EJEMPLO 1:

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2 \end{cases}$, sabiendo que $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$.

RESOLUCIÓN:

Despejando de la primera ecuación:

$$x_2 = x_1' + 3x_1$$

Derivando m.a.m.:

$$x'_2 = x_1'' + 3x'_1$$

Reemplazando éstas en la segunda se ecuación del sistema, se tiene uno equivalente:

$$\underbrace{x_1'' + 3x_1'}_{x_2'} = 4x_1 - 3\,\underbrace{(x_1' + 3x_1)}_{x_2}$$

El que se reduce a:

$$\begin{cases} x_2 = x_1' + 3x_1 \\ x_1'' + 6x_1' + 5x_1 = 0 \end{cases}$$

Notar que ésta es una EDO de segundo orden. La ecuación característica de la misma es $m^2 + 6m + 5 = 0$; que tiene por solución dos raíces reales distintas: $m_1 = -1$ y $m_2 = -5$.

Luego:

$$x_1 = Ae^{-t} + Be^{-5t}$$

Reemplazando este resultado en la primera ecuación del último sistema se obtiene:

$$x_2 = x_1' + 3x_1 = -Ae^{-t} - 5Be^{-5t} + 3\left(Ae^{-t} + Be^{-5t}\right) = 2Ae^{-t} - 2Be^{-5t}$$

Luego, la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{-t} + Be^{-5t} \\ x_2 = 2Ae^{-t} - 2Be^{-5t} \end{cases}$$

Utilizando las condiciones iniciales:

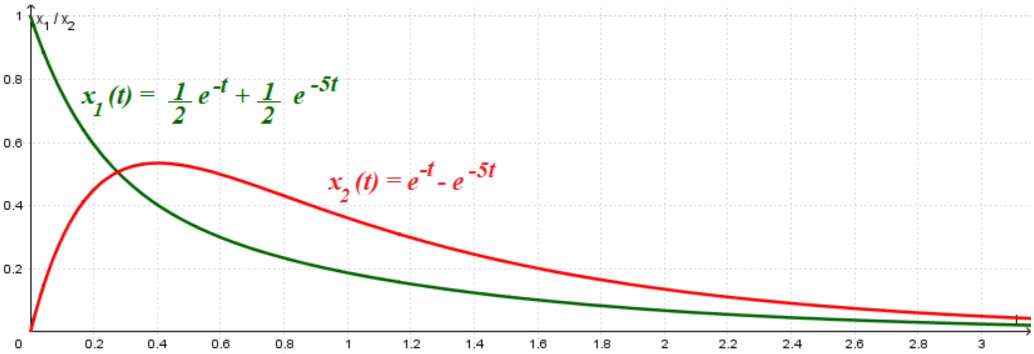
$$\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = 2A - 2B \end{cases}$$

Luego:

$$A = B = \frac{1}{2}$$

Finalmente, el sistema tiene por solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t}} \\ \boldsymbol{x_2 = e^{-t} - e^{-5t}} \end{cases}$$



Utilizar el simulador DaVinci para graficar las soluciones encontradas. Notar que si $\boldsymbol{t \to \infty}$, ambas funciones solución tienden a $\mathbf{0}$.

Éste puede tener una interpretación física. Suponiendo el campo de velocidad:

