

## Los septos en el primer verticilo.

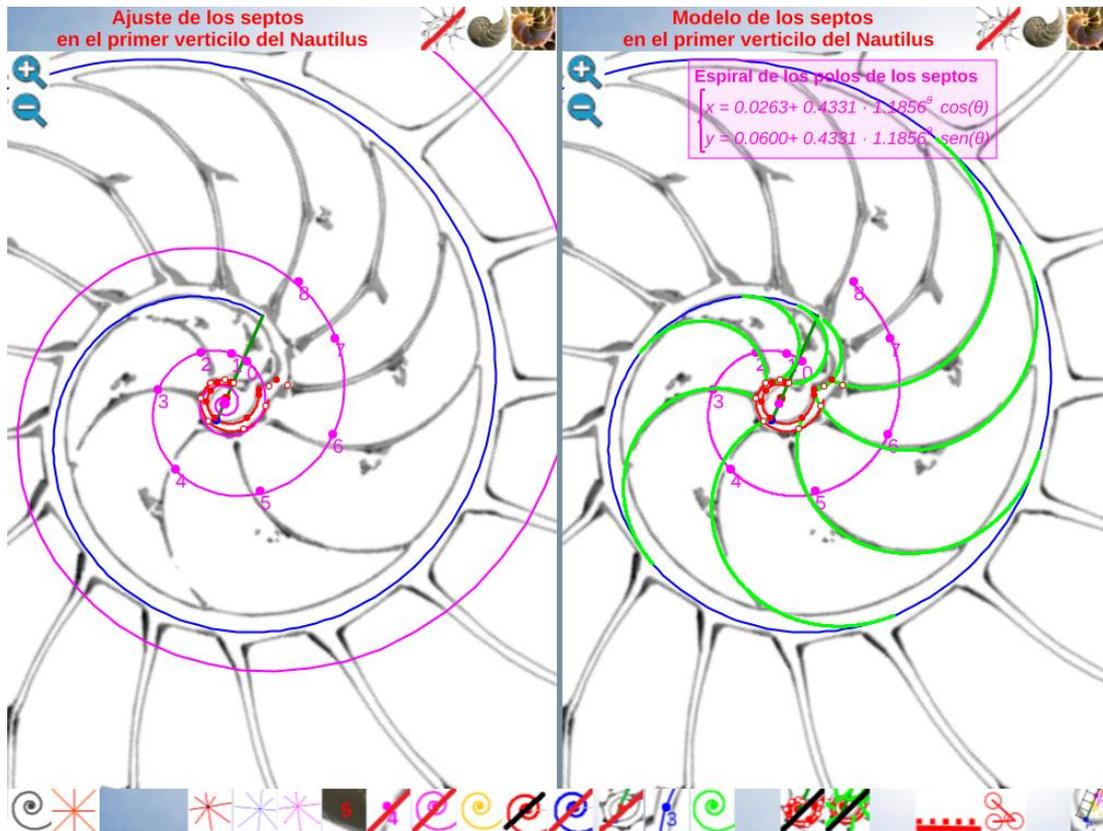
Centrémonos ahora en el primer verticilo, donde la pared ventral es el arco de la espiral cordobesa<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} x = \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + 2\pi] \quad (41)$$

Y, como ya indicamos, en el mismo instante vital  $\theta$ , la pared dorsal es el arco de otra espiral cordobesa:

$$\begin{cases} x = D_x + a \kappa^\theta \cos(\theta) \\ y = D_y + a \kappa^\theta \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_i, \theta_i + \frac{7\pi}{4}] \quad (42)$$

Con  $\mathbf{P}_D(D_x, D_y) = (0.035, 0.080)$  y  $a = \kappa^{-4\pi}$ .



Escena interactiva 7. Modelación de los septos del Nautilus en el primer verticilo. En el espacio de la izquierda herramientas de modelado y en el de la derecha modelo obtenido.

Pulsad sobre la imagen para acceder al objeto interactivo

<sup>1</sup> De acuerdo con la orientación que presenta la concha del Nautilus en las escenas interactivas y, por tanto, la del eje inicial, e l ángulo  $\theta_i = -5,12$ . Este valor lo necesitaremos en cálculos auxiliares posteriores.

## Modelación de los polos de los septos

Para modelar los arcos de los septos en este verticilo, busquemos inicialmente cuales serían sus polos  $S_n(S_{n_x}, S_{n_y})$  y, para ello, podemos utilizar la escena interactiva 7, donde activando el botón cuya imagen es una espiral en color negro , disponemos de una espiral cordobesa que podemos desplazar cambiando su polo, así como escalarla adecuadamente para que se adapte a cada uno de esos septos. Su uso nos permite tabular las coordenadas de sus polos y verificar, en una primera aproximación, que cada septo tiene un factor de escala (o ángulo de retardo) diferente.

Los valores obtenidos están reflejados en la Tabla II.

Tabla II. Coordenadas de los polos de los septos y factor de escala de estos en el primer verticilo.

Polo septo $n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_{n_x}$	0,110	0,056	-0,057	-0,212	-0,150	0,160	0,425	0,430	0,300
$S_{n_y}$	0,217	0,246	0,250	0,111	-0,180	-0,260	-0,050	0,300	0,510
Factor escala en el septo $n$	0,4031	0,4131	0,4431	0,5531	0,6531	0,6331	0,5631	0,5231	0,5

Y usando de nuevo la espiral auxiliar de color negro, comprobamos que los polos  $S_n$  son puntos de la espiral cordobesa:

$$\begin{cases} x = 0,0263 + 0,4331 \kappa^\alpha \cos(\alpha) \\ y = 0,0600 + 0,4331 \kappa^\alpha \sin(\alpha) \end{cases} \quad \alpha \in [\theta_i, \theta_i + 2\pi] \quad (43)$$

(pulsad en la escena interactiva 7 el botón de la espiral magenta )

En esta espiral de los polos de los septos observamos que:

