EJEMPLO 1: *Matriz del sistema lineal con autovalores imaginarios puros.*

Determinar la trayectoria que seguirá una partícula que se suelta en el punto $\boldsymbol{P_0(2,0)}$ quedando sujeta al campo de velocidad estacionario o autónomo (estable en el tiempo) $\vec{v} = (4y\,, -x\,)$.

RESOLUCIÓN:

Dado que $\vec{v} = (x'\,,\, y') = (4y\,, -x\,)$ el problema se resolverá a través del sistema $\begin{cases} x' = 4y \\ y' = -x \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0) = 2$; $y(0) = 0$, el que es un sistema lineal.

La solución se encontrará resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, mientras que una base del espacio propio es $\left\{\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Diagonalizando:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La exponencial matricial:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t\,i} & 0 \\ 0 & e^{-2t\,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(2t) + i\,sen(2t) & 0 \\ 0 & cos(2t) - i\,sen(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} cos(2t) & 2sen(2t) \\ -\frac{1}{2}sen(2t) & cos(2t) \end{pmatrix}$$

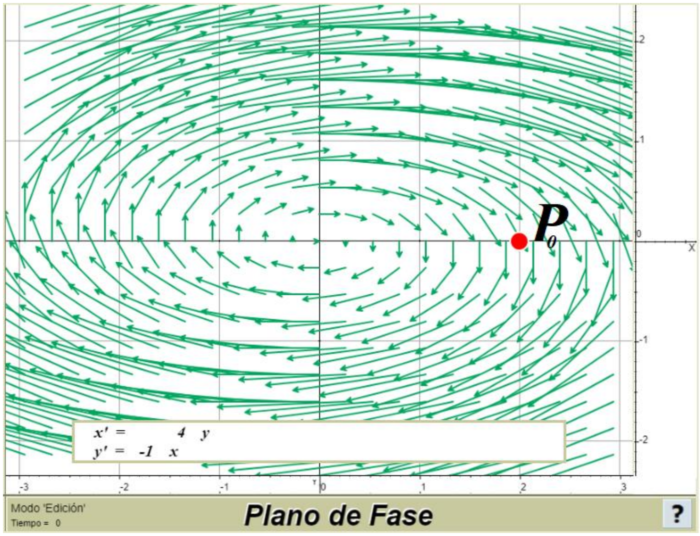
Usando la condición inicial:

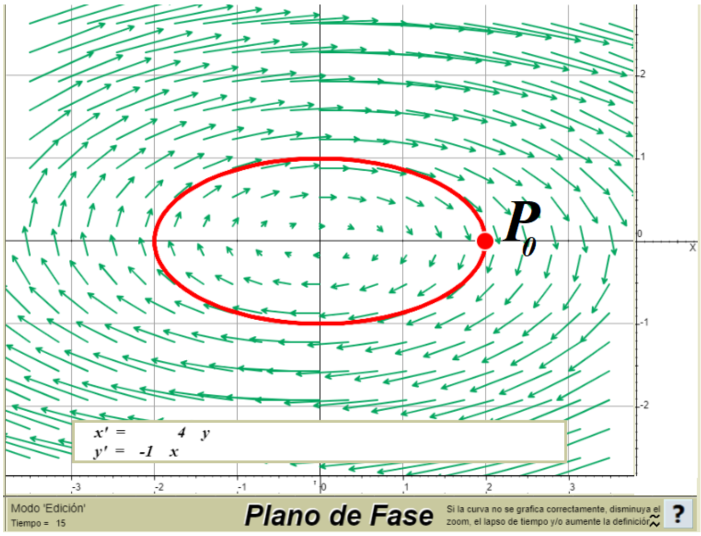
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 4t \\ -t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2cos(2t) \\ -sen(2t) \end{pmatrix}$$

