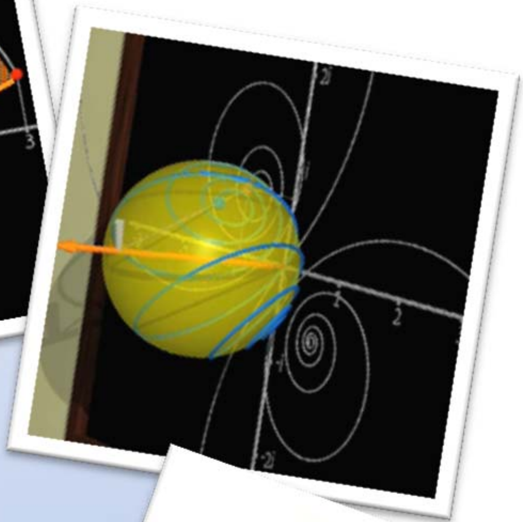
Los números complejos



En forma binómica

Parte real y parte imaginaria
Operaciones: sumar y restar
Operaciones: producto y cociente

En forma polar

Módulo y argumento
Producto y cociente
Potencias
Raíces

Aplicaciones

Operaciones con complejos y transformaciones geométricas

Cuestionario de autoevaluación

RED educativa digital Descartes

María José García Cebrian

Bajo licencia
CC BY-NC-SA 4.0

OBJETIVOS

- Entender la necesidad de ampliar los números reales.
- Conocer los conceptos: unidad imaginaria, número complejo, parte real y parte imaginaria.
- Representar gráficamente números complejos.y reconocer el afijo de un complejo.
- Hallar el opuesto y el conjugado de un complejo e interpretarlos gráficamente.
- Hallar potencias de i (unidad imaginaria).
- Sumar y restar complejos en forma binómica y gráficamente.
- Multiplicar y dividir complejos en forma binómica.
- Expresar un complejo en forma polar.
- Representar un complejo dado en forma polar.
- Pasar de forma binómica a forma polar y viceversa.
- Multiplicar, dividir y calcular potencias de complejos en forma polar e interpretarlo gráficamente.
- Conocer la fórmula de Moivre.
- Hallar todas las raíces n-ésimas de un complejo e interpretarlas gráficamente.

Si consideramos la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ y la representamos en el punto (0,1) del plano, podemos situar de la misma forma los números 2i, 3i, ..., -i, -2i,... en el eje vertical, es decir los números ***bi*** que llamaremos imaginarios. Entonces un punto cualquiera del plano ***(a , b)***, con a y b números reales, puede escribirse como (a,0)+(0,b), esto es como la suma de un número real y un número imaginario.

Los números complejos son de la forma $a + bi$

a es la parte real, b es la parte imaginaria

Cada número complejo z se puede representar en el plano mediante el punto ***Z(a, b)*** llamado **afijo** o bien mediante el vector $\overline{OZ}$.

Dos números complejos son **iguales** si lo son las partes reales y las partes imaginarias respectivas.

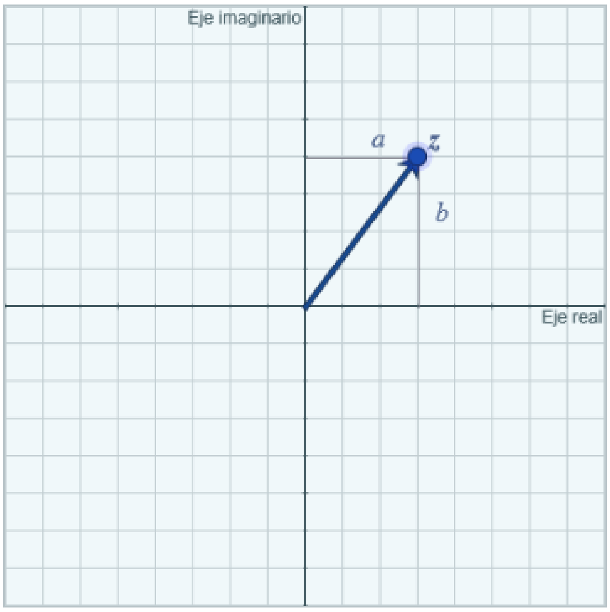
- El **conjugado** de un número complejo $z = a + bi$ es otro número complejo con la misma parte real y la parte imaginaria cambiada de signo.