- Su polo es  $P_s(0,0263, 0,0600)$  y éste<sup>2</sup> no coincide ni con el polo de la espiral dorsal en este primer verticilo  $P_D(0,035, 0,080)$ , ni con el polo de la espiral ventral  $P_v(0,0)$ . No obstante, sí existe una relación entre ellos  $\overrightarrow{P_v P_s} = \frac{3}{4} \overrightarrow{P_v P_D}$ .
- El factor de escala es **0,4331**, difiere del hallado en la sección anterior para la espiral de los polos en el segundo y tercer verticilo (22) que en ese caso era  $e = 0,5$ . Habrá que preguntarse por el porqué de ese cambio, es decir, buscar su explicación matemática.
- Los ángulos  $\widehat{S_n P_s S_{n+1}}$ ,  $0 \leq n \leq 7$  que miden el paso entre los polos  $S_n$  en esta espiral se observa que son distintos. Calculando los ángulos a partir de las coordenadas de esos puntos obtenemos que aproximadamente son:  $19^\circ, 33^\circ, 54^\circ, 66^\circ, 59^\circ, 52^\circ, 46^\circ, 28^\circ$ , es decir, un crecimiento inicial, una estabilización posterior y un decrecimiento que confluye al valor  $22,5^\circ = \frac{\pi}{8}$  que es el paso angular que acontece en el segundo y tercer

<sup>2</sup> En una sección posterior detallaremos estos puntos notables que estamos detectando, su relación y aportaremos algunas posibles explicaciones a si intervienen como elementos causales en la ontogenia, si bien quedan abiertas diversas preguntas.

verticilo. Ello se corresponde con el análisis realizado previamente respecto a las áreas de las secciones de las cámaras.

- Hay un punto  $C_s(0.07,0.16)$ , situado en el eje polar, desde el que los ángulos que definen ese paso entre polos, es decir,  $S_n \widehat{C_s} S_{n+1}$ ,  $0 \leq n \leq 7$ , se corresponden con un valor constante de  $\frac{\pi}{4}$  (ver imagen derecha de la Fig. 44 o bien en la escena interactiva 7 podemos pulsar el botón que visualiza un haz de radios de color magenta  <sup>3</sup>). ¿Tiene esa posición una razón especial, un porqué especial?
- La relación entre el polo ventral  $P_v$ , este centro  $C_s$  y el polo dorsal  $D$  es:  $\overline{P_v C_s} = 2 \overline{P_v P_D}$ . Es decir  $P_D$  es el centro de simetría de  $P_v$  y  $C_s$ . (imagen derecha de la fig. 44).

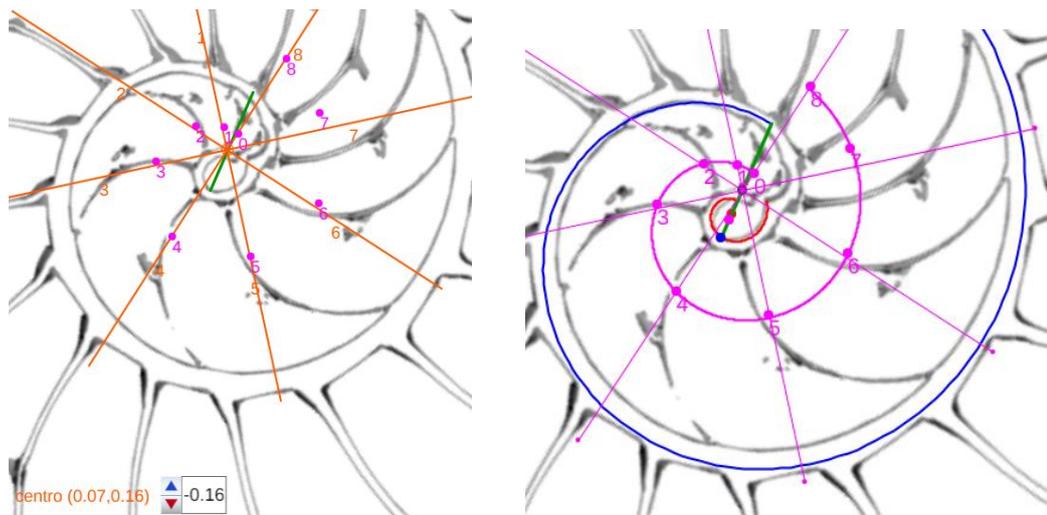


Fig. 44. Perspectiva desde la que el paso angular entre los polos de los septos en el primer verticilo es constante. Imagen izquierda: ajuste del paso angular. Imagen derecha: modelo

Así pues, la base constructiva que estamos siguiendo para la determinación del modelo nos marca que éste puede obtenerse mediante un procedimiento inverso al realizado en la experimentación y simulación anterior, es decir:

1. Partimos de la espiral cordobesa (43)
2. Consideramos el punto  $C_s$  y desde él un haz de rectas de paso  $\frac{\pi}{4}$  que al intersecarlas con la espiral (43) nos determinan los polos de los septos  $S_n$ .

<sup>3</sup> La determinación de este punto puede hacerse usando un haz de rectas de paso  $\frac{\pi}{4}$  que podamos posicionar con un control gráfico y a su vez girarlo con otro control. Esta herramienta la tenemos disponible pulsando el botón . Al hacerlo vemos un haz de rectas que puede desplazarse desplazando su centro y girarse con un pulsador que cambia el ángulo de giro con una medición relativa al eje polar. En este caso cuando ese centro está posicionado en  $C_s$  y el giro relativo es -0.16 es cuando aproximadamente se ajusta mejor, siendo el polo séptimo  $S_7$  el que queda más desajustado

## Modelación de los arcos de los septos

### Puntos de tangencia ventral

Para modelar los arcos de los septos en este primer verticilo acudamos de nuevo al principio de tangencialidad entre los septos y la pared ventral que ya aplicamos en el segundo y tercer verticilo (ver figura 40) e igualmente a lo allí analizado, los puntos de tangencia  $T_n$ , comunes a ambas curvas, han de estar alineados con el polo ventral  $P_v$  y con los polos de los septos  $S_n$ . Así pues, para determinar cada  $T_n$ , interseque cada una de las semirrectas que contienen a los segmentos  $\overline{P_v S_n}$  con la espiral (41) y, para ello, nos basta hallar el paso angular  $\varepsilon_n$  existente entre cada polo septal y el semieje polar  $\overline{P_v P_D}$ , ya que con él obtenemos las coordenadas de

$$T_n(\kappa^{\theta_i+\varepsilon_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n), \kappa^{\theta_i+\varepsilon_n} \text{sen}(\theta_i + \varepsilon_n)), 0 \leq n \leq 8. \quad (44)$$

Estos puntos están representados en la figura 45 y pueden verse en la escena 7 pulsando el botón .