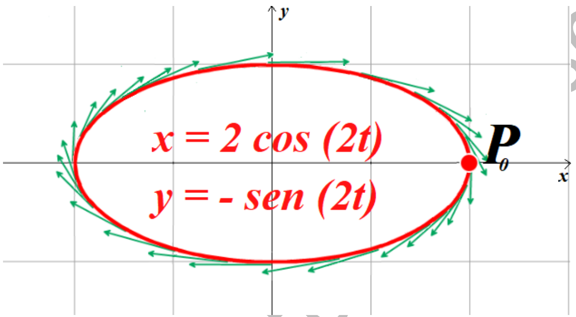
La trayectoria es pues:

$$\begin{cases} x = 2\,cos(2t) \\ y = -sen\,(2t) \end{cases}$$

Los gráficos siguientes muestran la salida provista por DaVinci del campo de velocidad y la trayectoria solución obtenida. En el último gráfico se aprecian algunos vectores del campo que tienen origen en la trayectoria determinada para que se aprecie claramente la tangencia (no es salida de DaVinci). También puede realizarse la simulación mediante DaVinci.







Notar que si la condición inicial estuviera dada genéricamente por $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ la solución es:

$$\boldsymbol{x = x_0\, cos(2t) + 2y_0\, sen(2t); y = y_0\, cos(2t) - \frac{1}{2}x_0\, sen(2t)}$$

Aquí $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son funciones de período $\boldsymbol{\pi}$ (notar que siendo $\boldsymbol{\lambda = \pm\beta i}$ las funciones tienen período $\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\beta}}$). Luego, la línea de flujo será una curva cerrada no simple (se deja como ejercicio mostrar que en estos casos es una elipse).

EJEMPLO 2: *Matriz del sistema lineal con autovalores reales distintos y positivos.*

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(-1,-3)$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v} = (3x - 2y\,, x\,)$.

RESOLUCIÓN:

$\vec{v} = (x'\,,\ y') = (3x - 2y\,, x\,) \Rightarrow \begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = x \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x(0) = -1;\ y(0) = -3$.

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -e^{t} + 2e^{2t} & 2e^{t} - 2e^{2t} \\ -e^{t} + e^{2t} & 2e^{t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^{t} + 4e^{2t} \\ -5e^{t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$x = -5e^{t} + 4e^{2t};\ y = -5e^{t} + 2e^{2t}$$

Notar que a medida que t aumenta, también lo hacen x e y. Si la condición inicial fuera dada genéricamente por (x_0, y_0) la solución será:

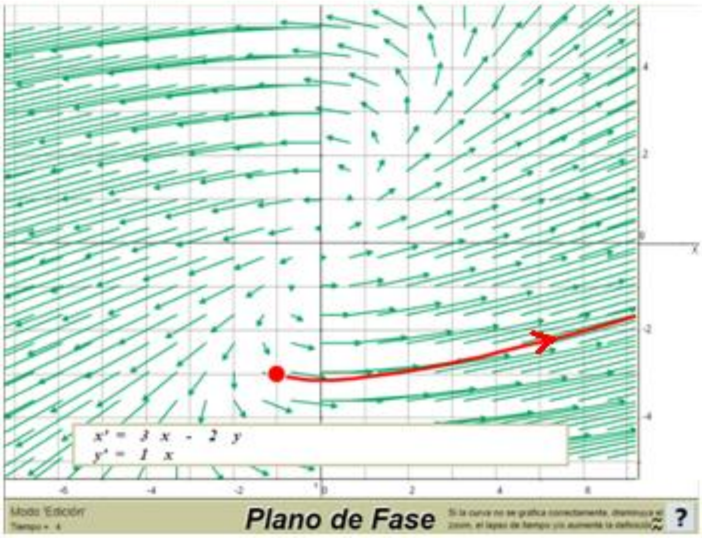
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3t & -2t \\ t & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_o \end{pmatrix}$$

Ésta es:

$$x(t) = (-\,e^{t} + 2e^{2t})x_o + (2\,e^{t} - 2e^{2t})y_o$$

$$y(t) = (-\,e^{t} + e^{2t})x_o + (2\,e^{t} - e^{2t})y_o$$

Cualquiera sea (x_0, y_0), si $t \to \infty$ entonces $|x| \to \infty$ y $|y| \to \infty$. La partícula se alejará del origen.


x' = 3 x - 2 y
y' = 1 x
Plano de Fase
?

