro para conocer más detalles.

Soluciones del juego Vee-21

La empresa de juegos de ingenio *Kandon Enterprises* atendió la petición del profesor de matemáticas y ciencias de la computación, Norton Starr, para la realización de un juego basado en la demostración inductiva del embaldosado con L-triominós de tableros deficientes de 2^nx2^n cuadrados. A este juego constituido por un tablero de 8x8 se le incorporó un reto mayor consistente en 3 colores distintos y 7 L-triominós de cada color y conseguir que las piezas del mismo color no estén en contacto ni siquiera por los vértices, lo que constituye el problema de los tres colores. En 2004 el profesor Andris Cibulis de la Universidad de Letonia y su alumna Marina Klimova enviaron a *Kandon* la respuesta: el tercer color no se puede separar por completo. Quedará un solo contacto de vértice.

Tres de las respuestas que se enviaron son éstas, en la *Figura 21*. Ver otras en el enlace anterior y animamos a encontrar más soluciones con la escena de Descartes.

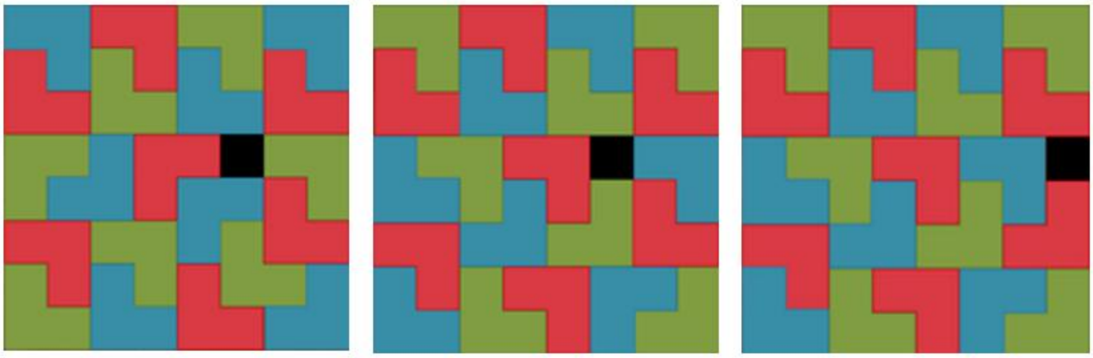


Figura 21

El problema de colorear con tres colores un embaldosado 8x8 realizado con L-triominós

Se trata de verificar si a posteriori se pueden colorear los L-triominós que embaldosan un tablero 8x8 *deficiente* con la condición de que las fichas del mismo color no se toquen entre sí, excepto por un vértice.

La respuesta es que no es posible en todos los casos. Veamos donde está la imposibilidad a partir de un embaldosado monocolor como el de la *Figura 22*

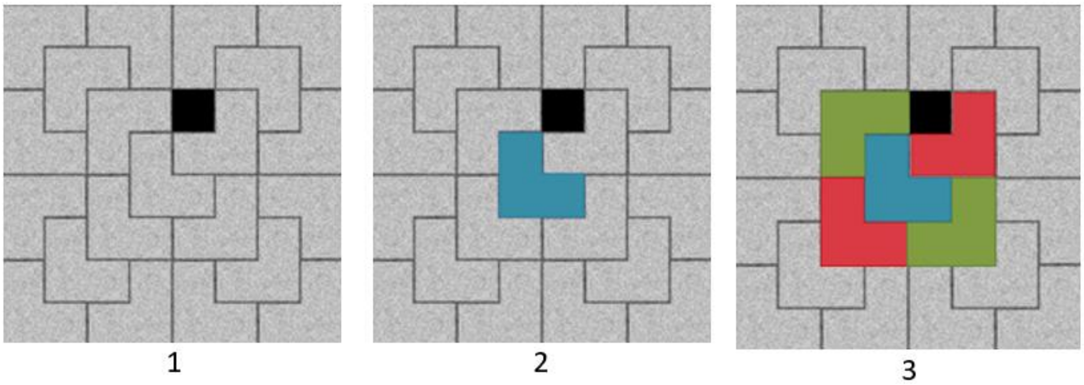
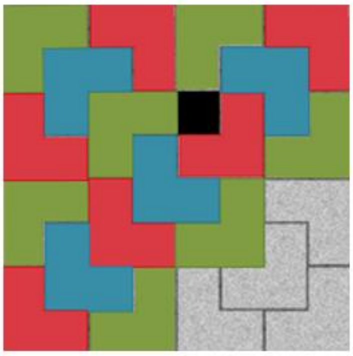
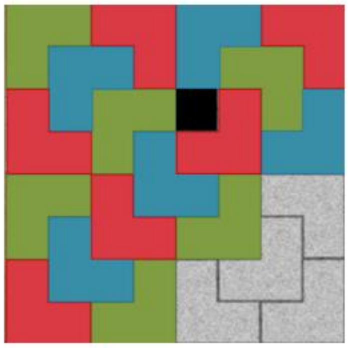