Para calcular  $\varepsilon_n$ ,  $0 \leq n \leq 8$ , determinamos primero  $\varepsilon_0 = \widehat{P_D P_v S_0} = -0,06 = -3^\circ$  y los ángulos  $\eta_n = \widehat{S_n P_v S_{n+1}}$   $0 \leq n \leq 7$  que son los ángulos formados por las líneas discontinuas pintadas en color verde en la Fig. 45. Conocidos estos,  $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \eta_n$ ,  $1 \leq n \leq 8$ . Los valores de los ángulos citados están reflejados en la Tabla III.

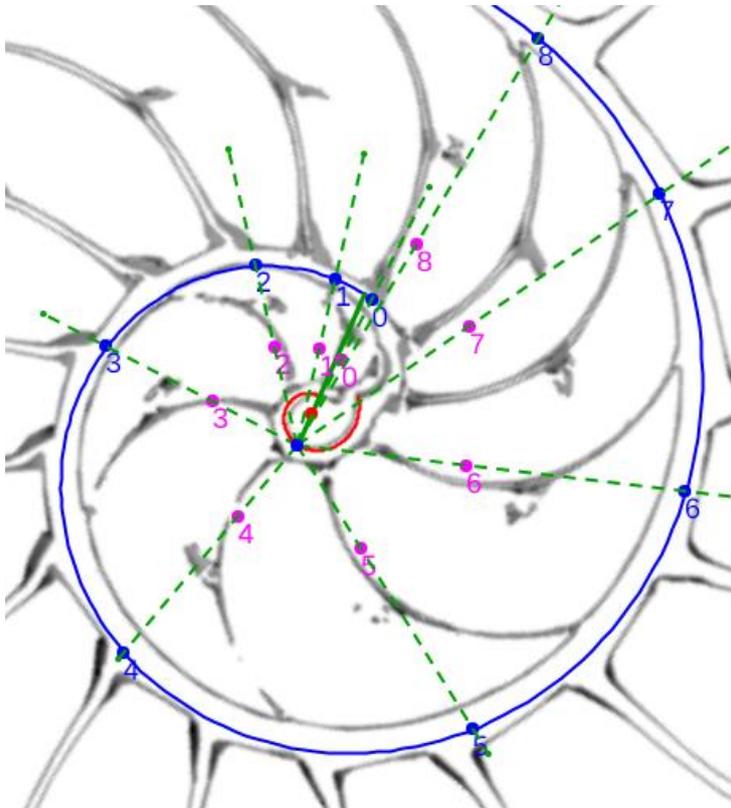


Fig. 45. Perspectiva desde el polo ventral del paso angular interseptos (línea verde discontinua). Polos de los septos (en color magenta) y puntos de tangencia de los septos con la pared ventral (azul)

Tabla III. Paso angular entre los polos de los septos respecto a la pared ventral.

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\eta_n = S_n \widehat{P_v S_{n+1}}$	0,25	0,45	0,86	1,36	1,25	0,90	0,73	0,43	
	14°	26°	49°	78°	72°	52°	42°	25°	
$\varepsilon_n = P_D \widehat{P_v S_n}$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
	-3°	11°	37°	86°	164°	236°	288°	330°	355°

Adicionalmente, si incidimos en la búsqueda del paso angular de  $\frac{\pi}{4}$ , podemos emparejar esos puntos  $\overline{T_0T_4}$ ,  $\overline{T_1T_5}$ ,  $\overline{T_3T_7}$  y  $\overline{T_4T_8}$  y ver qué acontece con su intersección. En la imagen izquierda de la figura 46, puede observarse que salvando el segmento  $\overline{T_3T_7}$  (ya observamos que  $S_7$  quedaba algo desplazado respecto al paso teórico de  $\frac{\pi}{4}$ , consecuentemente esto se traslada a  $T_7$ ), esos segmentos se intersecan en torno a un punto que vamos a denominar  $C_v$ . Con la herramienta auxiliar usada anteriormente, accesible desde el botón  en la escena interactiva 7, podemos determinar aproximadamente sus coordenadas:  $C_v(0,14,0,32)$ , ver imagen derecha en la figura 46. Se verifica que  $P_v C_v = 4 P_v P_D$ .

En la escena 7 disponemos del botón  que permite ver el modelo obtenido, que está reflejado también en la figura 47.

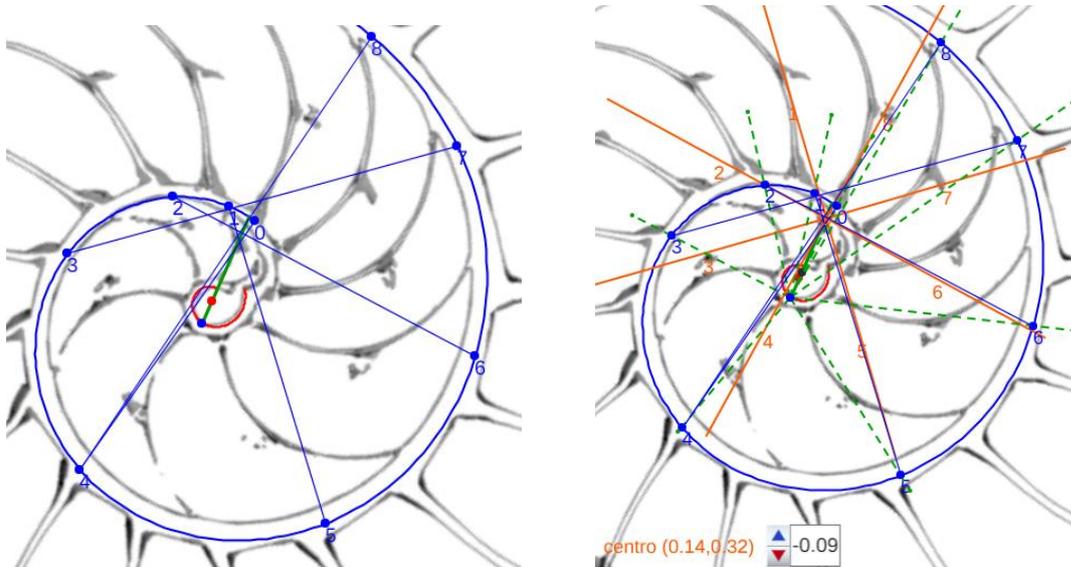


Fig. 46. Perspectiva desde la que el paso angular entre los puntos de tangencia ventrales en el primer verticilo es constante e igual a  $\frac{\pi}{4}$ . Imagen izquierda: segmentos  $\overline{T_n T_{n+4}}$   $0 \leq n \leq 4$ . Imagen derecha: determinación del punto  $C_v$ .

