EJEMPLO 11:

Caracterizar el equilibrio del punto crítico del sistema $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 + 2x_2 \\ x_2'(t) = 3x_1 - 4\,x_2 \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -5$ y $\lambda_2 = 2$, luego el equilibrio del punto crítico $(0; 0)$ es inestable.

EJEMPLO 12:

Caracterizar el equilibrio del punto crítico del sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x_1'(t) = 11\,x_1 - 3x_2 + 13x_3} \\ \boldsymbol{x_2'(t) = 72\,x_1 - 19x_2 + 72x_3} \\ \boldsymbol{x_3'(t) = 4\,x_1 - 1x_2 + 2\,x_3} \end{cases}$.

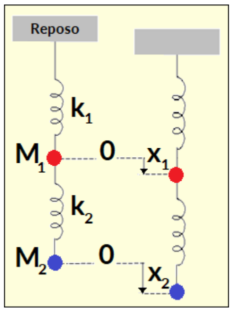
RESOLUCIÓN:

La forma matricial del sistema es:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \boldsymbol{x'_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{11} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{13} \\ \boldsymbol{72} & \boldsymbol{-19} & \boldsymbol{72} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

Los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} \boldsymbol{11} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{13} \\ \boldsymbol{72} & \boldsymbol{-19} & \boldsymbol{72} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$ son $\boldsymbol{\lambda_1 = -3}$; $\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$ y $\boldsymbol{\lambda_3 = -1}$; luego, el equilibrio del punto crítico es asintóticamente estable.

EJEMPLO 13:



Considere el sistema de masa resorte del gráfico. Imagine que se estira el resorte superior una distancia $x_{1_{inicial}}$ desde el reposo y al inferior $x_{2_{inicial}}$ se lo suelta luego. El desplazamiento vertical a partir del punto de equilibrio (reposo) de las dos masas se denotan con $x_1(\mathrm{t})$ y $x_2(\mathrm{t})$. Se desea analizar el tipo de equilibrio que alcanzará el sistema para el caso particular:

$$k_1 = 0,03\,\frac{kg}{m}; \quad k_2 = 0,01\frac{kg}{m}; \quad m_1 = 27\,kg; \quad m_2 = 18\,kg$$

RESOLUCIÓN:

Usando la ley de Hooke se sabe que las fuerzas netas sobre las masas están dada por:

$$\begin{cases} F_1(t) = -k_1\,x_1(t) + k_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) = m_1\,\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ F_2(t) = -k_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) = m_2\,\dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{cases}$$

Las condiciones iniciales estarán dadas por los estiramientos iniciales $x_{1_{inicial}}$ y $x_{2_{inicial}}$ y la velocidad inicial de las masas $v_{1_{inicial}}$ y $v_{2_{inicial}}$. Omitiendo indicar que tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ dependen de t:

Luego el sistema resultante será:

$$\begin{cases} x_1'' = -\frac{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}{m_1}\,x_1 + \frac{\mathrm{k}_2}{m_1}\,x_2 \\ x_2'' = \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}\,x_1 - \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}\,x_2 \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_{1_{inicial}} \\ x_2(0) = x_{2_{inicial}} \\ x_1{}'(0) = v_{1_{inicial}} \\ x_2{}'(0) = v_{2_{inicial}} \end{matrix}$$

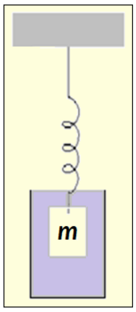
Notar que este sistema puede ser rescrito como un sistema de primer orden, introduciendo el cambio de variable $x_3 = x_1'$ e $x_4 = x_2'$. Con este cambio $x_3' = x_1''$ y $x'_4 = x_2''$.

Notar que con este cambio de variable x_3 y x_4 son las velocidades en x_1 y x_2 respectivamente.

Entonces $\begin{cases} x_1'' = -\frac{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}{m_1}x_1 + \frac{\mathrm{k}_2}{m_1}x_2 \\ x_2'' = \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}x_1 - \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}x_2 \end{cases}$ es equivalente a $\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = -\frac{\mathrm{k}_1+\mathrm{k}_2}{m_1}x_1 + \frac{\mathrm{k}_2}{m_1}x_2 \\ x_4' = \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}x_1 - \frac{\mathrm{k}_2}{m_2}x_2 \end{cases}$.