Figura 22

Empezamos por el tablero embaldosado arriba a la izquierda y coloreamos el L-triominó central en azul, p. ej. (se puede empezar coloreando con cualquiera de los 3 colores. Para evitar que las piezas del mismo color se toquen, una alternativa es la mostrada en la imagen 3 (otra posibilidad es alternar los colores rojo y verde).



4



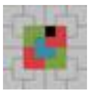
5

Figura 22-bis

La imagen 4 nos permite ver un posible resultado y hasta donde podemos llegar después de disponer los tres colores en los tres primeros cuadrantes de forma conveniente: para colorear el 4º y último cuadrante necesitamos disponer de 4 L-triominós y 3 colores para evitar que dos piezas del mismo color se toquen, excepto en un vértice y esto no es posible dado que ya se han utilizado las siete piezas de color verde y solo se dispone de 1 pieza de color verde y 3 de color azul.

La imagen 5 es otro resultado alternativo en el que para colorear el cuarto cuadrante disponemos de 2 piezas de color azul, 1 de color rojo y 1 de color verde, pero no es posible colocar las piezas de color azul sin que estas se toquen.

La escena de Descartes permite colorear el tablero deficiente 8x8 de la *Figura 22* ya embaldosado.



Para acceder a colorear el tablero embaldosado hay que pulsar el primer control de botón indicado en la flecha de la *Figura 23*.

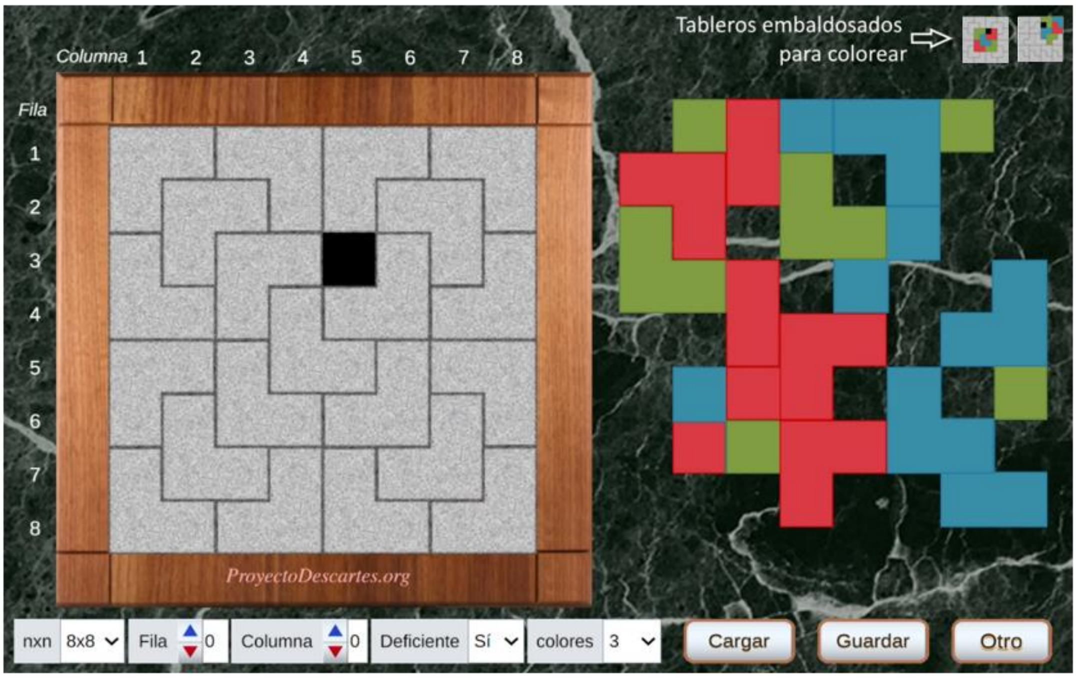


Figura 23

La escena presenta un segundo control de botón que permite probar a colorear otro tablero 8x8 *deficiente* embaldosado, *Figura 24*. Intentar colorear sin que dos L-triominós del mismo color se toquen.

¿Será posible esta vez?