$\bar{z} = 3 - 4i$ dibujar

- El **opuesto** de un número complejo $z = a + bi$ es otro número complejo con la parte real y la parte imaginaria cambiadas de signo.

$-z = -3 - 4i$ dibujar

$z =$ 3 $+$ 4 i



Averigua el valor de a y de b para que $a - 5i$ *sea el conjugado de* $-4 + bi$

$a =$ ☐ $b =$ ☐ ☐

comprobar

Halla las soluciones de la ecuación: $z^2 + 4z + 5 = 0$

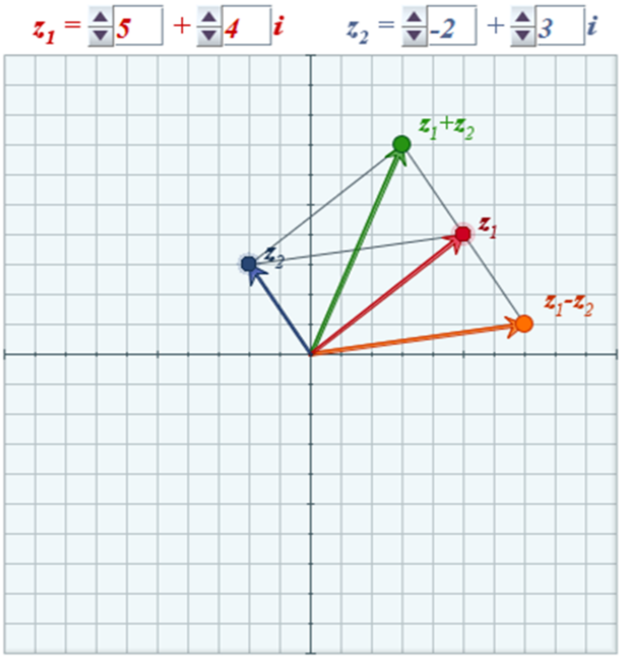
☐ $\mp$ ☐ i ☐

comprobar

Los números complejos se pueden sumar o restar siguiendo las reglas de las operaciones con los números reales.

Dados dos números complejos:

$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$



► **Suma**

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$z_1 + z_2 = (5 + 4\,i) + (-2 + 3\,i) = \mathbf{3 + 7\,i}$

► **Resta**

Como en los números reales para restar hay que sumar al minuendo el opuesto al suatraendo.

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

$z_1 - z_2 = (5 + 4\,i) - (-2 + 3\,i) = \mathbf{7 + i}$

Efectúa las siguientes operaciones: $(-9 + 8i) + \frac{1}{2}(4 - 4i) - (-6 - 3i)$

☐ + ☐ i ☐

comprobar

Calcula los números complejos z_1 *y* z_2 *que cumplen* $z_1 + z_2 = 6 - 3i$ *y* $z_1 - z_2 = 8 - i$

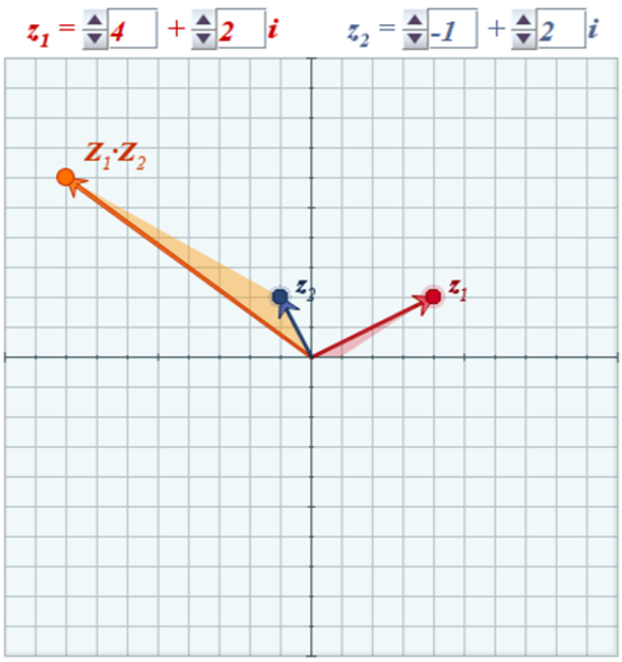
$z_1 =$ ☐ + ☐ i $\qquad z_2 =$ ☐ + ☐ i ☐

comprobar

Los números complejos se pueden multiplicar siguiendo las reglas de las operaciones con números reales y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{i \cdot i = i^2 = -1}$

