EJEMPLO 6:

Dado el sistema $\boldsymbol{S} = \begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 2\,x_2 \end{cases}$, obtener:

a) La solución matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular, tal que $\boldsymbol{x_1(0) = 6}$ y $\boldsymbol{x_2(0) = 7}$.

d) la solución particular, tal que $\boldsymbol{x_1(1) = 0}$ y $\boldsymbol{x_2(-1) = 3}$.

RESOLUCIÓN:

La forma matricial de $\boldsymbol{S}$ es:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son tales que:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 9 - \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 3$$

Para determinar los autovectores se resuelve $A\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$.

Luego:

$$\lambda_1 = -3 \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(notar que } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\text{)}$$

$$\lambda_2 = 3 \;\Rightarrow\; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{(notar que } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\text{)}$$

Con estos datos es posible diagonalizar A_s según $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

a) $e^{A_s\,t} = C\,e^{Dt}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$$e^{A_s t} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5e^{-3t} + e^{3t} & -e^{-3t} + e^{3t} \\ -5e^{-3t} + 5e^{3t} & e^{-3t} + 5e^{3t} \end{pmatrix}$$

b) La solución general es $\vec{X}(t) = e^{A_s t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) \\ A\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) \end{pmatrix}$.

c) La solución particular se obtiene planteando $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \ \mathbf{e}^{A_s\,t}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{13}{6}e^{3t} \\ -\frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{65}{6}e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{13}{6}e^{3t} \\ \mathbf{X}_2 = -\frac{23}{6}e^{-3t} + \frac{65}{6}e^{3t} \end{cases}.$$

d) Del ítem b: $\begin{cases} X_1(t) = A\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) \\ X_2(t) = A\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) \end{cases}$

Usando las condiciones iniciales $\begin{cases} X_1(1) = 0 = A\left(\frac{5}{6}e^{-3} + \frac{1}{6}e^{3}\right) + B\left(-\frac{1}{6}e^{-3} + \frac{1}{6}e^{3}\right) \\ X_2(-1) = 3 = A\left(-\frac{5}{6}e^{3} + \frac{5}{6}e^{-3}\right) + B\left(\frac{1}{6}e^{3} + \frac{5}{6}e^{-3}\right) \end{cases}$

Resolviendo este sistema se obtendrá $A = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}$ y $B = \frac{18e^3}{5+e^6}$, por lo que la solución será:

$$X_1(t) = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}\left(\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right) + \frac{18e^3}{5+e^6}\left(-\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{6}e^{3t}\right)$$

$$X_2(t) = \frac{108e^3}{(5+e^6)^2}\left(-\frac{5}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right) + \frac{18e^3}{5+e^6}\left(\frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{5}{6}e^{3t}\right)$$

Nota: $X_1(t)$ y $X_2(t)$podrían simplificarse si se continúa operando. Queda como ejercicio resolver este sistema usando el método de eliminación, debiendo llegar al mismo resultado.

EJEMPLO 7:

Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, determinar:

a) La matricial fundamental del sistema.

b) La solución general del sistema.

c) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -1$.

d) La solución particular si $x_1(0) = 1$ y $x_2(\pi) = 0$.

RESOLUCIÓN:

En este caso los autolvalores son complejos ya que $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.

El espacio propio es $gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2-i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

La matriz A_s es diagonalizable según $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

$$e^{A_s t} = C\, e^{Dt} C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-5i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{5i}{2} & \frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}$$

Reemplazando $e^{it} = \cos(t) + i\,sen(t)$ y $e^{-it} = \cos(-t) + i\,sen(-t) = \cos(t) - i\,sen(t)$:

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{5} & \frac{2-i}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t) + i\,sen(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - i\,sen(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-5i}{2} & \frac{1+2i}{2} \\ \frac{5i}{2} & \frac{1-2i}{2} \end{pmatrix}$$

Luego, simplificando el producto matricial anterior:

$$e^{A_s t} = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2sen(t) & -sen(t) \\ 5sen(t) & \cos(t) - 2sen(t) \end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(t) + 2A\,sen(t) - Bsen(t) \\ 5A\,sen(t) + B\cos(t) - 2Bsen(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos(t) + (2A - B)sen(t) \\ (5A - 2B)sen(t) + B\cos(t) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = e^{A_s t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + 3\,sen(t) \\ 7\,sen(t) - \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \cos(t) + 3sen(t) \\ X_2 = 7\,sen(t) - \cos(t) \end{cases}$

c) $\begin{cases} A = 1 \\ -B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \cos(t) + 2sen(t) \\ X_2 = 5\,sen(t) \end{cases}$