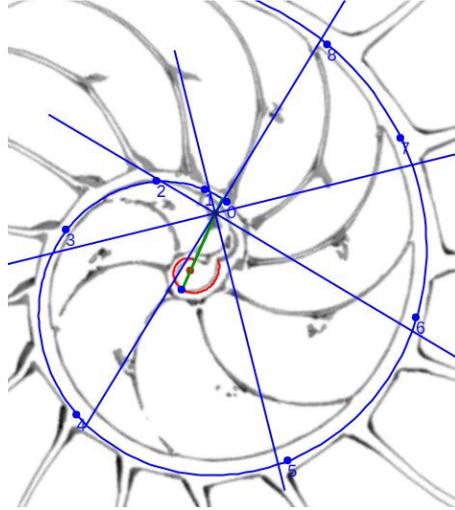


Fig. 47. Centro de los puntos de tangencia ventrales y paso de  $\frac{\pi}{4}$  entre ellos.

Factor de escala en los arcos de los septos. Ecuación de los septos.

Conocidos los puntos de tangencia  $T_n$  y los polos de los septos  $S_n$  procedamos a determinar la ecuación de cada uno de los arcos de los septos en este primer verticilo. En la tabla IV se refleja la proporción existente entre  $\overline{S_n T_n}$  y  $\overline{P_v T_n}$  para  $0 \leq n \leq 8$ , es decir, entre el radio vector del arco del septo n-ésimo y el radio vector de la pared ventral, ambos en el punto de tangencia  $T_n$  y el mismo ángulo  $\theta_i + \varepsilon_n$ . Así pues,  $\overline{S_n T_n} = a_n \overline{P_v T_n}$  y, por tanto,  $\overline{S_n T_n} = a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n}$  y, consecuentemente, el arco de ese septo queda definido como:

$$\begin{cases} x = S_{nx} + a_n \kappa^\sigma \cos(\sigma) \\ y = S_{ny} + a_n \kappa^\sigma \sin(\sigma) \end{cases} \quad \sigma \in [\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n, \theta_i + \varepsilon_n] \quad (45)$$

Donde  $\lambda_n$  es el ángulo que determina la amplitud de ese arco y que tendremos que determinar.

Podemos observar que los coeficientes  $a_n$  obtenidos se corresponden con los factores de escala determinados experimentalmente en la Tabla II. Y aquí observamos que **la causa de que las cámaras y los septos del Nautilus sean diferentes en el primer verticilo es como consecuencia de que la espiral ventral y la espiral de los polos tienen diferente polo** y, consecuentemente, cambia la razón de las distancias entre el polo ventral y los puntos de tangencia  $\overline{P_v T_n}$  y la de cada uno de los polos de los septos con dicho punto de tangencia  $\overline{S_n T_n}$ .

Tabla IV. Relación entre la pared ventral y los arcos de los septos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{P_v S_n}$	0,2433	0,2523	0,2564	0,2393	0,2343	0,3053	0,4279	0,5243	0,5917
$\overline{P_v T_n}$	0,4139	0,4316	0,4658	0,5396	0,6800	0,8407	0,9803	1,1093	1,1935
$a_n = \frac{\overline{S_n T_n}}{\overline{P_v T_n}}$	0,4122	0,4154	0,4495	0,5565	0,6554	0,6369	0,5635	0,5273	0,5042

Amplitud angular de los septos.

En (45) el único parámetro por determinar para cada septo es su amplitud  $\lambda_n$  y para ello, dado que conocemos un extremo del arco del septo, que es el punto de tangencia  $T_n$ , podemos determinar el punto de intersección con la pared dorsal que vamos a denominar  $D_n$ .

Igualando las coordenadas del punto común  $(x, y)$  en (42) y (45) tenemos:

$$\begin{cases} S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = a \kappa^{\theta_i + \rho_n} \cos(\theta_i + \rho_n) \\ S_{n_y} - D_y + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \text{sen}(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = a \kappa^{\theta_i + \rho_n} \text{sen}(\theta_i + \rho_n) \end{cases} \quad (46)$$

donde  $\rho_n$  es el ángulo cuyo vértice es el polo dorsal  $P_D$ , un lado el eje inicial y otro la semirrecta que une  $P_D$  con el punto de corte buscado  $D_n$  y  $a$  es el valor correspondiente a la pared dorsal que según lo hallado con anterioridad sería  $a = \kappa^{-4\pi}$ , pero que vamos a expresar de manera genérica como  $a = \kappa^{-\omega}$  porque posteriormente veremos que será necesario reproducir el cálculo con otro valor.

Elevando al cuadrado en ambas igualdades de (46), sumándolas y simplificando obtenemos que

$$\kappa^{-2\omega} \kappa^{2\theta_i + 2\rho_n} = N(\lambda_n) \quad (47)$$

Es decir,

$$\rho_n = -\theta_i + \omega + \log_{\kappa} \sqrt{N(\lambda_n)} \quad (48)$$

siendo

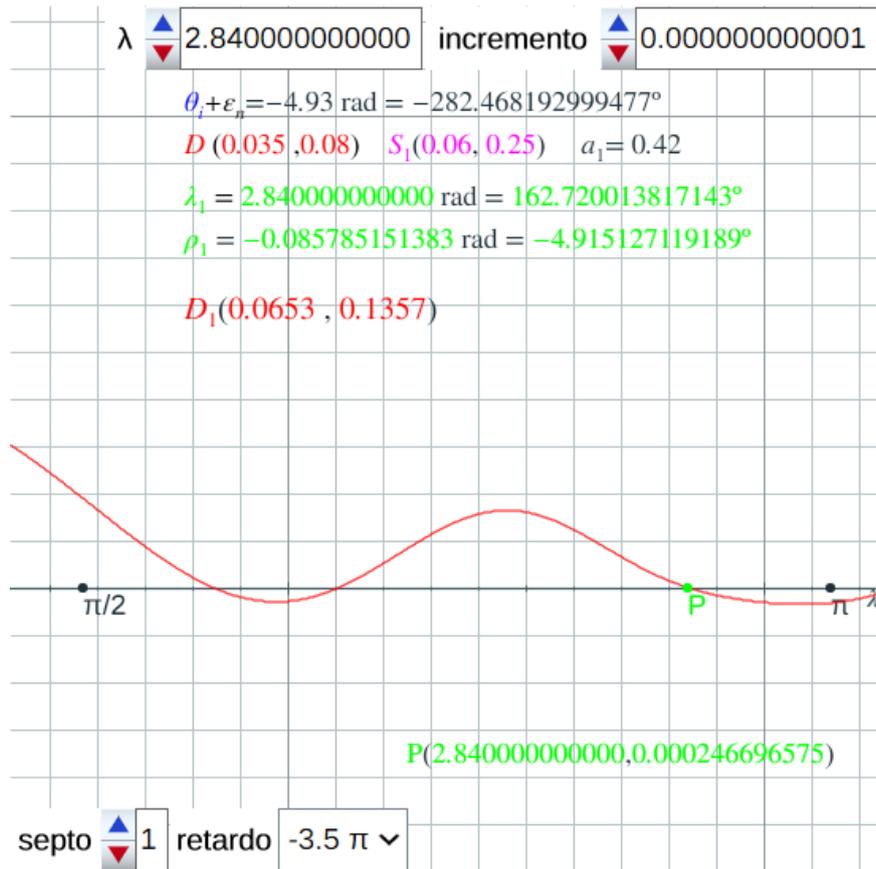
$$\begin{aligned} N(\lambda_n) = & (S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n))^2 \\ & + (S_{n_y} - D_y + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \text{sen}(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n))^2 \end{aligned} \quad (49)$$