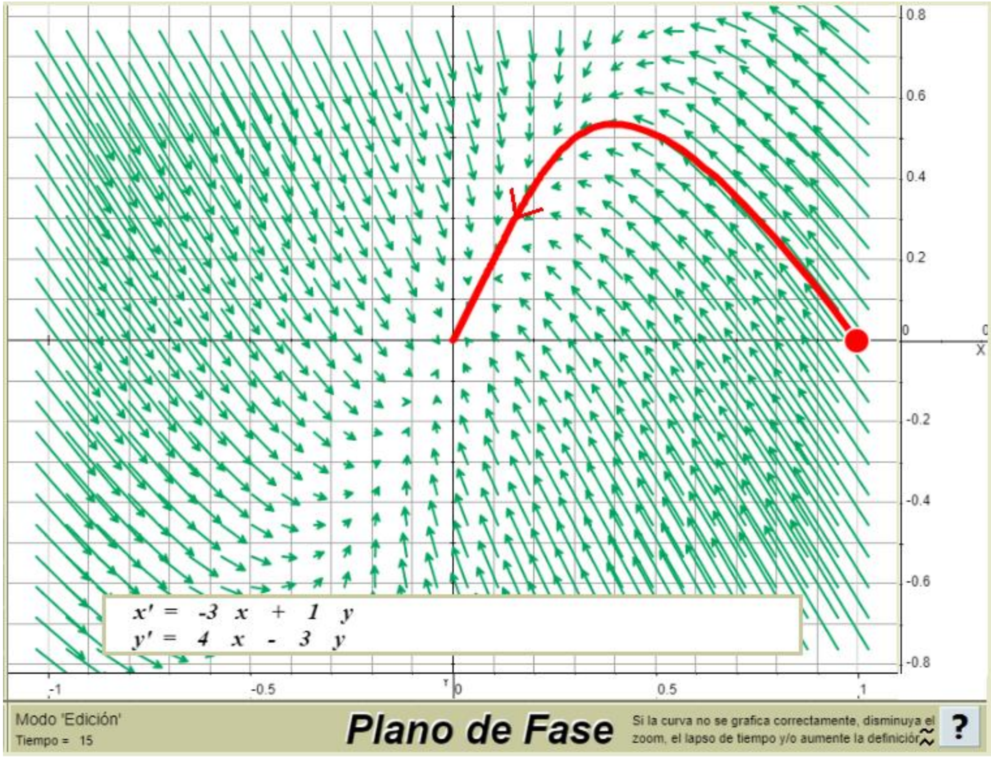
$$\boldsymbol{\vec{v} = (-3x + y; 4x - 3y)}$$

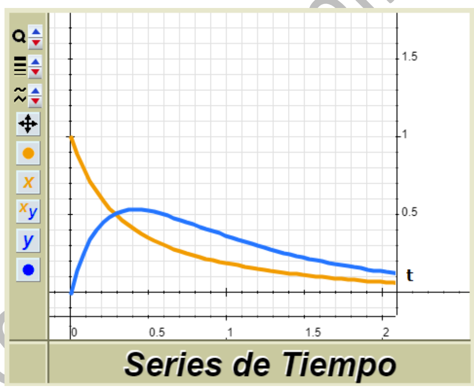
Se desea encontrar la trayectoria de la partícula que se suelta en $(\mathbf{1};\mathbf{0})$; o sea, la línea de flujo. Notar que se debe resolver $\boldsymbol{\vec{v} = (x'(t); y'(t)) = (-3x + y; 4x - 3y)}$, siendo $\boldsymbol{x(0) = 1}$; $\boldsymbol{y(0) = 0}$.

Más allá del cambio de notación, el sistema es el resuelto recientemente. Con el simulador puede apreciarse en el *Plano de Fase* el campo de velocidad $\boldsymbol{\vec{v}}$ y la trayectoria $\boldsymbol{\vec{r}(t) = (x(t); y(t))}$encontrada. En tanto que en el *Plano de las Series de Tiempo* se observan las gráficas de las funciones solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t}} \\ \boldsymbol{y(t) = e^{-t} - e^{-5t}} \end{cases}$$

Notar que si $\boldsymbol{t} \to \infty$ la partícula se acerca al origen $(\mathbf{0};\mathbf{0})$.


0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
X
x' = -3 x + 1 y
y' = 4 x - 3 y
-1
-0.5
0
0.5
1
Modo 'Edición'
Tiempo = 15
Plano de Fase
Si la curva no se grafica correctamente, disminuya el zoom, el lapso de tiempo y/o aumente la definición
?


1.5
1
0.5
t
0
0.5
1
1.5
2
x
y
Series de Tiempo

EJEMPLO 2:

Resolver el sistema $\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_3' = x_1 - 3x_3 + t \end{cases}$.

RESOLUCIÓN:

Despejando de la primera x_3 se tiene $x_3 = -x_1' - x_1 + x_2$ y derivando $x'_3 = -x_1'' - x'_1 + x'_2$. Reemplazando éstas en las otras dos ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1'' - x'_1 + x'_2 = x_1 - 3(-x_1' - x_1 + x_2) + \mathrm{t} \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} x_2' = 4x_1 - 3x_2 \\ -x_1'' - 4x'_1 + x'_2 = 4x_1 - 3x_2 + t \end{cases}$$

El procedimiento general apuntaría a despejar x_1 de la primera ecuación, y luego de calcular x'_1 reemplazarlas en la segunda. En este caso no es necesario, dado que al reemplazar x_2' en la segunda se simplifican varios términos y la ecuación resultante es una EDO de una única función incógnita: $-x_1'' - 4x'_1 + (4x_1 - 3x_2) = 4x_1 - 3x_2 + t$; simplificando $x_1'' + 4x'_1 = -t$.