EJEMPLO 3: *Matriz del sistema lineal con autovalores reales distintos y negativos.*

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{1},-\mathbf{2})$ sometida al campo de velocidad estacionario o autónomo $\vec{\boldsymbol{v}}=(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}\,,-\boldsymbol{x}\,)$.

RESOLUCIÓN:

$\vec{\boldsymbol{v}}=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')=(-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}\,,-\boldsymbol{x}\,) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\boldsymbol{x}'=-\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}'=-\boldsymbol{x}\end{cases}$, con las condiciones iniciales $\boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\mathbf{1}$; $\boldsymbol{y}(\mathbf{0})=-\mathbf{2}$.

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}'\\ \boldsymbol{y}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{3} & \mathbf{2}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\mathbf{3} & -\mathbf{2}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{e}^{\begin{pmatrix}-3t & 2t\\ -t & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}^{-2t} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{e}^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & -\mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{e}^{\begin{pmatrix}-3t & 2t\\ -t & 0\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-2t} & \mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-t}-\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-2t}\\ -\boldsymbol{e}^{-t}+\boldsymbol{e}^{-2t} & \mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-t}-\boldsymbol{e}^{-2t}\end{pmatrix}$$

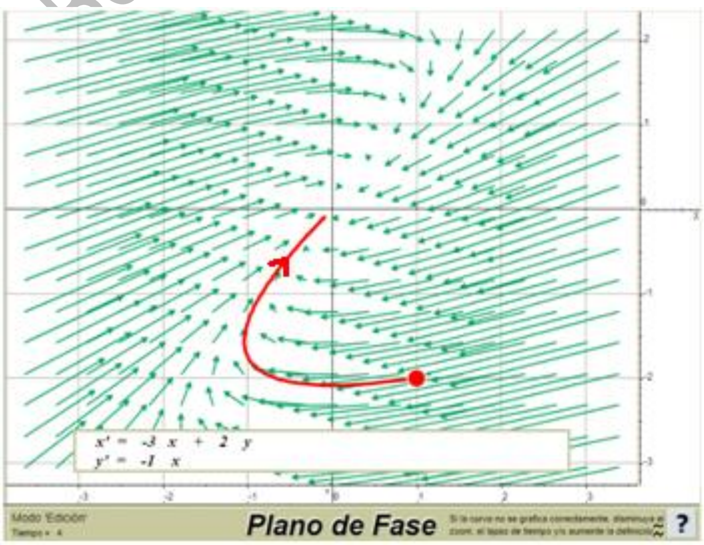
Luego:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}^{\begin{pmatrix}-3t & 2t\\ -t & 0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ -\mathbf{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{6}\boldsymbol{e}^{-2t}\\ -\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{3}\boldsymbol{e}^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=-\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{6}\boldsymbol{e}^{-2t};\ \boldsymbol{y}=-\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{-t}+\mathbf{3}\boldsymbol{e}^{-2t}$$

Notar que a medida que $\boldsymbol{t}$ aumenta, tanto $\boldsymbol{x}$ como $\boldsymbol{y}$ tienden a cero.

El lector puede verificar que a idéntica solución se puede llegar para la condición inicial genéricamente $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$.



EJEMPLO 4: *Matriz del sistema lineal con autovalores reales de distinto signo.*

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{1,9}\,;\ \mathbf{1})$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{v} = (-3x + 4y\,, -2x + 3y\,)$.