Dados dos números complejos:

$$z_1 = a_1 + b_1 i \qquad z_2 = a_2 + b_2 i$$



► Producto

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4 + 2\,i) \cdot (-1 + 2\,i) = \\ &= -4 \cdot 1 + 4 \cdot 2i - 2i \cdot 1 + 2 \cdot 2\,i^2 = \\ &= \boldsymbol{-8 + 6\,i} \end{aligned}$$

Comprueba que el producto de un número por su conjugado es siempre un número real:

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (4 + 2\,i) \cdot (4 - 2\,i) = \square$$

Introduce el resultado y pulsa Intro .

Este resultado se utiliza para calcular el cociente de dos números complejos.

► Cociente

Para dividir dos números complejos, al igual que con los números reales, se multiplica el numerador por el inverso del denominador. Como regla práctica multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$$

$z_1 = -8 + 6\,i$

$z_2 = -1 + 2\,i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-8 + 6\,i}{-1 + 2\,i} = \frac{(-8 + 6\,i)(-1 - 2\,i)}{(-1 + 2\,i)(-1 - 2\,i)} = \frac{8 \cdot 1 + 8 \cdot 2\,i - 6i \cdot 1 - 6 \cdot 2\,i^2}{1 - 4\,i^2} = \frac{20 + 10\,i}{5} = 4 + 2\,i$$

Calcula el valor de **b** *para que el producto* **(-6 - 3i)·(6 + bi)** *sea un número imaginario puro.*

b = $\square$

comprobar

Calcula el valor de **b** *para que el afijo del cociente* $\boldsymbol{\frac{-2 + bi}{3 + 2i}}$ *esté en la bisectriz del primer cuadrante.*

b = $\square$

comprobar

Dado el número complejo: $z = a + b\,i$

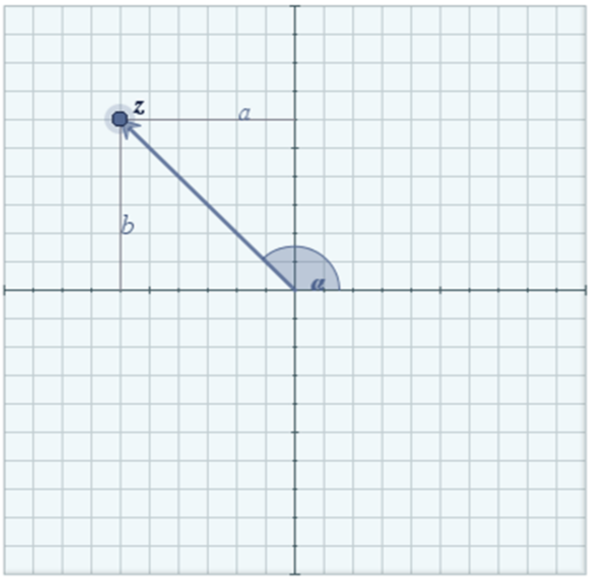
$z = -6 + 6\,i$

► El **módulo** de z es la distancia del afijo al origen de de coordenadas.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = 8{,}5$$

► El **argumento** es el ángulo que forma el segmento OZ con el semieje positivo real medido en sentido contrario a las agujas del reloj entre 0º y 360º.

$$\alpha = arg(z) = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{6}{-6} = 135^\circ$$



Se puede expresar el número complejo z mediante su módulo y su argumento en **forma polar**:

$$r_\alpha = 8{,}5_{135^\circ}$$

Observa que: $a = r \cdot \cos \alpha$ y $b = r \cdot sen\ \alpha$, así se puede expresar z en forma **trigonométrica**, a la vez que sirve para pasar de la forma polar a la forma binómica.

$$z = r(\cos\alpha + i\ sen\ \alpha) = 8{,}5\,(\cos 135^\circ + i\ sen\ 135^\circ)$$

Pasa a forma binómica:

$2_{30^\circ} = \_\_\_ + \_\_\_\ i$

Introduce los valores con su signo redondeados a centésimas

comprobar

El conjugado del número complejo 8_{30° *es:*

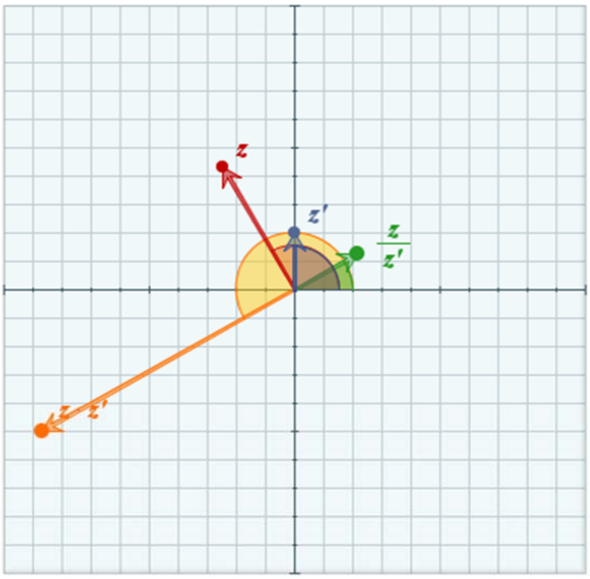
$\_\_\__{\_\_\_^\circ}$

comprobar

La relación entre la forma polar de dos números complejos y la de su producto y cociente, nos permite multiplicar y dividir de forma muy sencilla.

Dados dos números complejos: $z = r_\alpha \quad z' = r'_\beta$

$z =$ 5 120 º $\quad z' =$ 2 90 º



► Producto

Para **multiplicar** dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

$$z \cdot z' = r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$z \cdot z' = 5_{120°} \cdot 2_{90°} = 10_{210°}$$

► Cociente

Para **dividir** dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

$$\frac{z}{z'} = \frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{5_{120°}}{2_{90°}} = 2{,}5_{30°}$$

Dado el número complejo $z = 2_{60°}$ *calcula* $z \cdot \bar{z}$ *y* $z/\bar{z}$

$z \cdot \bar{z} = \square_{\square°} \qquad \frac{z}{\bar{z}} = \square_{\square°}$

comprobar

Averigua dos números complejos z_1 *y* z_2 *tales que su producto sea* $5_{170°}$ *y su cociente* $5_{80°}$

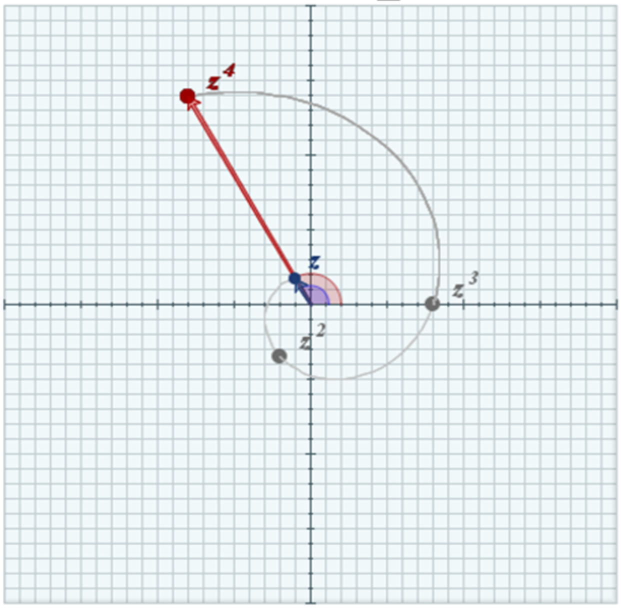
$z_1 = \square_{\square°} \qquad z_2 = \square_{\square°}$

comprobar

Potencias

Dado el número complejo:

$z = r_{\alpha} = 2_{120^\circ}$



Para calcular una potencia de exponente natural n, de un número complejo expresado en forma polar, basta elevar el módulo a n, y multiplicar el argumento por n.

$$(r_\alpha)^n = r^n_{\alpha \cdot n}$$

$n = 4$ $\qquad (2_{120})^4 = 2^4_{4 \cdot 120^\circ} = 16_{120^\circ}$

Si se expresa el resultado de z^n en forma trigonométrica:

$$[r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$$

y haciendo $r=1$ obtemos la llamada **fórmula de Moivre**, útil en trigonometría para calcular $\text{sen}\,n\alpha$ y $\cos n\alpha$ en función de $\text{sen}\,\alpha$ y $\cos\alpha$.

$$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$$

Potencias de i

Un caso particular lo encontramos al calcular las potencias sucesivas de i.