Al resolver $x_1'' + 4x'_1 = -t$ se tiene como ecuación característica $m^2 + 4m = m(m+4) = 0$; luego la solución complementaria será $x_{1c} = Ae^{0t} + Be^{-4t} = A + Be^{-4t}$; y la particular, siendo que $f(t) = t$, un polinomio de primer grado, tendrá la forma $x_1p = (C_1 + C_2 t)t = C_1 t + C_2 t^2$ (notar que fue necesario multiplicar por t, dado que en el caso de haberse adoptado $C_1 + C_2 t$ el sumando C_1 sería incorrecto dado que forma parte ya de la solución complementaria).

Así, $x_1'p = C_1 + 2\,C_2 t$ y $x_1''p = 2\,C_2$; luego, reemplazando en $x_1'' + 4x'_1 = -t$ se obtiene $2\,C_2 + 4(C_1 + 2\,C_2 t\ ) = -t$.

Para determinar las constantes, se resuelve el sistema $\begin{cases} 2\,C_2 + 4C_1 = 0 \\ 8\,C_2 = -1 \end{cases}$; luego: $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{16} \\ C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$.

Entonces:

$$x_1(t) = A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2$$

Introduciendo ésta en $x_2' = 4x_1 - 3x_2$; se lleva a una ecuación diferencial lineal de primer orden $x_2' + 3x_2 = 4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2$.

Siendo $P(t) = 3$ y $Q(t) = 4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2$ y utilizando:

$$x_2 = e^{-\int 3dt}\left[C + \int e^{\int 3dt}\left(4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right)dt\right] =$$

$$= e^{-3t}\left[C + \int e^{3t}\left(4A + 4Be^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}t^2\right)\right] =$$

$$= e^{-3t}\left[C + \int \left(4Ae^{3t} + 4Be^{-t} + \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{2}t^2e^{3t}\right)\right]$$

Resolviendo la integral es posible llegar a:

$$x_2 = e^{-3t}\left[C + \frac{4}{3}Ae^{3t} - 4Be^{-t} - \frac{1}{36}e^{3t} + \frac{1}{12}e^{3t}t - \frac{1}{27}e^{3t} + + \frac{1}{9}e^{3t}t - \frac{1}{6}e^{3t}t^2\right]$$

Simplificando:

$$x_2 = e^{-3t}C + \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2$$

Para obtener x_3 es posible reemplazar los resultados anteriores en $x'_3 = -x''_1 - x'_1 + x'_2$.

Luego:

$$x'_3 = \frac{55}{144} + 4\,Be^{-4t} - 3Ce^{-3t} - \frac{t}{12}$$

Resolviendo esta ecuación de variables separables se tiene:

$$x_3(t) = \frac{55}{144}t - Be^{-4t} + Ce^{-3t} - \frac{t^2}{24} + D$$

Notar que hasta aquí parecen ser 4 las constantes. Se sabe que en realidad son 3. La cuarta, D, es, seguro, una combinación lineal de las anteriores. Para obtenerla simplemente se reemplaza las funciones $x_1(\mathbf{t})$, $x_2(\mathbf{t})$ y $x_3(\mathbf{t})$ obtenidas en el sistema. Reemplazando en $x'_1 = -x_1 + x_2 - x_3$ se tendrá:

$$-4Be^{-4t} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}t =$$

$$= -\left(A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2\right) + \left(e^{-3t}C + \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2\right) - \left(\frac{55}{144}\mathbf{t} - Be^{-4t} + \right.$$

$$\left. + \mathbf{C}e^{-3t} - \frac{t^2}{24} + D\right)$$

Operando en el segundo miembro y agrupando términos comunes:

$$-4Be^{-4t} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}t = -\frac{7}{108} + \frac{A}{3} - D - 4Be^{-4t} - \frac{t}{4}$$

Luego, $\frac{1}{16} = -\frac{7}{108} + \frac{A}{3} - D$; por lo que $D = -\frac{55}{432} + \frac{A}{3}$.

Finalmente, el conjunto solución es:

$$x_1(t) = A + Be^{-4t} + \frac{1}{16}t - \frac{1}{8}t^2$$

$$x_2(t) = \frac{4}{3}A - 4Be^{-4t} + e^{-3t}C - \frac{7}{108} + \frac{7}{36}t - \frac{1}{6}t^2$$

$$x_3(t) = \frac{A}{3} - Be^{-4t} + Ce^{-3t} + \frac{55}{144}t - \frac{t^2}{24} - \frac{55}{432}$$

Se deja como ejercicio verificar la solución.