RESOLUCIÓN:

$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$, $x(0) = 1{,}9$ e $y(0) = 1.$

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

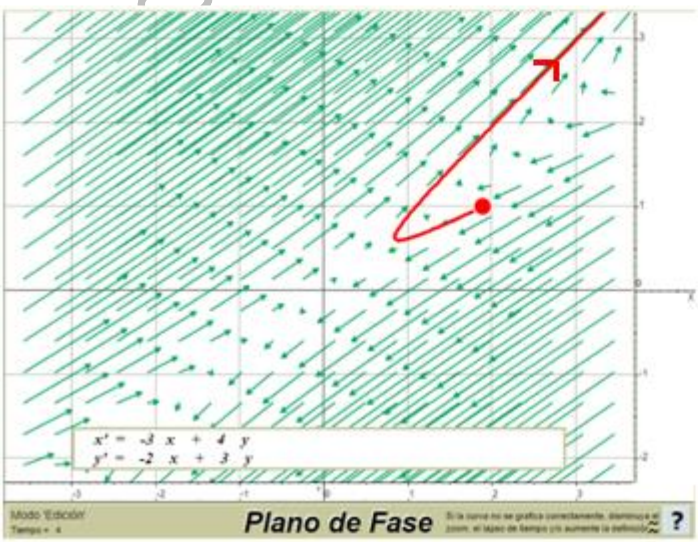
Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{t} & -2e^{-t} + 2e^{t} \\ e^{-t} - e^{t} & -e^{-t} + 2e^{t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} -3t & 4t \\ -2t & 3t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}8\,e^{-t} + 0{,}1\,e^{t} \\ 0{,}9\,e^{-t} + 0{,}1\,e^{t} \end{pmatrix}$$

$$x = 1{,}8\,e^{-t} + 0{,}1\,e^{t};\ y = 0{,}9\,e^{-t} + 0{,}1\,e^{t}$$



Notar que a medida que t aumenta, tanto x e y aumentan en valor absoluto, esto significa que la partícula se aleja del origen.

El lector puede verificar que dependiendo de $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ será el signo de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{y}$ cuanto $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{\infty}$**.** Probar con el simulador DaVinci los distintos resultados al mover el punto que representa las condiciones iniciales, los que pueden intuirse viendo el campo.

EJEMPLO 5: *Matriz del sistema lineal no diagonalizable, autovalores iguales.*

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{0}\,;-\mathbf{2})$ sometida al campo de velocidad estacionario $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y}\,, \mathbf{8}\boldsymbol{x} - \mathbf{5}\boldsymbol{y}\,)$; y luego a $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}\,, -\mathbf{8}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y}\,)$.

RESOLUCIÓN:

Se debe resolver $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con las condiciones iniciales $\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{0};\ \ \boldsymbol{y}(\mathbf{0}) = -\mathbf{2}$.

El lector puede mostrar que la matriz tiene dos autovalores iguales, y que la misma no es diagonalizable. Usando forma de Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

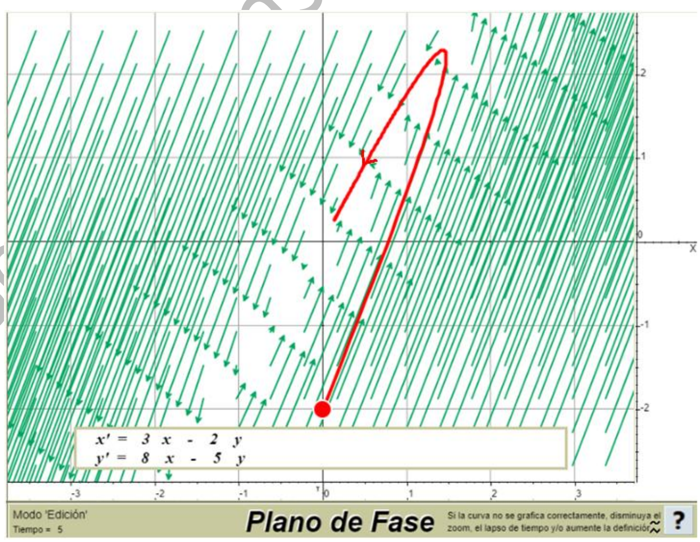
Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 4te^{-t} & -2te^{-t} \\ 8\,te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$x = x_0(e^{-t} + 4te^{-t}) - 2y_0te^{-t};\quad y = 8\,x_0te^{-t} + y_0(e^{-t} - 4te^{-t})$$



Notar que si $\boldsymbol{t} \to \infty$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, situación que se deba a que $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{1,2}}$ es negativo.