Luego la determinación de  $\lambda_n$  y  $\rho_n$  puede realizarse resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} S_{n_x} - D_x + a_n \kappa^{\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n} \cos(\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n) = \kappa^{-\omega} \kappa^{\theta_i + \rho_n} \cos(\theta_i + \rho_n) \\ \rho_n = -\theta_i + \omega + \log_{\kappa} \sqrt{N(\lambda_n)} \end{cases} \quad (50)$$

La resolución numérica de (50) podemos realizarla usando la escena interactiva 8 y, dado que puede haber más de una raíz, hemos de tener en consideración que la amplitud del septo  $\lambda_n$  tomará aproximadamente valores en el intervalo  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  (pudiendo ser algo superior como veremos) y el ángulo  $\rho_n$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ .

Tomando  $\omega = -4\pi$ , que es el valor considerado para la pared dorsal, la resolución nos conduce a los valores representados en la tabla V. En ella, no se ha considerado el septo octavo ya que su intersección no se produce con la pared dorsal, sino que lo hace con el septo cero, es decir, con la concha embrionaria. Adicionalmente, la intersección obtenida para el primer y segundo septo no es la adecuada (se ha puesto en color rojo solo a nivel informativo) ya que realmente ésta no ocurre para este valor  $\omega = -4\pi$  (ver figura 48), será necesario considerar cierto grosor en esa pared —lo cual se corresponde con la situación real, aunque inicialmente lo omitamos en el mundo matemático— para que se produzca el corte esperado.



Escena interactiva 8. Determinación de la amplitud del septo y del punto de intersección de éste con la pared dorsal mediante la resolución numérica del sistema (50).

Pulsad sobre la imagen para acceder al objeto interactivo

Tabla V. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -4\pi$ . Resolución numérica del sistema (50).

$\theta_i = -5,12$									
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_n$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
$\theta_i + \varepsilon_n$	-5.18	-4,93	-4.48	-3,62	-2,26	-1,01	-0,11	0,62	1,05
<b>Dorsal -4 <math>\pi</math></b>									
<b>Resolución numérica del sistema (50)</b>									
$\lambda_n$	2,28	3,45	3,10	2,67	2,89	3,15	3,22	3,12	
	131°	198°	178°	153°	166°	181°	185°	179°	
$\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n$	-7,46	-7,88	-7,38	-6,28	-5,15	-4,15	-3,33	-2,49	
$\rho_n$	5,38	3,19	2,67	1,50	2,12	3,04	4,36	5,23	
$\rho_n$	-51°	183°	153°	86°	121°	175°	250°	300°	
$D_{nx}$	0,1544	0,0059	-0.0235	-0,0213	-0,0344	-0,0046	0,1110	0,1540	
$D_{ny}$	0,1101	0,1597	0,1309	0,1097	0,0670	0,0070	0,0099	0,0938	

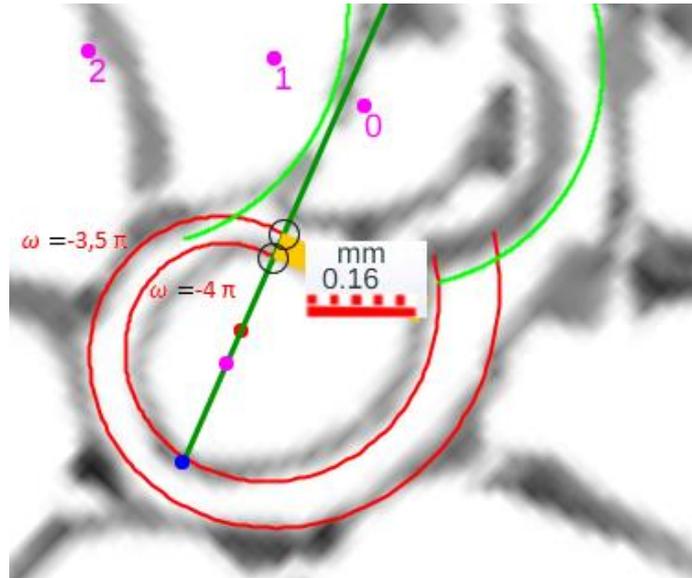


Fig. 48. Intersección del primer septo con la pared dorsal. La espiral interior se corresponde con  $\omega = -4\pi$  y la exterior con  $\omega = -3,5\pi$ . El grosor existente entre ambas paredes en el eje inicial es de 0,16 mm aproximadamente.

Utilizando la escena interactiva 7 y, en concreto, la herramienta de medida de ángulos y las coordenadas del punto en que se posiciona el ratón sin más que pulsar clic (ver figura 49) podemos verificar los resultados anteriores y aportar los valores correspondientes a los septos primero y segundo. Esos datos están reflejados en la tabla VI.

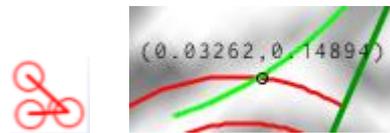


Fig. 49. Herramienta de medida de ángulos y coordenadas de un punto en la escena interactiva 7.