Para analizar cualitativamente la estabilidad del sistema se deben buscar los autovalores de la matriz (obviamente utilizando un SAC). Con los datos dados los autovalores son dos pares de complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{60}\,i$ y $\lambda_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{90}\,i$. Más allá de la solución, de acuerdo a la Tabla Resumen, el tipo de equilibrio es estable, pero no asintóticamente estable (lo que significa que las masas oscilarán idefinidamente alrededor del punto de equilibrio). El tipo de equilibrio es válido para las 4 funciones incógnita (luego, la velocidad también tiene el mismo tipo de equilibrio).

EJEMPLO 14: *Vibraciones Amortiguadas*



El resorte está sujeto a una fuerza de fricción, producto del medio viscoso. Experimentalmente se muestra que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de la masa. La constante $\boldsymbol{c}$ de proporcionalidad depende, entre otras cosas, del fluído (cuanto más denso, mayor es la constante) y de la forma de la masa. Caracterizar el tipo de equilibrio.

RESOLUCIÓN:

Usando la ley de Newton y la de Hooke se tiene que la fuerza actuante en el resorte $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{m\,a} = \boldsymbol{m\,x''}$ es la suma de la reposición del resorte $\boldsymbol{F_{res}} = -\boldsymbol{k\,x}$ y la de rozamiento $\boldsymbol{F_{roz}} = -\boldsymbol{c\,v} = -\boldsymbol{c\,x'}$ (la constante $\boldsymbol{c} > 0$, el signo negativo se debe a que la fuerza se opone al movimiento, luego a $\boldsymbol{v}$).

Luego: $\boldsymbol{m\,x''} = -\boldsymbol{c\,x'} - \boldsymbol{k\,x} \rightarrow \boldsymbol{x''} = -\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x'} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x}$.

Transformado la EDO en un SL usando $\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{x''} = \boldsymbol{y'}$, resulta el sistema $\boldsymbol{S}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x'} = \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y'} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y} \end{cases}$

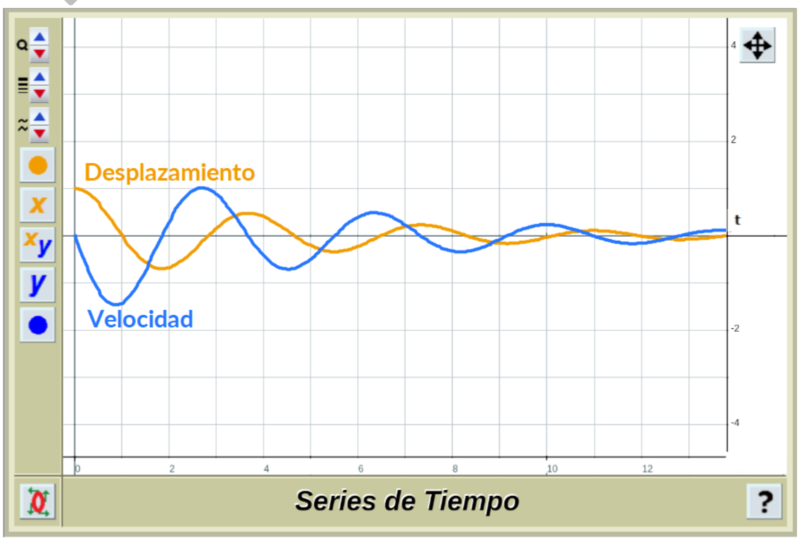
Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}} & -\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