Para la condición inicial dada la línea de fluyo será $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}};\ \ \boldsymbol{y} = -\mathbf{2}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}} + \mathbf{8}\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}}$, situación que se esquematiza en el gráfico anterior.

Si, por el contrario, el único autovalor de la matriz del sistema es positivo, si $\boldsymbol{t} \to \infty$, se dará que $|\boldsymbol{x}| \to \infty$ e $|\boldsymbol{y}| \to \infty$.

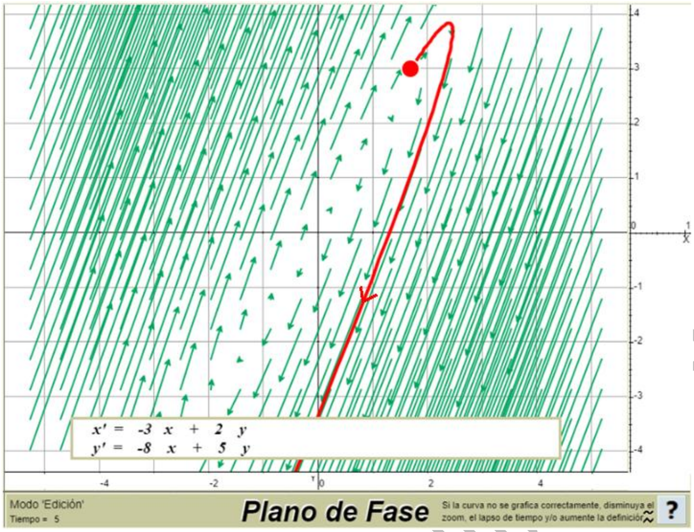
El lector puede verificar esto usando $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}\,, -\mathbf{8}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y}\,)$.

La solución que obtendrá será:

$$x = x_0(e^t - 4te^t) + 2y_0\, t\, e^t$$

$$y = -8\, x_0\, t\, e^t + y_0(e^t + 4t\, e^t)$$

En el siguiente gráfico se particulariza para $x_0 = 1,7\ y_0 = 3.$



EJEMPLO 6: *Matriz del sistema lineal con autovalores complejos conjugados.*

Determinar la trayectoria que seguirá la partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{0}\,;\mathbf{-2})$ sometida al campo de velocidad $\vec{v} = (\mathbf{9x - 5y}\,, \mathbf{25x - 11y}\,)$ y luego a $\vec{v} = (\mathbf{11x - 5y}\,, \mathbf{25x - 9y}\,)$.

RESOLUCIÓN:

Se debe resolver $\begin{cases} x' = 9x - 5y \\ y' = 25x - 11y \end{cases}$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0;\; y_0 = -2$.

Forma matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son $\lambda = -1 \pm 5i$.

Diagonalizando:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+5i & 0 \\ 0 & -1-5i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Entonces:

$$e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(-1+5i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-5i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}\left(cos(5t) + sen(5t)\right) & 0 \\ 0 & e^{-t}\left(cos(5t) - sen(5t)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 2-i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

Simplificando:

$$e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} t} = e^{-t} \begin{pmatrix} cos(5t) + 2\, sen(5t) & -sen(5t) \\ 5\, sen(5t) & cos(5t) - 2\, sen(5t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 25 & -11 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