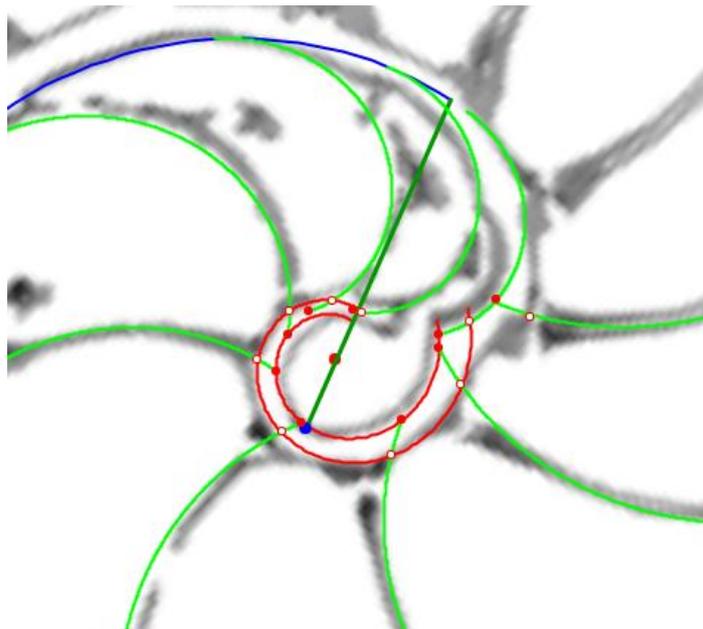


Fig. 50. Representación de los septos del primer verticilo en el entorno de la pared dorsal e intersección con ésta.

Si consideramos la espiral dorsal determinada con  $\omega = -3,5 \pi$ , en la Tabla VII está reflejados los datos obtenidos mediante la resolución del sistema (50) y manualmente en el caso del septo octavo. Puede observarse en la figura 50, la cual se ha obtenido con la escena interactiva 7.

Tabla VI. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -4 \pi$ . Verificación manual de los datos obtenidos en la Tabla V y determinación de los septos primero y segundo.

$\theta_i = -5,12$ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dorsal $-4 \pi$	Manual en la escena interactiva 7								
$\lambda_n$	2,28	2,95	2,90	2,66	2,89	3,14	3,22	2,87	2,73
	131°	169°	166°	152°	166°	180°	185°	164°	156°
$\rho_n$	-0,91	0,05	0,91	1,52	2,16	3,05	4,38	5,24	
	-52°	3°	52°	87°	124°	175°	251°	300°	
$D_{n_x}$	0,1544	0,0539	0,0036	-0,0213	-0,0344	-0,0046	0,1110	0,1540	0,22
$D_{n_y}$	0,1101	0,1389	0,1365	0,1097	0,0670	0,0070	0,0099	0,0938	0,15

Tabla VII. Amplitud de los septos y puntos de intersección de estos con la pared dorsal para  $\omega = -3,5 \pi$ . Resolución numérica del sistema (50).

$\theta_i = -5,12$ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_n$	-0,06	0,19	0,64	1,50	2,86	4,11	5,01	5,74	6,17
$\theta_i + \varepsilon_n$	-5.18	-4,93	-4.48	-3,62	-2,26	-1,01	-0,11	0,62	1,05
Dorsal $-3,5 \pi$	Resolución (50)								
$\lambda_n$	1,96	2,84	2,66	2,53	2,80	3,07	3,09	2,98	2,84
	112°	163°	152°	145°	160°	176°	177°	171°	163°
$\theta_i + \varepsilon_n - \lambda_n$	-7,14	-7,77	-7,14	-6,15	-5,06	-4,08	-3,20	-2,36	
$\rho_n$	5,39	-0.09	0,44	1,13	2,01	2,85	4,03	4,87	
	-51°	-5°	25°	65°	115°	163°	231°	279°	
$D_{n_x}$	0.1901	0.0653	0.0303	-0.0184	-0.0557	-0.0280	0.0987	0,1796	0,26
$D_{n_y}$	0.1246	0.1357	0.1492	0.1369	0.0804	-0.0035	-0.0309	0,0515	0,13

Por otra parte, adicionalmente, usando la herramienta para la visualización del paso  $\frac{\pi}{4}$   en la escena interactiva 7, podemos observar si las intersecciones de los septos con la pared dorsal desde algún punto siguen esa distribución:

- Para los puntos de la espiral dorsal  $\omega = -3,5 \pi$ , encontramos que esa relación se consigue aproximadamente desde el punto del eje polar  $C_D(0,0413, 0,0944)$  y con un ángulo de desviación respecto a éste de  $-0,19$  (ver fig. 51). Los puntos de los septos quinto y sexto

quedan desplazados —hay que ser consciente que, en concreto, éste no deja de ser más que un divertimento matemático de búsqueda de una regularidad sincrónica teórica que sea sencilla en una difícil asincronía aparente—.

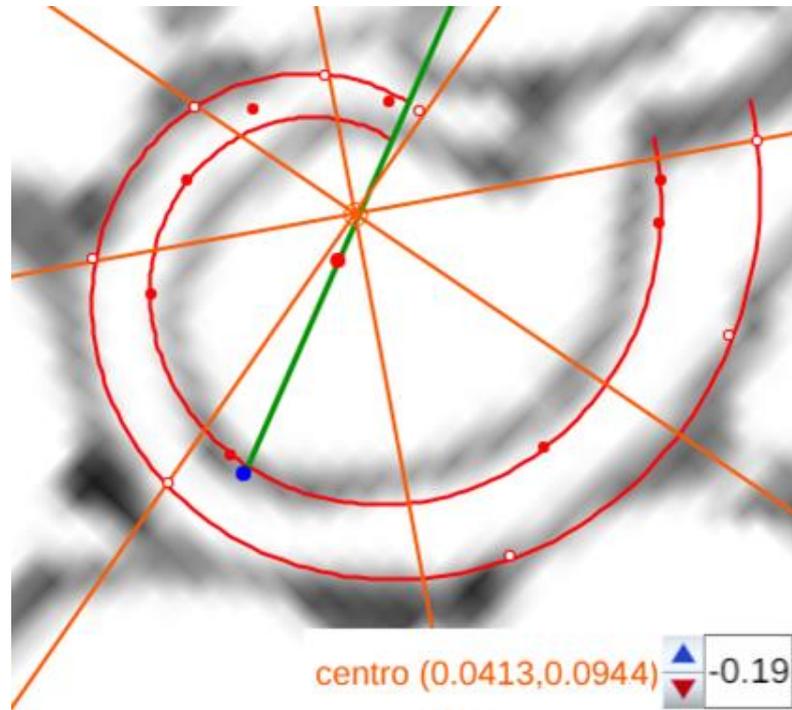


Fig. 51. Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y la pared dorsal con  $\omega = -3,5 \pi$

- Para los puntos de la espiral dorsal  $\omega = -4 \pi$ , esa relación es más burda, pero sí puede observarse esa regularidad fácil de obtener. En la fig. 52 hemos hecho coincidir los puntos del tercer, cuarto y séptimo septo.