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, será:

$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i$

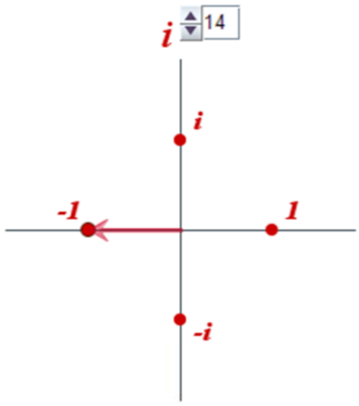
$i^4 = i^3 \cdot i = 1 \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i \qquad i^6 = i^5 \cdot i = -1 \qquad i^7 = i^6 \cdot i = -i$

y asi sucesivamente, con lo que observamos que se repiten de cuatro en cuatro. Por tanto para hallar una potencia de i, se divide el exponente entre 4 y se calcula la potencia de exponente el resto de la división.

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1 \qquad i^{14} = i^2 = -1$
$i^3 = -i$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline \mathbf{2} & 3 \end{array}$$

$\mathbf{14} = 3 \cdot 4 + \mathbf{2}$



Averigua el valor de **n** y de **a** (a>0) para que $(-a - a\sqrt{3}\,i)^n = 216_{0^\circ}$

n = ☐ **a =** ☐

comprobar

Selecciona el valor de la potencia de i.

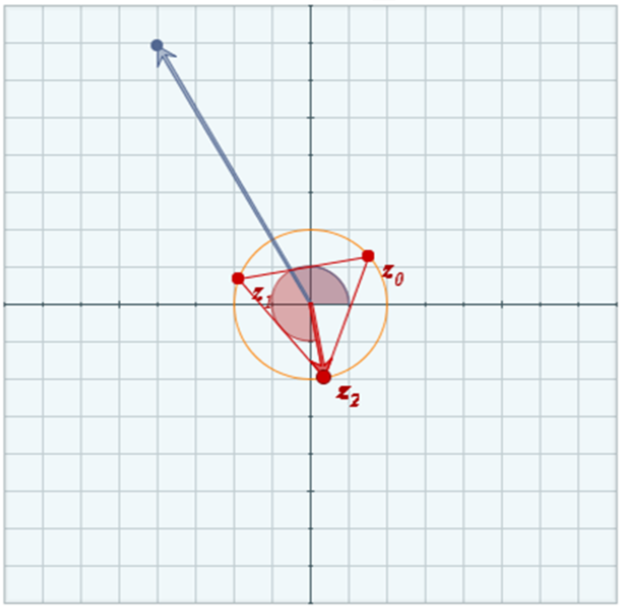
$i^{125} =$ ☐

comprobar

Raíces n-ésimas

Dado el número complejo:

$z = r_\alpha =$ 8 120°



► La raíz **n**-ésima de z es otro complejo m_β que debe ser:

$$(m_\beta)^n = r_\alpha$$

por lo que $m^n = r$ y $\beta \cdot n = \alpha + k \cdot 360°$

luego: $m = \sqrt[n]{r}$ y $\beta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{360° \cdot k}{n}$

$n =$ 3 $z_k = \sqrt[3]{8_{120°}} = 2_{40° + \frac{360°}{3}k}$

$z_0 = 2_{40°}$ $k = 0$

$z_1 = 2_{160°}$ $k = 1$

$z_2 = 2_{280°}$ $k =$ 2

¿Por qué?

- Todo número complejo tiene n raices n-ésimas.
- Los afijos de las n raíces están situados sobre una circunferencia y son los vertices de un polígono regular de n lados.