Figura 24

Tablero deficiente embaldosado. Se trata de colorearlo cumpliendo con la regla de los tres colores del juego Vee-21. A lo sumo dos L-triominós del mismo color se pueden de tocan en un vértice.

Pulsar el segundo control de la *figura 23* para colorear tableros embaldosados y obtener la máscara que se ve en la *figura 24.*

Embaldosados de tableros deficientes nxn con n mayor que 8

Aunque el propósito de este artículo ha estado orientado al embaldosado de un tablero *deficiente* 8x8 en relación con juego *Vee-21* y el reto de hacerlo aplicando la regla de los tres colores, vamos a dar algunas pautas para embaldosar tableros *deficientes* de dimensión mayor a 8x8 (no descarto la posibilidad de elaborar otra escena para tableros de mayor dimensión o quizá lo haga algun lector interesado que sepa programar DescartesJS).

Ya hemos abordado la posibilidad con tableros de dimensión 2^nx2^n, pero ¿qué hacemos para otros casos que no se ajustan a este modelo?.

Algunas ideas al respecto para tableros de lado multiplos de 7 y para el tablero de lado 10.

1. **Tablero deficiente de lado múltipo de 7.**

   Ya hemos visto que el tablero deficiente 7x7 es siempre posible. En consecuencia el tablero (7x2^n)x (7x2^n), por ejemplo tableros de lado 14, 28 ó 56 se pueden embaldosar con L-trinominós utilizando el método de inducción que ya hemos dado a conocer.

2. **Tablero deficiente de lado 10, 20, 40, 80,…., (10x2^n)**

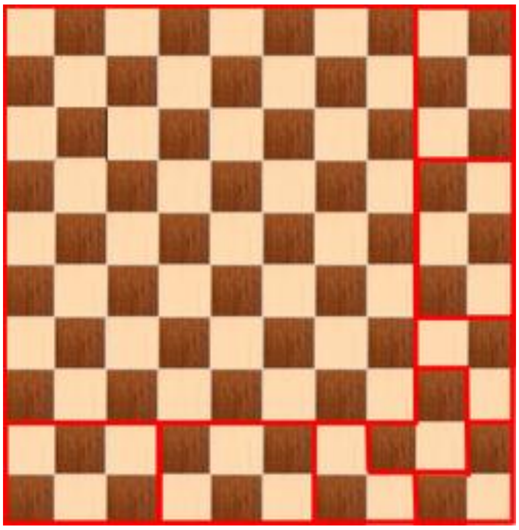


Figura 25

Dado que no es posible embaldosar siempre el tablero *deficiente* de lado 5, no podemos utilizar el método utilizado para embaldosar el tablero de lado doble 2x5, descomponiendo el tablero en cuatro cuadros de 5x5. Hay que seguir otro proceso. Por ejemplo observando, como hizo M. Gardner en 2009, que el tablero 10x10 se puede descomponer en un cuadrado 8x8, cuatro rectángulos 2x3 y 4 L-triominós sueltos, como se muestra en la *Figura 25.*

El método de inducción nos va a permitir a partir del tablero 10x10 resolver tableros deficientes de lado 20, 40, 80… casos particulares del lado genérico ($10x2^n$).

3. Problema: embaldosado del tablero deficiente 11x11

a. Verificar que un tablero 11x11 *deficiente* se puede descomponer en un cuadrado 7x7, un cuadrado 5x5 y dos rectángulos 6x4. Observar que un rectángulo 6x4 cubre 4 rectángulos 2x3.
b. ¿Qué condición debe cumplir la casilla negra que hace *deficiente* al tablero 11x11 para que pueda ser embaldosado con L-triominós?
c. ¿Cuántos L-triominós son necesarios para embaldosar el tablero 11x11 *deficiente*?

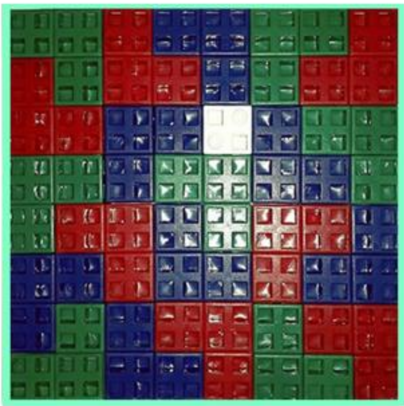
Consultar el apartado de soluciones para contrastar las respuestas dadas.

