EJEMPLO 8:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, determinar:

a) La matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular si $\boldsymbol{x_1(0) = 1}$ y $\boldsymbol{x_2(0) = 2}$.

RESOLUCIÓN:

Aquí los autovalores son iguales, ya que $\begin{vmatrix} \mathbf{3-\lambda} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5-\lambda} \end{vmatrix} = \mathbf{1 + 2\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1}$.

Para calcular $\vec{v}_1$ se resuelve la ecuación $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = -1\,\vec{v}_1 \Longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Para calcular $\vec{v}_2$ se resuelve la ecuación usando $\boldsymbol{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} \mathbf{3+1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5+1} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

La matriz $\boldsymbol{A_s}$ se reescribe bajo la forma de Jordan: $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$.

a) $e^{A_s t} = C\,e^{Jt}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 4te^{-t} & -2te^{-t} \\ 8te^{-t} & e^{-t} - 4te^{-t} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(e^{-t} + 4te^{-t}) - 2B\,te^{-t} \\ A8te^{-t} + B(e^{-t} - 4te^{-t}) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = Ae^{-t} + (4A - 2B)\,te^{-t} \\ X_2 = Be^{-t} + (8A - 4B)te^{-t} \end{cases}$

c) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = e^{-t} + 8t\,e^{-t} \\ X_2 = 2e^{-t} + 16t\,e^{-t} \end{cases}$