El número complejo $z_0 = 3_{30°}$ *es un vértice de un cuadrado centrado en el origen.*
Halla los otros vértices. ¿Cuál es el número complejo **z** *cuyas raíces cuartas son esos vértices?*

$z =$ ☐ ☐° $z_1 = 3$ ☐° $z_2 = 3$ ☐° $z_3 = 3$ ☐° ☐

comprobar

Calcula $\sqrt[4]{\dfrac{-1 - i}{1 - i}}$

$z_0 =$ ☐ ☐° $z_1 =$ ☐ ☐° $z_2 =$ ☐ ☐° $z_3 =$ ☐ ☐° ☐

comprobar

Traslación

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

A (-5, -2) **B (2, -6)** **C (-1, 0)**

Si sumamos a los tres vértices el número complejo

z = 3 + 5 i

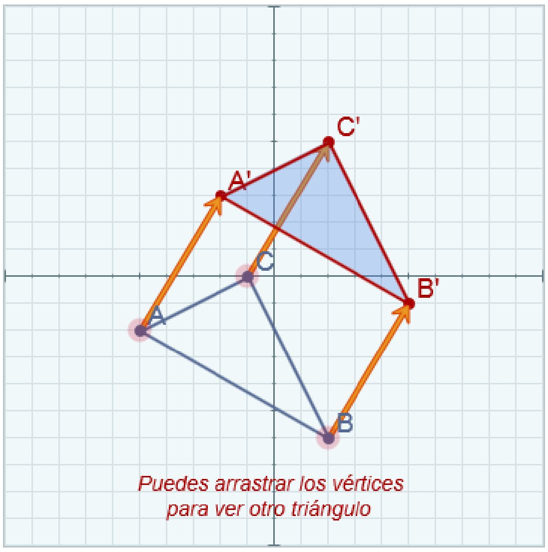
¿Qué le ocurre al triángulo?. Compruébalo:

A → $(-5-2i)+(3+5i) = \mathbf{-2 + 3\,i}$

B → $(2-6i)+(3+5i) = \mathbf{5 - i}$

C → $(-1+0i)+(3+5i) = \mathbf{2 + 5\,i}$

Se ha producido una **traslación** del triángulo inicial de vector paralelo al asociado al complejo $\mathbf{3+5\,i}$



Giro de centro el origen

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo, de vértices:

A (8, 2) **B (2, 6)** **C (4, 2)**

Al multiplicar los tres vértices por el número complejo de módulo 1 y argumento 90º . ¿Qué ocurre?

1_{90}

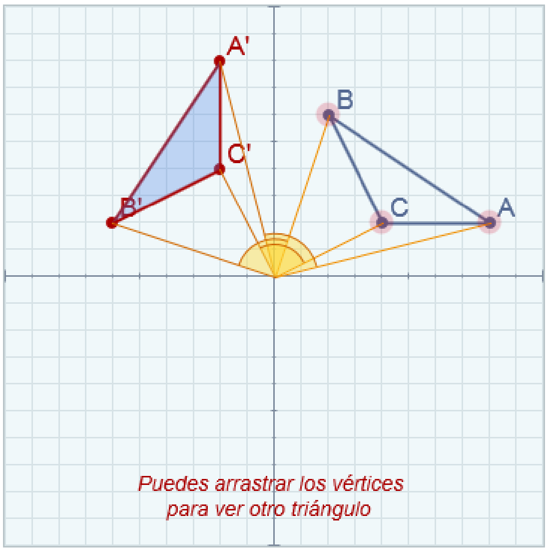
Expresamos primero los vértices en forma polar:

A: $8+2i = \sqrt{68}_{\,14^\circ} \to 8{,}2_{\,14^\circ}\cdot 1_{\,90^\circ} = \mathbf{8{,}2}_{\,\mathbf{104^\circ}}$

B: $2+6i = \sqrt{40}_{\,71{,}6^\circ} \to 6{,}3_{\,71{,}6^\circ}\cdot 1_{\,90^\circ} = \mathbf{6{,}3}_{\,\mathbf{161{,}6^\circ}}$

C: $4+2i = \sqrt{20}_{\,26{,}6^\circ} \to 4{,}5_{\,26{,}6^\circ}\cdot 1_{\,90^\circ} = \mathbf{4{,}5}_{\,\mathbf{116{,}6^\circ}}$

El triángulo ha **girado** alrededor del origen de coordenas un ángulo de ***90º*** .



Homotecia y giro

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo, de vértices:

A (1, 1) **B (1, 5)** **C (4, 1)**

Multiplicamos ahora los vértices por por el número complejo de módulo 2 y argumento 60º . ¿Qué ocurre?