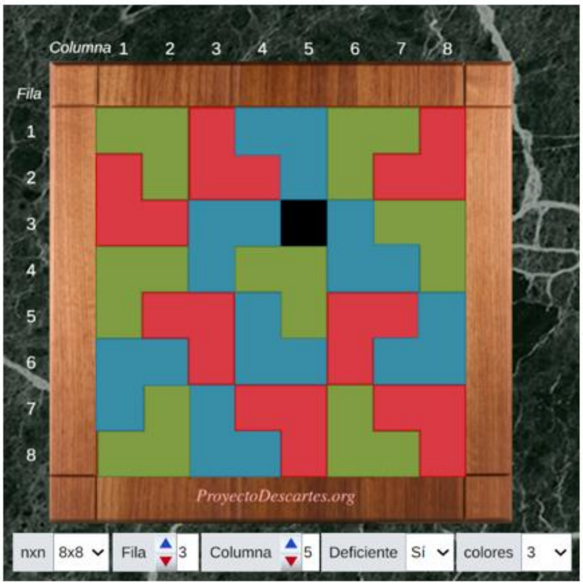
Soluciones

Verificar que el tablero deficiente 8x8 puede ser recubierto siguiendo las reglas del juego Vee-21

Empezar por realizar con la escena de Descartes el embaldosado que se muestra en la *Figura 6* con la casilla negra en la fila 3 y columna 5.

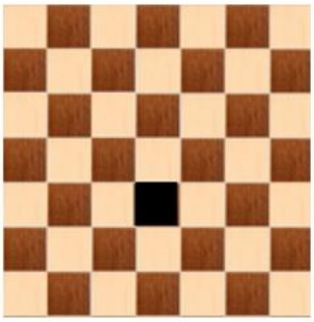
1. Seleccionar la opción 8x8 en el control de menú *nxn*
2. Seleccionar 3 colores en el control dee menú *colores*
3. Seleccionar *Sí* en el control de menú *deficiente.*
4. Seleccionar *Fila* = 3 y *Columna* = 5 en sendos controles de selección.
5. Seleccionar a la derecha de la escena un L-triominó del color correspondiente al de la *figura 6* del juego Vee-21*,* girarlo convenientemente y arrastrarlo para acomodarlo en el tablero de la escena. Conviene seguir un orden, p.ej., de izquierda a derecha y de arriba a abajo.
6. Repetir el paso anterior hasta embaldosar completamente el tablero con los 21 L-triominós
7. Guardar en local el ejercicio el fichero de texto *solucion_Vee-21.txt*

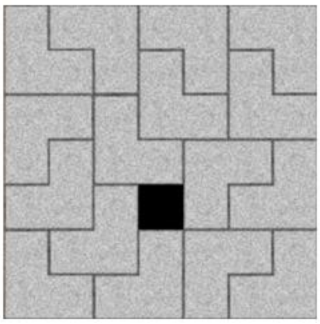




Tablero 7x7

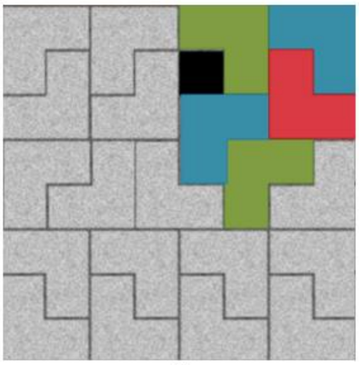
Encontrar un embaldosado en el tablero 7x7 deficiente de la *Figura 18* descomponiéndolo en 6 rectángulos 2x3 y 4 L-triominós.

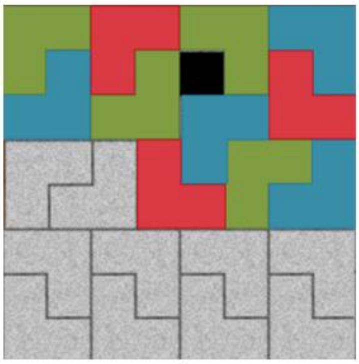


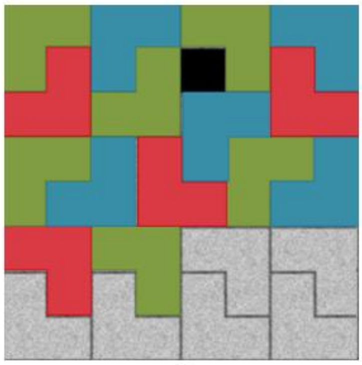


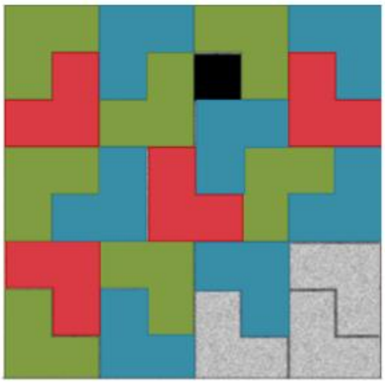
El problema de colorear con tres colores un embaldosado 8x8 realizado con L-triominós

Colorear el tablero embaldosado de la *Figura 24*, cumpliendo la regla de los tres colores.