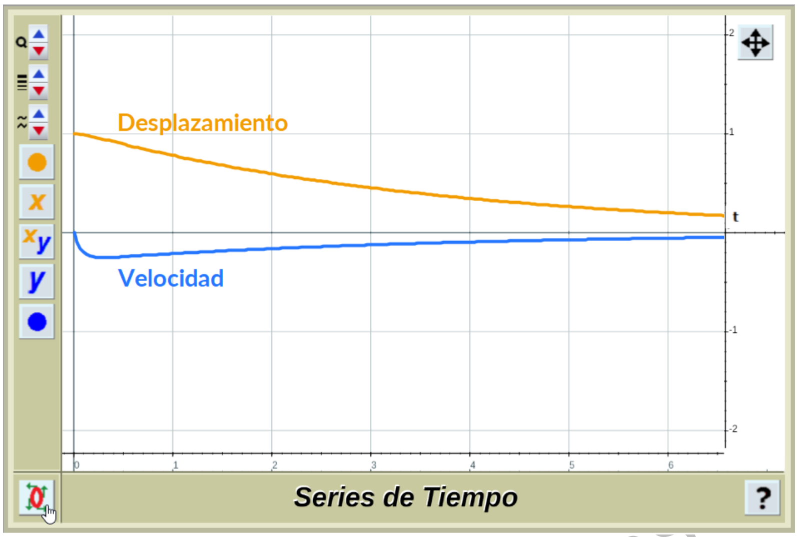
Los autovalores son $\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{c} \pm \sqrt{\boldsymbol{c}^2 - 4\boldsymbol{k\,m}}}{2\boldsymbol{m}}$. De acuerdo a los valores de $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{c^2 - 4k\,m}$, los mismos pueden ser reales (iguales o distintos), imaginarios o complejos.

En el siguiente análisis se elimina la posibilidad $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ (dado que no sería amortiguado).

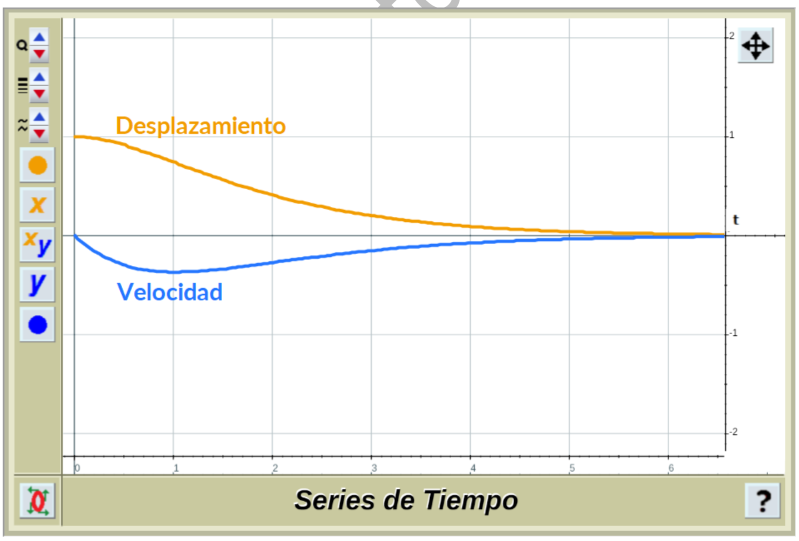
a) $\boldsymbol{c^2 - 4k\,m} < 0$: Amortiguamiento escaso, se tiene dos raíces complejas, con parte real negativa $\frac{-\boldsymbol{c}}{2\boldsymbol{m}}$. El equilibrio es asintóticamente estable, tanto $\boldsymbol{x}$ (desplazamiento) como $\boldsymbol{y}$ (velocidad) tienden a cero oscilando.



b) $c^2 - 4k\,m > 0$: Amortiguamiento excesivo, se tiene dos autovalores reales negativos distintos (notar que $\sqrt{c^2 - 4k\,m} < \sqrt{c^2} = c$). El equilibrio también es estable, tanto x (desplazamiento) como y (velocidad) tienden a cero pero sin oscilaciones.



c) $c^2 - 4k\,m = 0$: Amortiguamiento crítico, se tienen dos autovalores reales negativos iguales (notar que $\sqrt{c^2 - 4k\,m} < \sqrt{c^2} = c$). El equilibrio también es estable, tanto x (desplazamiento) como y (velocidad) tienden a cero sin oscilaciones, aunque notar que la rapidez máxima es mayor que en el caso anterior.



Se pueden comprobar estos resultados con el simulador DaVinci.