2_{60}

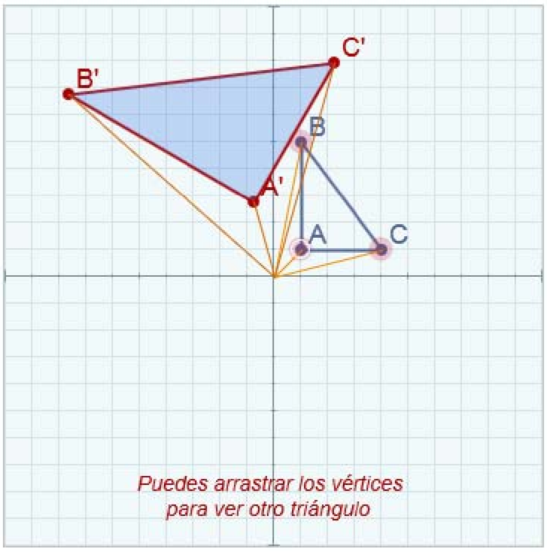
Haz las operaciones y compruébalo:

A: $1+i = \sqrt{2}_{\,45^\circ} \to 1{,}4_{\,45^\circ}\cdot 2_{\,60^\circ} = \mathbf{2{,}8}_{\,\mathbf{105^\circ}}$

B: $1+5i = \sqrt{26}_{\,78{,}7^\circ} \to 5{,}1_{\,78{,}7^\circ}\cdot 2_{\,60^\circ} = \mathbf{10{,}2}_{\,\mathbf{138{,}7^\circ}}$

C: $4+i = \sqrt{17}_{\,14^\circ} \to 4{,}1_{\,14^\circ}\cdot 2_{\,60^\circ} = \mathbf{8{,}2}_{\,\mathbf{74^\circ}}$

Se realiza una **homotecia** de centro el origen y razón ***2*** y un **giro** de ***60º*** alrededor del origen.



1) El conjugado del opuesto del número complejo $z = -5 + i$

- [ ] $5 + i$
- [ ] $-5 - i$
- [ ] $5 - i$

2) La expresión binómica de un número complejo de módulo 4 y argumento $240°$ es:

- [ ] $-2\sqrt{3} - 2i$
- [ ] $-2 - 2\sqrt{3}\,i$
- [ ] $-2 + 2\sqrt{3}\,i$

3) Selecciona la respuesta correcta:

- [ ] $i^{35} = -i \quad i^{36} = 1 \quad i^{57} = i \quad i^{30} = -1$
- [ ] $i^{35} = 1 \quad i^{36} = i \quad i^{57} = -1 \quad i^{30} = -i$
- [ ] $i^{35} = -i \quad i^{36} = -1 \quad i^{57} = i \quad i^{30} = 1$

4) El número $z = 5 - 5i$ en forma polar es:

- [ ] $5\sqrt{2}_{\ 225°}$
- [ ] $5\sqrt{2}_{\ 135°}$
- [ ] $5\sqrt{2}_{\ 315°}$

5) El inverso de $z = -2 - 2i$ es:

- [ ] $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
- [ ] $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- [ ] $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

6) El número complejo $z = \left(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i \right)^4$ es:

- [ ] -256
- [ ] $256\, i$
- [ ] 256

7) Las soluciones de la ecuación $z^3 + 27 = 0$ son:

- [ ] $z_1 = 3_{0^\circ}$ $z_2 = 3_{120^\circ}$ $z_3 = 3_{240^\circ}$
- [ ] $z_1 = 3_{30^\circ}$ $z_2 = 3_{150^\circ}$ $z_3 = 3_{270^\circ}$
- [ ] $z_1 = 3_{60^\circ}$ $z_2 = 3_{180^\circ}$ $z_3 = 3_{300^\circ}$

8) El cociente $\dfrac{5 - 4\, i}{2 - 2\, i}$ es:

- [ ] $-\dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4} i$
- [ ] $\dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4} i$
- [ ] $\dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4} i$

9) El número complejo que se obtiene al girar 45° con centro en el origen $-4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\, i$ es:

- [ ] $-7 - i$
- [ ] $-7\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$
- [ ] $-1 - 7\, i$

10) Para que se verifique la igualdad $-2\,(a + 3\, i) = (1 - i)(b + i)$, a y b deber ser:

- [ ] $a = 2 \quad b = -5$
- [ ] $a = -3 \quad b = 7$
- [ ] $a = -4 \quad b = 7$

Tus respuestas: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 *PUNTUACIÓN:*