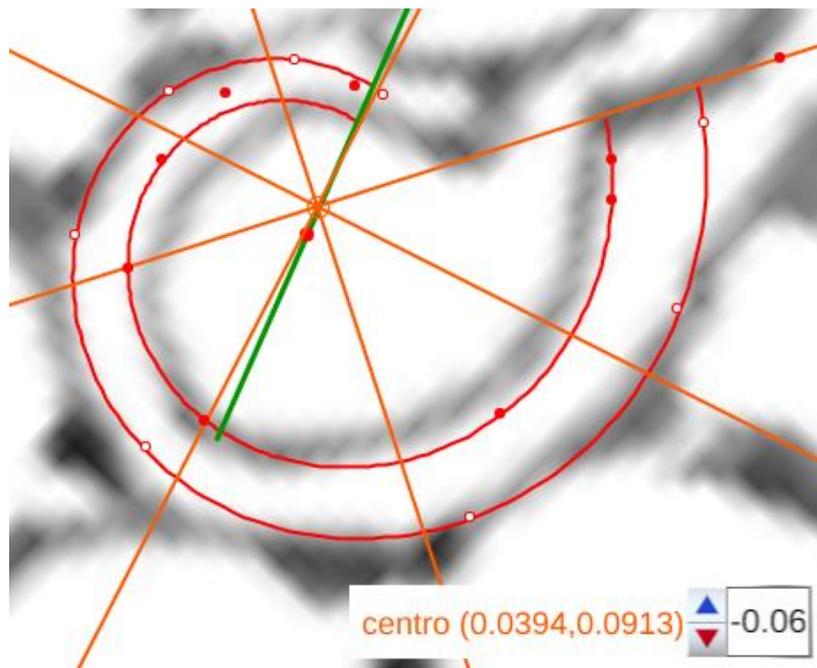


Fig. 52. Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y la pared dorsal con  $\omega = -4 \pi$

Y, también, podemos observar cuál es la perspectiva de paso  $\frac{\pi}{4}$  para la intersección de los septos con el sífúnculo en este primer verticilo (figura 53) donde desde el punto  $C_{S_f}(0,105, 0,2400)$  y con un ángulo de desviación respecto a éste de  $-0,06$  se hacen coincidir las intersecciones correspondientes a los septos segundo al séptimo.

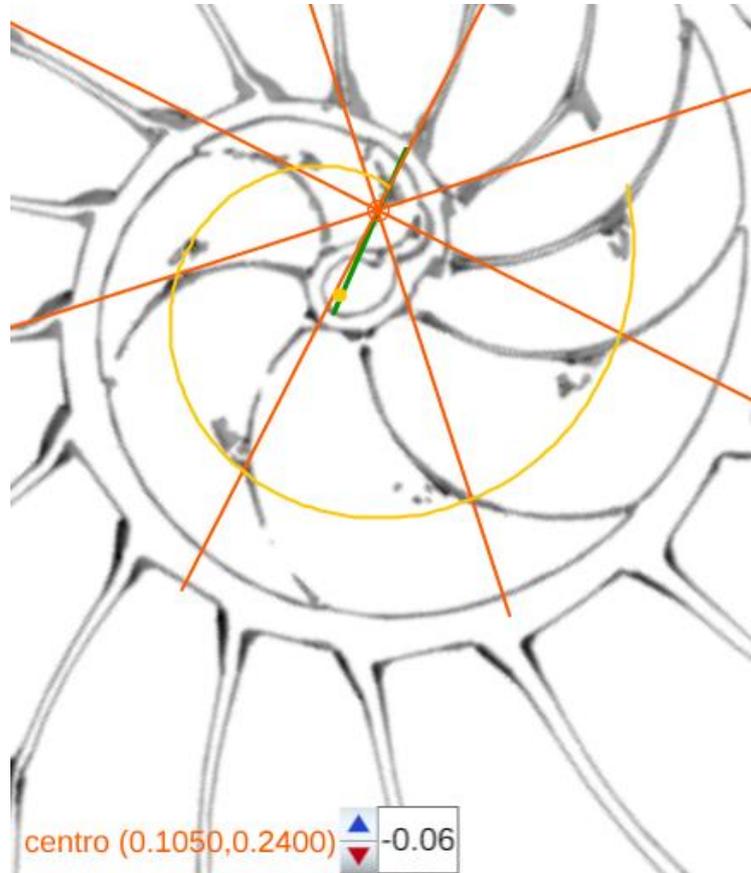


Fig. 53. Regularidad de paso  $\frac{\pi}{4}$  de los puntos de intersección de los septos y el sífúnculo en el primer verticilo

### Puntos notables y destacables en el Nautilus y su relación

A lo largo del análisis realizado hemos encontrado algunos puntos que podemos catalogar como **puntos notables del Nautilus** que son los que nos han permitido fundamentar y dar la explicación matemática a su ontogenia:

- polo de la pared ventral  $P_v$ ,
- polo de la pared dorsal  $P_D$ ,
- polo del sífúnculo  $P_{S_f}$  y
- polo de la espiral de los septos  $P_s$ .

Y también hemos detectado, en la búsqueda de una regularidad en la irregularidad observable a primera vista, la posible existencia teórica de otros que podemos catalogar como **puntos destacables**, y que son los centros desde los que se observa un paso de  $\frac{\pi}{4}$  entre puntos de análoga procedencia:

- centro de las intersecciones dorsales  $C_D$ ,
- centro de los polos de los septos  $C_s$ ,
- centro de las intersecciones septo-sifúnculo  $C_{sf}$  y
- centro de las intersecciones ventrales  $C_v$ <sup>4</sup>.

Unos y otros están reflejados en la figura 53 y se ubican en el eje que hemos denominado polar, el cual marca el ángulo inicial común a todas las espirales cordobesas involucradas en el estudio y es el comienzo de la fase de crecimiento post embrionario.