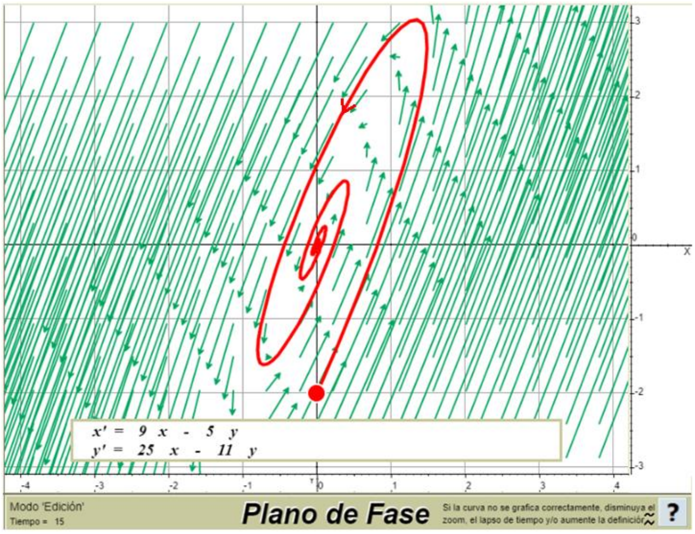
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} cos(5t) + 2\, sen(5t) & -sen(5t) \\ 5\, sen(5t) & cos(5t) - 2\, sen(5t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}$$

Luego, la línea de flujo vendrá dada por la forma paramétrica:

$$x = e^{-t}\left(x_0\left(cos(5t) + 2\, sen(5t)\right) - y_0\, sen(5t)\right)$$

$$y = e^{-t}\left(5\, x_0\, sen(5t) + y_0\left(cos(5t) - 2\, sen\,(5t)\right)\right)$$

Advertir que a medida que t aumenta $e^{-t} \to 0$, por lo que $(x, y) \to (0, 0)$, aunque lo hacen siguiendo un camino espiralado, como lo muestra el gráfico, en el que se particulariza con $x_0 = 0,\; y_0 = -2$. Usando DaVinci, cambiar el punto inicial y observar la trayectoria.



Una situación algo distinta se obtendrá si se resuelve el sistema $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{25} & \mathbf{-9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$.

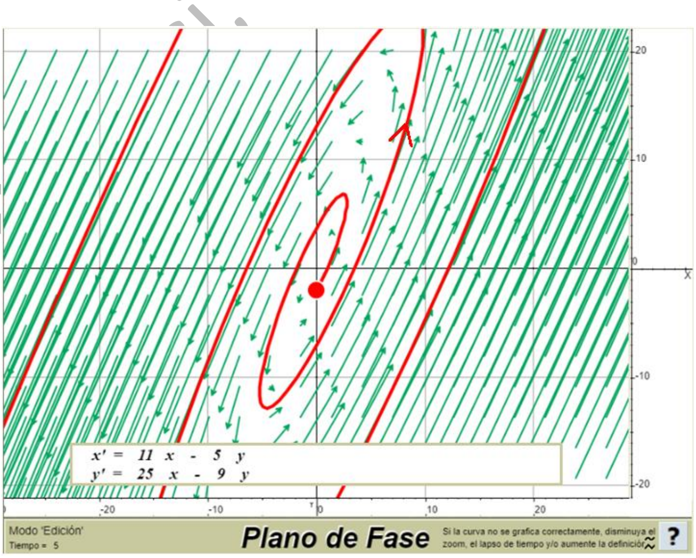
Los autovalores son $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1} \pm \mathbf{5}\boldsymbol{i}$.