1


2

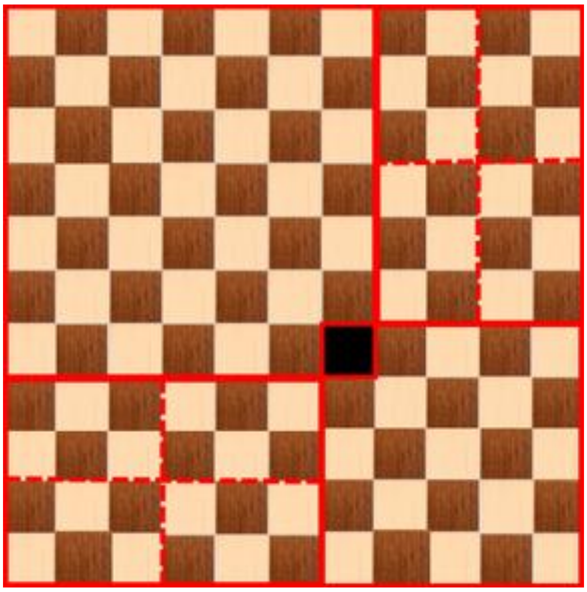

3


4

En la imagen 1 vemos como colocar los cinco primeros L-triominós evitando que se toquen dos del mismo color. En las imágenes 2 y 3 podemos seguir cumpliendo la regla de los tres colores. Llegamos a la figura 4 en la que nos queda 3 L-triominós por colorear, pero solo disponemos de tres del mismo color, rojo, con lo cual resulta imposible resolver el problema.

Trata de buscar otras alternativas a partir de la imagen 1, incluso cambiando los colores y verifica que es imposible cumplir con la regla de los tres colores.

Problema para el tablero deficiente 11x11



El tablero se ha descompuesto en un cuadrado 7x7 *deficiente,* siempre embaldosable, y un cuadrado 5x5 *deficiente*, procurando que la casilla negra sea una del cuadrado 5x5 que lo hace embaldosable. Los 2 rectángulos 6x4 se pueden descomponer en 8 rectángulos 3x2 que sabemos se pueden cubrir con dos L-triominós cada uno.

Se necesitan $(11^2-1)/3 = 120/3 = 40$ L-triominós para embaldosar el tablero.

Bibliografía

1.- Raúl Ibáñez, Embaldosando con L-triominós (Un ejemplo de demostración por inducción). Cuaderno de Cultura Científica. 16 de julio, 2014 en Matemoción

Sobre el autor: *Raúl Ibáñez es profesor del Departamento de Matemáticas de la UPV/EHU y colaborador de la Cátedra de Cultura Científica*

Bibliografía referida en el artículo anterior

1.1.- Norton Starr, *The Tromino Puzzle* (*Tiling a Deficient Checkerboard with L-Trominoes).*

1.2.- Kandon Enterprises

1.3.- Solomon W. Golomb, *Polyominoes*, Princeton University Press, 1994.

1.4.- Marta Macho, *¿Cuatro colores son suficientes?*, Un paseo por la geometría, UPV-EHU, 2005; versión on-line en divulgamat

1.5.- George E. Martin, *Polyominoes, a guide to puzzles and problems in tiling*, The Mathematical Association of America, 1996.

1.6.- Martin Gardner, *L-tromino Tiling of Mutilated Chessboards*, The College Mathematics Journal 40, n. 3, 2009, p. 162-168.

1.7- I. P. Chu, R. Johnsonbaugh, *Tiling deficient boards with trominoes*, Mathematics Magazine 59, 1986, p. 34-40.

1.8.- I. P. Chu, R. Johnsonbaugh, *Tiling boards with trominoes*, J. Rec. Math. 18, 1985–86, p. 188–193.

1.9.- Kandon Enterprises, *el problema de los tres colores*

1.10.- Martin Gardner, *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos*, Alianza editorial, 1969.

2.- Marcelo Ponce – Darío Evans – Adriana Rabino, Secuencia: juegos y demostraciones utilizando trominós- Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática www.gpdmatematica.org.ar