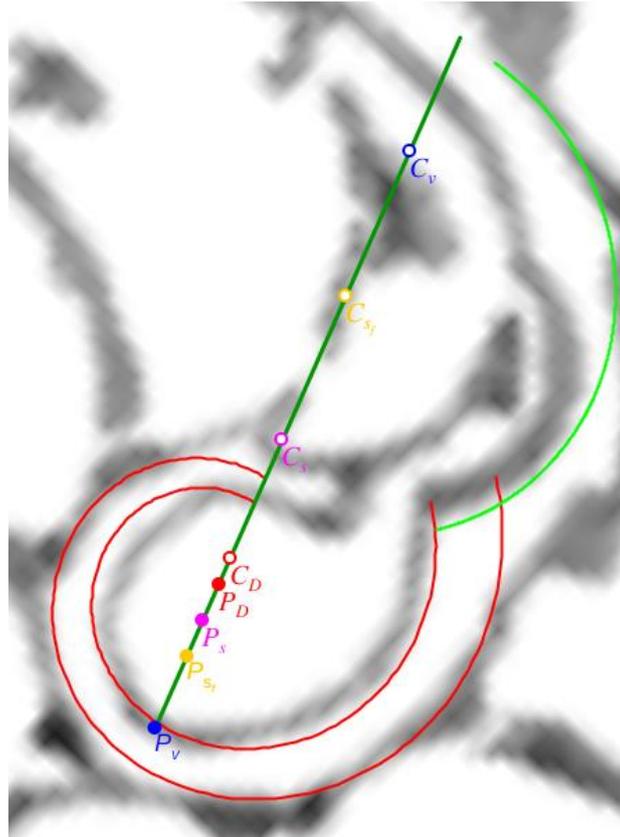


Fig. 53. Ubicación del polo de la espiral ventral  $P_v(0, 0)$ , polo de la espiral de septos  $P_{sf}(0, 0,175, 0,0400)$ , polo de la espiral de septos  $P_s(0,0263, 0,0600)$ , polo de la espiral o espirales dorsales  $P_D(0,0350, 0,0800)$ , centro de las intersecciones dorsales  $C_D(0,0413, 0,0944)$ , centro de los polos de los septos  $C_s(0,0700, 0,1600)$ , centro de las intersecciones con el sifúnculo  $C_{sf}(0,1050, 0,2400)$  y centro de las intersecciones ventrales  $C_v(0,1400, 0,3200)$ .

La relación existente entre los puntos notables ha quedado reflejada anteriormente y puede resumirse en:

- La no coincidencia entre el polo ventral  $P_v$  y el dorsal  $P_D$  es la que establece la diferencia ontogénica entre el crecimiento en el primer verticilo (no uniforme) y en los restantes (uniforme).

<sup>4</sup> En una [fase anterior](#) de este estudio se realizó una primera aproximación de los valores de los centros  $C_v$  y  $C_D$  que aquí modificamos, la introducción de la tangencialidad de los septos y el cálculo de las intersecciones ventrales y dorsales ha permitido ubicar teóricamente mejor dichos centros.

- El polo del sífinculo  $P_{sf}$  es el punto medio del segmento  $\overline{P_v P_D}$  determinado por los polos anteriores, es decir,  $\overline{P_v P_{sf}} = \frac{1}{2} \overline{P_v P_D}$ . Esta relación ha quedado justificada matemáticamente con anterioridad al plantear el sífinculo como eje intermedio entre la pared dorsal y la ventral.
- El polo  $P_s$  sigue la relación  $\overline{P_v P_s} = \frac{3}{4} \overline{P_v P_D}$ , si bien no he desentrañado el porqué de esa proporción concreta. La no coincidencia de este polo con el ventral es la causa de que los septos en este primer verticilo tengan diferente factor de escala y amplitud de su arco.

Y la de estos puntos notables con los puntos destacables:

- El centro dorsal  $C_D$ :  $\overline{P_v C_D} = \frac{6}{5} \overline{P_v P_D}$ .
- El centro de los polos de los septos  $C_s$ :  $\overline{P_v C_s} = 2 \overline{P_v P_D}$ .
- El centro de las intersecciones septo-sífinculo  $C_{sf}$ :  $\overline{P_v C_{sf}} = 3 \overline{P_v P_D}$ .
- El centro ventral  $C_v$ :  $\overline{P_v C_v} = 4 \overline{P_v P_D}$ .

Relaciones, cuya causalidad queda abierta a futuras sinapsis neuronales de quienes profundicemos en esta investigación.



En la escena interactiva 7 el botón  nos permite visualizar su localización y relaciones, también puede observarse en la figura 54.

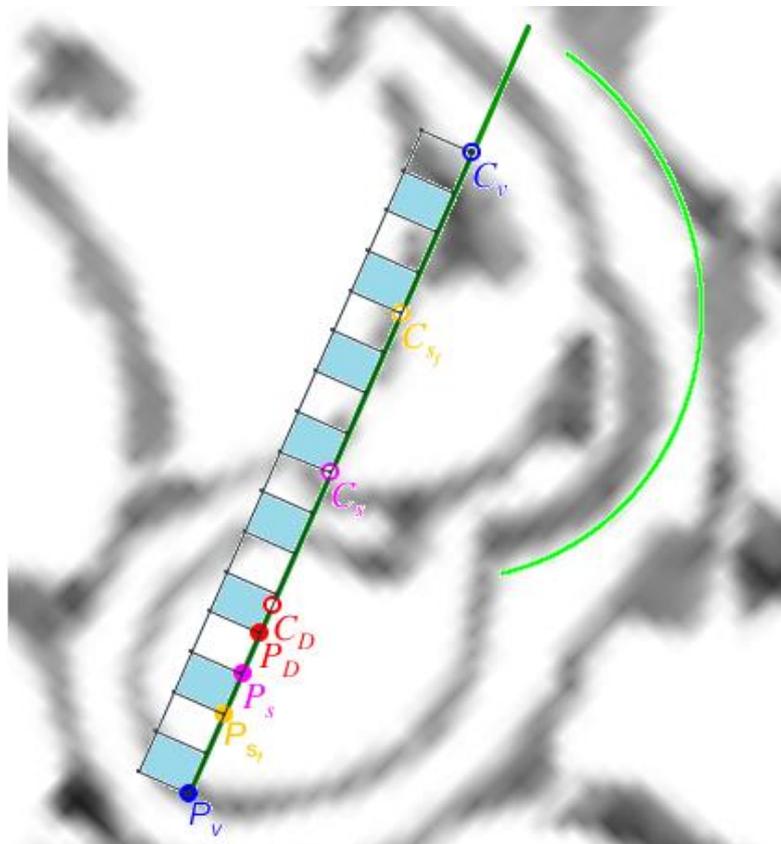


Fig. 54. Puntos notables y destacables del Nautilus y regla escalada que muestra sus relaciones.