Procediendo de igual manera se tendrá:

$$\boldsymbol{x = e^t \left(x_0\left(cos(5t) + 2\ sen\ (5t)\right) - y_0\ sen\ (5t)\right)}$$

$$\boldsymbol{y = e^t \left(5x_0\ sen\ (5t)\ + y_0\left(cos(5t) - 2\ sen(5t)\right)\right)}$$

Notar que si $\boldsymbol{t} \to \infty$ entonces $\boldsymbol{e^t} \to \infty$, por lo que ambas coordenadas aumentan indefinidamente, aunque lo hacen siguiendo un camino espiralado, como lo muestra el gráfico:



EJEMPLO 7: *Campo no autónomo. Matriz del sistema no homogéneo con autovalores imaginarios puros.*

Determinar la trayectoria que seguirá una partícula que se suelta en el punto $(\mathbf{1}; -\mathbf{1})$ quedando sujeta al campo de velocidad $\vec{v} = (-y - 1.5\, sen(4t);\ -x - 1.5\, cos(4t))$. Notar que el campo ya no es estacionario, dado que depende de t.

RESOLUCIÓN:

La solución se encontrará resolviendo el sistema inhomogéneo: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5\, sen(4t) \\ -1.5\, cos(4t) \end{pmatrix}$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1;\ y(0) = -1$.

Este sistema se resuelve usando $\vec{X}(t) = e^{A_s(t-t_0)}\, \overrightarrow{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A_s(t-s)} \vec{f}(s) ds$.

Aquí, $t_o = 0; \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{f}(s) = \begin{pmatrix} -1.5\, sen(4t) \\ -1.5\, cos(4t) \end{pmatrix}$.

La solución es:

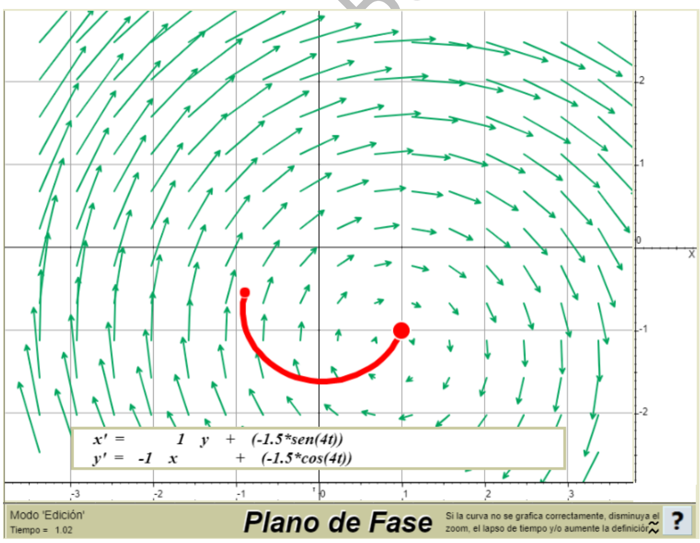
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3\cos(t) + \cos(t)\cos(3t) + 2\, sen(t) - sen(t)\, sen(3t)) \\ \frac{1}{2}(2\cos(t) + 3\ sen(t) - \cos(3t)\, sen(t) - \cos(t)\, sen(3t)) \end{pmatrix}$$

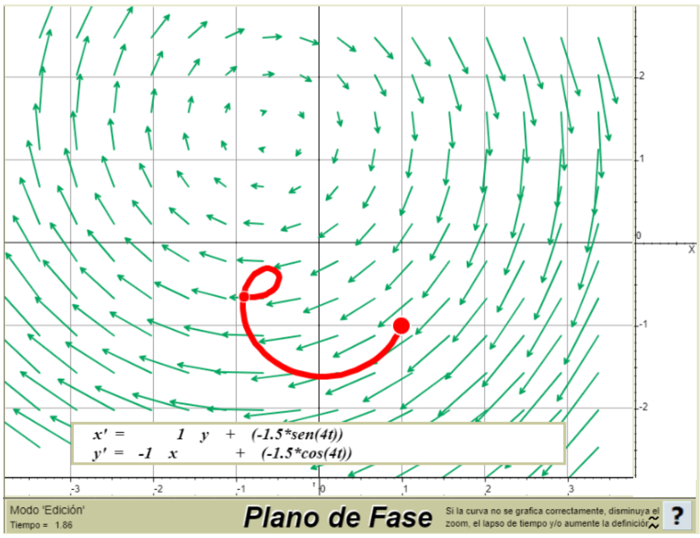
Luego la trayectoria es:

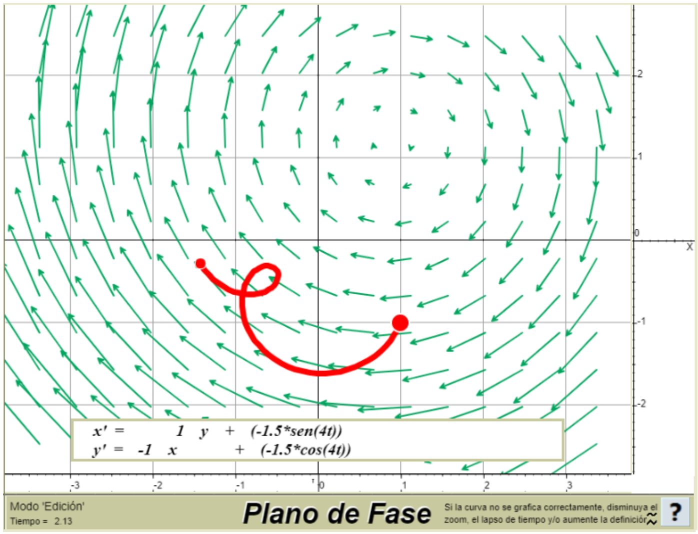
$$x(t) = \frac{1}{2}(-3\cos(t) + \cos(t)\cos(3t) + 2\, sen(t) - sen(t)\, sen(3t))$$

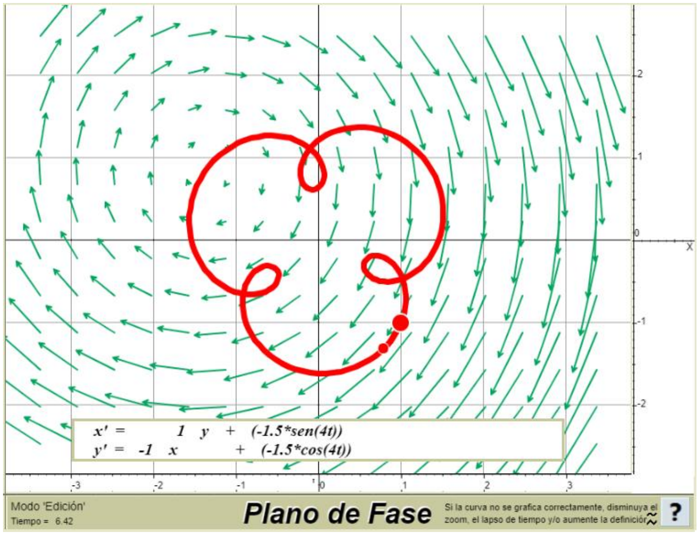
$$y(t) = \frac{1}{2}(2\cos(t) + 3\ sen(t) - \cos(3t)\, sen(t) - \cos(t)\, sen(3t))$$

En los gráficos siguientes se visualiza la trayectoria en distintos instantes debido a que el campo es variable con el tiempo. Para apreciarlo puede ejecutar este ejemplo en el simulador DaVinci.






x' = 1 y + (-1.5*sen(4t))
y' = -1 x + (-1.5*cos(4t))
Modo 'Edición'
Tiempo = 2.13
Plano de Fase
Si la curva no se grafica correctamente, disminuya el zoom, el lapso de tiempo y/o aumente la definición
?


x' = 1 y + (-1.5*sen(4t))
y' = -1 x + (-1.5*cos(4t))
Modo 'Edición'
Tiempo = 6.42
Plano de Fase
Si la curva no se grafica correctamente, disminuya el zoom, el lapso de tiempo y/o aumente la definición
?